arXiv:2603.01146v1 [cs.LO] 1 Mar 2026

分布式知识的统一主体插值

Youan Su[1*]

1*沈阳，中国辽宁大学哲学学院，道义南街58号。

通讯作者。电子邮箱： su.youan@lnu.edu.cn;

摘要

一致插值性质（UIP）是克雷格插值性质的强化形式。它可以理解为命题量词的可定义性。本文在 Murai 和 Sano（2020年）所提出的序列演算基础上，结合 B´ılkov´a（2007年）所研究的方法，证明了带分布式知识的认知逻辑**K**、**KD**和**KT**具有一致插值性质。本文提出了一种纯句法算法，用于确定一致插值公式。在插值公式的定义中，不仅考虑命题变元，也考虑主体符号。

关键词： 模态逻辑、分布式知识、一致插值、证明论、序列演算

1 引言

克雷格插值定理指出：每当 $\vdash A \to B$，便存在一个插值公式 C，使得 $\vdash A \to C$ 且 $\vdash C \to B$，并且出现在 C 中的所有命题变元均为 A 与 B所共有。一致插值性质（UIP）是对Craig 插值的强化，最早由Pitts [1]确立。统一插值式的存在也可视为对某些命题量词进行模拟的可能性。对于任意公式 A 以及任意命题变元 p_1，……，p_m，存在一个不含 p_1，……，p_m的后插值式$\exists p_1$，……，p_m（A），使得$\vdash A \to \exists p_1$，……，p_m（A），并且对每一个不含 p_1，……，p_m的 B，$\vdash A \to B$蕴涵 $\vdash \exists p_1$，……，p_m（A）$\to B$。类似地，对于任意B 以及 p_1，……，p_n，存在一个不含 p_1，……，p_n的前插值式 $\forall p_1$，……，p_n（B），使得$\vdash \forall p_1$，……，p_n（B）$\to B$，并且对每一个不含 p_1，……，p_n的 A，$\vdash A \to B$ 蕴涵 $\vdash A \to \forall p_1$，……，p_n（B）。

Pitts [1] 最早将一致插值性质确立为对直觉主义命题逻辑中Craig 插值的强化，其基础是一种吸收了所有结构规则的序列演算。近年来，一致插值性质在模态逻辑研究中受到广泛关注。模态逻辑**K**的一致插值性质由Visser [2] 利用有界双模拟证明，并由Ghilardi [3]利用代数方法证明。Wolter [4] 证明了模态逻辑**S5** 具有一致插值性质。此外还已知**K4** 与**S4** 不满足一致插值性质 [3, 5]。关于多主体模态逻辑，Wolter [4] 表明，任一正规单模态逻辑的一致插值性质都可以推广到其多主体情形。Fang 等人 [6]证明了$\mathbf{K_n}$ $\mathbf{D_n}$、$\mathbf{T_n}$、$\mathbf{K45_n}$、$\mathbf{KD45_n}$、$\mathbf{S5_n}$ 满足一致插值性质。

此外，也有一些基于证明论方法研究模态逻辑中一致插值性质的工作。B´ılkov´a 发展了源自 Pitts [1] 的方法，从而证明了模态逻辑 **K** 和**KT** [5], 可证性逻辑 **GL** 和**Grz** [7] 中的一致插值性质。van der Giessen 等人已经通过嵌套序列与超序列建立了**K**、**D**、**T**和**S5** 中的一致插值性质。 [8] 此外，F´er´ee 等人 [9] 在 Coq 证明助手中实现了一致插值性质的计算，并证明了其正确性，涉及三种模态逻辑：**K**、G¨odel-L¨ob 逻辑**GL**以及直觉主义强 L¨ob 逻辑**iSL**。然而，上述研究都没有在插值公式中包含主体符号。

Hintikka 运用插值定理表明，“逻辑确实在解释以及进行解释的过程中发挥着重要作用”[10, p.161]。他指出，插值定理“本身就是一种解释手段” [10, p.167]。在一阶语言中，“从某种意义上说，作为‘该’解释的插值公式充当前件，充当覆盖律的前件” [10, p.178] （这里指的是 Hempel 的解释的覆盖律理论。[11]）。 [1] 正如 Hintikka 所建议的那样，当我们将插值与逻辑解释联系起来时，在多主体场景中同时考虑主体是非常自然的。具体而言，在 Craig 插值定理中将主体符号纳入插值公式的共同语言，例如文献 [12, 13] 已对此进行了研究。由于一致插值性质是 Craig 插值的加强形式（不过需要指出的是，一致插值性质尚未在一阶语言中得到确立），因此，考虑主体符号将有助于我们关注某一主体群体对逻辑解释所施加的影响。此外，在另一种上下文中，一致插值性质还与知识表示和推理中的“遗忘”概念有关 [14, 15]。统一主体插值定理能够捕捉这样的思想：在推理过程中遗忘某些主体群体。

本文结合 Murai 和 Sano [12] 提出的序列演算与 B´ılkov´a [5] 研究的方法，证明了带分布式知识的认知逻辑$\mathbf{K}_D$、$\mathbf{KD}_D$和$\mathbf{KT}_D$ 具有一致插值性质。本文提出了两种新的终止型序列演算，为这些系统的这一性质提供了证明论证明，并给出一种纯句法算法，用于确定一致插值公式。在插值公式的定义中，考虑的不仅是命题变元，还包括主体符号。

本文内容安排如下：第2节介绍我们的句法和希尔伯特系统。第3节介绍主要的序列演算 G(K$_D$)、G(KD$_D$) 和 G(KT$_D$)，并证明它们的证明论性质。第4节论证所提出的序列演算具有有限模型性质，并据此给出切规则可容许性的一种替代证明。第5节证明 G(K$_D$) 和 G(KD$_D$) 的一致插值性质主定理。第6节介绍一种带有防循环机制的序列演算 G(KT$_D^+$)，并展示其结构性质。接着，第6.2节证明

[1] 作者谨此感谢佐野胜彦教授指出这一点。

G($\mathbf{KT}_D$)的一致插值性质主定理可通过 G($\mathbf{KT}_D^+$)得到。最后，针对这些系统，获得了涉及多个主体符号和命题变元的前插值公式与后插值公式的一致插值性质。

2 句法

我们固定一个有限的主体集合 Agt，并取一个由命题变元组成的可数集合 Prop。Agt 的所有非空子集构成集合 Grp。语言 $\mathcal{L}$ 的公式集归纳定义如下:

$$\alpha ::= p \mid \bot \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \vee \alpha \mid \alpha \to \alpha \mid \neg\alpha \mid D_G\alpha,$$ [2]

使得 $p \in$ Prop 且 $G \in$ Grp。大写希腊字母，例如Γ，Δ，将用于表示公式的多重集。公式 $\langle D_G\rangle\alpha$ 是 $\neg D_G\neg\alpha$。令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq n$，$\overrightarrow{\alpha_n}$表示公式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，$\overrightarrow{D_{G_n}\alpha_n}$表示公式$D_{G_1}\alpha_1, \cdots, D_{G_n}\alpha_n$。我们用 V($\alpha$) 和 Agt($\alpha$) 表示公式 α 中所有命题变元和主体符号的集合。类似地，给定公式的多重集 Γ，V(Γ) 和 Agt(Γ) 表示 Γ 中公式里所有命题变元和主体符号的集合。

定义 2.1. 形如 $D_G\alpha$ 的公式称为 最外层 G-框公式，或简称为最外层框公式。令 H，$G \in$ Grp，形如 $D_H\beta$ 且满足 $H \subseteq G$ 的公式称为 G-子公式。此外，给定公式的有限多重集 Γ，令 G，$H \in$ Grp,$a \in$ Agt，我们定义：$D_G\Gamma = \{D_G\alpha | \alpha \in \Gamma\}$, $\Gamma^{\natural_G} = \{D_G\alpha | D_G\alpha \in \Gamma\}$，$\Gamma^{\flat_G} = \{\alpha | D_G\alpha \in \Gamma\}$，$\Gamma^{\natural_{\ni a}} = \{D_G\alpha | a \in G$ 以及 $D_G\alpha \in \Gamma\}$, $\Gamma^{\flat_{\subseteq G}} = \{\alpha | D_H\alpha \in \Gamma$，其中某个 $H \subseteq G\}$。

定义 2.2. 我们按如下方式归纳定义公式 α 的所有子公式构成的集合 Sub(α):

$$\begin{aligned}
\mathsf{Sub}(p) &:= \{p\},\\
\mathsf{Sub}(\bot) &:= \{\bot\},\\
\mathsf{Sub}(D_G\alpha) &:= \mathsf{Sub}(\alpha) \cup \{D_G\alpha\},\\
\mathsf{Sub}(\neg\alpha) &:= \mathsf{Sub}(\alpha) \cup \{\neg\alpha\},\\
\mathsf{Sub}(\alpha \circ \beta) &:= \mathsf{Sub}(\alpha) \cup \mathsf{Sub}(\beta) \cup \{\alpha \circ \beta\},
\end{aligned}$$

其中 $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$。给定一组 Γ 公式，$\mathsf{Sub}(\Gamma) := \bigcup\{\mathsf{Sub}(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$.

定义 2.3。一个 $\mathcal{L}$-公式 α的权重 记作 wt(α)，其归纳定义如下:

$$\begin{aligned}
\mathsf{wt}(p) = \mathsf{wt}(\bot) &= 1\\
\mathsf{wt}(\neg\alpha) = \mathsf{wt}(D_G\alpha) &= \mathsf{wt}(\alpha) + 1\\
\mathsf{wt}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{wt}(\alpha \vee \beta) = \mathsf{wt}(\alpha \to \beta) &= \mathsf{wt}(\alpha) + \mathsf{wt}(\beta) + 1
\end{aligned}$$

给定一个公式多重集 Γ，wt(Γ) 表示所有 wt(α) 的总和，其中 $\alpha \in \Gamma$。

---

[2]在 B´ılkov´a 中，[5], 命题常元（$\bot$ 或 $\top$）并非句法中的基本元素。一般来说，我们可以将 $\bot$ 定义为例如 $p \wedge \neg p$。如果这样做，我们就需要仔细移除插值公式中出现的不需要的命题变元，以避免可能违反共享条件。然而，正如 Ono [16]中所提到的，$\Box\bot \to \bot$ 在$\mathbf{K}$中并不可证，因此并不总能移除所有命题常元。为避免这一困难，在此句法中将 $\bot$ 作为基本元素。

表1 希尔伯特系统

希尔伯特系统 $\mathbf{H}(\mathbf{K}_D)$			
	命题重言式的所有实例		
(D_K)	$D_G(\alpha \to \beta) \to (D_G\alpha \to D_G\beta)$	(包含)	$D_G\alpha \to D_H\alpha$ $(G \subseteq H)$
(MP)	由 α 和 $\alpha \to \beta$，推得 β。	(Nec)	由 α，推得 $D_G\alpha$。
希尔伯特系统 $\mathbf{H}(\mathbf{KD}_D)$			
除了 $\mathbf{H}(\mathbf{K}_D)$ 的所有公理和规则外，我们还添加			
(D_D)	$\neg D_{\{a\}}\bot$		
希尔伯特系统 $\mathbf{H}(\mathbf{KT}_D)$			
除 $\mathbf{H}(\mathbf{K}_D)$ 的所有公理和规则外，我们还加入			
(D_T)	$D_G\alpha \to \alpha$		

定义 2.4。$\mathrm{H}(\mathrm{K}_D)$、$\mathrm{H}(\mathrm{KD}_D)$、$\mathrm{H}(\mathrm{KT}_D)$ 的希尔伯特系统定义于表1中。[3]令 $\mathrm{L} \in \{\mathrm{H}(\mathrm{K}_D)$、$\mathrm{H}(\mathrm{KD}_D)$、$\mathrm{H}(\mathrm{KT}_D)\}$。给定一个公式集合 $\Gamma \cup \{\alpha\}$，当我们写作$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$时，表示 α 可由 Γ 在 L 中推导得出（如果底层的希尔伯特系统从上下文中可以明确，则我们简写为 $\Gamma \vdash \alpha$）。特别地，当 Γ 为空时，我们简写为$\vdash \alpha$，而不写 $\emptyset \vdash \alpha$。

