arXiv:2603.01188v1 [math.OC] 1 Mar 2026

带跳跃的前向随机偏微分方程与倒向随机微分方程部分观测控制的最大值原理

钱洪江、GEORGE YIN、YANZHAO CAO 和 GUANNAN ZHANG

摘要。本文针对凸控制域中的耦合前向随机偏微分方程（FSPDE）与带跳跃的倒向随机微分方程（BSDE）的部分观测最优控制，建立了两个 Pontryagin 型最大值原理版本。该 FSPDE-BSDE 系统由柱状 Wiener 过程、有限维布朗运动和补偿泊松随机测度驱动。对于系数为确定性的系统，本文采用直接方法，并特别关注带跳跃的奇异倒向随机偏微分方程的适定性。对于系数为随机的系统，本文发展了一种 Malliavin 微积分方法。本文的主要创新在于建立了带跳跃的算子值随机偏微分方程的适定性，由此为带跳跃的线性随机偏微分方程提供了一种新的随机流表示。

1. 动机

本研究旨在为由柱状Wiener过程、有限维布朗运动和补偿泊松随机测度（PRMs）驱动的前向随机偏微分方程（FSPDEs）和倒向随机微分方程（BSDEs）的部分观测最优控制，建立庞特里亚金型最大值原理。

一个启发性例子是部分信息最优收获；参见 [23,第4节。1]。假设 $x(t,\xi)$ 表示时刻$t \in (0,T)$ 和位置 $\xi \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$处种群（例如鱼类）的密度。其动态由一个带跳跃的随机反应-扩散方程描述

$$\begin{aligned} dx(t,\xi) = &\left[\tfrac{1}{2}\Delta x(t,\xi) + a(x(t,\xi)) - u(t,\xi)\right] + \sigma(t)x(t,\xi)dW(t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Theta(x(t,\xi),u(t,\xi),\alpha)\widetilde{N}(dt,d\alpha), \quad x(0,\xi) = x^0(\xi),\ (t,\xi) \in [0,T]\times\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

并在 $\partial\mathcal{O}$ 上补充无通量边界条件。这里， $a(\cdot)$ 表示种群的内禀增长。一个典型的选择是逻辑斯谛律 $a(x) = r_a x(1 - x/c_a)$，其中 r_a 是内禀增长率， $c_a > 0$ 是环境容纳量。控制变量 $u(t, \xi)$ 表示位置 ξ 处的收获强度，假定其取值属于预先规定的容许集，该集合体现了监管约束。柱状维纳过程 $W(t)$ 描述影响繁殖和存活的连续环境波动，其乘性

2020 数学主题分类。93E11, 93C41, 93E20, 60H15, 60H07。关键词和短语。部分观测控制，随机最大值原理，随机偏微分方程，跳过程，倒向随机微分方程，递归效用，Malliavin微积分，M-2型Banach空间。H. Qian和Y. Cao的研究得到了美国能源部项目资助，资助编号为DE-SC0022253、DE-SC00256；G. Yin的研究部分得到了美国国家科学基金会项目DMS-2204240的资助；G. Zhang的研究部分得到了美国能源部先进科学计算研究办公室应用数学项目的资助，项目编号为ERKJ388和ERKJ443。

系数形式为 $\sigma(t)x(t,\ \xi)$。由补偿跳跃过程 N 驱动的跳跃分量 $\widetilde{\ }$ 描述了罕见事件引发的种群骤减。一个具有生物学意义的设定是 $\Theta(x,\ u,\ \alpha)\ =-\alpha x,\ \ \alpha\in(0,\ 1)$，这样跳跃会瞬间移除局部种群中的随机比例 α，反映突发的死亡事件。

在现实中，完整的空间种群场通常无法被完全观测到。决策者只能获取由传感器网络采集的部分且含噪测量。这通过观测过程 $dY(t)\ =\int_{\mathcal{O}}h(\xi)x(t,\ \xi)d\xi+dB(t)$ 来建模，其中 $h\ \in\ L^2(\mathcal{O})$ 表示监测设备的空间灵敏度， $B(t)$ 是一个与 W 和 $\widetilde{N}$ 独立的 $\mathbb{R}^d$ 值布朗运动。可行的捕捞策略必须适应于由 Y 生成的滤过，这反映了决策仅基于部分信息这一事实。

