arXiv:2603.01181v1 [math.DG] 1 Mar 2026

具有常数量曲率的闭极小超曲面分类于 $\mathbb{S}^5$

CHENGCHAO HE、HONGWEI XU 和 ENTAO ZHAO

Abstract. 本文证明，5维单位球面 $\mathbb{S}^5$ 中的任意闭极小超曲面 M^4，若具有常数量曲率和常数三阶平均曲率，则必为等距参数的。具体而言，它或者是一个赤道4-球面、球面乘积 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$，或者是一个 Cartan极小超曲面。特别地，第二基本形式的平方范数 S 只能取 0、4 或 12。此结果有力地支持了 Chern 猜想。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 某点处的两个不同主曲率 6 4. 主定理的证明 8 4.1. 关于 Im K 的讨论 9 4.2. 关于 Y 的结构方程 11 4.3. 3-形式 Φ 13 4.4. 定理 1.8 的证明 17 致谢 18 参考文献 18

1. Introduction

1968年，Simons [19] 证明了关于单位球面中闭极小超曲面的一个著名刚性定理。

定理1.1. (J.Simons [19]) 设 M^n 是单位球面$\mathbb{S}^{n+1}$中的 n维闭极小超曲面。用 S 表示 M^n的第二基本形式的平方长度。则下列不等式成立：

$$\int_{M^n} S\,(S-n)\,dM \geqslant 0.$$

特别地，若 $0 \leqslant S \leqslant n$，则要么 $S \equiv 0$ 且 M^n 是 $\mathbb{S}^{n+1}$中的全测地球面，要么 $S \equiv n$。

后来，Chern-do Cramo-Kobayashi [7]和 Lawson [11] 分别证明，若 $S \equiv n$，则 M^n是 Clifford 极小超曲面之一 $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times$

Key words and phrases. 极小超曲面；常数量曲率；常3阶me an 曲率；Chern 猜想。

$\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ 在 $\mathbb{S}^{n+1}$， $1 \leqslant k \leqslant n-1$。基于这些工作，Chern [6, 7] 提出了以下著名猜想。

猜想 1.2. (Chern 猜想) 设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的闭浸入极小超曲面，且具有常数量曲率。那么对于每个 n， S 的所有可能取值应构成一个离散集。

注 1.3. 定理 *1.1* 给出了 S 关于猜想 *1.2*的第一个间隙。由高斯方程可知，对于极小超曲面 $S \equiv$为常数当且仅当标量曲率$R \equiv$为常数。因此，猜想 *1.2* 等价于以下表述：R 的可能取值构成一个离散集。

一系列重要成果充分彰显了 Chern 猜想的重要性。1982 年，Yau [31]将上述 Chern 猜想列为 120 个未解决的世界著名几何问题之一。1983 年，Peng-Terng [15, 16] 在 Chern 猜想方面取得首个突破，证明了第二间隙定理：若 $S > n$，则 $S > n + \frac{1}{12n}$。此外，对于 $n = 3$，他们证明了若 $S > 3$，则 $S \geqslant 6$。1993 年，Chang [4] 完成了 $n = 3$情形下 Chern 猜想的证明。此外，基于 Almeida-Brito [1], 在该猜想方面取得的进展，Chang [3] 证明了具有常平均曲率和常数量曲率的 $\mathbb{S}^4$ 中的闭超曲面 M^3 也是等距参数的。对于高维情形，已有若干关于第二间隙的估计，例如 Yang-Cheng [28, 29, 30]和 Suh-Yang [20]。迄今为止，第二间隙已改进至 $\frac{3}{7}n$，该结果见于 [20]。以下问题仍未解决。

第二间隙问题。 设 $M^n(n > 3)$ 是 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中一个具有常数量曲率的闭极小超曲面。假设 $S > n$。是否有 $S \geqslant 2n$ 成立?

目前，球面中所有已知的具有常数量曲率的闭极小超曲面都是等距参数的极小超曲面，其主曲率为常数。1986 年，Verstraelen 等人 [18, 25] 提出了 Chern 猜想的以下更强版本。

猜想 1.4。 设 M^n 是单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中一个具有常数量曲率的闭浸入极小超曲面。那么 M^n 是等距参数的。

如前所述，根据 Chang[4] 和 Peng-Terng [15] 的工作，该猜想在 $n = 3$ 的情形下成立。对于 $n = 4$ 的情形，Deng-Gu-Wei [9] 在 Lusala-Scherfner-Sousa [13, 17], 的结果基础上证明了以下定理。

定理 1.5。(Deng-Gu-Wei [9]) 任意具有常数量曲率的闭极小威尔莫尔超曲面 M^4在 $\mathbb{S}^5$ 中都必须是等距参数的。具体而言， M^4 要么是一个赤道4-球面，要么是球面乘积 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$，要么是 *Cartan* 极小超曲面。特别地，$S$ 只能是0 、 4 、 12。

通过计算，定理 1.5 可以等价地表述如下：任意闭极小超曲面 M^4 在 $\mathbb{S}^5$ 中，若三阶平均曲率 H_3 为零且具有常数量曲率，则必为等距参数的。此外，Tang-Yang [22]证明了：若不同主曲率的个数为常数，则任意闭极小超曲面 M^4 在 $\mathbb{S}^5$ 中，若具有常三阶平均曲率 H_3 和非负常数量曲率，则必为等距参数的。对于 n 维闭超曲面 M^n 在 $\mathbb{S}^{n+1}$中，对 $k = 1$、2、 $\cdots$、 $n-1$令 $f_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$，其中 λ_1、 λ_2、 $\cdots$、 λ_n为主曲率。Tang-Yan [23]证明了如下定理。

定理 1.6. （Tang-Yan [23]） 设 M^n（$n \geqslant 4$） 是单位球面中的闭超曲面 $\mathbb{S}^{n+1}$。若标量曲率非负且 $f_k \equiv$ 为常数 对于$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，则 M^n 是等距参数的。

特别地， $\mathbb{S}^5$ 中具有常三阶平均曲率与非负常数量曲率的闭极小超曲面 M^4 是等距参数的（另见 [21]）。此外，若不同主曲率的个数为常数，则Cheng-Li [5] 证明了不必假设 M^4 具有非负数量曲率。事实上，他们证明了如下定理。

定理 1.7. (Cheng-Li [5]) 设 $X:\ M^4 \to \mathbb{S}^5$ 是5维球面中第二基本形式的平方长度 S 为常数的闭极小超曲面。若3阶平均曲率 H_3 与不同主曲率的个数均为常数，则 M^4 是等距参数的，且 S 只能为0、4、 or 12。