3 序列演算与结构性质

接下来，我们转向根岑系统。序列记作 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，是由公式构成的两个有限多重集组成的有序对。多重集 Γ 是 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的前件，而 Δ 是序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的后件。序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可以理解为：“如果 Γ 中的所有公式都成立，那么 Δ 中就有某些公式成立。”

以下序列演算中的逻辑规则和初始序列与名为 **G3cp** [18, p.49] 的系统中的相同。这里的模态规则是在 Murai 和 Sano [12]（他们建立了分布式知识的根岑风格规则）以及 Su [19]（他建立了多主体模态逻辑 [4] 中一致插值性质的规则）所提出的规则基础上发展而来的。需要注意的是，在规则 (D_K) 中，n 可以是 0。

定义 3.1. 在 $\mathrm{G}(\mathbf{K}_D)$、$\mathrm{G}(\mathbf{KD}_D)$ 和 $\mathrm{G}(\mathbf{KT}_D)$中，我们称不在 Γ 和 Δ 中的公式（或多重集）在除 (D_K) 和(D_D) 之外的所有规则中为主公式。在(D_K)规则中，不在 Σ,Ω 中的公式（或多重集）为主公式。在(D_D)规则中，Γ 中的公式被定义为主公式。若一个公式（或多重集）不是主公式，则称其为规则中的上下文。

在规则 (D_K) 和 (D_D)中，多重集 Σ 和 Ω 表示推导中的上下文。对于标准的 **G3** 风格序列演算，例如在 [20],中，我们通常让上下文包含任意公式。此处，我们限制 Σ 和 Ω 仅包含命题变元、常量和模态公式，以确保该规则能与插值公式定义中的预期步骤恰当地契合。这样做的代价是，弱化的可容许性不再保持高度。此外，我们让 Σ 包含与主公式截然不同的模态公式，以便一方面使句法

[3]在 $\mathbf{H}(\mathbf{KD}_D)$ 系统中，公理 (D_D) 被限制为单个主体，因为单个主体的二元关系的串行性在交运算下并不总是得以保持（参见 [17]）。[4]就此而言，这些规则基于来自 [5] 和 [20]的单一模态规则。

表 2 G($\mathbf{K}_D$),G($\mathbf{KD}_D$),G($\mathbf{KT}_D$)的序列演算 .

	序列演算 G($\mathbf{K}_D$):
初始序列	$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta \qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$
逻辑规则	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_1 \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_1 \wedge \alpha_2}\ (R\wedge) \quad \dfrac{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\wedge)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_1,\ \alpha_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_1 \vee \alpha_2}\ (R\vee) \quad \dfrac{\alpha_1,\ \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \alpha_2,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha_1 \vee \alpha_2,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\vee)$ $\dfrac{\alpha_1,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \alpha_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \to \alpha_2}\ (R\to) \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \qquad \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha_1 \to \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\to)$ $\dfrac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}\ (R\neg) \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L\neg)$
模态规则	$\dfrac{\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_G\alpha_1, \ldots, D_G\alpha_n \Rightarrow D_G\beta, \Omega}\ (D_K)$† 对任意 $i\,(0 \le i \le n),\ G_i \subseteq G$

†: Σ 仅包含命题变元、 $\bot$ 或不是 G-子公式的最外层带框公式。Ω 仅包含命题变元、 $\bot$ 或任意最外层带框公式。

	序列演算 G($\mathbf{KD}_D$) 向 G($\mathbf{K}$ 添加以下规则 $_D$)
模态规则	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Sigma, D_{\{a\}}\Gamma \Rightarrow \Omega}\ (D_D)$‡

‡: Σ 仅包含命题变元， $\bot$ 或并非 $\{a\}$-带框的最外层带框公式。Ω仅包含命题变元， $\bot$ 或最外层带框公式。此外， $\Gamma \neq \emptyset$。

	序列演算 G($\mathbf{KT}_D$) 将以下规则添加到 G($\mathbf{K}_D$)
模态规则	$\dfrac{D_G\alpha, \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{D_G\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (D_T)$

对定义进行梳理，以便在主定理的情形 (iii) 中正确识别主公式 5.3；另一方面，使弱化规则能够适用于任意模态公式。

定义 3.2. 设 L $\in \{\mathrm{K}_D, \mathrm{KD}_D, \mathrm{KT}_D\}$。G(L) 中的推导 $\mathcal{D}$ 是由 G(L) 的初始序列通过 G(L) 的规则生成的一棵有限树。我们称 $\mathcal{D}$ 的末序列为 $\mathcal{D}$ 的根节点中的序列。推导的高度 n 是推导中从末序列到初始序列的分支的最大长度。若一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$在 G(L) 中有推导（记作：G(L) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$），则称它在 G(L) 中可推导；该推导 $\mathcal{D}$ 的末序列为 $\Gamma \Rightarrow \Delta$。记号 G(L) $\vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta$ 表示该序列的推导高度。

定义 3.3. 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D,\ \mathbf{KD}_D,\ \mathbf{KT}_D\}$ 且 G($\mathbf{L}$) 是表 2 中的一个系统。序列演算 G^c($\mathbf{L}$) 是在 G($\mathbf{L}$) 中加入以下切规则而得到的：

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda \qquad \lambda, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'.}\ (Cut)$$

当我们考察一个序列的可推导性时，会尝试从该序列出发向上构造一棵证明树。如果能够找到一棵树，使其每条分支都呈初始序列的形式，我们就称该序列是可证明的。这个过程称为反向证明搜索算法。（更多讨论请参见 Ono[16]。）

定义 3.4. 我们定义序列上的良序关系：$(\Gamma \Rightarrow \Delta) \prec (\Gamma' \Rightarrow \Delta')$ 当且仅当 wt$(\Gamma, \Delta) <$ wt(Γ', Δ')

通过观察规则前提和结论的权重，我们得到：

命题 3.5. 在$\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$ 和$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 中的任意反向证明搜索总会终止。

在下一部分中，我们将看到，在 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 中，反向证明搜索并不总是会终止。这一事实要求我们为 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 提供另一种带有防循环机制的序列。

定义 3.6. 如果某规则的一个实例的所有前提均可推导，则其结论也可推导，我们称该规则为可容许的。如果某规则的一个实例的所有前提均有高度为 n 的推导，则其结论有高度不超过 n 的推导，我们称该规则为 保持高度可容许的。如果某规则的一个实例的结论有高度为 n 的推导，则每个前提都有高度不超过 n 的推导，我们称该规则为保持高度可逆的。类似地，去掉上述关于高度的条件后，我们称该规则为可逆的。

关于以下结构性质证明的详细内容，请参阅 [18, 21, 22]。

命题 3.7。 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D、\mathbf{KD}_D、\mathbf{KT}_D\}$。弱化规则在 $\mathsf{G}(\mathbf{L})$ 中是可容许的。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda}\,(RW) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\lambda, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LW)$$

证明 我们对公式 λ 的权重和推导高度进行双重归纳。需要注意的是，弱化规则并非保持高度。□

命题 3.8。 $\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$ 中的所有逻辑规则，除(D_K) 外，都是保持高度可逆的。$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 中的所有逻辑规则，除(D_K) 和(D_D) 外，都是保持高度可逆的。$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 中的所有逻辑规则，除(D_K) 和(D_T) 外，都是保持高度可逆的。

命题 3.9。 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D、\mathbf{KD}_D、\mathbf{KT}_D\}$。收缩规则在 $\mathsf{G}(\mathbf{L})$ 中是保持高度可容许的。

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda, \lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda}\,(RC) \quad \frac{\lambda, \lambda, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\lambda, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LC)$$

证明 该证明通过对收缩公式的权重以及前提推导的高度进行归纳，同时完成。当收缩公式 λ 在推导的末尾是主公式时，逻辑规则对应的情形需要用到命题 3.8 。当收缩公式 λ 的形式为 $D_H\alpha$ 且推导中的最后一条规则是 (D_K)时，我们先考虑收缩公式不是主公式的情况：

$$\frac{\gamma_1, \ldots, \gamma_m \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_H\alpha, D_H\alpha, D_{G_1}\gamma_1, \ldots, D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\beta, \Omega}\,(D_K) \rightsquigarrow \frac{\gamma_1, \ldots, \gamma_m \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_H\alpha, D_{G_1}\gamma_1, \ldots, D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\beta, \Omega}\,(D_K)$$

其中 $G_1 \cup \cdots \cup G_m \subseteq G$和 $H \nsubseteq G$。接下来，我们考虑 λ为主公式的情形：

$$\frac{\alpha,\alpha,\gamma_1,\ldots,\gamma_m \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_H\alpha, D_H\alpha, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\beta,\Omega}\,(D_K) \rightsquigarrow \frac{\text{I.H.}\quad \alpha,\gamma_1,\ldots,\gamma_m \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_H\alpha, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\beta,\Omega}\,(D_K)$$

其中 $H \cup G_1 \cup \cdots \cup G_m \subseteq G$. 在右侧部分，由于收缩公式的权重降低，我们对假设的前提应用归纳假设。需要注意的是，为了证明收缩规则的保高可容许性，必须在 (D_T) 的前提中重复出现方框公式，见 [21, 第 9 章。1]。□

接下来证明切规则的可容许性。由于弱化规则不满足保高可容许性，我们无法直接采用标准 G3 风格序列演算的方法，例如 [21, 定理 4.15]。这里的证明采用与 [18, 定理 3.23] 中类似的论证。此外，值得注意的是，切规则的形式中没有共享上下文。

命题 3.10。 对于 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D、\mathbf{KD}_D、\mathbf{KT}_D\}$，切规则在 $\mathsf{G}(\mathbf{L})$ 中是可容许的。

$$\frac{\dfrac{\vdots\,\mathcal{D}_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\lambda}\,\mathtt{rule}(\mathcal{D}_1) \qquad \dfrac{\vdots\,\mathcal{D}_2}{\lambda,\Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,\mathtt{rule}(\mathcal{D}_2)}{\Gamma,\Gamma' \Rightarrow \Delta,\Delta'}\,(cut)$$

证明 现证明：若 (cut) 只出现在推导 $\mathcal{D}$ 的末尾，则存在一个推导，其中不出现 (cut)，且其结论与 $\mathcal{D}$ 相同。可对复杂度 （(cut) 的切公式中逻辑联结词的数量）和高度（即推导中所有序列的总数）进行双重归纳来证明这一点。论证分为以下三种情况：

(1) $\mathcal{D}_1$ 或 $\mathcal{D}_2$ 是一个初始序列。(2) 规则（$\mathcal{D}_1$）或规则（$\mathcal{D}_2$）是逻辑规则或模态规则，其中割公式不是主公式。(3) 规则（$\mathcal{D}_1$）和规则（$\mathcal{D}_2$）是逻辑规则或模态规则，并且割公式在这两个规则中都是主公式。

证明基本上遵循经典命题逻辑中切割可容许性的通常论证 [18, 定理 3。23]

我们只展示情形 (3) 下的一些例子。首先，我们考虑规则($\mathcal{D}_1$)是(D_K)、规则($\mathcal{D}_2$)是(D_D)，且割公式在这两个规则中都是主公式的情形。

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \Rightarrow \lambda\end{array}}{\Sigma, D_{\{a\}}\Gamma \Rightarrow D_{\{a\}}\lambda,\Omega}\,(D_K) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \lambda,\Gamma' \Rightarrow\end{array}}{D_{\{a\}}\lambda,\Sigma', D_{\{a\}}\Gamma' \Rightarrow \Omega'}\,(D_D)}{\Sigma,\Sigma', D_{\{a\}}\Gamma, D_{\{a\}}\Gamma' \Rightarrow \Omega,\Omega'}\,(cut)$$