我们考虑一种将经典累积成本与递归风险敏感分量相结合的性能准则。对于可行的捕捞策略 u，目标泛函定义为

$$J(u)=\mathbb{E}\big[\int_0^T\int_{\mathcal{O}}L(x(t,\xi),u(t,\xi))d\xi dt+\varphi(x(T))+y_0\big],\tag{1.2}$$

其中，运行成本为 $L(x,\ u)\ =-p_Lu+c_Lu^2/2+\lambda_L/2(x-x^*)^2$，终端成本的形式为 $\varphi(x(T))\ =0.5\beta(\int_{\mathcal{O}}x(T,\ \xi)d\xi-x_T^*)^2$。这里， $p_L>0$ 表示捕捞的单位收益，而 u 中的二次项刻画了不断增加的边际运营成本和监管成本。涉及 x^* 的惩罚项通过抑制偏离目标种群水平的行为来保障可持续性，终端项则防止期末耗竭。递归分量（$y_t,\ z_t,\ r_t,\ \gamma_t$）由以下带跳跃的倒向随机微分方程刻画：

$$dy_t=\big[-\rho y_t+\vartheta_r(|r_t|)+\int_{\mathcal{E}}\rho(\alpha)\vartheta_\gamma(|\gamma_t(\alpha)|)d\alpha\big]dt+r_tdB(t)+\int_{\mathcal{E}}\gamma_t(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt)$$

连同 $y_T=0$，其中 $\int_{\mathcal{E}}\rho(\alpha)\vartheta_\gamma(|\gamma_t(\alpha)|)d\alpha$ 是有界的，$r_tdB(t)$ 表示 $\int_{\mathcal{E}}\gamma_t(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt)$。我们选取Huber型凸惩罚 $\vartheta_r(s)\ =\bar{\theta}\delta_r^2(\sqrt{1+(s/\delta_r)^2}-1)$以及 $\vartheta_\gamma(s)\ =\delta_\gamma^2(\sqrt{1+(s/\delta_\gamma)^2}-1)$，其参数为 $\bar{\theta}>0$ 和 $\delta_r,\ \delta_\gamma>0$。这些函数是 C^1的、凸的，满足 $\vartheta_r(0)\ =\vartheta_\gamma(0)$，并且至多具有线性增长。

由此得到的优化问题是最小化 $J(u)$ 在(1.2)中关于所有适应于观测滤过的可容许收获策略。虽然上述收获模型是一个代表性应用，但形如(1.1)的带跳跃的随机反应扩散方程出现在许多其他情形中，包括描述空间分布的化学物质浓度演化的环境污染动力学；例如参见 [30,第 19]章。

2. 预备知识与记号

我们从两个实可分希尔伯特空间 S_1 和 S_2开始，并将有界线性算子空间记为 $\mathcal{L}(S_1,\ S_2)$，将迹类算子构成的巴拿赫空间记为 $\mathcal{L}_1(S_1,\ S_2)$，并将从 S_1 到 S_2的希尔伯特-施密特算子构成的希尔伯特空间记为 $\mathcal{L}_2(S_1,\ S_2)$。当$S_1=S_2$时，我们将记号简化为 $\mathcal{L}(S_1)$ $\mathcal{L}_1(S_1)$，以及 $\mathcal{L}_2(S_1)$。对于巴拿赫空间 S 和E，若映射 $\Upsilon:\ S\to E$ 盖托可微，且其梯度 $\nabla\Upsilon:\ S\to\mathcal{L}(S,\ E)$强连续（即关于强算子拓扑连续），则称其属于 $\mathcal{G}^1(S,\ E)$ 类。

设 H为一个可分希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$诱导的范数为 $|\cdot|_H$。考虑满足通常条件的随机基$(\Omega\ \mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$。在该基上，定义一个取值于 H 的柱状维纳过程 W_t，它对应于时空白噪声

噪声、一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的标准布朗运动 Y_t，以及一个泊松随机测度 N，其定义在 $\Xi \times \mathbb{R}^+$上。这里，Ξ 是一个可测空间，配备了 Borel σ-域 $\mathcal{B}(\Xi)$ 和一个 σ-有限测度 π。我们假设 $W, Y,$ 和 N 相互独立。补偿泊松~随机测度定义为 $N(\mathscr{A}, dt) := N(\mathscr{A}, dt) - \pi(\mathscr{A})dt$，对于所有满足 $\pi(\mathscr{A}) < \infty$ 的$\mathscr{A} \in \mathcal{B}(\Xi)$，它是一个鞅。