在本文中，我们将证明如下定理，它有力地支持了Chern 猜想:

定理 1.8. $\mathbb{S}^5$ 中具有常数量曲率与常3阶平均曲率的任一闭极小超曲面 M^4 必为等距参数的。确切地说，M^4或者是赤道4维球面，或者是球面乘积 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})\times\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2})\times\mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$，或者是*Cartan*极小超曲面。特别地，第二基本形式的平方范数 S 的取值只能为0、4或12。

注记1.9. 在定理*1.8*中，没有关于标量曲率非负性或不同主曲率个数的假设。定理 *1.8* 也是*Deng-Gu-Wei*定理从 $H_3 = 0$ 到 H_3=常数的推广。

注记1.10. 若不要求 M^n 具有常数量曲率，则问题会变得更加困难。*Peng-Terng* [15, 16] 证明了存在仅依赖于 n的正常数 $\delta(n)$，使得若 $n \leqslant S \leqslant n + \delta(n)$，$n \leqslant 5$，则 $S \equiv n$。随后，*Wei-Xu* [26] 将该结果推广到 $n = 6,\ 7$ 而*Zhang*[32] 将其推进到 $n \leqslant 8$。最后，*Ding-Xin* [8] 通过建立新的估计将其推广到所有维数；特别地，他们证明了若维数为$n \geqslant 6$，则*pinching*常数 $\delta(n) = \frac{n}{23}$。此后，*Xu-Xu* [27] 将其改进为$\delta(n) = \frac{n}{22}$，而*Lei-Xu-Xu*[12] 证明了 $\delta(n) = \frac{n}{18}$。

本文安排如下。第 2 小节中，我们将回顾 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中闭极小超曲面的基本公式。第 3 小节中，我们将考虑 M^4 中存在一点具有两个不同主曲率的情形，并证明该超曲面是克利福德环面 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2}) \times \mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$。最后，我们将在第 4 小节证明主定理。

2. Preliminaries

本小节中，我们回顾 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中闭极小超曲面的基本公式，这些公式可见于 [15, 16]。

设 $X:\ M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ 是一个位于 $(n+1)$ 维球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的 n 维浸入超曲面。记 g 为 M^n 上的诱导度量。对于任意一点 $p \in M^n$，我们在 p 附近选取一个局部正交标架 $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}\}$，使得 $e_1,\ \cdots,\ e_n$ 与 M^n 相切，而 e_{n+1} 垂直于 M^n。设 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$ 为对偶余标架，$\{\omega_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 为联络1-形式。本节中，我们对指标的取值范围作如下约定:

$$1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n.$$

M^n 的结构方程为

$$
\begin{aligned}
&d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\
&d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

其中，R_{ijkl} 是 M^n上诱导度量的黎曼曲率张量。

令 $h = \sum_{ij} h_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ 表示第二基本形式，$H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$表示平均曲率。高斯方程为

$$
R_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \tag{2.2}
$$

Codazzi方程为

$$
h_{ijk} = h_{ikj}, \tag{2.3}
$$

其中，第二基本形式的协变导数定义为

$$
\sum_m h_{ijm}\omega_m = dh_{ij} + \sum_m h_{mj}\omega_{mi} + \sum_m h_{im}\omega_{mj}. \tag{2.4}
$$

第二基本形式的二阶协变导数定义为

$$
\sum_m h_{ijkm}\omega_m = dh_{ijk} + \sum_m h_{mjk}\omega_{mi} + \sum_m h_{imk}\omega_{mj} + \sum_m h_{ijm}\omega_{mk}.
$$

因此，我们有如下Ricci恒等式:

$$
h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}. \tag{2.5}
$$

由高斯方程（2.2），我们得到超曲面的Ricci曲率张量 R_{ij} 和标量曲率 R：

$$
\begin{aligned}
&R_{ij} = (n-1)\delta_{ij} + nHh_{ij} - \sum_m h_{im}h_{mj}, \\
&R = n(n-1) + n^2H^2 - S,
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

其中$S = \sum_{i,\ j} h_{ij}^2$ 是第二基本形式的平方范数。

定义 f_3 和 f_4 为

$$
f_3 = \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{jk}h_{ki}, \quad f_4 = \sum_{i,j,k,l} h_{ij}h_{jk}h_{kl}h_{li}.
$$

对于任意固定点$p \in M^n$，我们选取正交归一标架，使得在 p处有$h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$，对所有 $i,\ j$。于是在该点 p，我们有

$$
H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad S = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad f_3 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3, \quad f_4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4.
$$

高斯-克罗内克曲率由下式给出

$$
K = \frac{\det(h)}{\det(g)} = \prod_{i=1}^n \lambda_i.
$$

定义 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为

$$
\mathcal{A} = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\lambda_i^2, \quad \mathcal{B} = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\lambda_i\lambda_j.
$$

对于具有常数量曲率的闭极小超曲面，通过直接计算可得下列公式:

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = S(S-n), \tag{2.7}$$

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = (S-2n-3)S(S-n) + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}), \tag{2.8}$$

$$\Delta f_3 = 3(n-S)f_3 + 6h_{ijk}h_{ijl}h_{kl}, \tag{2.9}$$

$$\Delta f_4 = 4\big((n-S)f_4 + 2\mathcal{A} + \mathcal{B}\big), \tag{2.10}$$

$$\mathcal{A} - 2\mathcal{B} = Sf_4 - f_3^2 - S^2. \tag{2.11}$$

设 $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为由下式定义的初等对称函数

$$\sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

引理 2.1. (牛顿公式) 设 $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ 且 $f_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k (k = 1, 2, \cdots)$。则

$$\begin{cases} f_k - \sigma_1 f_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}f_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0, (1 \leqslant k \leqslant n); \\ f_k - \sigma_1 f_{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n f_{k-n} = 0, (k > n). \end{cases}$$

定义第 r 平均曲率为

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}}\sigma_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

当 $n = 4$ 时，由牛顿公式，我们有

$$\begin{cases} f_1 - \sigma_1 = 0, \\ f_2 - f_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0, \\ f_3 - f_2\sigma_1 + f_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0, \\ f_4 - f_3\sigma_1 + f_2\sigma_2 - f_1\sigma_3 + 4\sigma_4 = 0. \end{cases}$$

由于该超曲面被假定为极小且 $f_2 = S$，故有 $H_3 = \frac{1}{4}\sigma_3 = \frac{1}{12}f_3$，并且对应于第二基本形式的矩阵 (h_{ij}) 的特征多项式由下式给出