然后，我们可以将推导转换为如下形式：

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma \Rightarrow \lambda\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \lambda,\Gamma' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma,\Gamma' \Rightarrow}\,(cut)}{\Sigma,\Sigma', D_{\{a\}}\Gamma, D_{\{a\}}\Gamma' \Rightarrow \Omega,\Omega'}\,(D_D)$$

在转换后的推导中，由于割公式的复杂度较低，可以消去 (*cut*) 的应用。

在情形 (3) 中，当 rule($\mathcal{D}_1$) 和 rule($\mathcal{D}_2$) 都是 (D_K)，且切公式在两个规则中都是主公式时，证明与上述情形类似。若 rule($\mathcal{D}_1$) 是 (D_K)，rule($\mathcal{D}_2$) 是 (D_T)，且切公式在两个规则中都是主公式。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_m \Rightarrow \lambda\end{array}}{\Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\lambda,\Omega}(D_K) \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ D_G\lambda,\lambda,\Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{D_G\lambda,\Gamma' \Rightarrow \Delta}(D_T)}{\Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m,\Gamma' \Rightarrow \Delta,\Omega}(cut)$$

我们可以将该推导变换为如下形式：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_m \Rightarrow \lambda\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m \Rightarrow D_G\lambda,\Omega\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ D_G\lambda,\lambda,\Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m,\lambda,\Gamma' \Rightarrow \Omega,\Delta}(cut)}{\dfrac{\gamma_1,\ldots,\gamma_m,\Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m,\Gamma' \Rightarrow \Omega,\Delta}{\Sigma, D_{G_1}\gamma_1,\ldots,D_{G_m}\gamma_m,\Gamma' \Rightarrow \Omega,\Delta}(D_T)^*}(cut)$$

其中 (D_T)* 表示将 (D_T)* 应用有限次。在变换后的推导中，最上方的 (*cut*) 应用可以因推导高度降低而消去，而倒数第二个 (*cut*) 应用则可以因割公式的复杂度降低而消去。 □

接下来，我们证明希尔伯特系统与序列演算之间的等势关系。

定义 3.11。给定一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$, $\Gamma_\star$ 表示其中所有公式的合取，$\Gamma(\Gamma_\star \equiv \top$ 若 Γ 为空), $\Delta^\star$ 表示 Δ 中唯一的公式（若 Δ 为空，则为 $\Delta^\star = \bot$）。

命题 3.12。设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。$\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 蕴含 $\mathsf{H}(\mathbf{L}) \vdash \Gamma_\star \to \Delta^\star$。

定理 3.13 (等势)。设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。以下等价关系成立：$\mathsf{H}(\mathbf{L}) \vdash \alpha$ 当且仅当 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Rightarrow \alpha$。

证明 从右到左的方向可通过应用命题 3.12来证明，其中令前件 Γ 为空。从左到右的方向可通过对 α 的推导进行归纳来证明。□

4 有限模型性质

接下来，我们将为序列演算建立有限模型性质，并给出切规则可容许性的语义证明。设 W 为状态集，$(R_G)_{G\in\mathsf{Grp}}$ 为一族二元关系，满足 $R_H \subseteq R_G$ 当且仅当 $G \subseteq H$；设 V 为从 Prop 到 $\mathcal{P}(w)$ 的赋值函数。于是，我们称有序对 $F = (W,(R_G)_{G\in\mathsf{Grp}})$ 为一个框架，称 $M = (W, (R_G)_{G\in\mathsf{Grp}}, V)$ 为一个模型。给定一个 M 和一个状态 $w \in W$，满足关系按归纳方式定义。命题情形的定义与通常相同，模态公式定义如下：$M, w \models D_G\alpha$ 当且仅当对所有 $v \in W$，若 $(w, v) \in R_G$，则 $M, v \models \alpha$.

所有模型的类记作 $\mathbb{M}$。 $\mathbb{M}_{\mathbf{ser}}$ 是所有满足 $R_{\{a\}}(\{a\} \in \mathsf{Grp})$ 为串行的模型所构成的类，也就是说，对任意 $w \in W$，都存在一个 $v \in W$ 使得 $wR_{\{a\}}v$； $\mathbb{M}_{\mathbf{ref}}$ 是所有满足 R_G ($G \in \mathsf{Grp}$) 为自反的模型所构成的类，也就是说，对任意 $w \in W$ wR_Gw。此外，$\mathbb{M}^{\mathbf{F}}$ 表示所有有限模型构成的类。我们用 $|M|$ 表示模型 M 的底层集合（或论域）。

通常，分布式知识的真值 $D_G\alpha$ 在某个状态中 w 定义为α 在所有可及状态中都为真 w，其中可及状态由群体 G中所有主体的个体可及关系之交所确定。上述模型中，每个可及关系都由主体群体索引，通常称为伪模型。区别在于，以G 为索引的二元关系不一定与该群体中各主体的个体关系之交相同。在关于带分布式知识的认知逻辑完备性的标准论证中（例如 Fagin [23]），我们通常使用一种称为树展开的方法，将模型转换为一个定义良好的模型，使得 R_G 是 $\{ R_{\{a\}} \mid a \in G \}$ 的交，同时保留公式的满足性（[17, 23]）。不过，就我们目前的目的而言，上述模型已经足够。 [5]。

本节接下来将展示序列演算 G（$\mathbf{K}_D$）、G（$\mathbf{KD}_D$）和 G（$\mathbf{KT}_D$）的有限模型性质，以及这些序列演算在上述语义下（带切）规则的可靠性。因此，可以推导出这些系统的可判定性，并通过语义证明切规则的可容许性。

给定一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，如果序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 在模型类 $\mathbb{M}$ 中有效（记作 $\mathbb{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$），则 $\mathbb{M} \models \Gamma_\star \to \Delta^\star$。回顾，$\mathsf{G}^c(\mathbf{L})$ 表示带有额外切规则的序列演算 $\mathsf{G}(\mathbf{L})$。在下面的定理中，令 $\mathbb{M}_{\mathbf{K}_D}$ 为 $\mathbb{M}$， $\mathbb{M}_{\mathbf{KD}_D}$为 $\mathbb{M}_{\mathbf{ser}}$， $\mathbb{M}_{\mathbf{KT}_D}$ 为 $\mathbb{M}_{\mathbf{ref}}$。

定理 4.1 (可靠性)。令 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D,\mathbf{KD}_D,\mathbf{KT}_D\}$。令 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 为一个序列。若$\mathsf{G}^c(\mathbf{L}) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$，则 $\mathbb{M}_{\mathbf{L}} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$。

证明 这些结论可通过对推导进行归纳法证明。我们重点讨论以下规则。

• 在规则 (D_K) 中，给定 $0 \leq i \leq n$ and，假设 $\mathbb{M} \models \alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta$，即$\mathbb{M} \models (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$。我们证明 $\mathbb{M} \models \Sigma, D_{G_1}\alpha_1, \ldots, D_{G_n}\alpha_n \Rightarrow D_G\beta, \Omega$，也就是说，$\mathbb{M} \models (\bigwedge \Sigma \wedge D_{G_1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge D_{G_n}\alpha_n) \to (D_G\beta \vee \bigvee \Omega)$。当 $n = 0$ 时，证明很直接。我们只讨论 n 不为 0 的情形。任取 M，设状态 $w \in |M|$，假设$M, w \models \bigwedge \Sigma \wedge D_{G_1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge D_{G_n}\alpha_n$。我们证明 $M, w \models D_G\beta \vee \bigvee \Omega$，这可由 $M, w \models D_G\beta$ 得出。取满足 $(w, v) \in R_G$ 的 $v \in |M|$，并证明 $M, v \models \beta$。于是，对于任意 i，有 $R_G \subseteq R_{G_i}$，因为 $G_i \subseteq G$。对于任意 i，我们有 $M, w \models D_{G_i}\alpha_i$。然后可推出 $M, v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$。最后，可得 $M, v \models \beta$。□

由此证明可知，上述不含切割的系统对于相应的模型类也显然是可靠的。接下来，我们将证明这些序列演算具有有限模型性质。本节接下来的方法基于 Takano [28]。在本节余下部分，即使 Γ, Δ 是公式集，我们也将 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 视为一个序列。

[5]如果读者对树展开的定义感兴趣，请参阅 Blackburn 等人 [24]，其中介绍了处理树状模型的一般方法。此外，也请参阅 Dummett [25] 和 Sahlqvist [26]，了解这一方法的发展、Fagin [23], 中关于$\mathbf{S5}$ 的论证，以及 [27]中对这一方法的改进。

定义 4.2. 如果对于有限框架类 $\mathbb{M}^{\mathbf{F}}$，序列演算 G 满足有限模型性质，那么我们称 G 具有该性质；若 $\mathbb{M}^{\mathbf{F}} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$，则 $\mathsf{G} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

定义 4.3。设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D、\mathbf{KD}_D、\mathbf{KT}_D\}$。设 Ω 为一个有限的公式子公式封闭集。给定一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，若其满足以下条件，则称它在 $\mathsf{G}(\mathbf{L})$中是Ω-饱和的：1，$\mathsf{G}(\mathbf{L}) \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$；2，对于任意公式 α，若其属于Ω，且 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \nvdash \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta$，则 $\alpha \in \Gamma$；3，对于任意公式 β，若其属于Ω，且 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta$，则 $\beta \in \Delta$。

命题 4.4。设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。设 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 为一个序列，且它在$\mathsf{G}(\mathbf{L})$中不可导。设 Ω 为一个有限子公式闭集，且 $\Gamma、\Delta \subseteq \Omega$。那么我们可以构造一个Ω-饱和序列 $\Theta \Rightarrow \Pi$，使其属于$\mathsf{G}(\mathbf{L})$，并且满足 $\Gamma \subseteq \Theta$和 $\Delta \subseteq \Pi$.

证明 考虑将 Ω 中所有公式（Ω 是有限的）枚举为 $\phi_1, \ldots, \phi_n$. 我们归纳地定义 $(\Theta_k)_{k \leq n}$。令 $\Theta_0 \Rightarrow \Pi_0$ 为 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，然后按如下方式定义 $\Theta_{k+1} \Rightarrow \Pi_{k+1}$：
1. 如果 $\nvdash \Theta_k \Rightarrow \Pi_k, \phi_k$，则 $\Theta_{k+1} = \Theta_k, \Pi_{k+1} = \Pi_k \cup \{\phi_k\}$；2. 如果 $\vdash \Theta_k \Rightarrow \Pi_k, \phi_k$ 且 $\nvdash \phi_k, \Theta_k \Rightarrow \Pi_k$，则 $\Theta_{k+1} = \Theta_k \cup \{\phi_k\}, \Pi_{k+1} = \Pi_k$；3. 否则，$\Theta_{k+1} = \Theta_k, \Pi_{k+1} = \Pi_k$。

最后，令 $\Theta = \Theta_{n+1}, \Pi = \Pi_{n+1}$。 □

定义 4.5. 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。设 Ω 是一个有限的、对公式子式封闭的公式集合。Ω-模型 $M_\Omega = ((W, (R_G)_{G \in \mathsf{Grp}}, V))$ 定义如下：

1. $W = \{(\Theta, \Pi) | \Theta \cup \Pi \subseteq \Omega$ 且 $\Theta \Rightarrow \Pi$ 在 $\mathsf{G}(\mathbf{L})\}$ 中是Ω-饱和的；2. $(\Theta, \Pi) R_G (\Theta', \Pi')$ 当且仅当 $\Theta^{\flat G'} \subseteq \Theta'$ 对于任意满足 $G' \in \mathsf{Grp}$ 的 $G' \subseteq G$；3. $(\Theta, \Pi) \in V(p)$ 当且仅当 $p \in \Theta$。

需要指出的是，W 是有限的，因为Ω是有限的。

命题 4.6. 设$\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。设Ω 是一个由公式构成的有限子公式封闭集。$\mathsf{G}(\mathbf{L})$中的一个Ω-模型属于 $\mathbb{M}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{L}}$。