对于任意 $\kappa > 0$和 $s \in [0,T]$，记 $L^\kappa_{\mathcal{P}}([s,T] \times \Omega; H) =: \mathcal{H}_\kappa([s,T])$ 为 H值渐进可测过程 X 所构成的巴拿赫空间，满足 $\mathbb{E}\int_s^T |X_t|^\kappa_H dt < \infty$；记 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$ 为 H值渐进可测过程 X 所构成的子空间，满足$\mathbb{E}\sup_{t\in[s,T]} |X_t|^\kappa_H < \infty$。当 $s = 0$时，记号 $\mathcal{H}_\kappa([0,T])$ 和 $\mathbb{H}_\kappa([0,T])$ 分别简化为 $\mathcal{H}_\kappa(T)$ 和 $\mathbb{H}_\kappa(T)$。此外，$\mathbb{F}^2_{\mathcal{P}}([s,T]; H)$ 表示 Ω 上 H值 $\mathcal{F}_t$ 可预测过程 $X(\omega,t,\alpha)$ 所构成的空间，满足 $\mathbb{E}\int_s^T \int_\Xi |X(\omega,t,\alpha)|^2_H \pi(d\alpha)dt < \infty$。下文中，当相应空间可由上下文明确时，$|\cdot|$、$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示范数和内积；否则，为清楚起见，会添加下标。对于算子 Φ，Φ^*表示其伴随算子。对于任意 $0 \le s \le t \le T$，定义乘积空间 $\Xi^t_s := \Xi \times [s,t]$。为简便起见，令 $\Xi_T := \Xi^T_0$。此后，C 用作一般的正数常数，其取值可因用途不同而变化。

2.1. 问题表述。 考虑如下具有相关高斯过程和跳跃过程的受控分数阶随机偏微分方程与倒向随机微分方程

$$\begin{cases} dx_t = [Ax_t + F(x_t,u_t)]dt + G_1(x_t,u_t)dW_t \\ \qquad\quad + \sum_{j=1}^d G_2^j(x_t,u_t)dB_t^j + \int_\Xi \Theta(x_t,u_t,\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt) \\ dy_t = -\int_\Xi g(x_t,y_t,u_t,z_t,r_t,\gamma_t(\alpha))\pi(d\alpha)dt + z_t dW_t + r_t dY_t + \int_\Xi \gamma_t(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt) \\ x_0 = x,\quad y_T = f(x_T), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，A 是 C_0-压缩半群 $\{e^{tA}\}_{t\ge0}$（由有界线性算子构成）的无穷小生成元；F、G_1、G_2^j、Θ和 g是适当的漂移系数与扩散系数，稍后将予以说明。假设 C_0-压缩半群能够保证适用于关于补偿泊松随机测度的随机卷积极大不等式。控制过程 u 取值于包含在可分巴拿赫空间 U中的凸集 $\mathcal{U}$。五元组（x_t，y_t，z_t，r_t，$\gamma_t(\cdot)$）取值于 $H \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{L}_2(H; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^{d\times d} \times L^2(\Xi; \mathbb{R}^d)$，它是初始状态为 $x \in H$、终端条件为$f(x_T)$的状态过程，其中 $f: H \to \mathbb{R}^d$是适当的函数。过程 B_t^j是一个取实值的随机过程，依赖于控制 u，其定义将在后文给出；为简化记号，这里省略了这种依赖关系。下文采用爱因斯坦求和约定，对有限范围内重复出现的指标求和，因此省略了（2.1）中的求和符号 $\sum_{j=1}^d$。

假设过程 $(x,\ y,\ z,\ r,\ \gamma(\cdot))$ 是部分可观测的。也就是说，我们可以获取观测过程 Y，它由以下随机微分方程支配：

$$dY_t = h(t,x_t,u_t)dt + dB_t, \quad Y_0 = 0, \tag{2.2}$$

其中 $h: [0,T] \times H \times U \to \mathbb{R}^d$是给定的连续映射。令 $\mathcal{F}_t^Y := \sigma\{Y_s: s \le t\}$表示由 Y 生成的滤过。容许控制集合定义为 $\mathcal{U}_{\text{ad}} := \{u : [0,T] \times \Omega \to U: u$是 $\mathcal{F}_t^Y$-适应的，且 $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|u_t\|^\kappa_U] < \infty, \forall \kappa \in \mathbb{N}\}$.