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \frac{S}{2}\lambda^2 - \frac{f_3}{3}\lambda + K. \tag{2.12}$$

此外，有

$$f_4 = \frac{S^2}{2} - 4K. \tag{2.13}$$

显然，若 $S \equiv 0$，则 M^4 是全测地大球面 $\mathbb{S}^4(1)$。从现在起，假设 $S > 0$ 在 M^4 上。

3. Two distinct principle curvatures at one point

在本小节中，我们将讨论存在一点具有两个不同主曲率的情形。更确切地说，我们将证明以下结果。

定理 3.1。设 $M^4 \hookrightarrow \mathbb{S}^5$（1）是一个具有常数量曲率和常数 3 阶平均曲率的闭极小超曲面。若存在一点具有两个不同主曲率，则 $S = 4$和 M^4是克利福德环面 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $\mathbb{S}^1(1_2) \times \mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$。

证明。在一点存在两个不同主曲率可分为两种情形：第一种是 p（λ）有两个不同的二重实根，第二种是 p（λ）有一个三重实根和一个单实根。

情形 I： 两个不同的二重实根。

在这种情形下，我们可以假设 $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4$。由于 M 是极小的，因此有 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4$。显然 $f_3 \equiv 0$，因为 f_3 是常数。根据定理 1.5，$S = 4$且 M^4是克利福德环面 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$。

情形 II： 一个三重实根和一个单实根。

在此情形下，我们可以假设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a,\ \lambda_4 = -3a.$

由于平均曲率 $H = 0$ 和 $S = constant$，取协变导数后，对于 $1 \leqslant k \leqslant 4$，我们得到如下结果，

$$\begin{cases} h_{11k} + h_{22k} + h_{33k} + h_{44k} = 0, \\ ah_{11k} + ah_{22k} + ah_{33k} - 3ah_{44k} = 0. \end{cases}$$

该方程组给出

$$h_{11k} + h_{22k} + h_{33k} = 0, \quad h_{44k} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant 4.$$

由于 $H = \sum h_{ii} = 0$，对于 $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，我们有 $(H)_{mm} = 0$，即

$$\sum_i h_{iimm} = 0.$$

由此可得

$$\begin{cases} h_{1111} + h_{2211} + h_{3311} + h_{4411} = 0, \\ h_{1122} + h_{2222} + h_{3322} + h_{4422} = 0, \\ h_{1133} + h_{2233} + h_{3333} + h_{4433} = 0, \\ h_{1144} + h_{2244} + h_{3344} + h_{4444} = 0. \end{cases}$$

由于 $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ 为常数，对于 $m = 1, 2, 3, 4$，有 $(S)_{mm} = 0$。因此我们有

$$\sum_{i,j} (h_{ii}h_{iimm} + h_{ijm}^2) = 0. \tag{3.1}$$

对于 $m = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (h_{ii}h_{ii11} + h_{ij1}^2) &= a(h_{1111} + h_{2211} + h_{3311}) - 3ah_{4411} + h_{111}^2 + h_{221}^2 + h_{331}^2 \\ &\quad + 2(h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{114}^2 + h_{123}^2 + h_{124}^2 + h_{134}^2) \\ &= -4ah_{4411} + h_{111}^2 + h_{221}^2 + h_{331}^2 \\ &\quad + 2(h_{112}^2 + h_{113}^2 + h_{114}^2 + h_{123}^2 + h_{124}^2 + h_{134}^2) \end{aligned}$$

$$=0,$$

即,

(3.2) $h_{111}^2+h_{221}^2+h_{331}^2+2(h_{112}^2+h_{113}^2+h_{114}^2+h_{123}^2+h_{124}^2+h_{134}^2)=4ah_{4411}.$

对于 $m=4$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(h_{ii}h_{ii44}+h_{ij4}^2)=&a(h_{1144}+h_{2244}+h_{3344})-3ah_{4444}\\&+\left[h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)\right]\\=&-4ah_{4444}+\left[h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)\right]\\=&0,\end{aligned}$$

即,

(3.3) $h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)=4ah_{4444}.$

同样，由于 $f_3=\sum h_{ij}h_{jk}h_{ki}$ 为常数，$(f_3)_{mm}=0$ 对于 $m=1$，2，3，4。因此$i,\ j,\ k$我们有

$$\sum_{i,j}(\lambda_i^2h_{iimm}+2\lambda_ih_{ijm}^2)=0. \tag{3.4}$$

对于 $m=1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(\lambda_i^2h_{ii11}+2\lambda_ih_{ij1}^2)=&a^2(h_{1111}+h_{2211}+h_{3311})+9a^2h_{4411}\\&+2a\sum_i(h_{11i}^2+h_{12i}^2+h_{13i}^2-3h_{14i}^2)\\=&8a^2h_{4411}+2a\big[h_{111}^2+h_{221}^2+h_{331}^2\\&+2(h_{112}^2+h_{113}^2-h_{114}^2+h_{123}^2-h_{124}^2-h_{134}^2)\big]\\=&0,\end{aligned}$$

即,

(3.5) $h_{111}^2+h_{221}^2+h_{331}^2+2(h_{112}^2+h_{113}^2-h_{114}^2+h_{123}^2-h_{124}^2-h_{134}^2)$
$=-4ah_{4411}$.对于 $m=4$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(\lambda_i^2h_{ii44}+2\lambda_ih_{ij4}^2)=&a^2(h_{1144}+h_{2244}+h_{3344})+9a^2h_{4444}\\&+2a\sum_i(h_{14i}^2+h_{24i}^2+h_{34i}^2-3h_{44i}^2)\\=&8a^2h_{4444}+2a\left[h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)\right]\\=&0,\end{aligned}$$

也就是说,

(3.6) $h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)=-4ah_{4444}.$

将方程（3.2）与（3.5）相加可得

$$h_{111}^2+h_{221}^2+h_{331}^2+2(h_{112}^2+h_{113}^2+h_{123}^2)=0.$$

So

$$h_{111}=h_{221}=h_{331}=h_{112}=h_{113}=h_{123}=0.$$

将方程（3.3）与（3.6）相加可得

$$h_{114}^2+h_{224}^2+h_{334}^2+2(h_{124}^2+h_{134}^2+h_{234}^2)=0.$$

So

$$h_{114}=h_{224}=h_{334}=h_{124}=h_{134}=h_{234}=0.$$

现在，只有 h_{222}、h_{223}、h_{332}、h_{333} 可能非零。我们将证明它们也都为零。

当 $m=2$时，方程 (3.1) 和 (3.4) 变为

$$\begin{cases} h_{222}^2+2h_{223}^2+h_{332}^2=4ah_{4422}, \\ h_{222}^2+2h_{223}^2+h_{332}^2=-4ah_{4422}. \end{cases}$$

