arXiv:2603.01183v1 [math.FA] 1 Mar 2026

关于线性不适定问题在巴拿赫空间中的分类视角下的 Goldberg-Thorp 示例评注

BERND HOFMANN[1],JENS FLEMMING[2]

[1]开姆尼茨工业大学数学学院，德国开姆尼茨 09107。[2]德累斯顿应用技术大学信息学/数学学院，德国德累斯顿 01069。

摘要。本文考察了 Goldberg 和 Thorp 于 1963 年给出的一个例子中的严格奇异映射，记为B，该映射从 ℓ^1 映射到 ℓ^2，并将其视为无限维巴拿赫空间中不适定线性算子分类背景下的一种典型混合型算子。混合型算子的零空间不是有补的，因此需要特别关注。更一般地，针对线性算子给出的适定性定义要求值域闭且零空间有补，其依据是相关伪逆算子的连续性可作为稳定性判据。关于算子B，本文通过一个定理概述了该算子及其伴随算子的结构、表示和性质。此外，本文还概述了处理B的正则化方法的局限与机遇。

关键词。 线性算子方程、巴拿赫空间、Goldberg-Thorp例子、混合型算子、适定性定义、不适定性刻画、正则化。

2020年数学主题分类。 47A52, 65J20, 47B01。

1. 引言

在常被引用的著作 [6] 中，S. Goldberg 和 E. O. Thorp 提到了一个有趣的例子，其中给出了一个序列空间之间的严格奇异连续线性算子。此有界线性算子以下简称 B，它将非自反巴 ℓ^1 拿赫空间映射到可分希尔伯特空间 ℓ^2。此类满射算子$B : \ell^1 \to \ell^2$ 的存在性在 [2]中得到了论证。如下文所示，B 并非唯一确定，但总是非单射；下文中，我们将选取一个恰当的有界线性算子族中的代表作为B，该算子族将 ℓ^1 映射到 ℓ^2。

对算子 B 更深入的刻画适用于 $A := B$，$X := \ell^1$ 和 $Y := \ell^2$，并纳入线性算子方程的处理

$$Ax = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \tag{1.1}$$

其中 X 和 Y 是无限维巴拿赫空间，且 $A : X \to Y$ 表示一个在 X 与 Y之间映射的有界线性算子。尤其是，适定 与 不适定方程 (1.1) 及相应算子 A之间的区别，在其刻画中起着重要作用。M. Z. Nashed 在开创性论文 [11]中提出了一种方法，用于对这类方程进行分类，并区分其不适定性的 I 型和 II 型。

日期：2026年2月28日。电子邮箱地址：hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de（B. Hofmann）和 jens.flemming@htw-dresden.de（J. Flemming）。

与 [11], 关于巴拿赫空间中连续算子线性问题的大量文献一样，适定性被定义为算子 $\mathscr{R}(A)$的值域为闭集 A，而非闭值域 $\mathscr{R}(A)$则表示问题不适定。这意味着，对于特定算子方程，适定性

$$Bx = y \quad (x \in \ell^1,\ y \in \ell^2) \tag{1.2}$$

此处讨论的是闭值域 $\mathscr{R}(B) = \mathscr{R}(B)^{\ell^2} = \ell^2$。事实上，仅依据值域闭这一性质所提出的适定性，源于如下事实：值域闭意味着按照 *V. K. Ivanov* [8] 的意义，即使对于非单射有界线性算子 A，也具有稳定性。这意味着，对于任意精确右端项 $y \in \mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(A)^Y$，若近似值 $y_n \in \mathscr{R}(A)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_Y = 0$，则非对称拟距离 $qdist(A^{-1}(y_n), A^{-1}(y)) := \sup_{\tilde{x}\in A^{-1}(y_n)} \inf_{x\in A^{-1}(y)} \|\tilde{x} - x\|_X \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，详情请参阅 [4, 命题 1.12]。然而，这种基于较弱拟距离误差度量的稳定性，只是适定性定义的一种可能方面。

稳定性的另一个方面，是针对固定右端项 $\mathrm{y} \in \mathscr{R}(\mathrm{A})$，为任意给定的含噪数据 $\mathrm{y}^\delta \in \mathrm{Y}$ 选取表现良好的具体近似解 $\mathrm{x}^\delta = \mathrm{x}^\delta(\mathrm{y}^\delta) \in \mathrm{X}$，以满足方程 (1.1)；其中 $\|\mathrm{y}^\delta - \mathrm{y}\|_Y \le \delta$and $\delta > 0$ 表示噪声水平。为简单起见，这里我们仅讨论有界线性算子 $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 的情形，此时值域 $\mathscr{R}(\mathrm{A})$ 在 Y 中稠密，即 $\mathscr{R}(\mathrm{A})^Y = \mathrm{Y}$。首先，考虑 A 为满射的情形，此时 $\mathscr{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{Y}$，因此所有含噪数据 $\mathrm{y}^\delta \in$Y 都属于值域。Goldberg-Thorp例子中的算子 B 就属于这种情形。其次，考虑 $\mathscr{R}(\mathrm{A})$ 是 Y 的真子集的情形，此时含噪数据 $\mathrm{y}^\delta \in$Y 未必属于值域 $\mathscr{R}(\mathrm{A})$。关于剩余情形，即值域 $\mathscr{R}(\mathrm{A})^Y$ 的闭包是 Y 的真子集，附录中有简要说明。