As假设 2.1。 在全文中，我们假设以下条件 r.

(H1) F: $H\times U\to H$是一个属于 $\mathcal{G}^1(H\times U,H)$ 类的映射，在 $H\times U$ 上具有有界梯度（$\nabla_x F$, $\nabla_u F$）。也就是说，存在一个常数 $C>0$，使得

$$|\nabla_x F(x,u)|_{\mathcal{L}(H)}+|\nabla_u F(x,u)|_{\mathcal{L}(U,H)}\le C \text{ and } |F(0,u)|\le C,\ \forall\, x\in H,u\in U.$$

(H2) G_1: $H\times U\to\mathcal{L}(H)$ 满足 $e^{sA}G_1(x,u)\in\mathcal{L}_2(H)$，对所有 $s\ge 0,x\in H,u\in U$，且映射 $(x,u)\mapsto e^{sA}G_1(x,u)\in\mathcal{G}^1(H\times U,\mathcal{L}_2(H))$。此外，存在常数$C>0$和 $\vartheta\in[0,1/2)$，使得 $\forall\, x\in H$, $u\in U$, $|e^{sA}G_1(0,u)|_{\mathcal{L}_2(H)}\le Cs^{-\vartheta}$和

$$|\nabla_x[e^{sA}G_1(x,u)]|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}_2(H))}+|\nabla_u[e^{sA}G_1(x,u)]|_{\mathcal{L}(U,\mathcal{L}_2(H))}\le Cs^{-\vartheta}.$$

(H3) G_2^j: $H\times U\to H$是类 $\mathcal{G}^1(H\times U,H)$ 的映射，对每个 $j=1,..,d$，在 $H\times U$和 $|G_2^j(0,u)|\le C,\forall\, u\in U$ 上具有有界梯度 $(\nabla_x G_2^j,\nabla_u G_2^j)$。

(H4) 存在一个标准正交基 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in H$，使得对于所有 $i\in\mathbb{N}$ 和所有 $u\in U$，映射 $x\mapsto G_1(x,u)e_i$ 属于 $\mathcal{G}^1(H,H)$，且存在一个常数 $C>0$，使得$|\nabla_x[G_1(x,u)e_i]|_{\mathcal{L}(H)}\le C,\forall\, i\in\mathbb{N},x\in H,u\in U$。(H5) 对任意 $x,w\in H$，映射 $u\mapsto G_1(x,u)w$ 属于 $\mathcal{G}^1(U,H)$，且存在一个常数 $C>0$，使得 $|\nabla_u[G_1(x,u)w]v|_H\le C|w|_H|v|_U$, $\forall\, x,w\in H$ 且 $u,v\in U$。(H6) 对每个 $\alpha\in\Xi$，$\Theta(\cdot,\cdot,\alpha)$: $H\times U\to H$ 属于 $\mathcal{G}^1(H\times U,H)$，使得对所有$\kappa\ge 2$，$\max(|\nabla_\iota\Theta(x,u,\cdot)|_{L^2(\Xi;\pi)}\ |\nabla_\iota\Theta(x,u,\cdot)|_{L^\kappa(\Xi;\pi)})$ 对于 $\iota=x,u$ 和 $\forall\, x\in H,u\in U$ 均有界。此外，对所有 $u\in U$ 以及某个常数 $C>0$，$|\Theta(0,u,\cdot)|^2_{L^2(\Xi;\pi)}+|\Theta(0,u,\cdot)|^\kappa_{L^\kappa(\Xi;\pi)}\le C$。(H7) g: $H\times U\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^{d\times d}\times L^2(\Xi;\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 关于变量 (x,u,z,γ) 属于 $\mathcal{G}^1$ 类，并且关于 (r,y) 连续可微，且其导数一致有界。(H8)[1] 对每个 $t\in[0,T]$，映射 $h(t,\cdot,\cdot)$: $H\times U\to\mathbb{R}^d$ 属于 $\mathcal{G}^1(H\times U,\mathbb{R}^d)$，且其本身及其 Gâteaux导数有界。(H9) 初值 $x\in H$ 满足 $\mathbb{E}|x|^\kappa<+\infty$，并且 f: $H\to\mathbb{R}^d$ 属于 $\mathcal{G}^1(H,\mathbb{R}^d)$，且其导数一致有界。