因此 $h_{222}^2+2h_{223}^2+h_{332}^2=0$，从而

$$h_{222}=h_{223}=h_{332}=0.$$

当 $m=3$时，方程 (3.1) 和 (3.4) 变为

$$\begin{cases} h_{333}^2=4ah_{4433}, \\ h_{333}^2=-4ah_{4433}. \end{cases}$$

因此 $h_{333}^2=0$，从而

$$h_{333}=0.$$

因此，我们已证明，对于所有 i、j、$k=1$、2、3、4，$h_{ijk}=0$。由于 $\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2=S(S-4)$，我们有 $S(S-4)=0$。鉴于 $S>0$，可知 $S=4$，且 M^4 是克利福德环面 $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2})\times\mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$。□

注3.2. 这一情形已在 [21], 中处理过，但我们的证明更为直接。

4. Proof of the main theorem

在上一小节中，我们证明了：若 M^4 在某点有两个不同主曲率，则 $S=4$且 M^4是克利福德环面 $\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})\times\mathbb{S}^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$或 $\mathbb{S}^1(\frac{1}{2})\times\mathbb{S}^3(\frac{\sqrt{3}}{2})$。当 M^4在某点有四个相同的主曲率时，它对应于平凡情形，即 $S=0$ 且 M^4 是一个赤道4-球面。因此，在本小节中，我们可以假设 M^4 上的每一点都有三个或四个不同的主曲率。

从现在起，我们还假设 M^4 是连通且定向的。否则，我们可以分别讨论 M^4 的每个连通分支上的情形，或讨论 M^4的二重覆盖上的情形。

为方便起见，我们首先引入一些记号。我们用 $\lambda_1(p)\leqslant\lambda_2(p)\leqslant\lambda_3(p)\leqslant\lambda_4(p)$表示 $h(p)$对每个 $p\in M^4$的特征值。为了expo-sition叙述方便，我们将假设 $f_3\geqslant 0$；否则，我们通过选取相反方向的法向量场来考虑 $\lambda_i=-\lambda_i$。注意，λ_i 对每个 $i=1$、2、3、4都是连续的。h 的特征多项式(2.12)在我们的讨论中十分重要：

$$p(\lambda)=\lambda^4-\frac{S}{2}\lambda^2-\frac{f_3}{3}\lambda+K.$$

令

$$p_0(\lambda)=\lambda^4-\frac{S}{2}\lambda^2-\frac{f_3}{3}\lambda. \tag{4.1}$$

显然， $p_0(\lambda)$ 是一个四次多项式，其系数依赖于 S， f_3且与 K 无关。此外，结合（2.12），可得

$$p(\lambda) = p_0(\lambda) + K. \tag{4.2}$$

4.1. **关于 ImK 的讨论**。

由于高斯曲率 K 是闭的 M^4 上的光滑函数，我们可以假设 K 的取值范围为

$$\mathrm{Im}K = [a_0, b_0], \quad a_0 \leqslant b_0.$$

为进一步确定 ImK，我们研究多项式 $p_0(\lambda)$的图像，它与 K 无关。

显然，作为四次函数， $p_0(\lambda)$的图像只能属于三种情形之一。请看多项式函数 $p_0(\lambda)$的图1、图2和图3，其中 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$ 均为 $p_0(\lambda)$的极值点。

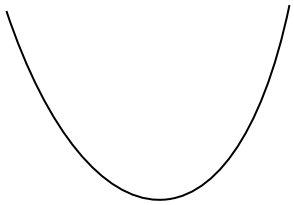

图1。存在一个极值点

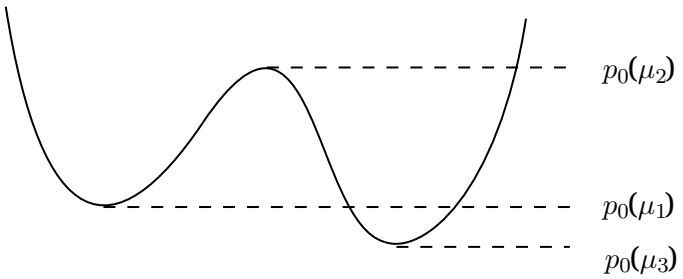

图2。存在三个极值点，且 $p_0(\mu_1) \geqslant p_0(\mu_3)$

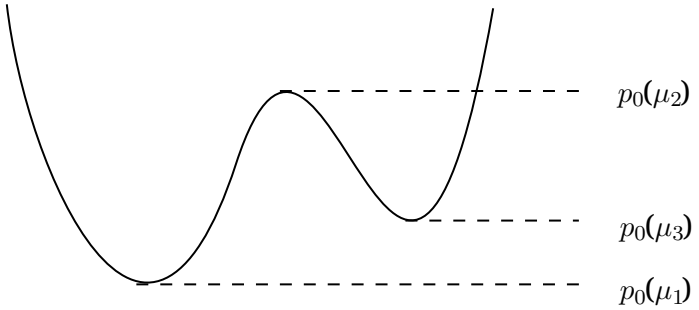

图3。存在三个极值点，且 $p_0(\mu_1) \leqslant p_0(\mu_3)$

回顾本小节开头所述的假设，即 M^4 中的每个点都有三种或四种不同主曲率，这等价于方程

$$p(\lambda) = p_0(\lambda) + K = 0 \tag{4.3}$$

在 M^4 上有三个或四个不同根，这也等价于 $p_0(\lambda)$ 的图像与直线 $y = -K$ 在三个或四个不同点处相交。显然，只有图2和图3满足 $p_0(\lambda)$ 的图像与直线 $y = -K$ 在三个或四个不同点处相交这一条件，并且显然 $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$。

定义

$$a := -p_0(\mu_2) \quad \text{and} \quad b := -\max\{p_0(\mu_1), p_0(\mu_3)\}.$$

于是 $-b \leqslant -K \leqslant -a$，即 $a \leqslant K \leqslant b$。我们立即得到

$$\mathrm{Im}K = [a_0, b_0] \subset [a, b].$$

因此，我们需要考虑四种情形：(1) $a_0 > a$， $b_0 < b$；(2) $a_0 = a$， $b_0 < b$；(3) $a_0 > a$，$b_0 = b$；(4) $a_0 = a$， $b_0 = b$。

对于情形 (1)，即所有主曲率在 M^4 上互不相同的情形，Cheng-Li [5] 已经完成了证明。因此，下面我们只需处理情形 (4)，其他情形的处理类似。

此外，若 $K = b_0 = b$，则由图2和图3可知，$\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$) 或 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4$($\lambda_3 = \lambda_4 > 0$)。对于第二种情形，有

$$\lambda_1 = -\lambda_4 - \sqrt{\frac{1}{2}S - 2\lambda_4^2},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_4 + \sqrt{\frac{1}{2}S - 2\lambda_4^2},$$

由此得到

$$f_3 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^3 = -6\lambda_4(\frac{1}{2}S - 2\lambda_4^2) < 0,$$

矛盾。因此这一情形并不存在 ist.

