arXiv:2603.01138v1 [math.AP] 1 Mar 2026

中间临界指数情形下混合¨局部-非局部薛定谔方程的临界质量与能量基态解的显式公式

Yu Su

数学与大数据学院，安徽理工大学，淮南，安徽 232001，中国
yusumath@aust.edu.cnHichem Hajaiej

数学系，加州州立大学洛杉矶分校，洛杉矶，加利福尼亚 90032，美国
hhajaie@calstatela.edu

Abstract. 本文研究含有幂非线性 $u|u|^{p-2}$的混合局部-非局部算子薛定谔方程¨，其中指数p 介于两个临界指数之间：分数阶拉普拉斯算子的临界指数$2+\frac{4s}{N}$ 与拉普拉斯算子的临界指数 $2+\frac{4}{N}$。该方程呈现出一种新现象，我们称之为“中间临界指数” $p\in(2+\frac{4s}{N},\ 2+\frac{4}{N})$。在这种情况下，存在一个临界质量 c_0：当质量为 $c<c_0$ 时，不存在能量基态解；而当质量为 $c\geqslant c_0$ 时，则存在能量基态解。

我们的首要贡献是通过混合局部-非局部拉普拉斯算子的 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最佳常数，建立临界质量 c_0 的显式公式。

我们还证明了混合局部-非局部算子的 Gagliardo-Nirenberg 不等式存在最优函数。随后，我们证明该最优函数经过适当缩放后，是一个能量基态解 u_{c_0}（其临界质量为 c_0）。

这是确定中间临界指数情形下能量基态解存在与不存在的充分必要条件的关键要素。最后，我们证明该能量基态解 u_{c_0} 是混合局部-非局部算子的 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最优函数。

1. Introduction

W我们研究如下具有混合局部-非局部算子的薛定谔方程 tor

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi-(-\Delta)^s\psi=|\psi|^{p-2}\psi, & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N,\\ \psi(0,x)=\psi_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $N\geqslant 3$, $s\in(0,1)$, $2+\frac{4s}{N}<p<2+\frac{4}{N}$, and $(-\Delta)^s$ 是所谓的分数阶拉普拉斯算子。对于任意 $u:\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$足够光滑的$\mathcal{F}((-\Delta)^s u)(\xi)=|\xi|^{2s}\mathcal{F}(u)(\xi),\ \xi\in\mathbb{R}^N$，其定义为 $\mathcal{F}$表示傅里叶变换，参见 [24]。

2010 数学主题分类。35J10；35J20。关键词与短语。中间临界指数；临界质量；能量基态解；Gagliardo-Nirenberg 不等式；薛定谔方程；局部与非局部算子。本研究得到安徽省教育厅自然科学研究项目（项目编号：2023AH040155）的资助。

¨2 薛定谔方程：介于临界指数情形

方程（1.1）源于兼具经典扩散与非局部扩散的种群动力学模型，参见 Dipierro-Lippi-Valdinocci [14]。此外，Biagi-Dipierro-Valdinoci- Vecchi [1] 指出，方程（1.1）可用于研究可能减缓传染病传播的不同类型“区域性”或“全球性”限制。正如 [13] 中 Dipierro-Valdinocci 所解释的，方程（1.1）还描述了局部与非局部扩散混合情况下的生态位。关于更详细的论述，请参阅 Bernstein 型正则性结果 [5], 、不同分数阶拉普拉斯算子之和的 Aubry-Mather 理论 [12], 、数值计算 [2], 、概率与随机过程 [10, 23]。两个或多个分数阶拉普拉斯算子的和与差还出现在许多其他领域，参见 Chen-Bhakta-Hajaiej 的第 2 页 [9], ，另请参见 [7, 8, 16, 19, 22]。

方程（1.1）的驻波为

$$\psi(t,x)=e^{i\omega t}u(x),$$

其中 $\omega\in\mathbb{R}$。显然，驻波 ψ 是方程（1.1）的解，当且仅当 u 是以下薛定谔方程的解¨

$$-\Delta u+(-\Delta)^s u+\omega u=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{MLN}$$

若 u 是方程（MLN）的弱解，则对任意 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 均满足

$$0=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\omega\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi\mathrm{d}x$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\varphi\mathrm{d}x.$$

Su-Valdinoci-Wei-Zhang [25, 26]和 Dipierro-Su-Valdinoci-Zhang [15] 研究了方程（MLN）的解的正则性。本文将探讨另一个极其重要的方面：我们旨在寻找方程（MLN）的给定质量驻波。从物理角度来看，最有趣的解，即所谓的能量基态解，是下述问题的极小化子

$$m_c:=\inf_{u\in S_c}J(u),$$

其中

$$S_c:=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=c\right\}.$$

这里，能量泛函为

$$J(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x.$$

我们知道，每个极小元 $u\in S_c$（属于 m_c）都可以对应一个拉格朗日乘子$\omega>0$，使得（u, ω）弱解（MLN）。

存在两个与（MLN）相关的重要指数：

$$2+\frac{4s}{N},$$

and

$$2+\frac{4}{N},$$

其中，指数 $2+\frac{4}{N}$ 是经典拉普拉斯算子问题的质量临界指数，而指数 $2+\frac{4s}{N}$ 是分数阶拉普拉斯问题的质量临界指数。在混合局部-非局部算子情形下，指数 $2+\frac{4}{N}$

是质量临界指数。尽管指数 $2+\frac{4s}{N}$ 不是混合局部-非局部算子问题中的质量临界指数，但它带来了一个新现象：中间临界指数情形

$$2+\frac{4s}{N}<p<2+\frac{4}{N}.$$

这一新现象源于局部算子与非局部算子之间的“冲突”，见定理1.1。

Luo-Hajaiej [21] 考虑了如下具有混合分数阶拉普拉斯算子的非线性薛¨定谔方程（$0<s_1<s_2<1$）

$$(-\Delta)^{s_1}u+(-\Delta)^{s_2}u+\omega u=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{MF}$$

当 $s_2=1$时，方程（MF）化为方程（MLN）。回顾一下 [21] 的主要结果。

定理A [21, 定理 1.2] 设 $N\geqslant 1$ 且 $0<s_1<s_2<1$。

(1) 若 $p\in(2,\ 2+\frac{4s_1}{N})$，则方程（MF）对任意 $c>0$ 都有能量基态解；**(2)** 若 $p=2+\frac{4s_1}{N}$，则存在 $\bar{c}_1>0$，使得方程（MF）在 $c>\bar{c}_1$ 时有能量基态解，而在 $c<\bar{c}_1$ 时无能量基态解；**(3)** $p\in(2+\frac{4s_1}{N},\ 2+\frac{4s_2}{N})$，则存在 $\bar{c}_0>0$，使得方程（MF）有能量基态解当且仅当 $c\geqslant\bar{c}_0$；**(4)** $p=2+\frac{4s_2}{N}$，则方程（MF）对任意 $c>0$ 都没有能量基态解。

—

对于 $p\in(2+\frac{s_2}{N},\frac{2N}{N-2s_2})$，Chergui-Gou-Hajaiej [11] 研究了方程（MF）解的存在性、多重性以及轨道不稳定性结果。

据我们所知，目前尚无关于（MLN）的能量基态解的研究结果。对 [21,定理 1.1 和 1.2], 稍作修改，可得到关于中间临界指数情形的如下结果。

定理 1.1。设 $N\geqslant 3,\ \ s\in(0,\ 1)$ 且 $p\in(2+\frac{4s}{N},\ 2+\frac{4}{N})$。则存在 $c_0>0$使得方程（MLN）存在能量基态解，当且仅当 $c\geqslant c_0$。