引理 4.7. 设Ω 是一个由公式构成的有限子公式封闭集。对于任意$(\Theta, \Pi) \in |M_\Omega|$，对于任意公式 α，有：

1. $\alpha \in \Theta$ 蕴含 $M_\Omega, (\Theta, \Pi) \models \alpha$;
2. $\alpha \in \Pi$ 蕴含 $M_\Omega, (\Theta, \Pi) \nvDash \alpha$。

证明 我们对 α进行归纳。当 α 是 $D_G\beta$时，论证如下。我们假设 $D_G\beta \in \Theta$，并旨在证明 $M_\Omega, (\Theta, \Pi) \models D_G\beta$。任取满足 $(\Theta, \Pi) R_G (\Theta', \Pi')$ 的 (Θ', Π')。根据定义，对于 $G \subseteq G$，我们有 $\Theta^{\flat G} \subseteq \Theta'$，由此可推出 $\beta \in \Theta'$。应用归纳假设，可得 $M_\Omega, (\Theta', \Pi') \models \beta$。对于条件 (2)，我们假设 $D_G\beta \in \Pi$。由于$\nvdash \Theta \Rightarrow \Pi$，对于由 G 的所有子群构成的有限族 $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$，我们有 $\nvdash \Theta^{\flat G_1}, \cdots, \Theta^{\flat G_n} \Rightarrow \beta$。为说明这一点，假设 $\vdash \Theta^{\flat G_1}, \cdots, \Theta^{\flat G_n} \Rightarrow \beta$，则会导致矛盾。应用 (D_K) 和弱化规则后，我们可推出 $\vdash \Theta \Rightarrow \Pi$，这会导致矛盾。于是，我们可以构造一个

$(\Theta', \Pi') \in W$，使得根据命题 4.4，有 $\Theta^{\flat G_1} \cup \cdots \cup \Theta^{\flat G_n} \subseteq \Theta'$ 和 $\{\beta\} \subseteq \Pi'$。于是，对于任意 $G_i \subseteq G$，我们有 $\Theta^{\flat G_i} \subseteq \Theta'$。根据二元关系的定义，有 $(\Theta, \Pi) R_G (\Theta', \Pi')$。此外，根据归纳假设，$\beta \in \Pi'$ 蕴含 M_Ω，$(\Theta', \Pi') \nvdash \beta$。其他情况均属标准情况。□

定理4.8。 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。给定一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，若 $\mathbb{M}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{F}} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$则 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

证明 首先，假设 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. 令 $\Omega = \mathsf{Sub}(\Gamma \cup \Delta)$。显然，$\Omega$ 是有限的且子公式封闭。应用命题 4.4，存在一个 Ω-饱和相继式 $\Theta \Rightarrow \Pi$ 属于$\mathsf{G}(\mathbf{L})$，使得 $\Gamma \subseteq \Theta$并且 $\Delta \subseteq \Pi$。然后，应用引理 4.7即可得到结果。□

推论4.9。 序列演算 $\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$、$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 和 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 是可判定的。

以下结果为命题 3.10所述同一结果提供了另一种证明。

推论4.10。 切规则在 $\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$、$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 和 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$中是可容许的。

证明 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D, \mathbf{KT}_D\}$。给定一个序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，使得 $\mathsf{G}^c(\mathbf{L}) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. 根据定理 4.1中的可靠性，我们得到 $\mathbb{M}_{\mathbf{L}} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$. 由此可推出 $\mathbb{M}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{F}} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$. 然后，根据定理 $\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 4.8。□

5 G(K$_D$) 和 G(KD$_D$) 的主定理

现在，我们可以证明 $\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$ 和 $\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$的主定理。我们采用的方法源自 [1] 在命题直觉主义逻辑中的研究，并由 [5] 进一步发展到模态逻辑中。我们先固定一个命题变元 p 和一个主体符号 a，然后定义一种算法，用于生成序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$的插值公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$。这一语法算法与 $\Gamma \Rightarrow \Delta$上的证明搜索相对应。生成的插值公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 不包含 p 和 a，但仍保持所需的可推导性。其思路是定义一个插值公式，以反映对证明树中基于 p 和 a的出现而构建的某些部分进行分离和改写的操作。

定义 5.1. 设 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D\}$ 设 Γ，Δ 为公式的有限多重集，p 为命题变元，a 为主体符号。我们称序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是临界 的，如果Γ 与 Δ 仅包含命题变元、$\bot$ 或最外层带框公式。 $\mathcal{A}$-公式$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)$ 归纳定义如下。

	$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 并非关键，且 $\Gamma;\ \Delta$ 匹配	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 等于
1	$\Gamma', \alpha_1 \wedge \alpha_2;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma',\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \Delta)$
2	$\Gamma;\ \alpha_1 \wedge \alpha_2,\ \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}\ (\Gamma;\ \alpha_1,\ \Delta') \wedge \mathcal{A}_{(p,a)}\ (\Gamma;\ \alpha_2,\ \Delta')$
3	$\Gamma', \alpha_1 \vee \alpha_2;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma',\ \alpha_1;\ \Delta) \wedge \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma',\ \alpha_2;\ \Delta)$
4	$\Gamma;\ \alpha_1 \vee \alpha_2,\ \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma';\ \alpha_1, \alpha_2, \Delta')$
5	$\Gamma', \neg\alpha;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma';\ \alpha,\ \Delta)$
6	$\Gamma;\ \neg\alpha,\ \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma,\ \alpha; \Delta')$
7	$\Gamma',\ \alpha_1 \to \alpha_2;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}\ (\Gamma';\ \Delta,\ \alpha_1) \wedge \mathcal{A}_p\ (\Gamma',\ \alpha_2;\ \Delta)$
8	$\Gamma;\ \alpha_1 \to \alpha_2,\ \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}\ (\Gamma,\ \alpha_1;\ \Delta',\ \alpha_2)$

	$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是关键的，且 $\Gamma;\ \Delta$ 匹配	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 等于
9	$\Gamma', p;\ \Delta', p$	$\top$
10	$\Gamma',\ D_{\{a\}}\Gamma'';\ \Delta',\ D_{\{a\}}B$，其中 $\mathsf{G(L)} \vdash \Gamma'' \Rightarrow B$	$\top$
$10'$†	$\Gamma',\ D_{\{a\}}\Gamma'';\ \Delta$，其中 $\mathsf{G(KD}_D\mathsf{)} \vdash \Gamma'' \Rightarrow$	$\top$
11‡	$\Phi, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}; \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi$	X

†：第 $10'$ 行仅用于 $\mathsf{G(KD}_D\mathsf{)}$。

‡： Φ 和 Ψ 是包含命题变元或 $\bot$的多重集。 $\Phi \cup \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \cup \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n} \cup \Psi$非空。 公式 X 为：

$$\bigvee_{r\in\Phi/\{p\}} \neg r \vee \bigvee_{q\in\Psi/\{p\}} q \vee \bigvee_{\bot\in\Phi} \neg\bot \vee \bigvee_{\bot\in\Psi} \bot \vee \bigvee_{D_{G_j}\gamma_j \in \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}/\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\natural\ni a}} \langle D_{G_j}\rangle \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j}; \emptyset)$$

$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}/\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}} D_{H_i}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i}; \delta_i)$$

$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a} \text{ with } H_i \neq \{a\}} D_{H_i/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i}; \delta_i)$$

回顾，对任意公式 α，$n \in \mathbb{N}$、$\overrightarrow{\alpha_n}$表示 α_1，$\cdots$、α_n、$\overrightarrow{D_{G_n}\alpha_n}$表示公式 $D_{G_1}\alpha_1$、$\cdots$、$D_{G_n}\alpha_n$。 $\Gamma^{\natural\ni a} = \{D_G\alpha | a \in G$与 $D_G\alpha \in \Gamma\}$、$\Gamma^{\flat\subseteq G} = \{\alpha | D_H\alpha \in \Gamma$ 对某个 $H \subseteq G\}$。公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 按如下过程定义：首先，反复应用行 $1-8$，直至到达一个临界序列（次序无关紧要，因为根据命题 3.8，所有命题规则都是保高度可逆的）。接下来，我们检验它是否匹配第 9 行、第 10 行（或 $\mathsf{G(KD}_D\mathsf{)}$ 中的 $10'$）。若均不匹配，则应用第 11 行。我们重复上述过程，直到 $\Gamma;\ \Delta$ 无法匹配表中的任何一行；在此情况下，$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 定义为 $\bot$。若 X 不满足这些条件，则 X 为 $\bot$。特别地，$\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset;\ \emptyset)$ 定义为 $\bot$。[6]

我们注意到，对于右侧定义的任意 $\mathcal{A}$-公式，其权重总是低于与之对应的右侧部分。我们可以如下定义 $\mathcal{A}$-公式的良序关系：$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta) \prec \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma';\Delta')$ 当且仅当 $\mathsf{wt}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \prec \mathsf{wt}(\Gamma' \Rightarrow \Delta')$。鉴于

[6]上文的第 10 行和 $10'$ 行是必要的，用于处理以下主定理 5.3 的 (iii) 中出现的推导以规则 (D_K) 或 (D_D) 结束，且公式 $D_{\{a\}}$ 成为主公式的情况。这些情况会显著增加计算时间。然而，我们需要这些定义来将公式转换为插值公式，使其预期的可推导性不依赖于对主体 a应用模态规则，因为 a 这样的命题变元 p（与第 9 行中类似地处理的情况相同）不应出现在插值公式中。

所有 $\mathsf{G}(\mathbf{K}_D)$、$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 中的反向证明搜索总会终止（命题 3.5），并且第 11 行具有可判定性，因此我们可以看出，这样的公式总是可以确定的。

例。令 Γ 为 $D_{\{1\}}q$，$D_{\{3\}}p, \Delta$ 为 $D_{\{1,2\}}r$。

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(p,1)}(\Gamma;\Delta) &= \mathcal{A}_{(p,1)}(D_{\{1\}}q, D_{\{3\}}p; D_{\{1,2\}}r)\\ &= \langle D_{\{3\}}\rangle\mathcal{A}_{(p,1)}(p;\emptyset) \vee \langle D_{\{2\}}\rangle\mathcal{A}_{(p,1)}(q;r) \quad \text{from the Line 11}\\ &= \langle D_{\{3\}}\rangle\bot \vee \langle D_{\{2\}}\rangle(\neg q \vee r) \qquad\qquad\quad \text{from the Line 11}\end{aligned}$$

命题 *5.2*。令 $L \in \{K_D, KD_D\}$。给定任意公式多重集 Γ, Δ、命题变元 p 和 q，以及满足 $p \neq q$ 的主体符号 a。我们有：*1*，$G(L) \vdash q \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta, q)$; *2*，$G(L) \vdash\Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma, q; \Delta)$ q; *3*，$G(L) \vdash\Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(q, \Gamma; \Delta, q)$。

定理 5.3。令 $\mathbf{L} \in \{\mathbf{K}_D, \mathbf{KD}_D\}$。令 Γ, Δ 为有限公式多重集。对于任意命题变元 p和任意主体符号 a，存在一个公式$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta)$ 使得：

(i) $V(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)) \subseteq V(\Gamma \cup \Delta)\backslash\{p\}$，$Agt(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta)) \subseteq Agt(\Gamma \cup \Delta)\backslash\{a\}$；*(ii)* $G(L) \vdash \Gamma, \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta) \Rightarrow \Delta$；*(iii)* 给定公式的有限多重集 Π, Λ，使得：$p \notin V(\Pi \cup \Lambda)$，$a \notin Agt(\Pi \cup \Lambda)$ 且 $G(L) \vdash \Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Lambda$，则 $G(L) \vdash \Pi \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta)\ \Lambda$。