假设 (H1)-(H6) 确保含跳跃的前向随机偏微分方程系统及其对应的一阶变分方程的适定性。具体而言，(H2) 描述了半群对扩散系数的平滑性质，这对于处理白噪声以及建立伴随过程的额外正则性至关重要。此外，(H7) 保证后向系统的适定性，(H8) 对观测函数施加正则性要求，而 (H9) 则规定了初始数据和终端数据的可积性与正则性条件。满足我们假设的一个无跳跃示例见 [15]。代入

(2.2) into (2.1)，我们得到

$$\begin{cases} dx_t=[Ax_t+(F-G_2^jh^j)(x_t,u_t)]dt+G_1(x_t,u_t)dW_t \\ \qquad +G_2^j(x_t,u_t)dY_t^j+\int_\Xi\Theta(x_t,u_t,\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt) \\ dy_t=-\int_\Xi g(x_t,y_t,u_t,z_t,r_t,\gamma_t(\alpha))\pi(d\alpha)dt+z_tdW_t+r_tdY_t+\int_\Xi\gamma_t(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt) \\ x_0=x,\quad y_T=f(x_T). \end{cases} \tag{2.3}$$

在假设 2.1下，由于 FSPDE-BSDE系统（2.3）是解耦的，因此对任意 $x^u,y^u,z^u,r^u,\gamma^u(\cdot)$ 都存在唯一解 $u\in\mathcal{U}_{\text{ad}}$。具体而言，$x^u$ 被理解为唯一的

[1]虽然 (H8) 假设 h有界，[38] 但有人利用逼近方法将这一条件推广到了欧几里得空间中的线性增长情形。将此推广到随机偏微分方程的解还需谨慎处理，留待未来研究。

满足以下条件的右连左极温和解

$$\begin{aligned} x_t^u &= e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}(F - G_2^j h^j)(x_s^u, u_s)ds + \int_0^t e^{(t-s)A}G_1(x_s^u, u_s)dW_s \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-s)A}G_2^j(x_s^u, u_s)dY_s^j + \int_0^t \int_\Xi e^{(t-s)A}\Theta(x_s^u, u_s, \alpha)\widetilde{N}(d\alpha, ds) \end{aligned} \tag{2.4}$$

使得 $x^u \in \mathbb{H}_\kappa(T)$，并且 y^u 是满足以下条件的（2.3）中倒向随机微分方程的唯一解

$$\begin{aligned} y_t^u &= f(x_T^u) + \int_{\Xi_t^T} g(x_s^u, u_s, y_s^u, z_s^u, r_s^u, \gamma_u(\alpha))\pi(d\alpha)ds \\ &\quad - \int_t^T z_s^u dW_s - \int_t^T r_s^u dY_s - \int_t^T \gamma_s^u(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha, ds) \end{aligned} \tag{2.5}$$

使得 $(y^u, z^u, r^u, \gamma^u(\cdot)) \in L^2([0,T]\times\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^{d\times d} \times L^2(\Xi;\mathbb{R}^d)$. 关于 (2.4) 中带跳跃的随机偏微分方程的存在唯一性，详情请参见 Marinelli 等人 [22,定理 2.4] ；另见 Peszat 和 Zabczyk [30] 以及 Kotelenez [20]。关于 (2.5) 中带跳跃的倒向随机微分方程的存在唯一性，参见 Tang 和 Li [34] 以及 Situ [31]。我们的 (2.3) 中的倒向随机微分方程也由柱状维纳过程驱动；不过，将 z^u 限制为希尔伯特-施密特算子后，存在唯一性的证明仍然成立。现在我们引入

$$\rho_t^u := \exp\Big\{\int_0^t h(s, x_s^u, u_s)dY_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t |h(s, x_s^u, u_s)|^2 ds\Big\},\ B_t^j := Y_t^j - \int_0^t h^j(s, x_s^u, u_s)ds.$$