定理1.1 仅说明了临界质量的存在性 c_0，以及与之对应的能量基态解u_{c_0}。本文的主要目标是给出 c_0的显式公式，并建立u_{c_0}的一些定性和定量性质。

1.1.主要结果。为了刻画临界质量 c_0 和能量基态解 u_{c_0}，我们从混合局部-非局部算子的 Gagliardo-Nirenberg 不等式入手：

定理 1.2. 设 $N\geqslant 3,\ s\in(0,\ 1)$ 且 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$。对于 $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$，存在常数 $C_{1,s,p}>0$ 使得

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\leqslant C_{1,s,p}\|u\|^{\frac{4-N(p-2)}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{N(p-2)-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.2}$$

此外，存在一个非负径向最优函数 $Q\in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使不等式 (1.2)取等号，且它是下列方程的弱解

$$-\Delta Q+(-\Delta)^sQ+\omega Q=|Q|^{p-2}Q,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $\omega>0$。

根据定理 1.2，我们证明了最佳常数 $C_{1,\ s,\ p}$ 的显式公式。随后，我们通过最佳常数 $C_{1,\ s,\ p}$ 给出了临界质量 c_0 的显式公式。此外，我们证明了 Q 是临界质量为 c_0 的能量基态解。

定理 1.3. 设 $N \geqslant 3,\ s \in (0,1)$ 且 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。则有以下结果。

(1) 令 c_0 为临界质量。则

$$C_{1,s,p} = \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{4(1-s)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{4(1-s)}} \frac{1}{c_0^{\frac{p-2}{2}}},$$

这意味着：

$$c_0 := C_{1,s,p}^{-\frac{2}{p-2}} \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}}.$$

(2) 我们有

$$J(Q) = 0,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Q|^2 \mathrm{d}x = c_0.$$

此外，Q是临界质量为 c_0的能量基态解。

注 1.1。结合定理*1.2*和*1.3*，可知若 Q是不等式 (1.2)的最优函数，同时也是方程 (MLN)的弱解，则 Q 是临界质量为 c_0的能量基态解。

我们首先证明 u_{c_0} 是不等式 (1.2)的最优函数。

一个预备步骤是研究 $m_c < 0$和 $m_c = 0$ 的充分必要条件。

定理 1.4。设 $N \geqslant 3,\ s \in (0,1)$ 且 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。令

$$m_c := \inf_{u \in S_c} J(u).$$

那么，以下三个条件等价

(a) $m_c < 0$;(b) $c > c_0$;(c) 存在 $u \in S_c$ 使得

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} < \frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \left(\frac{4-N(p-2)}{N(p-2)-4s}\right)^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

以下三个条件等价

(a') $m_c = 0$; (b') $c \leqslant c_0$; (c') 对所有 $u \in S_c$,

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} \geqslant \frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \left(\frac{4-N(p-2)}{N(p-2)-4s}\right)^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

利用定理 1.4，我们可以断定 u_{c_0} 是不等式（1.2）的最优函数。

定理 1.5。 设 $N \geqslant 3$， $s \in (0,1)$ 且 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。设 $u_{c_0} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (MLN) 的能量基态解，且 $c = c_0$。则

$$\|u_{c_0}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u_{c_0}\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} = C_{1,s,p}^{-1} \|u_{c_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{-(p-2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x.$$

此外，我们知道 u_{c_0} 是以下不等式的最优函数 (1.2)。

我们指出，我们的方法适用于方程（MF）。我们得到临界质量的显式公式 $\bar{c}_0$，以及能量基态解与混合分数阶算子下 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最优函数之间的关系，如下所示

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leqslant C_{s_2,s_1,p} \|u\|_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2(1-s)}} \|u\|_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2(1-s)}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2}, \tag{1.3}$$

其中 $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$ 且 $C_{s_2,\ s_1,\ p} > 0$ 是不等式（1.3）的最佳常数。

为方便读者，我们将结果陈述如下。

定理1.6. 设 $N \geqslant 1$、 $0 < s_1 < s_2 < 1$ 和 $p \in (2+\frac{4s_1}{N}$、$2+\frac{4s_2}{N})$。则以下结果成立。

(1) 存在一个非负径向最优函数 $\bar{Q} \in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$，对于不等式 (1.3)，它是下列方程的弱解：

$$(-\Delta)^{s_2}\bar{Q} + (-\Delta)^{s_1}\bar{Q} + \omega\bar{Q} = |\bar{Q}|^{p-2}\bar{Q}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $\omega > 0$。

(2) 设 $\bar{c}_0$ 为定理*A*中的临界质量，则有

$$C_{s_2,s_1,p} = \left[\frac{2N+4s_2-pN}{2p(s_2-s_1)}\right]^{-\frac{2N+4s_2-pN}{4(s_2-s_1)}} \left[\frac{pN-2N-4s_1}{2p(s_2-s_1)}\right]^{-\frac{pN-2N+4s_1}{4(s_2-s_1)}} \frac{1}{\bar{c}_0^{\frac{p-2}{2}}}$$

and

$$\bar{c}_0 = \left[\frac{2N+4s_2-pN}{2p(s_2-s_1)}\right]^{\frac{2N+4s_2-pN}{2(s_2-s_1)(p-2)}} \left[\frac{pN-2N-4s_1}{2p(s_2-s_1)}\right]^{\frac{pN-2N+4s_1}{2(s_2-s_1)(p-2)}} C_{s_2,s_1,p}^{-\frac{2}{p-2}}$$

(3) 设 $u_{\bar{c}_0} \in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (MF) 的能量基态解，其中$c = \bar{c}_0$。则

$$\|u_{\bar{c}_0}\|_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2(1-s)}} \|u_{\bar{c}_0}\|_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2(1-s)}} = C_{s_2,s_1,p}^{-1} \|u_{\bar{c}_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{-(p-2)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\bar{c}_0}|^p \mathrm{d}x.$$

此外，我们知道 $u_{\bar{c}_0}$ 是不等式 (1.3)的最优函数。

本文的结构：在第2节中，我们介绍有关索 Sobole夫空间的一些预备结果。在第3节中，我们证明定理 1.1。在第4节中，我们证明定理1.2。在第5节中，我们证明定理 1.3。在第6节中，我们证明定理 1.4。在第7节中，我们证明定理 1.5。在第8节中，我们给出定理 1.6的证明。

2. Sobolev Spaces

定义齐次索 Sobole夫空间

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N) | |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

其半范数定义为

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

对于 $N \geqslant 3$ 和 $s \in (0, 1)$，令 $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ 表示齐次分数阶 Sobolev 空间，它是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在该半范数下的完备化

$$\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义非齐次 Sobolev 空间如下：

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) | |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

其范数定义为

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x.$$

定义非齐次分数阶 Sobolev 空间如下：

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) | \|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} < \infty\},$$

其范数定义为

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x.$$

引理 2.1 (连续嵌入). $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

证明。 由 [24], H¨older 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2s}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi)|^{(2-2s)\frac{2}{2-2s}} \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2-2s}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{2s}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{2-2s}{2}} \\
&\leqslant C\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

对于 $p \in (2, 2^*)$ 和 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式 [27], 可知，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^{\frac{N(p-2)}{2}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{p-\frac{N(p-2)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1}$$

对于 $q \in (2, \frac{2N}{N-2s})$ 和 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$，可知存在常数 $C > 0$，使得

$$\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^{\frac{N(q-2)}{2s}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{q-\frac{N(q-2)}{2s}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.2}$$