证明(i) 的证明可通过检视定义5.1中的表得到。(ii) 的证明可通过对 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)$的权重运用归纳法来证明。我们证明$\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Gamma, \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\Delta) \Rightarrow \Delta$ 对于定义5.1中表的每一行成立。第1行至第9行的情形是直接的。在第10行以及10′′中，我们可以得到：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma'' \Rightarrow B}{D_{\{a\}}\Gamma'' \Rightarrow D_{\{a\}}B}\,(D_K)}{\Gamma', D_{\{a\}}\Gamma'', \top \Rightarrow \Delta', D_{\{a\}}B}\,(Weakening)^* \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma'' \Rightarrow}{D_{\{a\}}\Gamma'' \Rightarrow}\,(D_D)}{\Gamma', D_{\{a\}}\Gamma'', \top \Rightarrow \Delta}\,(Weakening)^*$$

对于第 11 行，思路是先证明每个合取项的情形，然后用（$L\vee$）将它们组合起来。对于每个 $r \in \Phi/\{p\}$，$\mathbf{G(L)} \vdash \Phi,\ \neg r,\ \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\ \Psi$；对于每个 $q \in \Psi/\{p\}$，$\mathbf{G(L)} \vdash \Phi,\ q,\ \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\ \Psi$；对于每个 $\bot \in \Psi$，$\mathbf{G(L)} \vdash \Phi,\ \bot,\ \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\ \Psi$；对于每个 $\bot \in \Phi$，$\mathbf{G(L)} \vdash \Phi,\ \neg\bot,\ \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\ \Psi$。

• 对于每个 $D_{G_j}\gamma_j \in \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}/\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\natural_{\ni a}}$，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{I.H.}}{\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j}, \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset) \Rightarrow}\,(R\neg)}{\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j} \Rightarrow \neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset)}\,(D_K)}{\Phi, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow D_{G_j}\neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset), \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi}\,(L\neg)}{\Phi, \langle D_{G_j}\rangle\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset), \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi}$$

• 对于每个 $D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}/\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}$，由归纳假设可得：

$$\frac{\text{I.H.}\quad \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i}, \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i) \Rightarrow \delta_i}{\Phi, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, D_{H_i}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i) \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi}\,(D_K)$$

• 对每个 $D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}$ 和 $H_i \neq \{a\}$。由归纳假设，

$$\frac{\text{I.H.}\quad \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i}, \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i) \Rightarrow \delta_i}{\Phi, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, D_{H_i/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i) \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi}\,(D_K)$$

最后，有限次应用 $(L\vee)$，我们得到如下结果：

$$\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \bigvee_{r\in\Phi/\{p\}} \neg r \vee \bigvee_{q\in\Psi/\{p\}} q \vee \bigvee_{\bot\in\Phi} \neg\bot \vee \bigvee_{\bot\in\Psi} \bot \vee \bigvee_{D_{G_j}\gamma_j \in \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}/\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\natural\ni a}} \langle D_{G_j}\rangle \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset)$$
$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}/\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}} D_{H_i}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i)$$
$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i \in \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a} \text{ with } H_i\neq\{a\}} D_{H_i/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i), \Phi, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \Rightarrow \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}, \Psi$$

(iii) 中，我们考察推导 $\Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Lambda$ 中最后应用的规则。当它是一个初始序列时，我们需要命题 5.2。当最后一条规则属于命题逻辑规则时，根据命题 3.8 中的保持高度可逆性，证明是直接的。

当最后一条规则是 (D_K) 时，我们假设推导以如下形式结束：$\Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Lambda$ 和 $p \notin \mathsf{V}(\Pi \cup \Lambda)$，$a \notin \mathsf{Agt}(\Pi \cup \Lambda)$。论证分为以下几种情况：

1. 右主公式 $D_H\alpha$ 位于多重集 Λ 中。

$$\frac{\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n} \Rightarrow D_H\alpha, \Lambda', \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi}\,(D_K)$$

其中 $\bigcup\overrightarrow{P_m} \cup \bigcup\overrightarrow{G_n} \subseteq H$，其中，$\Pi'$，$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$ 是 Π，且 Π' 包含命题变元、$\bot$ 和非 H-子式的最外层带框公式；Φ，$\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}$，$\overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$ 是 Γ，其中 $\overrightarrow{G'_j}$ 的任意群都不是 H 的子集，Φ 只包含命题变元或 $\bot$；$D_H\alpha$，Λ' 是 Λ，且 Λ' 包含命题变元和最外层带框公式；$\overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}$，$\Psi$ 是 Δ，且 Ψ 只包含命题变元，$\bot$。在这种情况下，$a \notin H$，因为 $a \notin \mathsf{Agt}(\Lambda)$。

（a）Γ 中的某些公式是主公式，也就是说 $\overrightarrow{\gamma_n}$ 非空。在这种情况下，我们得到 p 和 a 不是来自假设的公式 $\overrightarrow{\pi_m}$，α。应用归纳假设后，我们得到

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\text{I.H}}{\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset), \alpha}\,(L\neg)}{\overrightarrow{\pi_m}, \neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset) \Rightarrow \alpha}\,(D_K)}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, D_{G_i}\neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset) \Rightarrow D_H\alpha, \Lambda'}\,(R\neg)}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \Rightarrow \langle D_{G_i}\rangle\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset), D_H\alpha, \Lambda'}$$

其中 i n d a $\in$ / D i a $\in$ / H D_{G_i} $\subseteq$ 属于 an、H s nce 和。特别地，等于 $\overrightarrow{\gamma_n}$ $\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat\subseteq H}$。于是，我们有

$\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \quad \Rightarrow \quad \langle D_{G_i}\rangle \mathcal{A}_{(p,a)}(\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat \subseteq H}; \emptyset)\ D_H\alpha, \Lambda'$。多次应用（ $R\vee$ $\Pi'\ \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \quad \Rightarrow$）和弱化规则后，我们得到，
$\mathcal{A}_{(p,a)}\ \Phi\ \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}\ \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\ \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}\ \Psi \quad D_H\alpha\ \Lambda'$
(,,; ,),。

(b) Γ 中的所有公式都不是主公式。也就是说，$\overrightarrow{\gamma_n}$ 为空，且主公式都在Π 和 Λ中。由于 $\Pi \Rightarrow \Lambda$ 可由假设导出，我们可以应用右弱化规则来导出所需结果。

2. 右主公式 $D_H\alpha$ 属于多重集 Δ，并且 $a \notin H$。

$$\frac{\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n} \Rightarrow D_H\alpha, \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi, \Lambda}\ (D_K)$$

与 $\bigcup\overrightarrow{P_m} \cup \bigcup\overrightarrow{G_n} \subseteq H$及任意 $G'_j \not\subseteq H$一起，其中 Π'，$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$是 Π，而 Π'包含命题变元，$\bot$和不属于 H-sub 的最外层带框公式。对于任意一组 $\overrightarrow{P_m}$，它是$H/\{a\}$的子集，因为 a 不能出现在 Π中；Φ，$\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}$，$\overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$是 Γ，其中任意一组 $\overrightarrow{G'_j}$都不是 H的子集，Φ仅包含命题变元或 $\bot$；$D_H\alpha$，$\overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}$，$\Psi$是 Δ，且 Ψ仅包含命题变元，$\bot$。根据假设，p 和 a不在 $\overrightarrow{\pi_m}$中。由归纳假设可得:

$$\frac{\text{I.H.}\quad \overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha)}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \Rightarrow D_H\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha), \Lambda}\ (D_K)$$

于是，$\overrightarrow{\gamma_n}$ $\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat \subseteq H}$ $\Pi'\ \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \quad \Rightarrow$等于 。我们有,(;)。然后，我们多次应用( )规则。
$D_H\mathcal{A}_{(p,a)}\ \{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat \subseteq H}\ \alpha \quad \Lambda \qquad R\vee$

3. 右主公式 $D_H\alpha$ 在多重集 Δ中，且 $a \in H$。

$$\frac{\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n} \Rightarrow D_H\alpha, \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi, \Lambda}\ (D_K)$$

其中 $\bigcup\overrightarrow{P_m} \cup \bigcup\overrightarrow{G_n} \subseteq H$，且 $\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$为 Π，并且 Π'包含命题变元、$\bot$以及非 H-子的最外层带框公式。对于 $\overrightarrow{P_m}$的任意一组，它是 $H/\{a\}$的子集，因为 a不能出现在 Π中；$\Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$为 Γ，其中 $\overrightarrow{G'_j}$的任意一组都不是 H的子集，Φ仅包含命题变元或 $\bot$；$D_H\alpha, \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi$为 Δ，并且 Ψ仅包含命题变元 $\bot$。根据 H是否等于 $\{a\}$，我们区分以下子情况。

(a) 当公式 $\overrightarrow{\pi_m}$ 不包含 $H \neq \{a\}$、p 和 a，且这些符号不出现在假设中时，根据归纳假设，

$$\frac{\text{I.H.}\quad \overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha)}{\Pi', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \Rightarrow D_{H/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha), \Lambda}\ (D_K)$$

其中 $\bigcup\overrightarrow{P_m} \subseteq H/\{a\}$因为 $a \in H$，正如我们上文所述。此外，$\overrightarrow{\gamma_n}$ $\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat \subseteq H}$ $\Pi'\ \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m} \quad \Rightarrow$等于 。
$D_{H/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}\ \{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}\}^{\flat \subseteq H}\ \alpha \quad \Lambda \qquad R\vee$

于是，我们有，(;)。接下来，我们多次应用 ( )，以得到所需的结果。

(b) 当 $H = \{a\}$, $\overrightarrow{\pi}$ 必须为空时，推导结束如下:

$$\frac{\overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Pi, \Phi, \overrightarrow{D_{G_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{\{a\}}\gamma_n} \Rightarrow D_{\{a\}}\alpha, \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi, \Lambda}\,(D_K)$$

由于 $\overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha$ 可推导，$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Phi, \overrightarrow{D_{G_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{\{a\}}\gamma_n}; D_{\{a\}}\alpha, \overrightarrow{D_{H'_k}\delta_k}, \Psi)$ 可由 the $\top$ 推导出。定义 5.1 (第 10 行）。显然，$\mathsf{G}(\mathbf{L}) \vdash \Pi \Rightarrow \top, \Lambda$.

最后要考察 (iii) 的条件，是 $\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D)$ 的 (D_D) 情形。当 $\Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Lambda$ 的推导以如下形式结束时：

$$\frac{\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow}{\Pi', D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m}, \Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, D_{\{b\}}\overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,(D_D)$$

其中 Π'，$D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m}$是 Π，而 Π'包含命题变元、$\bot$和非 $\{b\}$-子最外层带框公式；Φ，$\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}$，$D_{\{b\}}\overrightarrow{\gamma_n}$是 Γ，其中任意一组 $\overrightarrow{G'_j}$都不是 $\{b\}$的子集；Φ仅包含命题变元或 $\bot$。根据 b是否等于 a，我们考虑以下两种情况：1. 当 $b \neq a$时，我们区分两种子情况：

(a) 若 $\overrightarrow{\gamma_n}$ 不为空，根据假设，p和 a 不会出现在 $\overrightarrow{\pi_m}$ 中。然后，由归纳假设可得：

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset)}{\overrightarrow{\pi_m}, \neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset) \Rightarrow}\,(L\neg)}{\Pi', D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m}, D_{\{b\}}\neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset) \Rightarrow \Lambda}\,(D_K)}{\Pi', D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \langle D_{\{b\}}\rangle\mathcal{A}_{(p,a)}(\overrightarrow{\gamma_n};\emptyset), \Lambda}\,(R\neg)$$

那么，$\overrightarrow{\gamma_n}$ $\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{\{b\}}\gamma_n}\}^{\flat\subseteq\{b\}}$ $\flat$. Π' $D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow$等于也就是说，,,(;) 在 $\langle D_{\{b\}}\rangle\mathcal{A}_{(p,a)}$ $\{\overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, \overrightarrow{D_{\{b\}}\gamma_n}\}^{\flat\subseteq\{b\}}$ $\emptyset$ Λ $_D$ $\mathsf{G}(\mathbf{KD})$ 中可导出。最后，我们应用

$(R\vee)$ 多次，可得 $\Pi', D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m}, \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, D_{\{b\}}\overrightarrow{\gamma_n}; \Delta)$ Λ

(b) 若$\overrightarrow{\gamma_m}$ 为空，因此我们得到：

$$\frac{\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow}{\Pi', D_{\{b\}}\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \Lambda}\,(D_D)$$

然后，我们应用（RW）得到所需结果 .