若 $K=a_0=a$，则 $\lambda_1<\lambda_2=\lambda_3<\lambda_4$，且

$$\lambda_1=-\lambda_2-\sqrt{\frac{1}{2}S-2\lambda_2^2},$$
$$\lambda_4=-\lambda_2+\sqrt{\frac{1}{2}S-2\lambda_2^2},$$
$$f_3=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^3=-6\lambda_2(\frac{1}{2}S-2\lambda_2^2)\geqslant 0,$$

由此得到

$$\lambda_2=\lambda_3\leqslant 0.$$

若 $\lambda_2=\lambda_3=0$，则 $f_3=0$ 根据定理1.5，定理1.8 得证。因此，我们只需考虑以下情形:

$$\lambda_2=\lambda_3<0 \tag{4.4}$$

从现在起，我们假设 $\mathrm{Im}K=[a,b]$ 满足 $a<b$，且 a，b 在 $p_0(\lambda)$ 取得局部最大值以及局部最小值中的最大值的点处取到。此外，根据上述讨论，我们知道，当 $K=a$ 时，$\lambda_1<\lambda_2=\lambda_3<0<\lambda_4$；当 $K=b$ 时，$\lambda_1=\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4($ $\lambda_1=\lambda_2<0)$

定义

$$\begin{aligned}
X:&=K^{-1}(a)\\
&=\{p\in M^4:K(p)=a\}\\
&=\{p\in M^4:\lambda_1(p)<\lambda_2(p)=\lambda_3(p)<0<\lambda_4(p)\},\\
Y:&=\{p\in M^4:a<K(p)<b\}\\
&=\{p\in M^4:\lambda_1(p)<\lambda_2(p)<\lambda_3(p)<\lambda_4(p)\},\\
Z:&=K^{-1}(b)\\
&=\{p\in M^4:K(p)=b\}\\
&=\{p\in M^4:\lambda_1(p)=\lambda_2(p)<\lambda_3(p)<\lambda_4(p)(\lambda_1(p)=\lambda_2(p)<0)\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

显然，

$$M^4=X\cup Y\cup Z.$$

若 $Y=\varnothing$，则 K 等于 a 或 b，且 M^4 上的每一点都有三个不同主曲率。根据 [5]，M^4 是等距参数的。但由 [2] 和 [14]，可知，这与众所周知的 Cartan 分类结果相矛盾：具有三个不同主曲率的 $\mathbb{S}^{n+1}$ 等距参数超曲面仅在 $n=3$，6，12，24 时才存在。因此，$\mathbb{S}^5$中不存在这样的超曲面。

从现在起，我们假设 $Y\neq\varnothing$。

4.2. Y上的结构方程。

局部地，我们在 M^4上选取一个定向正交标架场 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$。令$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ 为其对偶标架。我们可以在Y上选取一个适当的坐标系，使得 $(U,(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4))$ 是容许的。也就是说，$(U,(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4))$ 满足

- $(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4)$ 是 U Y 的开子集上的光滑正交余标架场；
- $\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4=\mathrm{vol}$，$U$上的体积形式；

- $h=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\omega_i\otimes\omega_i$.

显然，当（U、（ω_1、ω_2、ω_3、ω_4））是可容许的时，U上的联络形式ω_{ij}是唯一确定的，并且 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$。

我们对每个 λ_i 求导，其中 $i=1$、2、3、4，从而得到光滑1-形式 $d\lambda_i$，它可由度量形式 ω_k 表示为

$$d\lambda_i=\sum_{j=1}^{4}\lambda_{ij}\omega_j,$$

其中 λ_{ij} 是 U 上的光滑函数。此外，将联络形式 ω_{ij} 表示为

$$\omega_{ij}:=\sum_{k=1}^{4}\Gamma_{ijk}\omega_k, \tag{4.6}$$

其中 $\Gamma_{ijk}=\omega_{ij}(e_k)$ 是联络系数。于是由式 (2.4) 可立即得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4}h_{iik}\omega_k=d\lambda_i=\sum_{k=1}^{4}\lambda_{ik}\omega_k,\quad \forall i=1,2,3,4,\\&\sum_{k=1}^{4}h_{ijk}\omega_k=(\lambda_i-\lambda_j)\omega_{ij}=(\lambda_i-\lambda_j)\sum_{k=1}^{4}\Gamma_{ijk}\omega_k,\quad \forall i\neq j.\end{aligned}$$

因此，

$$h_{iik}=\lambda_{ik}, \tag{4.7}$$

$$h_{ijk}=(\lambda_i-\lambda_j)\Gamma_{ijk},\quad \forall i\neq j. \tag{4.8}$$

对方程求导

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0,\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2=S,\\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3=f_3,\\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4=f_4,\end{cases} \tag{4.9}$$

并注意到 $f_4=\frac{S^2}{2}-4K$，我们得到，对每个 $j=1$，2、3、4，

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\lambda_4^2\\ \lambda_1^3&\lambda_2^3&\lambda_3^3&\lambda_4^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1j}\\ \lambda_{2j}\\ \lambda_{3j}\\ \lambda_{4j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -K_j\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

其中 K_j 定义如下：

$$dK=-\frac{df_4}{4}=-\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^3\lambda_{ij}\right)\omega_j=:\sum_{j=1}^{4}K_j\omega_j.$$

记左侧的 4×4 范德蒙德矩阵（见式（4.10））为 D。众所周知，其行列式

$$\gamma:=\det D=\prod_{k,l=1;\ k>l}^{4}(\lambda_k-\lambda_l)\neq0.$$

由方程（4.10）可得

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &= (-1)^{i+1}\frac{K_j}{\gamma}\prod_{k,l=1;\ k\neq i;k>l}^{4}(\lambda_k-\lambda_l)\\ &= K_j\cdot\frac{1}{\prod_{k=1;k\neq i}^{4}(\lambda_k-\lambda_i)}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