首先，我们考虑满射算子A的情形。求取近似解x^δ 的一种标准方法是偏差范数最小化

$$\|Ax - y^\delta\|_Y \to \min, \quad \text{subject to } x \in X, \tag{1.3}$$

这种方法尤其因其在希尔伯特空间 Y 中用于求取最小二乘解而广受认可。在那里，对所有 $\mathrm{y}^\delta \in \mathrm{Y}$，凸偏差范数泛函均有解。但若 A 非单射，则（1.3）的极小化解 $\mathrm{x}^\delta \in \mathrm{X}$ 并不唯一。因此，人们会寻求具有特定性质的解。最常见的是基于最小范数解 x_{mn}的近似，该解满足性质 $\|\mathrm{x}_{mn}\|_X = \min\{\|\mathrm{x}\|_X : \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{Ax} = \mathrm{y}\}$。若 X 是光滑且一致凸的巴拿赫空间，则此类最小范数解存在且唯一（参见 [12,引理 3.3]）。随后，可通过正则化解 x_α^δ 及正则化参数 $\alpha > 0$计算出 x_{mn} 的良好近似。关于正则化解的一般理论，例如可参阅 A. N. Tikhonov 和 A. G. Yagola 的大量研究，见 [14]和 [15]。正则化的一种重要变体是通过求解凸优化问题来求取 x_α^δ

$$\|Ax - y^\delta\|_Y^p + \alpha\|x\|_X^q \to \min, \quad \text{subject to } x \in X, \tag{1.4}$$

对于指数 $p,q \ge 1$，并采用适当的正则化参数选择规则 α。请注意，赋值 $y^\delta \in Y \mapsto x_{mn} \in X$ 通常是一个非线性 过程。遗憾的是，此处关注的巴拿赫空间 $X = \ell^1$ 并非一致凸，因此即使对于满射$A : \ell^1 \to Y$，最小范数解x_{mn} 也不一定存在。然而，作为.....的推论

巴特尔-格雷夫斯定理（见 [3, 推论 5J.4，第 345]页）表明，对于满射 $A:\ell^1\to Y$，存在一个连续算子 $S:Y\to\ell^1$，它是一个（通常）非线性 恢复算子，并满足 $ASy=y$，对所有 $y\in Y$ 均成立；该算子可用于获得稳定近似解，但 S 没有显式形式，因此无法用于实际应用。

另一方面，对于任意有界线性算子 $A:X\to Y$，存在 X 的一个子空间 U，它是 A 的零空间 $\mathcal{N}(A)$ 的补空间，使得直和 $X=\mathcal{N}(A)\oplus U$ 成立。由于算子 A 的限制 $A|_U:U\to Y$ 是单射，因此广义逆 $A^\dagger U:\mathcal{R}(A)\to U$ 有明确的定义，我们需要区分零空间有补与不可补的情形。若 X 中存在某个闭子空间 U 作为 $\mathcal{N}(A)$ 的补空间，则称该零空间在 X 中（拓扑上）有补。于是，对于满射算子 A，它们总是具有闭值域，伪逆算子 $A^\dagger U:Y\to U$ 根据开映射定理是一个有界线性算子。否则，称该零空间在 X 中（拓扑上）不可补，这意味着直和中的所有 X 的子空间 U 都不是闭的。这仅可能发生在无限维空间 X 中，且零空间 $\mathcal{N}(A)$ 的维数和余维数均非有限的情形。第二作者的专著 [4]通过其中的命题 1.11 证明，此时伪逆算子 $A^\dagger U:Y\to U$ 总是无界线性算子。但在这两种情形下，对于所有 $y\in Y=\mathcal{R}(A)$，都存在一个定义明确的元素 $x_u=A^\dagger U y\in U$，我们称之为精确右端项 y 对应的 U-解。对于满射 A，近似解 $x_u^\delta=A^\dagger U y^\delta\in U$ 也有明确的定义。当零空间 $\mathcal{N}(A)$ 有补时，我们有误差估计 $\|A^\dagger U y^\delta-A^\dagger U y\|_X\le C\,\delta$（其中算子范数 $C=\|A^\dagger U\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ 为常数），该估计刻画了利用伪逆算子作用于含噪数据 $y^\delta\in Y$，来近似精确右端项 y 对应的 U-解的质量，噪声水平为 $\delta>0$。当 $\delta\to 0$ 时，误差趋于零。对于不可补零空间 $\mathcal{N}(A)$，情形则完全不同。由于伪逆算子无界，即使 $\delta>0$ 任意小，也不存在这样的常数 C，且两个元素 $A^\dagger U y^\delta$ 和 $A^\dagger U y$ 之间的距离仍可任意大。这充分说明，除了要求值域 $\mathcal{R}(A)$ 闭，还应要求 A 在 X 中的零空间 $\mathcal{N}(A)$ 有补，作为算子方程 (1.1) 适定性定义的条件。定义 4.1 [7] 已采用了这一结论，而定义 2.6 [5] 对其稍作了修订。基于此，我们在第 2 节回顾后一个定义，其中还区分了 I 型和 II 型不适定性；出于充分理由，该定义与 [11] 中提出的相应定义以及近期在 [7] 中提出的定义略有不同。

现在我们仍简要考虑值域 $\mathcal{R}(A)$ 在 Y 中稠密的非满射算子 A 的情形。按照 Nashed [11] 的意义，这使得算子方程 (1.1) 变得不适定。非闭值域的一个特殊特征是，对于含噪数据 $y^\delta\notin\mathcal{R}(A)$，偏差范数最小化系统性地失效。这意味着优化问题 (1.3) 没有极小化解，因为极小化序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的范数 $\|x_n\|_X$ 由 $\lim_{n\to\infty}\|Ax_n-y^\delta\|_Y=\inf_{x\in X}\|Ax-y^\delta\|_Y$ 刻画，并且随着 $n\to\infty$ 趋于无穷而发散。我们注意到，对于 $y\in\mathcal{R}(A)$，U-解 $x_u=A_u^\dagger y$ 无法通过 $x_u^\delta=A_u^\dagger y^\delta$ 进行逼近，因为广义逆算子 $A^\dagger U:\mathcal{R}(A)\to U$ 对于元素 $y^\delta\notin\mathcal{R}(A)$ 未定义，而这与零空间 $\mathcal{N}(A)$ 在 X 中是有补还是不可补无关。