由伊藤公式， ρ^u 满足以下随机微分方程

$$d\rho_t^u = \rho_t^u h(t, x_t^u, u_t)dY_t, \quad \rho_0^u = 1. \tag{2.6}$$

在假设 (H8) 下，过程 ρ_t^u 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅。我们可以通过拉东–尼科迪姆导数定义 $\mathbb{Q}^u$ 在 $\mathcal{F}_t$ 上的新概率测度，使得 $d\mathbb{Q}^u = \rho_t^u d\mathbb{P}$。根据吉尔萨诺夫定理， W 和 B 分别是 H值柱状维纳过程和标准d维布朗运动，定义在$(\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{Q}^u)$上，且仍相互独立。我们用 $\mathbb{Q}^u$ 表示关于测度 $\mathbb{E}^u[\cdot]$的期望。受 [38], 启发，我们考虑如下定义的一般代价泛函

$$J(u) = \mathbb{E}^u\Big[\int_0^T \int_\Xi L(t, x_t^u, u_t, y_t^u, z_t^u, r_t^u, \gamma_t^u(\alpha))\pi(d\alpha)dt + \varphi(x_T^u) + \psi(y_0^u)\Big]. \tag{2.7}$$

假设 2.2. 我们假设映射 $L\colon [0,T]\times H\times U\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^{d\times d}\times L^2(\Xi;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ 以及终端代价泛函 $\varphi\colon H\to\mathbb{R}$ 分别关于(x, u, y, z, r, γ)和 x盖托可微，且满足

$$\mathbb{E}^u\big[\int_0^T \int_\Xi |L(x_t^u, u_t, y_t^u, z_t^u, r_t^u, \gamma_t^u(\alpha))|\pi(d\alpha)dt + |\varphi(x_T^u)| + |\psi(y_0^u)|\big] < \infty.$$

映射 $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是连续可微的。

带跳跃的部分观测 FSPDE-BSDE 系统的最优控制问题是寻找一个容许控制 $\widehat{u}\in\mathcal{U}_{\text{ad}}$，使得

$$J(\widehat{u}) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(u). \tag{2.8}$$

利用测度变换，我们观察到 $J(u)$ 在 (2.7) 中可以改写为

$$J(u) = \mathbb{E}\big[\int_0^T \int_\Xi \rho_t^u L(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, r_t^u, u_t, \gamma_t^u(\alpha))\pi(d\alpha)dt + \rho_T^u\varphi(x_T^u) + \psi(y_0^u)\big]. \tag{2.9}$$

最优控制问题 (2.8) 因而等价于极小化泛函 (2.9) 关于$\mathcal{U}_{\text{ad}}$在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ 中，受约束于 (2.3) 和 (2.6)。

设 $\widehat{u}$为（2.8）的最优控制，且（$\widehat{x}$， $\widehat{y}$， $\widehat{z}$， $\widehat{r}$， $\widehat{\gamma}$ (·) ）为相应的最优状态轨迹。我们旨在得到随机极大值原理（SMPs）的两个版本

，针对 $\hat{u}$ 同时采用直接方法与Malliavin微积分方法。在全文中，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们令 $\mathbb{E}:=\mathbb{E}^u$ 以及 $\mathbb{Q}:=\mathbb{Q}^u$。

上述部分观测最优控制（POOC）问题的问题表述遵循 Bensoussan 的经典框架 [5] 和 Tang [33]。在此框架下，控制 u 适应于观测 Y，而 Y 本身则先验地定义为概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t,\ \mathbb{P})$上的布朗运动，从而确保其与控制 u相互独立。数十年来，欧几里得空间中的部分观测最优控制问题得到了广泛研究，并在经济学、物理学和工程学中有广泛应用；例如，参见 [13, 6, 28, 14, 33] 及其中的参考文献。关于涉及递归效用或倒向随机微分方程的相关问题，请参见 [37, 38, 39]。相比之下，针对随机偏微分方程的相应问题受到的关注仍然有限。已有研究包括 [1, 2, 23, 26, 10], 以及我们近期的工作 [3, 8]。然而，据我们所知，目前尚无研究探讨由前向随机偏微分方程和带跳跃的倒向随机微分方程构成的耦合系统中的部分观测控制问题。本文旨在填补这一空白。

与 [23] 和 [21], 相比，我们的随机偏微分方程模型仅由柱状维纳过程驱动。此外，我们的代价泛函既包含运行成本，也包含终端成本，以及项 $\psi(y_0^u)$，其动机来自递归效用优化问题 [21] 以及g-期望，该期望由彭 [29]提出。在 [21], 中，作者考虑了（2.3）在 $G_1=z=\Theta=\gamma=0$ 和 $j=1$情形下的一个特例，同时结合 $L=0$、 $\varphi=0$以及 $\psi(y_0^u)=y_0^u$ 于（2.7）中的情形，且在完全观测下。虽然 [21] 允许非凸控制域，并将二阶伴随过程刻画为条件期望算子值倒向随机积分方程的唯一解，但其随机偏微分方程中的驱动噪声仅限于一维布朗运动。在 [15]中指出，其结果或许可以推广到柱状维纳过程的情形。这样的推广是高度非平凡且在技术上极具挑战性的，尤其是在非凸域中。