3. Proof of Theorem 1.1

本节证明定理 1.1，即中间临界指数情形下能量基态解的存在性与不存在性。

引理 3.1. 设 $p \in (2 + \frac{4s}{N}, 2 + \frac{4}{N})$ 与 $c > c_0$。则对所有 $c' > c$，我们有

$$m_{c'} \leqslant \left[\frac{c'}{c}\right]^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} m_c.$$

此外，

$$m_c < m_{\bar{c}} + m_{c-\bar{c}},$$

对所有 $\bar{c} \in (0, c)$。

证明。令 $u \in S_c$和 $\bar{u}(x) := (\frac{c'}{c})^a u((\frac{c'}{c})^b x)$，其中

$$a = \frac{2}{4 - N(p-2)}, \quad b = \frac{p-2}{4 - N(p-2)}.$$

于是我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^2 \mathrm{d}x = (c')^{2a-bN} c^{1-2a+bN} = c'.$$

直接计算可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \mathrm{d}x = (\frac{c'}{c})^{2a+2b-bN} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^2 \mathrm{d}y,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\frac{c'}{c})^{2a+2bs-bN} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^p \mathrm{d}x = (\frac{c'}{c})^{pa-bN} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

于是 $\bar{u}(x) \in S_{c'}$，又由于 $2a + 2b - bN = pa - bN$，我们得到

$$\begin{aligned}
m_{c'} \leqslant & J(\bar{u}) \\
= & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^p \mathrm{d}x \\
= & (\frac{c'}{c})^{2a+2b-bN} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + (\frac{c'}{c})^{2a+2bs-bN} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& - (\frac{c'}{c})^{pa-bN} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x \\
= & (\frac{c'}{c})^{2a+2b-bN} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} (\frac{c'}{c})^{2b(s-1)} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x \right] \\
\leqslant & (\frac{c'}{c})^{2a+2b-bN} J(u)
\end{aligned}$$

由此可得，由于 $2a + 2b - bN = 2b + 1 = {}^{2}_{(p-2)\ 4-N(p-2)} + 1$,

$$m_{c'} \leqslant \left[\frac{c'}{c}\right]^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} m_c.$$

有

$$\begin{aligned}
m_c = & \frac{c - \bar{c}}{c} m_c + \frac{\bar{c}}{c} m_c \\
= & \frac{c - \bar{c}}{c} m_{\frac{c}{c-\bar{c}}(c-\bar{c})} + \frac{\bar{c}}{c} m_{\frac{c}{\bar{c}}\bar{c}}.
\end{aligned}$$

若 $m_{\bar{c}} = 0$ 且 $m_{c-\bar{c}} = 0$，则有 $\bar{c} \leqslant c_0$ 和 $c - \bar{c} \leqslant c_0$。因此,

$$m_c < 0 = m_{\bar{c}} \ \text{ and } \ m_c < 0 = m_{c-\bar{c}},$$

进而 $m_c < m_{\bar{c}} + m_{c-\bar{c}}$。

若 $m_{\bar{c}} < 0$ 且 $m_{c-\bar{c}} = 0$，则有 $\bar{c} > c_0$ 和 $c - \bar{c} \leqslant c_0$。并且 $m_c < 0 = m_{c-\bar{c}}$和

$$m_c \leqslant (\frac{c}{\bar{c}})^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} m_{\bar{c}} < m_{\bar{c}},$$

然后 $m_c < m_{\bar{c}} + m_{c-\bar{c}}$。

如果 $m_{\bar{c}} < 0$ 且 $m_{c-\bar{c}} < 0$，那么我们有 $\bar{c} > c_0$ 和 $c - \bar{c} > c_0$。因此，

$$m_c \leqslant (\frac{c}{\bar{c}})^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} m_{\bar{c}} < m_{\bar{c}},$$

and

$$m_c \leqslant (\frac{c}{c-\bar{c}})^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} m_{c-\bar{c}} < m_{c-\bar{c}},$$

于是 $m_c < m_{\bar{c}} + m_{c-\bar{c}}$。 □

引理 3.2. 设 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$，$c > c_0$和 $\{u_n\} \subset S_c$是 $m_c < 0$的一个极小化序列。那么存在 $x_n \subset \mathbb{R}^N$ 使得 $\bar{u}_n := u_n(x+x_n)$ 收敛到 $u \neq 0$，在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$中，并且 $\{u_n\} \subset S_c$ 也是 $m_c < 0$的一个极小化序列。

证明。 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x = 0$，则

$$0 > m_c + o_n(1) = J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \geqslant 0.$$

这与结论矛盾。我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x > 0$。利用 Lions 消失引理， [28], 存在 $x_n \subset \mathbb{R}^N$ 使得 $\bar{u}_n := u_n(x+x_n) \rightharpoonup u \neq 0$ 在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ □

现在我们可以证明定理 1.1。

*Proo*定理 *1.1* 的证明。 **步骤 1**。 在这一步中，我们考虑 $c \in (0, c_0)$ 的情形。定义 e

$$J_c(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \frac{c^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}(s-1)}}{2}\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

显然， $J_1(u) = J(u)$， $J_{c_0}(u) < J_c(u)$，并且

$$J(c^a u(c^b \cdot)) = c^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} J_c(u).$$

其中 $a = \frac{2}{4-N(p-2)}$ 和 $b = \frac{p-2}{4-N(p-2)}$ 见引理 3.1。

反设 $m_c = 0$ 可达到，且 u_c 是极小元。那么

$$0 = m_c = J_1(u_c).$$

令 $\tilde{u}_c := c^{-a} u_c(c^{-b}\cdot)$。那么 $\tilde{u}_c \in S_1$ 和 $u_c = c^a \tilde{u}_c(c^b \cdot)$，并且

$$\begin{aligned} 0 =& J(u_c) \\ =& J(c^a \tilde{u}_c(c^b \cdot)) \\ =& c^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} J_c(\tilde{u}_c). \end{aligned}$$

这表明 $J_c(\tilde{u}_c) = 0$ 和 $J_{c_0}(\tilde{u}_c) < J_c(\tilde{u}_c) = 0$。

设 $\tilde{\tilde{u}}_{c_0} := c_0^a \tilde{u}_c(c_0^b \cdot)$。则 $\tilde{\tilde{u}}_{c_0} \in S_{c_0}$ 和

$$\begin{aligned} m_{c_0} \leqslant& J(\tilde{\tilde{u}}_{c_0}) \\ =& J(c_0^a \tilde{u}_c(c_0^b \cdot)) \\ =& c_0^{\frac{2(p-2)}{4-N(p-2)}+1} J_{c_0}(\tilde{u}_c) < 0. \end{aligned}$$

这与 $m_{c_0} = 0$ 矛盾。因此，下确界不能取到。

Step 2. 在这一步中，我们考虑情形 $c \in (c_0, +\infty)$。由引理 3.2该

$$\bar{u}_n \rightharpoonup u \neq 0 \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N), \quad \bar{u}_n \to u \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N.$$

我们断言 $\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=c_\circ$ 反设

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=\bar{c}<c=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}_n|^2\mathrm{d}x.$$

如果 $J(u)=m_{\bar{c}}$，那么利用 Br´ezis-Lieb 引理 [3] 和引理 3.1，我们知道

$$\begin{aligned}m_c=&\lim_{n\to\infty}J(\bar{u}_n)\\=&J(u)+\lim_{n\to\infty}J(\bar{u}_n-u)\\\geqslant&m_{\bar{c}}+m_{c-\bar{c}}\\>&m_c.\end{aligned}$$

这是一个矛盾。类似地，如果 $J(u)>m_{\bar{c}}$，那么我们有

$$\begin{aligned}m_c=&J(u)+\lim_{n\to\infty}J(\bar{u}_n-u)\\>&m_{\bar{c}}+m_{c-\bar{c}}\\\geqslant&m_c.\end{aligned}$$