本文其余部分安排如下：第2 节介绍并阐释一种适定性定义，以及无限维巴拿赫空间中线性算子方程的两类不适定性之间的区别。该节还将讨论混合型算子，作为

第3节的铺垫，该节将介绍 Mazur 型算子，重点讨论 Goldberg-Thorp例子中的算子。该算子将 ℓ^1 映射到 ℓ^2，并记作B。第*3* 节的一个定理总结了B的性质。第*4*节概述了用正则化方法处理B的局限性与可能性。最后，附录补充了一些说明，全文至此结束。

2. 适定性与不适定性的刻画：聚焦混合情形

我们现在给出算子方程（1.1）的适定性与不适定性刻画及分类的现行定义版本，其中有界线性算子$A: X \to Y$映射于无限维巴拿赫空间 X 与 Y 之间。为简单起见，我们假设A 的值域的闭包与巴拿赫空间Y 重合。相应的图 1 旨在说明该定义。

定义 2.1（适定性与不适定性的刻画及分类）。 设 $A: X \to Y$ 为在无限维巴拿赫空间 X 与 Y 之间映射的有界线性算子。

则算子方程（1.1）称为适定，如果

值域 $\mathscr{R}(A)$（A 的）是闭子集，属于Y，此外零空间 $\mathscr{N}(A)$ 有补于X;

否则方程（1.1）称为不适定。

在不适定情形下，（1.1）称为*I*型不适定如果

the range $\mathscr{R}(A)$ contains an *infinite-dimensional closed subspace* of Y;

否则，方程（1.1）称为*II*型不适定。

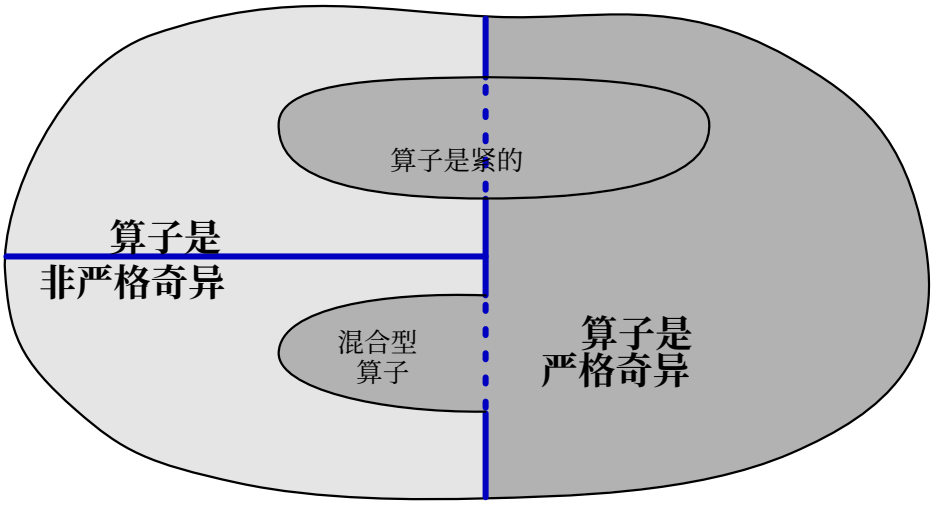

图 1. 无限维Banach空间之间具有稠密值域的有界线性算子的情形区分

正如我们在引言中所阐述的，按定义2.1 ，适定性要求值域为闭 $\mathscr{R}(A)$，且算子 $\mathscr{N}(A)$ 的零空间有补A。关于这一点的进一步论证，也可参见附录中的命题4.6 。尽管 Nashed 的论文中已提到不可补性现象 [11], ，但其中并未提及它对算子方程（1.1）近似解稳定性的影响。因此，出于充分理由，我们的新定义在这一点上不同于 [11]中的设定。图1 中，水平线以上且垂直线左侧的区域对应适定情形，其中包括值域为有限维的紧算子A。

另一方面，我们的定义也不同于 [11] 以及 [7, 定义 4.1]。我们将所有不适定方程归入I型不适定问题这一类，其中A的值域包含一个无限维闭子空间，该子空间位于图1 中水平线下方、竖线左侧的区域。这包括混合情形，沿袭[7], 中的定义 4.6，我们将在定义2.3中回顾之；此前，我们已在定义2.2 中回顾了严格奇异性的概念。

定义 2.2 （严格奇异算子）。 有界线性算子$A: X \to Y$ 在巴拿赫空间X 与Y 之间作映射，称为严格奇异的，如果对任意无限维闭子空间Z （属于X），A 在Z 上的限制绝不是同构。

定义 2.3 （混合型算子）。 我们将算子方程（1.1）及其相应的有界线性算子$A: X \to Y$ 刻画为混合型，如果A 是严格奇异的，且其值域 $\mathscr{R}$（A）包含Y的一个无限维闭子空间。

下面的命题沿用了 [7], 命题 4.7 的思路，但对证明略作修改，建立了混合情形下零空间不可补性与图 1中混合型算子和紧算子之间明显区域分隔的联系，并对此作出解释。