我们将本文的主要贡献概括如下。

(1) 我们为由柱状维纳过程、有限维布朗运动和补偿泊松随机测度共同驱动的耦合 FSPDE-BSDE 系统，构建了一般的部分观测最优控制问题。特别地，我们不假设柱状维纳过程的协方差算子具有迹类性质，因此允许存在时空白噪声，并在伴随过程的刻画中导出一个带跳跃的奇异倒向随机偏微分方程（BPSDE）。(2) 我们拓展了 [15]中提出的逼近方法，以确立一大类奇异带跳跃的 BSPDE 的适定性。(3) 对于第5节讨论的随机系数系统，我们提出了一个通用框架，为带跳跃的线性随机偏微分方程的解建立随机流表示。据我们所知，即使在没有跳跃的情形下，这一结果也是新的。我们的方法基于 Schatten 类算子空间上的随机积分理论；这些空间是 M-2型Banach空间。详见 [36, 35] 。该方法受到 [16] 的启发，但所需假设更弱，并且纳入了跳跃过程。需要指出的是， [23] 中的技术不适用于我们的情形，因为其分析仅限于由有限个 $\mathbb{R}^d$值布朗运动驱动的方程。

(4) 我们的工作对现有结果作出了三方面的推广。首先，它将 [38, 39] 的有限维框架扩展到了无限维系统。其次，它通过允许柱状维纳过程和补偿泊松随机测度作为驱动噪声，对 [21]进行了推广。最后，当后向随机微分方程分量

y_t 在（2.1）和（2.2）中的观测过程被省略时，我们的框架可得出由时空白噪声和补偿泊松随机测度驱动的随机偏微分方程最优控制的随机最大值原理，从而推广了 [15]。

本文其余部分安排如下。第3 节采用直接方法建立随机最大值原理。第4 节建立第3 节中所用带跳奇异后向随机偏微分方程的存在唯一性。最后，第5节通过 Malliavin 微积分建立最大值原理，其中系统的所有系数均依赖于$\Omega \ni \omega$，因此是非马尔可夫的。

3. 直接方法

本节采用直接方法建立最大值原理。对于任意$v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ 和 $\varepsilon > 0$，定义 $u^\varepsilon := \widehat{u} + \varepsilon v$，并令 $(x^\varepsilon, y^\varepsilon, z^\varepsilon, r^\varepsilon, \gamma^\varepsilon(\cdot))$ 为关于控制 u^ε 的方程 (2.3) 的解。由于控制域是凸的，$u^\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$。下文中，对于任意 $\zeta = F, G_1, G_2^j$，记 $\widehat{\zeta}(s) := \zeta(\widehat{x}_s, \widehat{u}_s)$，$\nabla_\iota \widehat{\zeta}(s) := \nabla_\iota \zeta(\widehat{x}_s, \widehat{u}_s)$，其中 $\iota = x, u$；对于 $\zeta = g, L, \Theta$，记 $\zeta(s,\alpha) := \zeta(s, \widehat{x}_s, \widehat{u}_s, \widehat{y}_s, \widehat{z}_s, \widehat{r}_s, \widehat{\gamma}_s(\alpha))$，$\nabla_\iota \zeta(s,\alpha) := \nabla_\iota \zeta(s, \widehat{x}_s, \widehat{u}_s, \widehat{y}_s, \widehat{z}_s, \widehat{r}_s, \widehat{\gamma}_s(\alpha))$，其中 $\iota = x, u, y, z, r, \gamma$。

引理 3.1。 设假设 *2.1* 成立。对任意 $u \in \mathcal{U}_{ad}$，存在一个常数 $C > 0$，使得 (2.3) 和 (2.6) 的解满足以下估计：$\forall \kappa \geq 2$，我们有$\mathbb{E}^u|\rho_t^u|^\kappa < \infty$，并且