4.3. **3-形式** Φ。

与 [5], 中一样，我们定义 3-形式 Φ 如下:

$$\Phi=\sum_{i<j}(\lambda_i+\lambda_j)\theta_{ij},$$

其中

$$\theta_{12}=\omega_3\wedge\omega_4\wedge\omega_{12},\quad \theta_{13}=\omega_4\wedge\omega_2\wedge\omega_{13},\quad \theta_{14}=\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_{14},$$
$$\theta_{23}=\omega_1\wedge\omega_4\wedge\omega_{23},\quad \theta_{24}=\omega_3\wedge\omega_1\wedge\omega_{24},\quad \theta_{34}=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_{34}.$$

由 [5], 可知， Φ 在 Y 上是全局良定义的。

由 [5], 还可得到 Φ 的微分如下:

$$d\Phi=f_3(\sum_i c_i h_{44i}^2+1)\cdot\mathrm{vol}\quad \text{on } Y,\tag{4.12}$$

其中

$$c_i=\frac{2(3S-4\lambda_i^2)}{3(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_3-\lambda_3)^2}.$$

由 [5], 可知 $\sum_i c_i h_{44i}^2+1>0$。那么在我们的假设 $f_3\geqslant 0$ 下，有

$$\int_Y d\Phi\geqslant 0.\tag{4.13}$$

接下来，我们将计算 $dK\wedge\Phi$。

由（4.6）和（4.8）可得

$$\begin{aligned}dK\wedge\Phi=&[(\lambda_1+\lambda_2)(K_1\Gamma_{122}-K_2\Gamma_{121})+(\lambda_1+\lambda_3)(K_1\Gamma_{133}-K_3\Gamma_{131})\\ &+(\lambda_1+\lambda_4)(K_1\Gamma_{144}-K_4\Gamma_{141})+(\lambda_2+\lambda_3)(K_2\Gamma_{233}-K_3\Gamma_{232})\\ &+(\lambda_2+\lambda_4)(K_2\Gamma_{244}-K_4\Gamma_{242})+(\lambda_3+\lambda_4)(K_3\Gamma_{344}-K_4\Gamma_{343})]\\ &\cdot\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4.\end{aligned}$$

由（4.7）、（4.8）和（4.11），可得

$$K_1\Gamma_{122}-K_2\Gamma_{121}=\frac{K_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}+\frac{K_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)},$$
$$K_1\Gamma_{133}-K_3\Gamma_{131}=\frac{K_1^2}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}+\frac{K_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)},$$
$$K_1\Gamma_{144}-K_4\Gamma_{141}=\frac{K_1^2}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}+\frac{K_4^2}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)},$$
$$K_2\Gamma_{233}-K_3\Gamma_{232}=\frac{K_2^2}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}+\frac{K_3^2}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)},$$
$$K_2\Gamma_{244}-K_4\Gamma_{242}=\frac{K_2^2}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}+\frac{K_4^2}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)},$$

$$K_3\Gamma_{344}-K_4\Gamma_{343}=\frac{K_3^2}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)}+\frac{K_4^2}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}.$$

Therefore,

$$dK\wedge\Phi=\sum_{i=1}^{4}u_iK_i^2\cdot\mathrm{vol}\quad\text{on } Y, \tag{4.14}$$

其中

$$\begin{aligned}u_1=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}+\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\\&+\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\\&+\frac{\lambda_2+\lambda_4}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3=&\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\\&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_4=&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_4}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\\&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}.\end{aligned}$$

对于 $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$，我们令

$$\begin{aligned}X_\varepsilon&:=\{p\in M^4:a<K(p)<a+\varepsilon\},\\Y_\varepsilon&:=\{p\in M^4:a+\varepsilon\leqslant K(p)\leqslant b-\varepsilon\},\\Z_\varepsilon&:=\{p\in M^4:b-\varepsilon<K(p)<b\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

并由（4.5）推得

$$Y=X_\varepsilon\cup Y_\varepsilon\cup Z_\varepsilon.$$

引理 4.1。存在一个常数 $A>0$，仅依赖于 S、f_3，使得

$$u_i\geqslant -A\quad on\ X_\varepsilon\quad and\quad u_i\leqslant A\quad on\ Z_\varepsilon.$$

证明。令 $K^{-1}(a)$ 表示由满足 $\prod_{i=1}^4\alpha_i=a$ 的 X 中某点处的主曲率 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\alpha_4$ 所构成的 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)\in\mathbb{R}^4$ 集合。

根据前面的讨论，当 $K\to a$ 时，有

$$\alpha_1<\alpha_2=\alpha_3<0<\alpha_4.$$

显然，当 $K\to a$ 时，$u_2,\ u_3\to+\infty$。

此外，由于 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$，我们有

$$\begin{aligned}u_1=&\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}+\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}\\
=&\frac{\lambda_4+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)}-\frac{\lambda_4+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\\
&+\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}\\
=&\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_4^2-\lambda_3^2)-(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_4^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
&+\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}\\
=&\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(S-2\lambda_4^2)+2\lambda_1(\lambda_4^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}\\
&+\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_4=&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_4}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}+\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
&-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\\
&+\frac{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1^2-\lambda_3^2)-(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\\
&+\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(S-2\lambda_1^2)+2\lambda_4(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}.
\end{aligned}
$$

已知当 $K\to a$ 时，我们有

$$
\begin{aligned}
u_1&\to\frac{2\alpha_2(S-2\alpha_4^2)+2\alpha_1(\alpha_4^2-3\alpha_2^2)}{(\alpha_1-\alpha_2)^4(\alpha_4-\alpha_2)^2}+\frac{\alpha_1+\alpha_4}{(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2},\\
u_4&\to\frac{\alpha_1+\alpha_4}{(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2}+\frac{2\alpha_2(S-2\alpha_1^2)+2\alpha_4(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)}{(\alpha_2-\alpha_4)^4(\alpha_1-\alpha_2)^2}.
\end{aligned}
$$

因此，u_1，u_4 在 $K\to a$ 时有界。因此，存在常数 $A_1>0$，使得 $u_i\geqslant -A_1$ 在 X_ε 上成立。

类似地，令 $K^{-1}(b)$ 表示满足条件的 $(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)\in\mathbb{R}^4$ 集合，其中 $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\beta_3\leqslant\beta_4$ 是 Z 中某点处的主曲率，且满足 $\prod_{i=1}^4\beta_i=b$。