命题 2.4. 对于一个(1.1) 混合型算子方程，算子 $A: X \to Y$ 并非紧算子，且其零空间 $\mathscr{N}(A)$ 总是不可补的。

证明。根据定义 2.3， $\mathscr{R}$(A) 包含一个闭无限维子空间，记为 M。由于 M 是无限维的，根据里斯引理，存在一个有界序列 $(y_n) \subset M$，它没有收敛子列。对于非单射算子 A，按照定理 3 第 4] 项中的表述，开映射定理 [13, 给出一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，满足 $Ax_n = y_n$，且 $\|x_n\|_X \leq C\|y_n\|_Y$ ，对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。如果 A 是紧算子，那么 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 将有一个收敛子列，这就产生了矛盾。

如果非紧算子 A 的零空间有补，那么 $X = \mathscr{N}(A) \oplus U$ 与 X 的一个无限维闭子空间 U 相关联。现在，再设 $M \subseteq \mathscr{R}(A)$ 表示 Y 的一个无限维闭子空间。由于 A 在 U 上连续且单射，连续广义逆关于 U作用于M 所得的像集 $A^{\dagger}{}_U[M]$ 是 X 的一个无限维闭子空间，而连续算子 A 在该子空间上甚至具有连续逆算子。然而，这与 A 的严格奇异性相矛盾。
□

根据无限维巴拿赫空间中不可补零空间的性质，我们立即得到以下推论。

推论 2.5。 对于（1.1）混合型算子方程，算子 A 是非单射的，且其零空间 $\mathscr{N}$（A）的维数和余维数均非有限。

混合型算子A的关键特征是其严格奇异性（参见 [9, 第 284] 页），这意味着对于 X 中任意闭无限维子空间 X，算子 $A|_M$ 在A 到 M 上的限制不是同构。注意，在所有不适定情形中，除混合型算子外，严格奇异算子 A （图 1 中深色背景区域）均为 II 型不适定（位于图 1 中竖线右侧的区域）。其中包括值域为无限维的紧算子类。

3. Goldberg-Thorp例子的算子

对于 B 这一从 ℓ^1 映射到 ℓ^2 的 Goldberg-Thorp例子算子， [6] 并未规定特定结构。不过，这类算子 B 可通过下文定义 3.1中的算子来表示，我们称之为*Mazur* 型算子，其性质将在下文命题 3.2 中概述。

定义 3.1 （Mazur 型算子）。 有界线性算子 $A_1^Y\colon \ell^1 \to Y$ 若映入可分无限维Banach空间Y ，且存在一个序列 $(\zeta_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$属于$Y$并在$Y$的单位球面中稠密，其中 $\zeta^{(k)} \neq \zeta_{(l)}$ 满足 $k \neq l$，并且对于$x = (x_1, x2, \ldots) \in \ell^1$，可表示为

$$[A_1^Y]\,x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \zeta^{(k)}. \tag{3.1}$$

注意，对于任意 $x \in \ell^1$， $\zeta^{(k)}$-函数在（3.1）中的加权和总是收敛的，并给出 Y中的一个元素。

命题 3.2. 对于可分无限维巴拿赫空间 Y，按照定义 $A_1^Y\colon \ell^1 \to$ *3.1* 所定义的所有 *Mazur* 型算子 A ℓ^1 都映射到 Y 上。若 Y 是自反的，则所有 *Mazur* 型算子 A_1^Y 都是严格奇异的，因此按照定义 *2.3*，它们属于混合型；相应的算子方程 (1.1) 且 $A{:=}A_1^Y$ 在定义 *2.1*的意义下是 I 型不适定。

证明。 利用 Mazur 型结构（ ℓ^1 3.1）构造从 任意可分无限维巴拿赫空间Y 映到其上的有界线性算子的存在性，Banach 和 Mazur 已经证明；请参阅 [2, 第 111 页，条目 (e)]。在 [1]的定理 2.3.1 的背景下，相关证明以一种较易理解的形式给出。对于自反巴拿赫空间 A_1^YY，算子 A [6, 严格奇异，这可由 334],定理第 (b) 条，第 ℓ^1 页推出，因为 □不包含任何无限维自反子空间。</output>

注 3.3. 命题 3.2 保证，所有具有$Y = \ell^2$ 的 Mazur 型算子都会产生满射且严格奇异的算子 $B = A_1^{\ell^2}\colon \ell^1 \to \ell^2$ 这与 Goldberg-Thorp 例子的思路一致。由于对于所有可分巴拿赫空间 Y，都存在无穷多个满足 Mazur 型算子 $(\zeta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ 所需性质的序列 A_1^Y，依据定义3.1中的公式 (3.1)，算子 A_1^Y 存在无穷多个不同的版本；当然，对于 Goldberg-Thorp 例子中具有Y的算子$Y\colon = \ell^2$，亦是如此。

定理 *3.4.* 任意有界线性满射算子 $B:\ell^1\to\ell^2$ 均为混合型，因此，算子方程 *(1.2)* 按定义 *2.1* 的意义是 *I*型不适定的。算子 *B* 的零空间为 $\mathcal{N}(B)$，且在 ℓ^1中不可补。零空间 $\mathcal{N}(B)$的维数和余维数均非有限。因此，*B* 是非单射的。伴随算子 $B^*:\ell^2\to\ell^\infty$ 是单射，因此不是严格奇异算子，且其值域 $\mathcal{R}(B^*)=\mathcal{N}(B)^\perp$ (是 $\mathcal{N}(B)$的湮灭子)为无限维闭值域。因此，伴随算子方程

$$B^*\eta = z \quad (\eta\in\ell^2,\, z\in\ell^\infty) \tag{3.2}$$

在定义2.1的意义下是适定的。

若 *B* 是 *Mazur* 型算子，且具有如下形式

$$Bx := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\zeta^{(k)} \in \ell^2 \qquad for \quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in\ell^1, \tag{3.3}$$