2. 当 $b = a$，$\overrightarrow{\pi_m}$为空，因为 a不出现在 Π中。这意味着 $\overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow$可导。根据定义 5.1 (第 $10'$行），$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Phi, \overrightarrow{D_{G'_j}\beta_j}, D_{\{b\}}\overrightarrow{\gamma_n}; \Delta)$是 $\top$。显然，$\mathsf{G}(\mathbf{KD}_D) \vdash \Pi \Rightarrow \top, \Lambda$。□

6 LogicKT 中的一致插值性质$_D$

6.1 序列演算的证明论性质

推导 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 中可能出现的循环会给 $\mathcal{A}$-公式的定义带来困难。下文将介绍一种内置循环检查机制的序列演算。该序列演算是对 [5], 中的单模态演算的扩展，其灵感来源于[29]的工作。一个**T**-序列（记作 $\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta$ ）是在序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$中加入有限多重集 Σ 得到的，其中 Σ仅包含最外层带框公式。

在 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}^{+}_{D})$ 中，我们称 Σ, Γ, Δ,Ω 和 Π 中的多重集在所有规则中为上下文 。若某公式（或多重集）不在上下文中，则称其在某规则中为主公式。推导、（保持高度）可容许性以及（保持高度）可逆性的定义与 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$ 中的定义类似。

表3 系统 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$。

Sequent Calculus $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$:

Initial Sequents $\Sigma|\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta \qquad \Sigma|\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$

Logical Rules

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \qquad \Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_2}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \wedge \alpha_2}\,(R\wedge) \qquad \frac{\Sigma|\alpha_1, \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\alpha_1 \wedge \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\wedge)$$

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1, \alpha_2}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \vee \alpha_2}\,(R\vee) \qquad \frac{\Sigma|\alpha_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma|\alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\alpha_1 \vee \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\vee)$$

$$\frac{\Sigma|\alpha_1, \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_2}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \to \alpha_2}\,(R\to) \qquad \frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_1 \qquad \Sigma|\alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\alpha_1 \to \alpha_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\to)$$

$$\frac{\Sigma|\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}\,(R\neg) \qquad \frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Sigma|\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L\neg)$$

Modal Rule

$$\frac{\emptyset|\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta}{\Sigma, D_{G_1}\alpha_1, \ldots, D_{G_n}\alpha_n|\Pi \Rightarrow D_G\beta, \Omega}\,(D_K^+)\dagger \text{ for any } i\ (0 \le i \le n), G_i \subseteq G$$

$$\frac{D_G\alpha, \Sigma|\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\Gamma, D_G\alpha \Rightarrow \Delta}\,(D_T^+)$$

†: Σ contains only formulas boxed by modalities which are in G; Π contains only propositional variables; Ω contains only G-sub formulas

仅包含命题变元；Σ 或最外层带框的公式

定义6.1. 设 α 为一个公式，$\mathsf{b}(\alpha)$ 为A中最外层框子公式的个数。给定集合 Γ，$\mathsf{b}(\Gamma)$ 表示对 $\alpha \in \Gamma$ 的所有 $\mathsf{b}(\alpha)$ 之和。给定公式的多重集 $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta'$：$\langle \mathsf{b}(\Gamma), \mathsf{wt}(\Delta)\rangle < \langle \mathsf{b}(\Gamma'), \mathsf{wt}(\Delta')\rangle$ 表示一对自然数上的字典序。我们定义 T-序列的良序关系：$(\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta) \prec (\Sigma'|\Gamma' \Rightarrow \Delta')$ 当且仅当 $\langle \mathsf{b}(\Sigma, \Gamma, \Delta), \mathsf{wt}(\Gamma, \Delta)\rangle < \langle \mathsf{b}(\Sigma', \Gamma', \Delta'), \mathsf{wt}(\Gamma', \Delta')\rangle$。

命题 6.2。 在$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$中的反向证明搜索总是会终止。

证明 考虑 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$ 中的一条规则 $(\circ)$，如下所示

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \ldots}{\Sigma'|\Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,(\circ)$$

我们证明，对于任意前提 $\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta$ 和结论 $\Sigma'|\Gamma' \Rightarrow \Delta'$，$\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta \prec \Sigma'|\Gamma' \Rightarrow \Delta'$。令 $(\bullet)$ 为任意一条逻辑规则。我们有 $\mathsf{b}(\Sigma, \Gamma, \Delta) = \mathsf{b}(\Sigma', \Gamma', \Delta')$，然而 $\mathsf{wt}(\Gamma, \Delta) < \mathsf{wt}(\Gamma', \Delta')$。令 $(\circ)$ 为 (D_T^+)。我们仍有 $\mathsf{b}(\Sigma, \Gamma, \Delta) = \mathsf{b}(\Sigma', \Gamma', \Delta')$，且 $\mathsf{wt}(\Gamma, \Delta) < \mathsf{wt}(\Gamma', \Delta')$。令 $(\circ)$ 为 (D_K^+)。我们有 $\mathsf{b}(\Sigma, \Gamma, \Delta) < \mathsf{b}(\Sigma', \Gamma', \Delta')$。□

命题6.3。 以下弱化规则在$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$中是可容许的。

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}\,(RW) \qquad \frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LW) \qquad \frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma, D_G\alpha|\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LW^+)$$

命题 6.4。 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$中的所有规则，除$(D_K^+)$外，都是保持高度可逆的。

命题6.5。 以下收缩规则在$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$中是保持高度可容许的。

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(RC) \qquad \frac{\Sigma|A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma|A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LC) \qquad \frac{\Sigma, D_G A, D_G A|\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Sigma, D_G A|\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(LC^+)$$

切割的一种预期形式如下：

$$\frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda \qquad \Sigma'|\lambda, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Sigma', \Sigma|\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut')$$

正如 [5, 引理 48] 中所指出的，这并不具备可容许性。不过，由于我们的目标是证明一致插值，以下形式的切规则具备可容许性便已足够。

命题 6.6。 以下切规则在$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$中是可容许的。

$$\frac{\emptyset|\Gamma \Rightarrow \Delta, \lambda \qquad \emptyset|\lambda, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\emptyset|\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut_1) \qquad \frac{\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta, D_G\lambda \qquad D_G\lambda, \Sigma'|\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Sigma', \Sigma|\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut_2)$$

证明 我们仿照命题 3.10 中的论证，同时证明这些结果。这里只说明以下情形，其余情形类似。考虑规则$(\mathcal{D}_1)$是(D_K^+)，规则$(\mathcal{D}_2)$也是(D_K^+)，并且切公式在两条规则中都是主公式。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \emptyset|\overrightarrow{\gamma_m} \Rightarrow \lambda\end{array}}{\Sigma, \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}|\Pi \Rightarrow D_G\lambda, \Omega}\,(D_K^+) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \emptyset|\lambda, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \beta\end{array}}{D_G\lambda, \Sigma', \overrightarrow{D_{H_n}\gamma_n}|\Pi' \Rightarrow D_H\beta, \Omega'}\,(D_K^+)}{\Sigma, \Sigma', \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, \overrightarrow{D_{H_n}\gamma_n}|\Pi, \Pi' \Rightarrow D_H\beta, \Omega, \Omega'}\,(cut_2)$$

于是我们可以将该推导变换为如下形式：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \emptyset|\overrightarrow{\gamma_m} \Rightarrow \lambda\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \emptyset|\lambda, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \beta\end{array}}{\emptyset|\overrightarrow{\gamma_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \beta}\,(cut_1)}{\Sigma', \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, \overrightarrow{D_{H_n}\gamma_n}|\Pi, \Pi' \Rightarrow D_H\beta, \Omega, \Omega'}\,(D_K^+)}{\Sigma, \Sigma', \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}, \overrightarrow{D_{H_n}\gamma_n}|\Pi, \Pi' \Rightarrow D_H\beta, \Omega, \Omega'}\,(LW^+)^*$$

在变换后的推导中，由于割公式的复杂度较低，应用（cut_1）可以消去。包含条件很容易验证。□

考察$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$和$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$的所有规则后，可得以下结果。

命题 6.7。 给定 $\mathcal{L}$ 中的公式多重集 Γ、Δ：如果$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+) \vdash \Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta$，那么$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D) \vdash \Sigma, \Gamma \Rightarrow \Delta$。

引理 6.8。 给定 $\mathcal{L}$ 中的公式多重集 Γ、Δ：$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当$\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+) \vdash \emptyset|\Gamma \Rightarrow \Delta$。

证明 从右到左的方向可由命题 6.7 得出。从左到右的方向可通过对推导进行归纳法证明。□

6.2 G(KT$_D$)的主定理

那么，类似于定义 5.1，我们可以如下定义 $\mathcal{A}$-公式在 **T**-序列中。

定义6.9。 我们称一个**T**-序列 $\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta$ 是临界的，如果 Γ 仅包含命题变元，且 $\bot$、Σ 仅包含最外层框公式，而 Δ 仅包含命题变元， $\bot$ 和最外层框公式

定义 6.10。 设 Γ, Δ 是公式的有限多重集， Σ 是最外层框公式的有限多重集， p是一个命题变元， a 是一个主体符号。一个 $\mathcal{A}$-公式$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\Delta)$ 归纳定义如下。

	$\Sigma\|\Gamma \Rightarrow \Delta$ 不是临界的，且 $\Sigma\|\Gamma;\Delta$ 匹配	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma;\Delta)$ 等于
1	$\Sigma\|\Gamma', \alpha_1 \wedge \alpha_2;\Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma', \alpha_1, \alpha_2;\ \Delta)$
2	$\Sigma\|\Gamma;\alpha_1 \wedge \alpha_2, \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma;\ \alpha_1,\ \Delta') \wedge \mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma;\ \alpha_2,\ \Delta')$
3	$\Sigma\|\Gamma', \alpha_1 \vee \alpha_2;\Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma',\ \alpha_1;\ \Delta) \wedge \mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma',\ \alpha_2;\ \Delta)$
4	$\Sigma\|\Gamma;\alpha_1 \vee \alpha_2, \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma';\ \alpha_1, \alpha_2, \Delta')$
5	$\Sigma\|\Gamma',\ \neg\alpha;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma';\ \alpha, \Delta)$
6	$\Sigma\|\Gamma;\ \neg\alpha, \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma,\ \alpha;\ \Delta')$
7	$\Sigma\|\Gamma', \alpha_1 \to \alpha_2;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma';\Delta,\ \alpha_1) \wedge \mathcal{A}_p(\Sigma\|\Gamma',\ \alpha_2;\Delta)$
8	$\Sigma\|\Gamma;\ \alpha_1 \to \alpha_2,\ \Delta'$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma\|\Gamma,\ \alpha_1;\ \Delta',\ \alpha_2)$
9	$\Sigma\|\Gamma',\ D_G\alpha;\ \Delta$	$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma,\ D_G\alpha\|\Gamma',\ \alpha;\Delta)$

	$\Sigma\|\Gamma \Rightarrow \Delta$ 至关重要且 $\Sigma\|\Gamma;\ \Delta$ 匹配	$\mathcal{A}_{(p,a)}\ (\Sigma\|\Gamma;\ \Delta)$ 等于
10	$\Sigma\|\Gamma', p;\ \Delta', p$	$\top$
11	$\Sigma,\ D_{\{a\}}\Gamma''\|\Gamma';\ \Delta',\ D_{\{a\}}\alpha$ 与 $\mathbf{G(KT}_D^+\mathbf{)} \vdash \emptyset\|\Gamma'' \Rightarrow \alpha$	$\top$
12‡	$\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\|\Phi;\ \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\ \Psi$	X