根据前面的讨论，当 $K\to b$ 从下方趋近时，只会出现以下情况：

$$
\beta_1=\beta_2<\beta_3<\beta_4,\quad \beta_1=\beta_2<0.
$$

显然， u_1， $u_2 \to -\infty$ 因为 $K \to b_\circ$
此外，由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$ 可得

$$\begin{aligned}
u_3 =&\frac{\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)}\\
=&\frac{\lambda_4+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)}-\frac{\lambda_4+\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)}\\
=&\frac{(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_4^2-\lambda_2^2)-(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_4^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)}\\
=&\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(S-2\lambda_4^2)+2\lambda_3(\lambda_4^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 =&\frac{\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}+\frac{\lambda_2+\lambda_4}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{\lambda_3+\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}-\frac{\lambda_3+\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_3^2-\lambda_2^2)-(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\\
=&\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(S-2\lambda_3^2)+2\lambda_4(\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_2-\lambda_4)^2(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\\
&+\frac{\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}.
\end{aligned}$$

已知当 $K \to b$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
u_3 &\to \frac{2\beta_1(S-2\beta_4^2)+2\beta_3(\beta_4^2-3\beta_1^2)}{(\beta_1-\beta_3)^4(\beta_1-\beta_4)^2}+\frac{\beta_3+\beta_4}{(\beta_3-\beta_4)^2(\beta_1-\beta_4)^2},\\
u_4 &\to \frac{2\beta_1(S-2\beta_3^2)+2\beta_4(\beta_3^2-3\beta_1^2)}{(\beta_1-\beta_4)^4(\beta_1-\beta_3)^2}+\frac{\beta_3+\beta_4}{(\beta_3-\beta_4)^2(\beta_1-\beta_3)^2}.
\end{aligned}$$

因此， u_3, u_4 在 $K \to b$ 时为有限值。于是存在常数 $A_2 > 0$，使得在 Z_ε 上有 $u_i \leqslant A_2$。然后我们取

$$A := \max\{A_1, A_2\},$$

引理得证。 □

4.4. **定理 1.8的证明。**

正如我们在 $Y \neq \varnothing$ 前所指出的，对于任意具有紧支集的光滑函数 $\eta : (a, b) \to \mathbb{R}$，我们应用斯托克斯定理，得到

$$d((\eta \circ K)\Phi) = (\eta \circ K)d\Phi + (\eta' \circ K)dK \wedge \Phi$$

从而得到

$$\int_Y (\eta \circ K)d\Phi + \int_Y (\eta' \circ K)dK \wedge \Phi = 0. \tag{4.16}$$

给定一个小的正数 ε，我们选取一个光滑函数 $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 (1) $0 \leqslant \eta_\varepsilon \leqslant 1$; (2) $\eta_\varepsilon(t) = 0$，当 $t \leqslant a + \frac{\varepsilon}{3}$ 或 $t \geqslant b - \frac{\varepsilon}{3}$ 时; (3) $\eta_\varepsilon(t) \equiv 1$，当 $a + \varepsilon \leqslant t \leqslant b - \varepsilon$ 时; (4) $\eta'_\varepsilon \geqslant 0$ 在 $(a + \frac{\varepsilon}{3}, a + \varepsilon)$ 上，且 $\eta'_\varepsilon \leqslant 0$ 在 $(b - \varepsilon, b - \frac{\varepsilon}{3})$ 上。由 (4.13)、(4.14)、(4.16) 和引理 4.1 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_Y (\eta_\varepsilon \circ K)d\Phi \\ &= -\int_Y (\eta'_\varepsilon \circ K)dK \wedge \Phi \\ &= -\int_Y (\eta'_\varepsilon \circ K)\sum_{i=1}^4 u_i K_i^2 \cdot \mathrm{vol} \\ &\leqslant A \cdot \int_Y |\eta'_\varepsilon \circ K| \cdot |dK|^2 \cdot \mathrm{vol}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中第二个不等式是因为引理4.1 以及条件 (3) 和 (4) 推出

$$-(\eta'_\varepsilon \circ K)\sum_{i=1}^4 u_i K_i^2 \leqslant A \cdot |\eta'_\varepsilon \circ K| \cdot |dK|^2 \quad \text{on } X_\varepsilon \cup Z_\varepsilon$$

and

$$-(\eta'_\varepsilon \circ K)\sum_{i=1}^4 u_i K_i^2 = 0 \quad \text{on } Y_\varepsilon.$$

另一方面，对于任意光滑函数 $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们可以对其应用斯托克斯定理

$$d^*((\xi \circ K)dK) = (\xi' \circ K)|dK|^2 \cdot \mathrm{vol} + (\xi \circ K)\Delta K \cdot \mathrm{vol}$$

从而得到

$$\int_{M^4} (\xi' \circ K)|dK|^2 \cdot \mathrm{vol} + \int_{M^4} (\xi \circ K)\Delta K \cdot \mathrm{vol} = 0. \tag{4.18}$$

令 $\xi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为如下给出的光滑函数

$$\xi_\varepsilon = \begin{cases} \eta_\varepsilon - 1 & \text{on } \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right], \\ 1 - \eta_\varepsilon & \text{on } \left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

注意到 $\xi'_\varepsilon = |\eta'_\varepsilon|$。由（4.18）可得

$$\begin{aligned}\int_Y |\eta'_\varepsilon \circ K| \cdot |dK|^2 \cdot \mathrm{vol} &= -\int_{M^4} (\xi_\varepsilon \circ K)\Delta K \cdot \mathrm{vol} \\ &\leqslant \int_{M^4} |\xi_\varepsilon \circ K| \cdot |\Delta K| \cdot \mathrm{vol}.\end{aligned}$$

根据构造，$|\xi_\varepsilon| \leqslant 1$ 和 $\xi_\varepsilon \circ K = 0$ 在 Y_ε上。

接下来，我们需要以下引理，该引理在 [1] 中针对 $n = 3$ 得到了证明，并且对 $n = 4$仍然成立。

引理 4.2。设 u： $M^4 \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，且 $m = \min_{M^4} u$。若 $D_\varepsilon = u^{-1}([m, m + \varepsilon])$，则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} |\Delta u| \mathrm{vol} = 0.$$

特别地，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^4 - Y_\varepsilon} |\Delta K| \cdot \mathrm{vol} = 0, \quad \textit{if } X \cup Z \neq \varnothing.$$