伴随算子 B^* 可显式写为

$$B^*\eta = (\langle\eta,\zeta^{(1)}\rangle_{\ell^2},\langle\eta,\zeta^{(2)}\rangle_{\ell^2},\ldots)\in\ell^\infty. \tag{3.4}$$

证明。由于无限维空间 ℓ^2 是自反的，算子 B 从 ℓ^1 到 ℓ^2 的严格奇异性再次由 [6, 定理第 (b) 项（第 334] 页）得出。因此，B 是混合型的，方程 (1.2) 是 I 型不适定的。根据命题 2.4，算子 B 有一个零空间 $\mathcal{N}$(B)，它在 ℓ^1中不可补。由推论 2.5 可知，零空间 $\mathcal{N}$(B) 的维数和余维数都不是有限的，因此 B 不是单射。由 [10, 定理 3.1.22(a)], 可立即推出 B^* 的单射性；该定理应用于我们的满射算子 B 时，断言 B^* 是从 ℓ^2 到 ℓ^∞的某个子空间的同构。B^* 的值域 $\mathcal{R}(B^*)$ 是闭的，且公式 $\mathcal{R}(B^*)=\mathcal{N}(B)^\perp$ 成立，这些都是闭值域定理的推论（例如，参见 [16, 第 VII 章定理5]）。B^* 值域的闭性与 B^* 的单射性共同确保方程 (3.2) 在定义 2.1 的意义下是适定的。对于具有结构 (3.3) 的 Mazur 型算子 B，由伴随算子的定义可立即得到

$$\langle\eta,Bx\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\langle\eta,\zeta^{(k)}\rangle_{\ell^2} \quad \text{for all} \quad \eta\in\ell^2 \ \text{ and } \ x\in\ell^1.$$

由此立即得到 B^* 的表示式 (3.4)。注意，对于形如 (3.3) 的 Mazur 型算子 B，若假设 $B^*\ B^*\eta_1 = B^*\eta_2\in\ell^\infty$ 和 $\eta := \eta_1-\eta_2$ 对于 $\eta,\eta_1,\eta_2\in\ell^2$ 成立，则可直接证明 B^* 的单射性。于是我们有 $(\langle\eta,\zeta(1)\rangle_{\ell^2},\langle\eta,\zeta(2)\rangle_{\ell^2},\ldots)=0$。由于序列 $(\zeta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ^2 中单位球面的稠密子集，对于任意满足 $\|\zeta\|_{\ell^2}=1$ 的元素 $\zeta\in\ell^2$，我们得到 $\langle\eta,\zeta\rangle_{\ell^2}=0$，因为对于所有 $k\in\mathbb{N}$，$\langle\eta,\zeta(k)\rangle_{\ell^2}=0$。然而，这推出 $\eta=0\in\ell^2$，从而得到 B^* 的单射性。□

注记3.5. 正如定理 3.4 所示，Goldberg-Thorp例子中的满射算子 $B:\ell^1\to\ell^2$ 属于定义 2.3 意义下的混合型，这意味着该算子是严格奇异的，且其值域包含一个无穷维闭子空间。在本注记中，我们指出，非满射算子也可能是混合型的。例如，我们给出算子 $A:\ell^1\times\ell^1\to\ell^2\times\ell^2$，其中令 A :=(B,C)，B 来自 Goldberg-Thorp例子，而 $C:=\mathscr{E}_I^2$是从 ℓ^1 到 ℓ^2 的单射嵌入算子，其值域$\mathcal{R}$(C)在 ℓ^2中稠密。于是，B 和 C 都是严格奇异算子，因此 A 也是严格奇异算子，并且零空间

$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B) \times \{0\}$ 不可补。此外，非闭值域 $\mathcal{R}(A) = \ell^2 \times \mathcal{R}(C)$在 $\ell^2 \times \ell^2$ 中稠密，且包含 $\ell^2 \times \ell^2$的闭无限维子空间 $\ell^2 \times \{0\}$。因此，该例中的算子 A 是混合型的。

4. GOLDBERG-THORP 正则化方法的局限性与机遇

即使序列 $(\zeta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 构成位于 ℓ^2中的单位球面的可数稠密子集是已知的，针对方程（1.2）的稳定近似解，有效的正则化策略仍然困难。在 [5, 定理 3.3] 中已经证明，基于该优化问题的相应 Tikhonov 型正则化

$$\|Bx - y^\delta\|_{\ell^2}^2 + \alpha\|x\|_{\ell^1} \to \min, \quad \text{subject to } x \in \ell^1, \tag{4.1}$$

作为（1.4）的一种变体是失败的，因为正则化解 $x_\alpha^\delta \in \ell^1$ 作为（4.1）的极小化解仅对含噪数据 y^δ 存在，且这些数据来自 ℓ^2的一个稠密子集。关于最小范数解 x_{mn}的存在性，类似的结果同样成立。

命题 4.1. 若 y 不是某个 k 所对应的 $\zeta^{(k)}$ 的倍数，则不存在最小范数解 x_{mn} 满足

$$\|x_{mn}\|_{\ell^1} = \min_{\{x\in X : Bx = y\}} \|x\|_{\ell^1}. \tag{4.2}$$

证明. 极小化问题（4.2）等价于

$$\mathcal{N}(B)^\perp \cap \partial\|\cdot\|_{\ell^1}(x_{mn}) \neq \emptyset$$

with

$$\xi \in \partial\|\cdot\|_{\ell^1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \xi_k \begin{cases} = -1, & \text{if } x_k < 0, \\ \in [-1,1], & \text{if } x_k = 0, \\ = 1, & \text{if } x_k > 0 \end{cases} \text{ for } k \in \mathbb{N}.$$