T这同样是一个矛盾。因此，$\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x=c_\circ$ 此外，我们可以看到 t

$$J(u)=m_c,$$

and

$$\bar{u}_n\to u\text{ in }H^1(\mathbb{R}^N).$$

步骤 3。在这一步中，我们考虑临界质量情形 $c=c_0$。要证明极小化序列（在平移意义下）的相对紧性，存在两个主要困难。首先，我们无法排除在 $m_{c_0}=0$ 条件下极小化序列消失的可能性。其次，如果没有严格次可加性不等式 $m_c<m_{\bar{c}}+m_{c-\bar{c}}$，我们无法排除二分现象。

为克服这些挑战，我们将采用 [21, 引理 32]以及 [6, 第 1936 页，第 12]。令 $c_n:=c_0+\frac{1}{n}$，对所有 $n\in\mathbb{N}^+$。由 $c_n>c_0$ 和$m_{c_n}^-<0$，根据步骤 2，我们知道 m_{c_n} 对所有 $u_{c_n}\in S_{c_n}$ 都存在一个极小元 $n\in\mathbb{N}^+$。由于$m_{c_n}\to m_{c_0}$，可推得

$$\lim_{n\to\infty}J(u_{c_n})=\lim_{n\to\infty}m_{c_n}=m_{c_0}=0.$$

由（2.1）可得

$$J(u_{c_n})\geqslant\frac{1}{2}\|u_{c_n}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}-C\|u_{c_n}\|^{\frac{N(p-2)}{2}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}c_n^{\frac{p}{2}-\frac{N(p-2)}{4}}.$$

这意味着 $\|u_{c_n}\|_{D^{1,\ 2}\ (\mathbb{R}^N)}$ 通过 $p<2+\frac{4}{N}$ 有界。此外，$\|u_{c_n}\|^2_{L^2\ (\mathbb{R}^N)}=c_n\to c_0>0$，于是我们得出 $\{u_{c_n}\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界。

现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{c_n}|^p\mathrm{d}x>0.$$

事实上，如果 $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{c_n}|^p\mathrm{d}x=0$，那么根据 $\lim_{n\to\infty}J(u_{c_n})$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{c_n}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}=\lim_{n\to\infty}\|u_{c_n}\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}=0.\tag{3.1}$$

另一方面，利用不等式（2.2），我们有

$$\begin{aligned} J(u_{c_n}) \geqslant & \frac{1}{2}\|u_{c_n}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\|u_{c_n}\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} - C\|u_{c_n}\|^{\frac{N(p-2)}{2s}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} c_n^{\frac{p}{2}-\frac{N(p-2)}{4s}} \\ \geqslant & \|u_{c_n}\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \left[\frac{1}{2} - C\|u_{c_n}\|^{\frac{N(p-2)}{2s}-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} c_n^{\frac{p}{2}-\frac{N(p-2)}{4s}}\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

这里我们用到了 $p > 2 + \frac{4s}{N}$ 这一事实。由 (3.1) 和 (3.2)，当 n 足够大时，有 $J(u_{c_n}) \geqslant 0$。这与 $J(u_{c_n}) = m_{c_n} < 0$ 这一事实矛盾。因此，结论得证。应用 Lions 消失引理 [28], ，存在 $x_n \subset \mathbb{R}^N$ 使得$\bar{u}_{c_n} := u_{c_n}(x + x_n)$ 在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中收敛到 $\bar{u}_{c_0} \neq 0$。利用 Br´ezis-Lieb 引理 [3], ，我们得到

$$0 = m_{c_0} = \lim_{n\to\infty} m_{c_n} = \lim_{n\to\infty} J(\bar{u}_{c_n}) = J(\bar{u}_{c_0}) + \lim_{n\to\infty} J(\bar{u}_{c_n} - \bar{u}_{c_0}). \tag{3.3}$$

我们来证明 $\bar{u}_{c_0}$ 是 m_{c_0}的一个极小元。显然,

$$c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \|\bar{u}_{c_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lim_{n\to\infty} \|\bar{u}_{c_n} - \bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

由于 $0 < \|\bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_0$，我们得到 $J(\bar{u}_{c_0}) \geqslant 0$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{u}_{c_n} - \bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = c_0 - \|\bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} < c_0.$$

这表明 $\lim_{n\to\infty} J(\bar{u}_{c_n} - \bar{u}_{c_0}) \geqslant 0$。由 (3.3)，我们知道 $J(\bar{u}_{c_0}) = 0$。若 $\|\bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} < c_0$，则 $\bar{u}_{c_0}$ 是某个 $c < c_0$的极小元 m_c，这与步骤 1 矛盾。因此，我们知道 $\|\bar{u}_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = c_0$，这表明$\bar{u}_{c_0}$ 是m_{c_0}的极小元。

步骤 4. 对于 $c \geqslant c_0$，我们知道 $u \in S_c$ 是 m_c的极小元，那么 u 是 J 在球面 S_c上的临界点。存在一个拉格朗日乘子 ω 使得 $(u, \omega) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$ 是方程 (1.1) 的一组弱解。于是

$$\begin{aligned} \omega\, c = \omega \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = & \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x - \|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} - \|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \\ = & \frac{p-2}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x - 2J(u) \\ = & \frac{p-2}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x - 2m_c \\ \geqslant & \frac{p-2}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这表明

$$w \geqslant \frac{p-2}{pc} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x > 0.$$

证明至此结束。 □

4. Proof of Theorem 1.2

在本节中，我们证明定理1.2，即混合局部-非局部算子的 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最优函数存在。

引理 4.1. 对于 $p \in (2 + \frac{4s}{N}, 2 + \frac{4}{N})$和 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$，存在常数 $C_{1,s,p} > 0$使得

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_{1,s,p} \|u\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.1}$$

证明. 取 $p=2+\frac{4}{N}$和 $q=2+\frac{4s}{N}$ 于 (2.1) 及 (2.2)，可得

$$\|u\|^{2+\frac{4}{N}}_{L^{2+\frac{4}{N}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.2}$$

and

$$\|u\|^{2+\frac{4s}{N}}_{L^{2+\frac{4s}{N}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4s}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.3}$$

对 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$ 应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2+\frac{4s}{N}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(2+\frac{4}{N})-p}{\frac{4}{N}(1-s)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2+\frac{4}{N}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-(2+\frac{4s}{N})}{\frac{4}{N}(1-s)}},$$

然后利用（4.2）和（4.3），

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\\ \leqslant& C\left(\|u\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4s}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{(2+\frac{4}{N})-p}{\frac{4}{N}(1-s)}}\left(\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{p-(2+\frac{4s}{N})}{\frac{4}{N}(1-s)}}\\ =&C\|u\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

□

引理 4.2. 设 $N\geqslant 3$, $s\in(0,1)$ 且 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$。则存在一个最优函数 $Q\in H^1(\mathbb{R}^N)$（不等式 (4.1) 的），即它是如下方程的一个弱解

$$-\Delta Q+(-\Delta)^sQ+\omega Q=|Q|^{p-2}Q,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{4.4}$$

其中 $\omega>0$，且

$$C_{1,s,p}=\frac{\|Q\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{\|Q\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|Q\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}.$$

证明。**步骤 1.** 在本步骤中，我们研究最佳常数$C_{1,s,p}$ 的最优函数的存在性。我们定义 Weinstein泛函

$$W_p(u)=\frac{\|u\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}},$$

因此

$$C^{-1}_{1,s,p}=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}W_p(u).$$

由（4.1）可知，存在一个极小化序列 $\{u_n\}\in H^1(\mathbb{R}^N)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}W_p(u_n)=C^{-1}_{1,s,p}.$$