于是，由引理4.2，可得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^4} |\xi_\varepsilon \circ K| \cdot |\Delta K| \cdot \mathrm{vol} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^4 - Y_\varepsilon} |\xi_\varepsilon \circ K| \cdot |\Delta K| \cdot \mathrm{vol} \\ &\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^4 - Y_\varepsilon} |\Delta K| \cdot \mathrm{vol} \\ &= 0,\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_Y |\eta'_\varepsilon \circ K| \cdot |dK|^2 \cdot \mathrm{vol} = 0.$$

结合（4.17），我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_Y (\eta_\varepsilon \circ K) d\Phi = 0.$$

最后，（4.12）可得

$$0 \leqslant \int_{Y_{\varepsilon'}} f_3 (\sum_i c_i h_{44i}^2 + 1) \cdot \mathrm{vol} \leqslant \int_Y (\eta_\varepsilon \circ K) d\Phi$$

对所有 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon' < \frac{b-a}{2}$，可得 $f_3 = 0$ 在 Y 上成立。此外，$f_3 = 0$ 在 M^4 上成立。因此，由定理 1.5，主定理的证明现已完成。

Acknowledgments

本研究得到国家自然科学基金委员会资助，批准号为 12471051、12171423 和 12071424。

References

[1] S. Almeida, F. Brito，具有常平均曲率和常数量曲率的闭三维超曲面，Duke 数学杂志 61 (1990) 195-206. [2] E. Cartan，《球面空间中一族著名的等距参数超曲面》，数学杂志 45 (1939) 335-367. [3] S.P. Chang，$\mathbb{S}^4$ 中的一个具有常数量曲率和常平均曲率的闭超曲面是等参的，《分析与几何通讯》1 (1993) 71–100. [4] S.P. Chang，关于 $\mathbb{S}^4$中具有常数量曲率的极小超曲面，《微分几何杂志》37 (1993) 523-534.

[5] P.P. Cheng, T.Z. Li, $\mathbb{S}^5$中闭极小超曲面的刚性，Diff. Geom. Appl. 100 (2025) 102-252. [6] S.S. Chern，黎曼流形中的极小子流形。堪萨斯大学数学系技术报告19。Lawrence：堪萨斯大学，1968。[7] S.S. Chern, M. Do Carmo, S. Kobayashi，第二基本形式具有常长度的球面极小子流形，载于：《泛函分析及相关领域》，Springer，纽约，(1970) 59-75. [8] Q. Ding, Y.L. Xin，关于球面中极小超曲面刚性问题的 Chern 猜想，Adv. Math. 227 (2011) 131-145. [9] Q.T. Deng, H.L. Gu, Q.Y. Wei, $\mathbb{S}^5$(1)中具有常数量曲率的闭极小威尔莫尔超曲面是等参的，Adv. Math. 314 (2017) 278-305. [10] J.Q. Ge, Z.Z. Tang，陈省身猜想与等参超曲面，《微分几何》，《高级讲座数学》，第22卷，International Press，Somerville，马萨诸塞州，(2012) 49-60. [11] H.B. Lawson，极小超曲面的局部刚性定理，Ann. of Math. 89 (1969) 187-197.[12] L. Lei, H.W. Xu, Z.Y. Xu，关于球面中极小超曲面的 Chern 猜想，arXiv:1712.01175(2017). [13] T. Lusala, M. Scherfner, L.A.M. Sousa Jr, $\mathbb{S}^5$(1)中具有常数量曲率的闭极小威尔莫尔超曲面，Asian J. Math. 9 (2005) 65-78. [14] H.F. Münzner，球面中的等参超曲面，Math. Ann. 251 (1980) 57-71. [15] C.K. Peng, C.L. Terng，具有常数量曲率的球面极小超曲面，Ann. of Math. Stud. 103 (1983) 177-198. [16] C.K. Peng, C.L. Terng，球面中极小超曲面的标量曲率，Math. Ann. 266 (1983) 105-113. [17] M. Scherfner, S. Weiss，迈向球面等参超曲面的 Chern 猜想证明，载于：第33届南德微分几何研讨会论文集 (2008) 1-33. [18] M. Scherfner, S. Weiss, S.T. Yau，球面等参超曲面 Chern 猜想综述，载于：《几何分析进展》，《高级数学讲座》，第21卷。Somerville：International Press，(2012) 175-187. [19] J.Simons，黎曼流形中的极小簇，Ann of Math. 88 (1968) 62-105. [20] Y.J. Suh, H.Y. Yang，单位球面中极小超曲面的标量曲率，Commun. Contemp. Math. 9 (2007) 183-200. [21] J. Spruck, L. Xiao, $\mathbb{S}^5$ 中具有常 S 和 A_3的闭极小超曲面，J. Geom. Anal. 35 (2025) 293. [22] B. Tang, L. Yang, $\mathbb{S}^5$ 中具有常非负数量曲率的闭极小超曲面的内蕴刚性定理，《中国数学年刊》B辑39 (2018) 879–888. [23] Z.Z. Tang, W.J. Yan，关于等参超曲面的 Chern 猜想，《中国科学：数学》66 (2023) 143-162. [24] Z.Z. Tang, D.Y. Wei, W.J. Yan，超曲面为等参超曲面的一个充分条件，Tohoku Math. J. 72 (2020) 493-505. [25] L. Verstraelen，极小子流形的截面曲率，载于：《微分几何研讨会论文集》，南安普敦：南安普敦大学，(1986) 48-62. [26] S.M. Wei, H.W. Xu，球面中极小超曲面的标量曲率，Math. Res. Lett. 14 (2007) 423-432. [27] H.W. Xu, Z.Y. Xu，关于极小超曲面的 Chern 猜想及自缩子刚性，J. Funct. Anal. 273 (2017) 3406-3425. [28] H.C. Yang, Q.M. Cheng，单位球面中具有常数量曲率的极小超曲面的 pinching常数注记，Chin Sci Bull. 36 (1991) 1-6. [29] H.C. Yang, Q.M. Cheng，单位球面中具有常数量曲率的极小超曲面的 pinching常数估计，Manuscripta Math. 84 (1994) 89-100. [30] H.C. Yang, Q.M. Cheng，关于极小超曲面的 Chern 猜想，数学杂志 227 (1998) 377-390.[31] S.T. Yau，问题小节。载于：《微分几何研讨会》，《数学年刊研究》，第102卷。普林斯顿：普林斯顿大学出版社，(1982) 669-706. [32] Q. Zhang，单位球面中极小超曲面的 pinching 常数，Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010) 1833-1841.

Center of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, People'sRepublic of China*Email address*: 22335022@zju.edu.cn
Center of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, People's Republic of China*Email address*: xuhw@zju.edu.cnCenter of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, People'sRepublic of China*Email address*: zhaoet@zju.edu.cn