由定理 3.4 可知 $\mathcal{N}(B)^\perp = \mathcal{R}(B^*)$。因此，若存在极小元，则存在某个 $\eta \in \ell^2$ 使得 $B^*\eta \in \partial\|\cdot\|_{\ell^1}(x_{mn})$。

假设 x_{mn} 至少有两个非零分量 $[\mathrm{x}_{mn}]_m \neq 0$ 与 $[\mathrm{x}_{mn}]_n \neq 0$。将这两个分量的符号分别记为 $\mathrm{s}_m \in \{-1,1\}$与 $\mathrm{s}_n \in \{-1,1\}$。则 $[\mathrm{B}^*\eta]_m = \mathrm{s}_m$且 $[\mathrm{B}^*\eta]_n = \mathrm{s}_n$，或等价地，$\langle \eta, \zeta^{(m)}_{\ell^2} \rangle = \mathrm{s}_m$且 $\langle \eta, \zeta(\mathrm{n})\rangle_{\ell^2} = \mathrm{s}_n$。现取 $(\zeta(\mathrm{k}))_{k\in\mathbb{N}}$的一个子列 $(\zeta^{(k_l)})_{l\in\mathbb{N}}$，使其收敛于

$$\tilde{\eta} := \frac{s_m \zeta^{(m)} + s_n \zeta^{(n)}}{\|s_m \zeta^{(m)} + s_n \zeta^{(n)}\|_{\ell^2}}. \tag{4.3}$$

那么 $\langle \eta, \zeta^{(k_l)} \rangle_{\ell^2} \to \langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2}$。由

$$\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} = \frac{2}{\|s_m \zeta^{(m)} + s_n \zeta^{(n)}\|_{\ell^2}} \tag{4.4}$$

我们看到 $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} \geq 1$并且，当且仅当 $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} > 1$成立时，$\zeta^{(m)}$ 与 $\zeta^{(n)}$ 线性相关。因此，$\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} = 1$仅当 $\zeta^{(n)} = -\zeta^{(m)}$ 时才可能。

在这种情况下 $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} > 1$我们可以找到（足够大的）$k_l$，使得 $\langle \eta, \zeta^{(k_l)} \rangle_{\ell^2} > 1$或者等价地 $[B^*\eta]_{k_l} > 1$。因此，$B^*\eta \notin \partial\|\cdot\|_{\ell^1}(x_{mn})$，这表明$x_{mn}$至多有一个非零分量

$[x_{mn}]_k$若对所有$l \neq k$，都有 $\zeta^{(l)} \neq -\zeta_{(k)}$。由于$x_{mn}$只有一个非零分量，因此我们得到$Bx_{mn} = [x_{mn}]_k \zeta^{(k)}$。

若 $\langle \eta, \tilde{\eta} \rangle_{\ell^2} = 1$，我们目前并未得到矛盾。也就是说，只要满足 $\zeta^{(n)} = -\zeta_{(m)}$，$x_{mn}$ 可能有两个非零分量 $[x_{mn}]_m$和 $[x_{mn}]_n$。但是，第三个非零分量 $[x_{mn}]_l$ 是不可能的，因为相应的 $\zeta^{(l)}$ 必须同时等于$-\zeta_{(m)}$和 $-\zeta_{(n)} = \zeta_{(m)}$。因此，$Bx_{mn} = ([x_{mn}]_m - [x_{mn}]_n)\zeta^{(m)}$。□

由于巴特尔-格雷夫斯定理给出的连续算子$S\colon \ell^2 \to \ell^1$ 满足 $BSy = y$ 对所有 $y \in \ell^2$ 并未明确给出，因此，这个S 不能用作（非线性）广义逆来求解方程（1.2）的稳定解。另一方面，有限维近似

$$B_n x := \sum_{k=1}^{n} x_k \zeta^{(k)}$$

基于优化问题的B 及其相关最小二乘解

$$\|B_n x - y^\delta\|_{\ell^2}^2 \to \min, \quad \text{subject to } x \in \ell^1, \tag{4.5}$$

由于B 不是单射，且零空间 $\mathcal{N}(B)$无法以显式形式获得，因此也无济于事。也就是说，有限集合 $(\zeta_{(1)}\zeta_{(2)}\ldots,\zeta_{(n)})$ 通常不仅包含线性无关函数，而且即使n 非常大，值域 $\mathscr{R}(B_n)$ 的维数也可能很小（例如仅为 2）。

极小化解的存在性和稳定性缺陷 $x_\alpha^\delta \in \ell^1$ 对应于优化问题 (4.1)，其根源在于混合型算子B不具备弱*-弱连续性，这是 I 型不适定性的典型性质（参见 [5, 定理 3。2]），因此[5, 命题 3。1]）不适用。从理论角度看，若能以合理的方式将算子 B 限制为某个具有稠密值域的不满射且为 II 型不适定的算子，则有望克服这一缺陷。下面将对此作简要说明。

引理4.2。考虑一个序列 $(\zeta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$，它构成 ℓ^2 中单位球面的一个可数稠密子集，其中 $\zeta_{(k)} \neq \zeta^{(l)}$ 对于 $k \neq l$ 成立。此外，令 $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 表示属于希尔伯特空间 ℓ^2的通常单位元序列。于是存在一个序列 $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathbb{N}$，以及一个同构 $T\colon \ell^2 \to \ell^2$，使得 $\zeta^{(k_l)} = Te^{(l)}$ 对所有 $l \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。由于序列 $(\zeta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 ℓ^2 的单位球面中稠密，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，我们都能找到某个 $k_l \in \mathbb{N}$，使得

$$\|e^{(l)} - \zeta^{(k_l)}\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{2l}. \tag{4.6}$$