显然，$\{v_n:=|u_n|\}$ 也是一个极小化序列。记 v_n^*为 v_n的对称递减重排。由重排不等式 [20,定理 3.4 和 3.7] 以及 [4,17,18],，可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n^*|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}|v_n^*|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^p\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n^*(x)-v_n^*(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n(x)-v_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.7}$$

结合（4.5）-（4.7），可得 $\{v_n^*\}$也是一个极小化序列。

现在，我们通过设定 $\{v_n^*\}$ 对该序列进行重新缩放

$$w_n(x)=\lambda_{1,n}v_n^*(\lambda_{2,n}x),$$

其中

$$\lambda_{1,n}=\frac{\left[\int_{\mathbb{R}^N}|v_n^*|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{N-2}{4}}}{\left[\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n^*|\mathrm{d}x\right]^{\frac{N}{4}}}\quad\text{and}\quad\lambda_{2,n}=\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|v_n^*|^2\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n^*|\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x=\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{2-N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n^*|^2\mathrm{d}x=1,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^2\mathrm{d}x=\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n^*|^2\mathrm{d}x=1,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n(x)-w_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{2s-N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n^*(x)-v_n^*(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^p\mathrm{d}x=\lambda_{1,n}^p\lambda_{2,n}^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n^*|^p\mathrm{d}x.$$

Weinstein泛函 $W_p(\cdot)$在重新缩放下保持不变

$$\begin{aligned}W_p(w_n)=&\frac{\|w_n\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|w_n\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2}}{\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\\=&\frac{[\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{2s-N}]^{\frac{2N+4-pN}{4(1-s)}}[\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{2-N}]^{\frac{pN-2N-4s}{4(1-s)}}[\lambda_{1,n}^2\lambda_{2,n}^{-N}]^{\frac{p-2}{2}}}{\lambda_{1,n}^p\lambda_{2,n}^{-N}}W_p(v_n^*)\\=&W_p(v_n^*).\end{aligned}$$

显然，$\{w_n\}$ 是一个径向且径向递减的极小化序列，并且在 $H^1(\mathbb{R}^N)$中有界。

根据 $\|w_n\|_{D^{1,\ 2}(\mathbb{R}^N)}^2=\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2=1,\quad 0<C_{1\ s,\ \ ,\ p}^{-1}<\infty$ 以及 (2.2) 可知

$$\begin{aligned}C_{1,s,p}^{-1}=&\lim_{n\to\infty}\frac{\|w_n\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|w_n\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2}}{\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\|w_n\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)}{2s}\left[\left(\frac{4}{N(p-2)}-1\right)\frac{s}{1-s}\right]}\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\left[p-\frac{N(p-2)}{2s}\right]\left[\left(\frac{4}{N(p-2)}-1\right)\frac{s}{1-s}\right]}}{\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\qquad(Nonvanishing)\\\geqslant&C\lim_{n\to\infty}\frac{\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p\left[\left(\frac{4}{N(p-2)}-1\right)\frac{s}{1-s}\right]}}{\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\\=&C\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p\left[\left(\frac{4}{N(p-2)}-1\right)\frac{s}{1-s}-1\right]},\end{aligned}$$

由 $0<(\frac{4}{N}-(p-2)-1)$ $that\frac{s}{1-s}<1$ 可知,

$$0<[CC_{1,s,p}]^{\frac{1}{1-(\frac{4}{N(p-2)}-1)\frac{s}{1-s}}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\|w_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.8}$$

由紧嵌入 $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ q\in(2,2^*)$ [28], 以及 (4.8), 我们可推得

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}=\|w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\neq 0.$$

由 Br´ezis-Lieb 引理 [3] 和 $\|w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\neq 0$ 可知

$$\begin{aligned}C^{-1}_{1,s,p}=&\lim_{n\to\infty}\frac{\|w_n\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|w_n\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|w_n\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|w_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\\ \geqslant&\frac{\|w\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\|w\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|w\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\\ \geqslant&C^{-1}_{1,s,p}.\end{aligned}$$

因此,

$$\|w\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}=1,\ \int_{\mathbb{R}^2}|w|^2\mathrm{d}x=1,\ W_p(w)=C^{-1}_{1,s,p}.$$

因此, w 是 Weinstein 泛函 W_p的径向非负极小化子。**步骤 2**。 注意到 w 是 W_p 的极小元。因此它满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}W_p(w+\varepsilon\phi)=0,$$

对所有 $\phi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$均成立。因此, w 是下列方程的弱解

$$\begin{aligned}&-\Delta w+\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}(-\Delta)^s w\frac{1}{\|w\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}}+\frac{2(p-2)(1-s)}{pN-2N-4s}w\\ =&\frac{2p(1-s)}{pN-2N-4s}|w|^{p-2}w\frac{1}{\|w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}.\end{aligned}$$

定义

$$Q(x)=\lambda w(\mu x), \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{cases}\mu=\left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{1}{2s-2}},\\ \lambda=\left[\frac{2p(1-s)}{pN-2N-4s}\|w\|^{-p}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{1}{p-2}}\left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{2}{(2s-2)(p-2)}}.\end{cases}$$

那么 Q 满足

$$-\Delta Q+(-\Delta)^sQ+\omega Q=|Q|^{p-2}Q,$$

with

$$\omega=\frac{pN-2N-4s}{2(p-2)(1-s)}\left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{-1}{s-1}}.$$

特别地, 我们知道 Q是非负的、径向的且径向对称。 □

注 4.1. 对于 *Weinstein*泛函，如果分子有两项，那么可以直接得到极小化序列不消失 *[27]*。然而，在我们的情形中，分子有三项，见 $W_p(\cdot)$。要排除极小化序列消失的可能性并不容易。我们借助一种创新且新颖的思路克服了这一挑战，见 (*Nonvanishing*)。

5. Proof of Theorem 1.3

本节给出定理1.3的证明。

引理5.1。 设 $N \geqslant 3$, $s \in (0,1)$ 且 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。令

$$\beta(Q) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x},$$

其中 Q 定义见引理*4.2*。则

$$\beta(Q) = \frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}.$$

证明。 利用 (4.9)，计算得

$$\begin{aligned}\beta(Q) =& \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x}\\ =& \frac{\lambda^2\mu^{2s-N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\lambda^2\mu^{2-N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x}\\ =& \mu^{2s-2}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

将 $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|\mathrm{d}x = 1$和 $\mu = \left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{1}{2s-2}}$ 代入上述方程，我们得到

$$\begin{aligned}\beta(Q) =& \mu^{2s-2}\|w\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\ =& \left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]\|w\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\\ =& \frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}.\end{aligned}$$

□

引理5.2。 令 $N \geqslant 3$, $s \in (0,\ 1)$ 以及 $p \in (2+\frac{4s}{N},\ 2+\frac{4}{N})$。设

$$\gamma(Q) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x},$$

其中 Q 定义见引理*4.2*。则

$$\gamma(Q) = \frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}.$$

并且，对于 $s \in (0,1)$，我们有

$$\|Q\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x,$$

$$\|Q\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} = \frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x.$$

证明。 根据（4.9）再次，我们推出

$$\begin{aligned}\gamma(Q) =&\frac{\lambda^2\mu^{2s-N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\lambda^p\mu^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x}\\ =&\lambda^{2-p}\mu^{2s}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x}\\ =&\left[\frac{2p(1-s)}{pN-2N-4s}\|w\|^{-p}_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right]^{-1}\left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{-2}{2s-2}}\\ &\times\left[\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\|w\|^{-2}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\right]^{\frac{2s}{2s-2}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w(x)-w(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^N}|w|^p\mathrm{d}x}\\ =&\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\frac{2N+4-pN}{pN-2N-4s}\\ =&\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}.\end{aligned}$$