‡： Φ 且 Ψ 是包含命题变元或 $\bot$。 $\Phi \cup \overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m} \cup \overrightarrow{D_{H_n}\delta_n} \cup \Psi$非空。 公式 X 为:

$$\bigvee_{r\in\Phi/\{p\}} \neg r \vee \bigvee_{q\in\Psi/\{p\}} q \vee \bigvee_{\bot\in\Phi} \neg\bot \vee \bigvee_{\bot\in\Psi} \bot \vee \bigvee_{D_{G_j}\gamma_j\in\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}/\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\natural\ni a}} \langle D_{G_j}\rangle \mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\emptyset)$$

$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i\in\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}/\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}} D_{H_i}\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i)$$

$$\vee \bigvee_{D_{H_i}\delta_i\in\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a} \text{ with } H_i\neq\{a\}} D_{H_i/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\delta_i)$$

公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\Delta)$ 由以下过程定义：首先，反复应用各行 $1-9$，直到 $\Sigma|\Gamma \Rightarrow \Delta$ 达到临界序列。接下来，检查它是否符合第10、11行。如果两者都不符合，则应用第12 行。重复上述

过程，直到 $\Sigma|\Gamma;\Delta$ 与表中的任何一行都不匹配；在这种情况下，$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\Delta)$ 定义为 $\bot$。如果 X 不满足任何条件，则 X 为 $\bot$。特别地，$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\emptyset;\emptyset)$ 定义为 $\bot$。

我们可以如下定义 $\mathcal{A}$-公式上的良序关系：$\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\ \Delta)\ \prec\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma'|\Gamma';\ \Delta')$ 当且仅当 $(\Sigma|\Gamma\Rightarrow\Delta)\prec(\Sigma'|\Gamma'\Rightarrow\Delta')$。鉴于 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}^+_D)$ 中的所有反向证明搜索 6.2 总会终止（见命题 6.2），我们可以看出，这样的公式总是能够被确定。

定理 6.11。设 Γ、Δ 为公式的有限多重集，Σ 为最外层带框公式的有限多重集。对于每个命题变元 p和任意主体符号 a，存在一个公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\ \Delta)$ 使得：

(i) $\mathsf{V}(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma,\Delta))\subseteq\mathsf{V}(\Sigma\cup\Gamma\cup\Delta)\backslash\{p\}$，$\mathsf{Agt}(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma,\Delta))\subseteq\mathsf{Agt}(\Sigma\cup\Gamma\cup\Delta)\backslash\{a\}$(ii) $\mathsf{G}(\mathsf{KT}^+_D)\vdash\Sigma|\Gamma,\ \mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\ \Delta)\Rightarrow\Delta$(iii) 给定公式的有限多重集 Π、Λ，以及最外层带框公式的有限多重集 Θ，满足 $p\notin\mathsf{V}(\Pi\cup\Lambda\cup\Theta)$、$a\notin\mathsf{Agt}(\Pi\cup\Lambda\cup\Theta)$ 且 $\mathsf{G}(\mathsf{KT}^+_D)\vdash\Theta$、$\Sigma|\Pi$、$\Gamma\Rightarrow\Delta$、$\Lambda$，则 $\mathsf{G}(\mathsf{KT}^+_D)\vdash\emptyset|\Theta$、$\Pi\Rightarrow\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\Delta)\ \Lambda$

证明 我们以与定理 5.3 的证明类似的方式进行。对（i）的证明可通过考察定义 6.10中的表得到。对（ii）的证明可对 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma,\Delta)$的权重进行归纳证明。对于定义 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}^+_D)\ \vdash\ \Sigma|\Gamma,\mathcal{A}_{(p,a)}(\Sigma|\Gamma;\ \Delta)\ \Rightarrow\ \Delta$，我们证明定义 6.10中表的每一行。第1行到第11行的情形都很容易。我们只讨论第12行的情形。

证明与定理 5.3类似，这里仅展示重要的情形。

•对于每个 $D_{G_j}\gamma_j\ \in\ \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}/\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\natural\ni a}$，根据归纳假设，$\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j},\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j};\ \emptyset)\ \Rightarrow$是可导出的。应用（$R\neg\quad D^+_K\quad L\neg\quad\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}|\Phi\ \langle D_{G_j}\rangle\mathcal{A}_{\ p\ a}\ \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq G_j}\ \emptyset\ \Rightarrow$）、（）、$\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\ \Psi$（）后，我们得到，(,)(;)，是可导出的。•对于每个 $D_{H_i}\delta_i\ \in\ \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}/\{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}$，根据归纳假设，我们得到：$\emptyset|\{\overrightarrow{\Box_{g_m}\gamma_m}\}^{\flat d_i},\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{\Box_{g_m}\gamma_m}\}^{\flat d_i};\ \delta_i)\ \Rightarrow\ \delta_i$.然后应用（$D^+_K$）、弱化规则和（$D^+_T$）后，我们得到 $\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}|\Phi,D_{H_i}\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\ \delta_i)\ \Rightarrow\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n},\Psi$。•对于每个 $D_{H_i}\delta_i\ \in\ \{\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\}^{\natural\ni a}$和 $H_i\ \neq\ \{a\}$。根据归纳假设，我们有 $\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i},\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i};\ \delta_i)\ \Rightarrow\ \delta_i$是可导出的。然后应用（$D^+_K$）、弱化规则和（$D^+_T\qquad\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}|\Phi\ D_{H_i/\{a\}}\mathcal{A}_{\ p\ a}\ \{\overrightarrow{D_{G_m}\gamma_m}\}^{\flat\subseteq H_i}\ \delta_i\ \Rightarrow$）后，我们得到$\overrightarrow{D_{H_n}\delta_n}\ \Psi$，(,)(;),。

有限次应用（$L\vee$）后，我们便可得到所需结果。

接下来，在 (iii) 的证明中，我们考察推导中最后应用的规则。若最后一条规则是(D^+_T)，我们需要考虑以下情况：当主公式 D_GA 出现在 Π中时，需要应用命题 6.4 中的保持高度可逆性以及收缩规则；当主公式 D_GA 出现在 Γ中时，可直接根据定义得到证明。

当最后一条规则是（D^+_K）时，我们假设推导以如下形式结束：Θ，$\Sigma|\Pi$，$\Gamma\Rightarrow\Delta$，Λ 以及 $p\notin\mathsf{V}(\Pi\cup\Lambda\cup\Theta)$，$a\notin\mathsf{Agt}(\Pi\cup\Lambda\cup\Theta)$。论证分为以下几种情况：

1. 右主公式 $D_H\alpha$ 属于多重集 Λ。

$$\frac{\emptyset|\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Theta', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Sigma', \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}|\Pi, \Gamma \Rightarrow D_H\alpha, \Lambda', \Delta}\ (D_K^+)$$

其中 $\bigcup_{\overrightarrow{P_m}} \cup \bigcup_{\overrightarrow{G_n}} \subseteq H$，$\Theta'$，$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$是 Θ，Σ'，$\overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$是 Σ，而 $D_H\alpha$，Λ'是 Λ。

在这种情况下，$a \notin H$ 由于 $a \notin \mathsf{Agt}(\Lambda)$。

(a) Σ中的某些公式是主公式，也就是说 $\overrightarrow{\gamma_n}$非空。在这种情况下，我们得到：根据假设，公式 $\overrightarrow{\pi_m}, \alpha$中不出现 p和a。应用归纳假设后，我们得到：$\emptyset|\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}; \emptyset)\ \alpha$可导。

应用(　　$L\neg$　D_K^+　$R\neg$　　D_T^+　　$\emptyset|\Theta'\ \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}\ \Pi \Rightarrow$)、(　)、(　)、$\langle D_{G_i}\rangle\mathcal{A}_{(p,a)}$　$\emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}$　$\emptyset$　$D_H\alpha$　Λ'　　i　　n　　$R\vee$

(　)、弱化规则和(　)后，对于其中某些项，,,(　;　),可导。最后，我们应用(　)有限次。

(b) Γ中的所有公式都不是主公式。也就是说，$\overrightarrow{\gamma_n}$为空。通过应用($D_K^+$)和弱化规则，我们可以推导出所需结果。

2. 右主公式 $D_H\alpha$ 属于多重集 Δ，且 $a \notin H$。

$$\frac{\emptyset|\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Theta', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Sigma', \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}|\Pi, \Gamma \Rightarrow D_H\alpha, \Delta', \Lambda}\ (D_K^+)$$

其中 $\bigcup_{\overrightarrow{P_m}} \cup \bigcup_{\overrightarrow{G_n}} \subseteq H$，且 Θ'，$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$是 Θ，Σ'，$\overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$是 Σ，而 $D_H\alpha$，Δ'是 Δ。根据假设，
p　a　　$\overrightarrow{\pi_m}$　　$\emptyset|\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow$和 不属于 。根据归纳假设，我们可推出(　;　)。
$\mathcal{A}_{(p,a)}\ \emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}\ \alpha$　　D_K^+　　D_T^+　　$\emptyset|\Theta'\ \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$　　$\Pi \Rightarrow$
应用(　)、弱化规则和(　)后，,　,　$D_H\mathcal{A}_{(p,a)}\ \emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}\ \alpha$　Λ　　$R\vee$　　(　;　)可导出。

最后，我们有限次地应用(　)。

3. 右主公式 $D_H\alpha$ 属于多重集 Δ，且 $a \in H$。

$$\frac{\emptyset|\overrightarrow{\pi_m}, \overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha}{\Theta', \overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}, \Sigma', \overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}|\Pi, \Gamma \Rightarrow D_H\alpha, \Delta', \Lambda}\ (D_K^+)$$

其中 $\bigcup_{\overrightarrow{P_m}} \cup \bigcup_{\overrightarrow{G_n}} \subseteq H$，$\Theta'$，$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}$为 Θ，Σ'，$\overrightarrow{D_{G_n}\gamma_n}$为 Σ，而 $D_H\alpha$，Δ'为 Δ。

根据 H 是否等于 $\{a\}$，我们区分以下子情况。

(a) 当 $H \neq \{a\}$、p 和 a 不出现在来自假设的公式 $\overrightarrow{\pi_m}$ 中时，根据归纳假设，$\emptyset|\overrightarrow{\pi_m} \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha)$ 可导出。应用 (D_K^+)、弱化规则和 (D_T^+) 后，$\emptyset|\Theta'$、$\overrightarrow{D_{P_m}\pi_m}\Pi \Rightarrow D_{H/\{a\}}\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\overrightarrow{\gamma_n}; \alpha)\ \Lambda$ 可导出。最后，我们应用 ($R\vee$) 有限多次。(b) 当 $H = \{a\}$ 时，我们有 $\emptyset|\overrightarrow{\gamma_n} \Rightarrow \alpha$ 可导出，随后可以应用定义 6.10 的第 11 行。显然，$\vdash \Theta|\Pi \Rightarrow \top, \Lambda$. □

然后，我们可以将上述关于 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D^+)$ 的结果推广到 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D)$。

推论 6.12. 设 Γ, Δ 为有限公式多重集。对于任意命题变元 p 和主体符号 a，存在一个公式 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)$ 使得：

(i) $\mathsf{V}(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)) \subseteq \mathsf{V}(\Gamma \cup \Delta)\backslash\{p\}$，$\mathsf{Agt}(\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)) \subseteq \mathsf{Agt}(\Gamma \cup \Delta)\backslash\{a\}$(ii) $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D) \vdash \Gamma, \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta) \Rightarrow \Delta$(iii) 给定有限公式多重集 Π, Λ，使得 $p \notin \mathsf{V}(\Pi \cup \Lambda)$，$a \notin \mathsf{Agt}(\Pi \cup \Lambda)$ 且 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D) \vdash \Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Lambda$，则 $\mathsf{G}(\mathbf{KT}_D) \vdash \Pi \Rightarrow \mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma; \Delta)\ \Lambda$