相应的序列 $(\zeta_{(k_l)})_{l\in\mathbb{N}}$ 两两不交，因为 $\|e^{(l_1)} - e^{(l_2)}\|_{\ell^2} = \sqrt{2}$，只要 $l_1 \neq l_2$ 即成立。对于每个固定的 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $(c1,\ldots,c_n) \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} c_l \left(e^{(l)} - \zeta^{(k_l)}\right) \right\|_{\ell^2} \leq \sum_{l=1}^{n} |c_l| \left\|e^{(l)} - \zeta^{(k_l)}\right\|_{\ell^2} \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |c_l|^2} \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4l^2}} \leq \lambda \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |c_l|^2} \tag{4.7}$$

结合 $\lambda < 1$。引理的断言现在可由 [17, 第 13 条定理（第 41], 页）推出；相关定义请参见同一文献第 31 页。□

该子列$(\zeta^{(k_l)})_{l\in\mathbb{N}}$是引理意义下的近似正交归一基，其定义采用*Riesz*基。它甚至是*Bari*基。关于定义及背景，请参见 [17] 。

命题4.3。 存在一个闭无限维子空间 $U \subseteq \ell^1$ ，它与 ℓ^1同构，使得 B 在 U 上的限制 $B|_U$：$\ell^1 \to \ell^2$ 是单射、弱 * 到弱连续的，且其值域 $\mathscr{R}(B|_U)$ 在 ℓ^2 中稠密，其中 ℓ^1 中的弱 *收敛是相对于预对偶空间 c_0而言的。

证明。 取 $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ 和 T，由引理4.2 并令

$$U := \overline{\operatorname{span}\{e^{(k_l)} : l \in \mathbb{N}\}}^{\ell^1}. \tag{4.8}$$

对于满足 $u = \sum_{l=1}^{\infty} u_l e^{(k_l)} \in U$ 且 $Bu = 0$ 的 u，我们得到

$$T\left(\sum_{l=1}^{\infty} u_l e^{(l)}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} u_l T e^{(l)} = \sum_{l=1}^{\infty} u_l \zeta^{(k_l)} = Bu = 0 \tag{4.9}$$

于是， $\sum_{l=1}^{\infty} u_l e^{(l)} = 0$，这只有在 $u = 0$时才可能，因为 $(e^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ^2中的正交归一基。这证明了 $B|_U$的单射性。

要证明弱*到弱连续性，由于 [4, 引理9.3] ，只需证明当 $l \to \infty$时，$Be^{(k_l)}$弱收敛于零。我们有 $Be^{(k_l)} = \zeta^{(k_l)} = Te^{(l)}$，并且当 $l \to \infty$时，$(e^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ 在 ℓ^2 中弱收敛于零。由于有界线性算子总是弱到弱连续的，这就证明了该断言。

U 显然与 ℓ^1 同构，且$T^{-1}B|_U$是从 ℓ^1 到 ℓ^2的嵌入算子 $\mathscr{E}_1^2$，其值域在 ℓ^2中稠密。由于$B|_U$ 的值域是该稠密子空间在同构T下的像，故该值域也是稠密的。□

注4.4. 若将 ℓ^2 替换为某个可分希尔伯特空间，则该引理与该命题仍然成立。对于$(e^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$，可以选取任意正交归一基。

由于算子B 限制在适当选取的闭无限维子空间U 上，在 ℓ^1 与 ℓ^2 之间是弱*-弱连续的（此为命题4.3的结果），故下述推论成立。

推论4.5. 设$y \in \mathscr{R}(B|_U)$ 且 $\|y^\delta - y\|_Y \le \delta$。则优化问题的极小化解$x_\alpha^\delta \in U \subseteq \ell^1$

$$\|B|_U x - y^\delta\|_{\ell^2}^2 + \alpha\|x\|_{\ell^1} \to \min, \quad \textit{subject to } x \in U \subseteq \ell^1, \tag{4.10}$$

（即 *Tikhonov*正则化解）对任意含噪数据 y 均存在$^\delta \in \ell^2$。此外， [4] 定理 *9.4* 适用，并且当噪声水平 $\delta > 0$ 趋于零时，可得收敛近似。

只要能够明确获得序列 $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ，子空间U 就具有由 (14) 和 (16) 描述的简单且明确的结构。目前，Mazur 型算子在实践中并不相关。因此，尚不清楚是否能够实现这种可获得性。但这些结果原则上展示了如何对具有不可补零空间的算子应用 Tikhonov 正则化。

附录

关于 $\mathscr{R}(A)^Y$ 是 Y 的真子空间的情形的备注：当有界线性算子 A 的值域 $\mathscr{R}(A)$ 的闭包是 Y 的真子空间，即 $\mathscr{R}(A)^Y \neq Y$ 时，在算子方程 (1.1) 的背景下，可能出现定义 2.1 意义下的 I型和 II型不适定性，但也可能出现适定性。关于该情形下具体的适定性和不适定性分类细节，请参阅 [7, 第 5] 节。这里的特殊之处在于，对形如 $y^\delta \in Y \setminus \mathscr{R}(A)^Y$ 的含噪数据进行处理会带来额外挑战。如果考虑直和 $Y = \mathscr{R}(A)^Y \oplus V$，则当且仅当 V 是 Y 的闭子空间时，连续线性投影 $P : Y \to V$ 存在，这意味着 $\mathscr{R}(A)^Y$ 在 Y 中是有补的。当 A 的值域闭包在 Y 中有补（V 闭）时，可以定义伪逆算子 $A^\dagger U : \mathscr{R}(A) \oplus V \to U$，其中 $X = \mathscr{N}(A) \oplus U$，并且对所有 $v \in V$ 都有 $A^\dagger U v = 0$。但是，对于 $y^\delta \notin \mathscr{R}(A) \oplus V$，元素 $A^\dagger U y^\delta$并未定义。在希尔伯特空间的情形下，我们从摩尔-彭罗斯伪逆中了解到这一现象。