结合 $\beta(Q)$和 $\gamma(Q)$，即可得到所需结果。 □

引理 5.3。 设 $N\geqslant 3$, $s\in(0,1)$ 且 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$。则

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x=0,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^2\mathrm{d}x\geqslant c_0.$$

证明。 我们知道， Q 满足以下 Nehari 恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\omega\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x=0,$$

以及 Pohoz´aev 恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x+\frac{N-2s}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &+\frac{N}{2}\omega\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^2\mathrm{d}x-\frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x+s\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{(p-2)N}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x=0$$

由引理5.1和5.2可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla Q|^2\mathrm{d}x+(s-\frac{1}{2})\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p}(\frac{(p-2)N}{2}-1)\int_{\mathbb{R}^N}|Q|^p\mathrm{d}x\\ =&\left[\frac{1}{2}\frac{pN-2N-4s}{2N+4-pN}+s-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}(\frac{(p-2)N}{2}-1)\frac{2p(1-s)}{2N+4-pN}\right]\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&0.\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x + s \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{(p-2)N}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x + (s-\frac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p}(\frac{(p-2)N}{2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|Q(x)-Q(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由定理1.1可知,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |Q|^2 \mathrm{d}x \geqslant c_0.
$$

□

定理*1.3*的证明。应用引理5.1和5.2，可得

$$
\begin{aligned}
& C_{1,s,p} \\
=& \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x\right]^{-\frac{2N+4-pN}{4(1-s)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |Q|^p \mathrm{d}x\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{4(1-s)}} \frac{\|Q\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{\|Q\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \\
=& \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{4(1-s)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{4(1-s)}} \frac{1}{\|Q\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}.
\end{aligned}
$$

Set

$$
C'_{1,s,p} := \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{4(1-s)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{4(1-s)}} \frac{1}{c_0^{\frac{p-2}{2}}}.
$$

我们现在证明$\|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = c_0$。我们采用反证法：假设$\|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \neq c_0$。由引理5.3可知，$\|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} > c_0$。于是

$$
\frac{\|Q\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{\|Q\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \|Q\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|Q\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}} = C_{1,s,p} < C'_{1,s,p},
$$

由此可得

$$
\|Q\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} < C'_{1,s,p} \|Q\|^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \|Q\|^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|Q\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
$$

这意味着$C_{1、s、p}$不是不等式（1.2）的最佳常数。因此我们得到矛盾，结论随之成立。□

6. Proof of Theorem 1.4

利用（4.1），可得 J 在 S_c上有下界。我们指出，条件 $m_c < 0$ 对于确保极小化序列（在平移意义下）的相对紧性是必要的。据我们所知， m_c 基于 Gagliardo-Nirenberg 不等式的刻画结果是新颖的。

引理 6.1. 设 $u \in S_c$, $c>0$ 和 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。则 $m_c<0$ 当且仅当

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} < \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

并且 $m_c=0$ 当且仅当

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} \geqslant \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

证明。 对于任意 $c>0$ 和 $u \in S_c$, 令

$$u_t(x) = t^{\frac{N}{2}} u(tx),$$

and

$$J(u_t) = \frac{t^2}{2}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{t^{2s}}{2}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{t^{\frac{N(p-2)}{2}}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

Set

$$h_u(t) := \frac{J(u_t)}{t^{2s}} = \frac{t^{2-2s}}{2}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{t^{\frac{N(p-2)}{2}-2s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

于是,

$$h_u'(t) = (1-s)t^{1-2s}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - (\frac{N(p-2)}{2}-2s)\frac{t^{\frac{N(p-2)}{2}-2s-1}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x.$$

因此 $h_u'(t)=0$ 当且仅当

$$t_u = \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p \mathrm{d}x}{\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2}\right]^{\frac{2}{4-N(p-2)}}.$$

由 $p<2+\frac{4}{N}$, 我们有 $1-2s > \frac{N(p-2)}{2}-2s-1$ 并且

$$\begin{cases} h_u'(t)<0, & t<t_u, \\ h_u'(t)=0, & t=t_u, \\ h_u'(t)>0, & t>t_u. \end{cases}$$

这表明 t_u 是 $h_u(\cdot)$ 的唯一临界点, 且其最小值

$$\begin{aligned} \min_{t>0} h_u(t) =& h_u(t_u) \\ =& \frac{t_u^{2-2s}}{2}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{t_u^{\frac{N(p-2)}{2}-2s}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2}\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-4s}{4-N(p-2)}} \frac{N(p-2)-4}{N(p-2)-4s}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{-\frac{2N(p-2)-8s}{4-N(p-2)}} \left[\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{4-4s}{4-N(p-2)}} \\ & + \frac{1}{2}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

因此，当且仅当 $\min\limits_{t>0} h_u(t) < 0$

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} \\
<&\left(\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-4s}{4-N(p-2)}} \frac{4-N(p-2)}{N(p-2)-4s} \right)^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \\
=&\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}$$

并且 $\min\limits_{t>0} h_u(t) \geqslant 0$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} \\
\geqslant&\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}$$

□

引理 6.2. 设 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。若

$$c \leqslant C_{1,s,p}^{-\frac{2}{p-2}} \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}},$$

则 $m_c = 0$。

证明。 利用引理 4.1，对于所有 $u \in S_c$，我们知道

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leqslant& C_{1,s,p} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}} \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2} \\
=& C_{1,s,p} c^{\frac{p-2}{2}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}} \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

利用 (6.1) 和

$$C_{1,s,p} c^{\frac{p-2}{2}} \leqslant \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}},$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \\
\leqslant& \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}}.
\end{aligned}$$

根据引理 6.1，我们推知 $m_c = 0$。 □

引理 6.3。 设 $p \in (2+\frac{4s}{N}, 2+\frac{4}{N})$。若 $m_c < 0$，则

$$c > C_{1,s,p}^{-\frac{2}{p-2}} \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}}.$$

证明。 根据引理 6.1，对于 $u \in S_c$，我们得出 $m_c < 0$ 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}} \|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}} \\
<&\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}$$

由（6.1），有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}}\left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}}\\<&\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p\\\leqslant&C_{1,s,p}\|u\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}c^{\frac{p-2}{2}},\end{aligned}$$

这意味着

$$\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}}\left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}}<C_{1,s,p}c^{\frac{p-2}{2}}.$$

□

引理 6.4. 设 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$。若

$$c>C_{1,s,p}^{-\frac{2}{p-2}}\left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}}\left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}},$$

则 $m_c<0$。

证明。设 Q 是 Gagliardo-Nirenberg 不等式（4.1）的最优函数。令 $Q_c:=\frac{\sqrt{c}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}Q$。于是

$$\begin{aligned}&\frac{\|Q_c\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|Q_c\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2}}{\|Q_c\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\\=&\frac{\left[\frac{\sqrt{c}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\left[\frac{\sqrt{c}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\left[\frac{\sqrt{c}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right]^{p-2}}{\left[\frac{\sqrt{c}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right]^p}\\&\times\frac{\|Q\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|Q\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{p-2}}{\|Q\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}\\=&C_{1,s,p}.\end{aligned}$$