证明 令 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\Gamma;\ \Delta)$ 为 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset|\Gamma;\ \Delta)$。然后，我们应用引理 6.8 和定理 6.11。 □

根据定理 5.3 和推论6.12，我们可以直接得到 G($\mathbf{K}_D$)，G($\mathbf{KD}_D$) 和 G($\mathbf{KT}_D$) 中只有一个主体符号和一个命题变元时，后插值公式（即 $\mathcal{A}$-公式）的一致插值性质。接下来，我们需要证明，对于具有多个主体符号和命题变元的情形，前插值公式和后插值公式都具有一致插值性质。

定义6.13。令 p 为命题变元，a 为主体符号，β 为公式。我们将 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\beta)$ 定义为 $\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset;\beta)$。此外，我们将 $\mathcal{E}_{(p,a)}(\beta)$ 定义为 $\neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\neg\beta)$，即 $\neg\mathcal{A}_{(p,a)}(\emptyset;\neg\beta)$。

在以下内容中，公式 $\alpha(\overrightarrow{p_n},\overrightarrow{a_m})$ 表示公式 α中命题变元和主体符号的所有出现。

推论 *6.14*。令 $L \in \{K_D、KD_D、KT_D\}$。*G(L)*满足一致插值性质。对于任意公式 $\alpha(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$，若所有 p 和 q 都是特定命题变元，所有 a 和 b 都是特定主体符号，则存在一个公式（前插值式）$\mathcal{I}_{pre(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$，使得：*1.* 所有 $\overrightarrow{q}$和 $\overrightarrow{b}$均不出现在 $\mathcal{I}_{pre(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$中；*2.* $\mathcal{I}_{pre(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha) \Rightarrow \alpha$ 可在 *G(L)*中导出；*3.* 对于任意公式 $\beta(\overrightarrow{p},\overrightarrow{r},\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$，若所有 p、q、r 都是特定命题变元，所有 a、b、c 都是特定主体符号，若 $\beta \Rightarrow \alpha$ 可在 *G(L)*中导出，则 $\beta \Rightarrow \mathcal{I}_{pre(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$可在 *G(L)*中导出。此外，对于任意公式 $\alpha(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$，若所有 p和 q都是特定命题变元，所有 a和 b都是特定主体符号，则存在一个公式（后插值式）$\mathcal{I}_{post(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$，使得：*1.* 所有 $\overrightarrow{q}$和 $\overrightarrow{b}$均不出现在 $\mathcal{I}_{post(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$中；*2.* $\alpha \Rightarrow \mathcal{I}_{post(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha)$可在 *G(L)*中导出；*3.* 对于任意公式 $\beta(\overrightarrow{p},\overrightarrow{r},\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$，若所有$p$、$q$、$r$ 都是特定命题变元，所有 a、b、c 都是特定主体符号，若$\alpha \Rightarrow \beta$ 可在 *G(L)*中导出，则 $\mathcal{I}_{post(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha) \Rightarrow \beta$ 可在 *G(L)*中导出。

证明 首先，我们证明前插值项的情况。设 $m,n,l \in$自然数集。给定任意公式 $\alpha(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$。前插值公式定义如下：

$$\mathcal{I}_{pre(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{A}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{A}_{(q_m,b_n)}(\alpha))\cdots), & \text{if } m = n. \\ \mathcal{A}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{A}_{(q_{n+l-1},b_n)}(\mathcal{A}_{(q_{n+l},b_n)}(\alpha)))\cdots), & \text{if } m = n+l \text{ for } l \neq 0. \\ \mathcal{A}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{A}_{(q_m,b_{m+l-1})}(\mathcal{A}_{(q_m,b_{m+l})}(\alpha)))\cdots), & \text{if } n = m+l \text{ for } l \neq 0. \end{cases}$$

第二和第三个条件说明，如果 $m \neq n$，我们就重复出现相同变量或主体符号的情况，直到处理完所有符号。

接下来，考虑后插值式的情况。给定任意公式 $\alpha(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$。后插值公式的定义类似如下：

$$\mathcal{I}_{post(\overrightarrow{q},\overrightarrow{b})}(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{E}_{(q_m,b_n)}(\alpha))\cdots), & \text{if } m = n. \\ \mathcal{E}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{E}_{(q_{n+l-1},b_n)}(\mathcal{E}_{(q_{n+l},b_n)}(\alpha)))\cdots), & \text{if } m = n+l \text{ for } l \neq 0. \\ \mathcal{E}_{(q_1,b_1)}(\cdots(\mathcal{E}_{(q_m,b_{m+l-1})}(\mathcal{E}_{(q_m,b_{m+l})}(\alpha)))\cdots), & \text{if } n = m+l \text{ for } l \neq 0. \end{cases}$$

这些条件可以直接检验 . □

7 结论与未来方向

本文给出了具有分布式知识的认知逻辑中一致插值性质的纯句法证明$\mathbf{K}_D$、$\mathbf{KD}_D$（定理5中），$\mathbf{KT}_D$（推论6.12中）。在推论6.14中，我们证明了这些系统中具有多个主体符号和命题变元的前插值公式与后插值公式均满足一致插值性质。此外，插值公式的共同语言不仅包含命题变元，也包含主体符号。

下一步，一个有趣的方向是在模态逻辑 **S5** 中证明分布式知识的一致插值性质（UIP）。一个众所周知的困难是，**S5** 的序列演算不满足切消去定理（参见 [30]）。因此，本文的方法无法直接应用于此。朝着这个方向，B´ılkov´a、Fussner 和 Kuznets [31] 采用了结合超序列与嵌套序列特征的方法，并已证明多主体模态逻辑 **S5**具有 Lyndon 插值性质（因而也具有 Craig 插值性质）。另一个方向是在直觉主义模态系统中证明一致插值性质。为此，我们可能需要使用 Pitts [1] 中的 **G4** 风格序列演算。这方面已经取得了一些进展 [9, 32, 33]。

参考文献

[1] Pitts, A.M.：论二阶量化在一阶直觉主义命题逻辑中的一种解释。《符号逻辑杂志》57（1），33–52（1992年）[2] Visser, A.：互模拟、模型描述与命题量词。逻辑组预印本系列 161（1996年）[3] Ghilardi, S.：范式代数理论。《纯粹与应用逻辑年刊》71（3），189–245（1995年）[4] Wolter, F.：再论模态逻辑的融合。载于：《模态逻辑进展》。CSLI，斯坦福（1997年）[5] B´ılkov´a, M.：模态逻辑中的一致插值与命题量词。《逻辑学研究》85，1–31（2007年）[6] Fang, L.、Liu, Y.、van Ditmarsch, H.：多主体模态逻辑中的遗忘。《人工智能》266，51–80（2019年） https://doi.org/10.1016/j.artint.2018.08.003[7] B´ılkov´a, M.：可证性逻辑中的一致插值。载于：Eijck van, J.、Iemhoff, R.、Joosten, J.（编）：《阿尔贝蒂纪念文集》。向 Albert Visser 致敬。College Publications，伦敦（2016年）[8] Giessen, I.、Jalali, R.、Kuznets, R.：经由嵌套序列与超序列的一致插值。《逻辑与计算杂志》，053（2024年） https://doi.org/10.1093/ logcom/exae053[9] F´er´ee, H.、Giessen, I.v.d.、Gool, S.v.、Shillito, I.：机械化一致插值

面向模态逻辑 K、GL 与 iSL。载于：Benzm¨uller, C.、Heule, M.J.H.、Schmidt, R.A.（编）：自动推理，第43–60页。Springer，尚贝里（2024年）[10] Hintikka, J.：《苏格拉底式认识论：通过提问进行知识探求的探索》。剑桥大学出版社，剑桥与纽约（2007年）[11] Hempel, C.G.：《科学解释的若干方面及其他论文》。自由出版社，纽约（1965年）[12] Murai, R.、Sano, K.：含分布式知识的认知逻辑的 Craig 插值。载于：Herzig, A.、Kontinen, J.（编）：信息与知识系统基础——第11届国际研讨会，FoIKS 2020，德国多特蒙德，2020年2月17日至21日，会议论文集。《计算机科学讲义》，第12012卷，第211–221页。Springer，海德堡（2020年）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-39951-1 13[13] Su, Y.、Murai, R.、Sano, K.：论扩展了分布式知识的 Artemov 与 Protopopescu 直觉主义认知逻辑。载于：Ghosh, S.、Icard, T.（编）：逻辑、理性与互动：第8届国际研讨会，Lori 2021，中国西安，2021年10月16日至18日，会议论文集，第216–231页。Springer，新加坡（2021年）[14] Lin, F.、Reiter, R.：忘掉它！载于：AAAI相关性秋季研讨会论文集，第154–159页（1997年）[15] Ditmarsch, H.、Herzig, A.、Lang, J.、Marquis, P.：内省遗忘。Synthese**169**（2），405–423（2009年）。访问日期：2025年9月11日[16] Ono, H.：非经典逻辑中的证明论方法——引言。类型与证明理论。第2卷：207-254（1998年）[17] ˚Agotnes, T.、W´ang, Y.N.：群体信念。载于：Dastani, M.、Dong, H.、Torre, L.（编）：逻辑与论证——第三届国际会议，CLAR 2020，中国杭州，2020年4月6日至9日，会议论文集。《计算机科学讲义》，第12061卷，第3–21页。Springer，柏林，海德堡（2020年）[18] Negri, S.、柏拉图：结构证明论。剑桥大学出版社，剑桥（2001年）[19]Su, Y.：多主体模态逻辑中主体的一致插值性质。载于：第8届亚洲哲学逻辑研讨会论文集（即将出版）[20] Hakli, R.、Negri, S.：演绎定理在模态逻辑中是否失效？Synthese**187**（3），849–867（2012年）[21] Troelstra, A.S.、Schwichtenberg, H.：基础证明论，第43卷。剑桥大学出版社，伦敦（2000年）[22] Kashima, R.：数理逻辑。朝仓书店（日文），东京（2009年）

[23] Fagin, R., Halpern, J.Y., Vardi, M.Y.：《机器能够知道什么？分布式系统中的知识性质》。《美国计算机协会会刊》39，328–376（1996）[24] Blackburn, P., Rijke, M., Venema, Y.：《模态逻辑》。剑桥大学出版社，纽约（2001）[25] Dummett, M.A., Lemmon, E.J.：《s 4 与 s 5 之间的模态逻辑》。《数学逻辑季刊》5（14-24），250–264（1959）[26] Sahlqvist, H.：《模态逻辑一阶与二阶语义中的完备性和对应》82，110–143（1975）[27] W´ang, Y.N., ˚Agotnes, T.：《具有交的模态逻辑的更简洁完备性证明》。载于：Martins, M.A., Sedl´ar, I.（编）：《动态逻辑：新趋势与应用——第三届国际研讨会 DaL´ı 2020，捷克共和国布拉格，2020年10月9日至10日，修订精选论文集》。《计算机科学讲义》，第12569卷，第259–276页。Springer，布拉格（2020）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-65840-3 16[28] Takano, M.：《模态逻辑无切割演算的语义分析》。《数学逻辑报告》（53）（2018）[29] Heuerding, A., Seyfried, M., Zimmermann, H.：《某些非经典命题逻辑中反向证明搜索的高效循环检查》。载于：Miglioli, P., Moscato, U., Mundici, D., Ornaghi, M.（编）：《解析表及相关方法的定理证明》，第210–225页。Springer，柏林、海德堡（1996）[30] Takano, M.：《将子公式性质作为模态命题逻辑中切消去的替代》。《日本数学》37，1129–1145（1992）[31] B´ılkov´a, M., Fussner, W., Kuznets, R.：《知识的主体插值》。ArXiv abs/2505.23401（2025）[32] Giessen, I., Iemhoff, R.：《直觉主义强 L¨ob 逻辑的证明论》。arXiv：逻辑 arXiv:2011.10383（2020）[33] Iemhoff, R.：《G3i 序列演算的 G4i 类比》。《逻辑学研究》110，1493–1506（2022）