关于商映射及其推论的评注：

设 $Q : X \to X/\mathscr{N}(A)$ 是相对于 $\mathscr{N}(A)$ 的商映射，并设 $\tilde{A} : X/\mathscr{N}(A) \to Y$ 是满足 $A = AQ$ 的单射有界线性算子。进一步，设 U 是 X 的一个子空间，满足 $X = \mathscr{N}(A) \oplus U$。记 $A^\dagger U : \mathscr{R}(A) \to U$ 为 A 的相应广义逆，$\tilde{A}^{-1} : \mathscr{R}(A) \to X$ 为 $\tilde{A}$ 的逆算子，并记 $Q^\dagger U : X/\mathscr{N}(A) \to U$ 为 Q 相对于 U 的广义逆。

命题 4.6。 对于上文引入的算子，有：

(i) $A^\dagger U$ 有界，当且仅当 $\tilde{A}^{-1}$ 和 $Q^\dagger U$ 都有界。(ii) $\tilde{A}^{-1}$ 有界，当且仅当 $\mathscr{R}(A)$是闭的。(iii) $Q^\dagger U$ 有界，当且仅当 U 是闭的（即 $\mathscr{N}(A)$ 有补）。

证明. 对于 (ii) 中的非平凡蕴含，注意到 $\tilde{A}^{-1} = QA^\dagger U$ 且 $Q^\dagger U = A^\dagger U \tilde{A}$. $\mathscr{R}(A)$ 的闭性蕴含 $\tilde{A}^{-1}$ 在 (ii) 中的有界性，这是开映射定理的直接推论。另一方面，若 $\tilde{A}^{-1}$ 有界，则 $\tilde{A}$ 是一个同构。因此，$\mathscr{R}(A)$ 是一个巴拿赫空间，因为 $X/\mathscr{N}(A)$ 是一个巴拿赫空间。

(iii) 中$Q^\dagger U$ 的有界性再次是开映射定理的推论。另一方面，如果$Q^\dagger U$ 有界，那么$Q|_U$ 在Q 上的限制U 是U 与$X/\mathscr{N}(A)$之间的同构。由于$X/\mathscr{N}(A)$是一个巴拿赫空间，因此U也是一个巴拿赫空间。□

参考文献

[1] F. Albiac 和 N. J. Kalton。《巴拿赫空间理论专题》。数学研究生教材，第233卷，施普林格，纽约，2006年。[2] S. Banach 和 S. Mazur。线性维数理论。《数学研究》，4(1):100–112，1933年。[3] A. L.Dontchev 和 R. T. Rockafellar。隐函数与解映射（第2版）。施普林格运筹学与金融工程丛书，施普林格，纽约，2014年。变分分析视角。[4] J. Flemming。《变分源条件、二次逆问题、促进稀疏性的正则化》。数学前沿。Birkh¨auser/施普林格，尚，2018年。逆问题现代理论的新成果及其在激光光学中的应用。[5] J. Flemming 和 B. Hofmann。巴拿赫空间中不适定性分类的新进展。论文已提交至优化理论通讯，2026年。预印本：arXiv:2511.06690（2025年11月）。

[6]S. Goldberg 和 E Thorp。关于严格奇异算子的若干未决问题。美国数学会会刊，14:334–336，1963年。[7] B. Hofmann 和 S. Kindermann。巴拿赫空间中有界线性算子的不适定性分类。美国数学会（即将于2026年出版）。预印本：arXiv:2505.12931（2025年5月）。[8] V. K. Ivanov。关于不适定问题（俄文）。《数学文集》（新系列），61(103):211–223，1963年。[9] T. Kato。线性算子的零度、亏格及其他量的微扰理论。《数学分析杂志》，6:261–322，1958年。[10] R.E. Megginson。《巴拿赫空间理论导论》。数学研究生教材，第183卷，施普林格，纽约，1998年。[11] M. Z. Nashed。不适定算子方程分类与正则化的新方法。载于《逆问题与不适定问题》（圣沃尔夫冈，1986），《数学、科学与工程笔记丛刊》第4卷，第53–75页。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1987年。[12] T. Schuster、B. Kaltenbacher、B. Hofmann 和 K.S. Kazimierski。巴拿赫空间中的正则化方法，《计算与应用数学拉东丛书》第10卷。Walter de Gruyter，柏林、波士顿，2012年。[13]T. Tao。245B，笔记9：贝尔纲定理及其在巴拿赫空间中的推论。https://terrytao.wordpress.com/2009/02/01/245b-notes-9-the-baire-category-theorem-and-its-banach-space-consequences/，2009年。“在线访问日期：2025年2月4日”。[14] A. N. Tikhonov、A. S. Leonov 和 A. G. Yagola。《非线性不适定问题》，第1卷。Chapman & Hall，伦敦、纽约，1998年。[15] A. G. Yagola 和 Y. M. Korolev。特殊情形下不适定问题的误差估计。载于《应用逆问题》，《施普林格数学与统计学会议论文集》第48卷，第155–164页。施普林格，纽约，2013年。[16] K. Yosida。《泛函分析》（第6版）。施普林格出版社，柏林—纽约，1980年。[17] R. M. Young。《非谐傅里叶级数导论》（第1章：巴拿赫空间中的基）。载于《纯粹与应用数学》，第93卷，第1–51页。学术出版社，纽约，1980年。