这表明 Q_c 也是 Gagliardo-Nirenberg 不等式（4.1）的最优函数。由于 $Q_c\in S_c$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|Q_c\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p\\=&C_{1,s,p}c^{\frac{p-2}{2}}\|Q_c\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2N+4-pN}{2(1-s)}}\|Q_c\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)}}\\>&\left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}}\left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{4-N(p-2)}{4-4s}}\|Q_c\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}}\|Q_c\|_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}}.\end{aligned}$$

由 $Q_c\in S_c$ 和引理6.1，我们知道 $m_c<0$。 □

引理 6.5。 令 $p\in(2+\frac{4s}{N},2+\frac{4}{N})$。若 $m_c=0$，则

$$c\leqslant C_{1,s,p}^{-\frac{2}{p-2}}\left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}}\left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)}\right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}}.$$

证明。 由 [21, 定理 1.1 (4)], 可知， $m_c \leqslant 0$ 对所有 $c > 0$。于是我们得到引理 6.4 的逆否命题，证明略。 □

定理的证明 *1.4*。 结合引理6.1-6.5，即可得到所需结果。 □

7. Proof of Theorem 1.5

本节中，我们证明定理 1.5。

定理的证明 *1.5*。 设 $u_{c_0} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (1.1) 的一个能量基态解，其临界质量为 c_0。由定理1.1，我们知道

$$0 = J(u_{c_0}) = m_{c_0} = \inf_{u \in S_{c_0}} J(u).$$

设 $u_{c_0,\ t}(x) = t^{\frac{N}{2}} u_{c_0}(tx)$。由引理 6.1 可知

$$\min_{t>0} J(u_{c_0,t}) = \min_{t>0} h_{u_{c_0}}(t) = 0 = h_{u_{c_0}}(t_{u_{c_0}}),$$

其中 $t_{u_{c_0}}$是 $h_{u_{c_0}}(\cdot)$的唯一临界点。由 $J(u_{c_0}) = 0$，我们进一步可知

$$1 = t_{u_{c_0}} = \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x}{\|u_{c_0}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}} \right]^{\frac{2}{4-N(p-2)}},$$

由此可得

$$\|u_{c_0}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x. \tag{7.1}$$

由 $J(u_{c_0}) = 0$ 以及（7.1），可推得

$$\begin{aligned} \|u_{c_0}\|^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} =& \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x - \|u_{c_0}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ =& \left(\frac{4(1-s)}{2p(1-s)} - \frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x \\ =& \frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.2}$$

结合（7.1）和（7.2），可得

$$\begin{aligned} & \|u_{c_0}\|^{\frac{N(p-2)-4s}{2-2s}}_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|u_{c_0}\|^{\frac{4-N(p-2)}{2-2s}}_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \\ =& \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x \right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x \right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \\ =& \left[\frac{N(p-2)-4s}{2p(1-s)} \right]^{\frac{N(p-2)-4s}{4-4s}} \left[\frac{4-N(p-2)}{2p(1-s)} \right]^{\frac{4-N(p-2)}{4-4s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x \\ =& C^{-1}_{1,s,p} c_0^{-\frac{p-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x \\ =& C^{-1}_{1,s,p} \|u_{c_0}\|^{-(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{c_0}|^p \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

since $c_0 = C^{-\frac{2}{p-2}}_{1,s,p} \left[\frac{2N+4-pN}{2p(1-s)} \right]^{-\frac{2N+4-pN}{2(1-s)(p-2)}} \left[\frac{pN-2N-4s}{2p(1-s)} \right]^{-\frac{pN-2N-4s}{2(1-s)(p-2)}}$ and $\|u_{c_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = c_0$. □

8. Proof of Theorem 1.6

本节中，我们证明定理1.6。由于证明与定理1.2-1.5类似，我们仅给出证明概要。

引理8.1。 对于 $p \in (2+\frac{4s_1}{N}, 2+\frac{4s_2}{N})$和 $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$，存在常数$C_{s_2,s_1,p}>0$，使得

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_{s_2,s_1,p}\|u\|^{\frac{2N+4s_2-pN}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{pN-2N+4s_1}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{8.1}$$

证明。 取 $q=2+\frac{4s_1}{N}$和$q=2+\frac{4s_2}{N}$于 (2.2)中，得到

$$\|u\|^{2+\frac{4s_1}{N}}_{L^{2+\frac{4s_1}{N}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4s_1}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{8.2}$$

and

$$\|u\|^{2+\frac{4s_2}{N}}_{L^{2+\frac{4s_2}{N}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{4s_2}{N}}_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{8.3}$$

对 $p \in (2+\frac{4s_1}{N}, 2+\frac{4s_2}{N})$应用 H¨older 不等式，可得 —

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2+\frac{4s_1}{N}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(2+\frac{4s_2}{N})-p}{\frac{4}{N}(s_2-s_1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2+\frac{4s_2}{N}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-(2+\frac{4s_1}{N})}{\frac{4}{N}(s_2-s_1)}},$$

然后利用 (8.2) 和 (8.3),

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^{\frac{2N+4s_2-pN}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{pN-2N+4s_1}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

□

我们定义 Weinstein泛函

$$\bar{W}_p(u)=\frac{\|u\|^{\frac{2N+4s_2-pN}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{\frac{pN-2N+4s_1}{2(s_2-s_1)}}_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}\|u\|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}$$

与定理 1.2类似，我们知道存在 $\bar{w}\in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ 使得 t

$$\|\bar{w}\|^2_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}=\int_{\mathbb{R}^2}|\bar{w}|^2\mathrm{d}x=1,\ \bar{W}_p(\bar{w})=C^{-1}_{s_2,s_1,p},$$

¯其中 $\bar{w}$ 是一个径向非负的极小元，使得 Weinstein泛函 W_p成立，而 $\bar{w}$ 是下列方程的一个弱解

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^{s_2}\bar{w}+\frac{2N+4s_2-pN}{pN-2N-4s_1}(-\Delta)^{s_1}\bar{w}\frac{1}{\|\bar{w}\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}}\\&+\frac{2(p-2)(s_2-s_1)}{pN-2N-4s_1}\bar{w}=\frac{2p(s_2-s_1)}{pN-2N-4s_1}|w|^{p-2}w\frac{1}{\|\bar{w}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}.\end{aligned}$$

我们定义

$$\bar{Q}(x)=\lambda\bar{w}(\mu x), \tag{8.4}$$

其中

$$\begin{cases}\mu=\left[\frac{2N+4s_2-pN}{pN-2N-4s_1}\frac{1}{\|\bar{w}\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{1}{2(s_1-s_2)}},\\ \lambda=\left[\frac{2p(s_2-s_1)}{pN-2N-4s_1}\frac{1}{\|\bar{w}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{1}{p-2}}\left[\frac{2N+4s_2-pN}{pN-2N-4s_1}\frac{1}{\|\bar{w}\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{2s_2}{2(s_1-s_2)(p-2)}},\end{cases}$$

¯则 Q满足

$$(-\Delta)^{s_2}\bar{Q}+(-\Delta)^{s_1}\bar{Q}+\omega\bar{Q}=|\bar{Q}|^{p-2}\bar{Q},$$

with

$$\omega=\frac{2(p-2)(s_2-s_1)}{pN-2N-4s_1}\left[\frac{2N+4s_2-pN}{pN-2N-4s_1}\frac{1}{\|\bar{w}\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}}\right]^{\frac{2s_2}{2(s_1-s_2)(p-2)}}.$$

¯特别地，我们知道 Q 是非负且径向对称的。

利用（8.4）以及引理 5.1-5.3中的论证，我们得到

$$\|\bar{Q}\|^2_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}=\frac{2N+4s_2-pN}{2p(s_2-s_1)}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{Q}|^p\mathrm{d}x,$$

and

$$\|\bar{Q}\|^2_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}=\frac{pN-2N-4s_1}{2p(s_2-s_1)}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{Q}|^p\mathrm{d}x,$$

and

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\bar{Q}(x)-\bar{Q}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\bar{Q}(x)-\bar{Q}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{Q}|^p\mathrm{d}x=0.$$

¯接着重复定理 1.3的证明步骤，可得 Q是一个能量基态解，其临界质量为 $\bar{c}_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{Q}|^p\mathrm{d}x=\bar{c}_0,$$

and

$$C_{s_2,s_1,p}=\left[\frac{2N+4s_2-pN}{2p(s_2-s_1)}\right]^{-\frac{2N+4s_2-pN}{4(s_2-s_1)}}\left[\frac{pN-2N-4s_1}{2p(s_2-s_1)}\right]^{-\frac{pN-2N+4s_1}{4(s_2-s_1)}}\frac{1}{\bar{c}_0^{\frac{p-2}{2}}}.$$

这意味着

$$\bar{c}_0=\left[\frac{2N+4s_2-pN}{2p(s_2-s_1)}\right]^{\frac{2N+4s_2-pN}{2(s_2-s_1)(p-2)}}\left[\frac{pN-2N-4s_1}{2p(s_2-s_1)}\right]^{\frac{pN-2N+4s_1}{2(s_2-s_1)(p-2)}}C_{s_2,s_1,p}^{-\frac{2}{p-2}}.$$

设 $u_{\bar{c}_0}\in H^{s_2}(\mathbb{R}^N)$ 是方程（MF）的一个能量基态解，其中$c=\bar{c}_0$。那么重复定理 1.5 的论证，可得

$$\|u_{\bar{c}_0}\|^{\frac{4-N(p-2)}{2(1-s)}}_{D^{s_2,2}(\mathbb{R}^N)}\|u_{\bar{c}_0}\|^{\frac{N(p-2)-4s}{2(1-s)}}_{D^{s_1,2}(\mathbb{R}^N)}=C^{-1}_{s_2,s_1,p}\|u_{\bar{c}_0}\|^{-(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{\bar{c}_0}|^p\mathrm{d}x.$$

此外，我们知道 $u_{\bar{c}_0}$ 是不等式（1.3）的最优函数。

Conflict of interest

作者声明，他没有已知的可能影响本文所报告研究的竞争性经济利益或个人关系。

Data availability statement

本文所述研究未使用任何数据。

References

[1] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, E. Vecchi, 《混合局部与非局部椭圆算子：正则性与极大值原理》, Communications in Partial Differential Equations, 47（2021）, 585-629。2[2] I. Biswas, E. Jakobsen, K. Karlsen, 《非线性退化抛物积分偏微分方程的差分-求积格式》, SIAM Journal on Numerical Analysis, 48（2010）, 1110-1135。2[3] H. Br´ezis, E. Lieb, 《函数逐点收敛与泛函收敛之间的关系》, Proceedings of the American Mathematical Society, 88（1983年）, 486-490。9, 10, 13[4] A. Burchard, H. Hajaiej, 《具有单调被积函数的泛函的重排不等式》, Journal of Functional Analysis, 233（2006）, 561-582。11[5] X. Cabr´e, S. Dipierro, E. Valdinoci, 《积分微分方程的Bernstein技巧》, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 243（2022年）, 1597-1652。2[6]I. Catto, J. Dolbeault, O. Sanchez, J. Soler, 《麦克斯韦-薛定谔-泊松系统稳态解的存在性：探索集中紧性原理的适用性》, Mathematical Models and Methods in Applied Science, 23（2013）, 1915-1938。9[7] N. Cangiotti, M. Caponi, A. Maione, E. Vitillaro, 《混合局部-非局部算子驱动的克莱因-戈登-麦克斯韦方程》, Milan Journal of Mathematics, 91（2023）, 375-403。2[8] N. Cangiotti, M. Caponi, A. Maione, E. Vitillaro, 《混合局部-非局部算子驱动的薛定谔-麦克斯韦方程》, Fractional Calculus and Applied Analysis, （2024）。2[9] H. Chen, M. Bhakta, H. Hajaiej, 《涉及混合分数阶拉普拉斯算子的狄利克雷问题的特征值和上界》, Journal of Differential Equations, 317（2022年）, 1-31。2[10] Z. Chen, P. Kim, R. Song, Z. Vondracek, 《.....的边界Harnack原理》, Transactions of the American Mathematical Society, 364（2012）, 4169-4205。2[11] L. Chergui, T. Gou, H. Hajaiej, 《混合分数阶拉普拉斯算子下非线性薛定谔方程规范化解的存在性与动力学》, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62（2023）。3[12] R. de la Llave, E. Valdinoci, 《Aubry-Mather理论在偏微分方程与伪微分方程中的推广》, Annales de l' Institut Henri Poincar´e C. Analyse Non Lin´eaire, 26（2009）, 1309-1344。2[13] S. Dipierro, E. Valdinoci, 《布朗运动与莱维过程叠加所产生的混合局部/非局部扩散生态位描述：一个演化方程及一种新的诺伊曼条件》, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 575（2021）。2[14] S. Dipierro, E. Lippi, E. Valdinocci, 《带诺伊曼条件的（非）局部逻辑斯谛方程》, Annales de l' Institut Henri Poincar´e C. Analyse Non Lin´eaire, 40（2022）, 1093-1166。2[15] S. Dipierro, X. Su, E. Valdinoci, J. Zhang, 《混合阶非线性薛定谔方程正解的定性性质》, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 45（2025年）, 1948-2000。2[16] G. Giovannardi, D. Mugnai, E. Vecchi, 《不定型混合局部-非局部问题的Ahmad-Lazer-Paul型结果》, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 527（2023）。2[17] H. Hajaiej, C. Stuart, 《Carathéodory型复合算子的对称化不等式》, Proceedings of the London Mathematical Society, 87（2003）, 396-418。11[18] H. Hajaiej, 《扩展Hardy-Littlewood不等式中的等号情形与严格不等式》, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 135（2005）, 643-661。11[19] H. Hajaiej, K. Perera, 《涉及混合分数阶p-拉普拉斯算子的椭圆问题的基态与最小正能量解》, Differential Integral Equations, 35（2022）, 173-190。2[20] E. Lieb, M. Loss, 《分析》。Graduate Studies in Mathematics, 14。American Mathematical Society, Providence, RI, 2001。xxii+346 页。11[21] T. Luo, H. Hajaiej, 《涉及混合分数阶拉普拉斯算子的一类标量场方程的规范化解》, Advanced Nonlinear Studies, 22（2022年）, 228-247。3, 9, 20[22] A. Maione, D. Mugnai, E. Vecchi, 《非正混合局部-非局部算子的变分方法》, Fractional Calculus and Applied Analysis, 26（2023）, 943-961。2[23] A. Mimica, 《从属布朗运动的热核估计》, Proceedings of the London Mathematical Society, 113（2016）, 627-648。2[24] E. Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, 《分数阶索伯列夫空间指南》, Bulletin des Sciences Mathematiques, 136（2012）, 521-573。1, 6

[25] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, J. Zhang，混合局部与非局部椭圆方程解的正则性结果，Mathematische Zeitschrift，302（2022年），1855-1878。2[26] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, J. Zhang，关于混合局部与非局部椭圆方程的若干正则性性质，Journal of Differential Equations，416（2025年），576-613。2[27] M. Weinstein，非线性薛定谔¨方程与尖锐插值估计，Communi- cations in Mathematical Physics，**87**（1983年），567-576。6，14[28] M. Willem，极小极大定理，非线性微分方程及其应用进展，**24**（1996年）。8，10，13