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}^u|x_t^u|^\kappa \leq C\Big[1 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}^u|u_t|^\kappa\Big], \quad \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}^u|y_t^u|^2 \leq C\Big[1 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}^u|u_t|^2\Big],$$
$$\mathbb{E}^u\Big[\int_0^T |z_t^u|^2_{\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d)} + |r_t^u|^2 dt + \int_{\Xi_T} |\gamma_t^u(\alpha)|^2 \pi(d\alpha)dt\Big] \leq C\Big(1 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}^u|u_t|^2\Big).$$

证明。 由标准论证可得 x_t^u，其中 $\mathcal{H}_\kappa(T)$ 该论证基于 Burkholder-Davis-Gundy（BDG）不等式，以及由柱状维纳过程和泊松随机测度驱动的随机卷积的极大不等式；参见 [22, 定理 2。7] 和 [9]。对于y^u，z^u，r^u，γ^u，其估计由 [34] 和 [31]可得。 κ阶矩估计对于 ρ^u 并不难得到，因为h有界。因此省略细节。 □

Lem理 3.2。 假设假设 *2.1* 成立。对任意 $v \in \mathcal{U}_{ad}$ 和 $\forall \kappa \geq 2$ ，

$$\sup_{t\in[0,T]} \widehat{\mathbb{E}}|x_t^\varepsilon - \widehat{x}_t|^\kappa \leq C\varepsilon^\kappa, \quad \sup_{t\in[0,T]} \widehat{\mathbb{E}}|y_t^\varepsilon - \widehat{y}_t|^2 \leq C\varepsilon^2, \quad \sup_{t\in[0,T]} \widehat{\mathbb{E}}|\rho_t^\varepsilon - \widehat{\rho}_t|^2 \leq C\varepsilon^2,$$
$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T \|z_t^\varepsilon - \widehat{z}_t\|^2_{\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d)} + |r_t^\varepsilon - \widehat{r}_t|^2 dt + \int_{\Xi_T} |\gamma_t^\varepsilon(\alpha) - \widehat{\gamma}_t(\alpha)|^2 \pi(d\alpha)dt\Big] \leq C\varepsilon^2.$$

证明。 证明过程省略，因为它遵循引理 3.1中的方法。主要区别在于利用 Gâteaux 导数的有界性，应用假设 2.1 来界定 $(x_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$ 与$(\widehat{x}_t, \widehat{u}_t)$之间的系数差异。 □

3.1. 一阶变分。 现在我们考虑解 $(x^\varepsilon, y^\varepsilon, z^\varepsilon, r^\varepsilon, \gamma^\varepsilon(\cdot))$ 关于参数 ε的正则依赖性。引入

$$\begin{aligned}
dx_t^1 = \{&Ax_t^1 + [\nabla_x F(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) - \nabla_x G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)h^j(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\\
&\quad - G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\nabla_x h^j(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)]x_t^1\}dt\\
&+\{[\nabla_u F(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) - \nabla_u G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)h^j(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) - G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\nabla_u h^j(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)]v_t\}dt\\
&+\{\nabla_x G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)x_t^1 + \nabla_u G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)v_t\}dW_t\\
&+\{\nabla_x G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)x_t^1 + \nabla_u G_2^j(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)v_t\}dY_t^j\\
&+\int_\Xi \{\nabla_x\Theta(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\alpha)x_t^1 + \nabla_u\Theta(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\alpha)v_t\}\widetilde{N}(d\alpha,dt),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
-dy_t^1 = \int_\Xi \big[&\nabla_x g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))x_t^1 + \nabla_u g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))v_t\\
&+\nabla_y g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))y_t^1 + \nabla_z g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))z_t^1\\
&+\nabla_r g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))r_t^1\\
&+\nabla_\gamma g(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{y}_t,\widehat{z}_t,\widehat{r}_t,\widehat{\gamma}_t(\alpha))\gamma_t^1(\alpha)\big]\pi(d\alpha)dt\\
&-z_t^1 dW_t - r_t^1 dY_t - \int_\Xi \gamma_t^1(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $x_0^1 = 0$ 且 $y_T^1 = \nabla_x f(\widehat{x}_T)x_T^1$。此外，我们考虑

$$d\rho_t^1 = \big\{\rho_t^1 h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t) + \rho_t\big[\nabla_x h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)x_t^1 + \nabla_u h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)v_t\big]\big\}dY_t, \quad \rho_0^1 = 0. \tag{3.3}$$

定义 $\Lambda_\cdot = \rho^1\widehat{\rho}^{-1}$，其中 $\widehat{\rho}^{-1}$ 表示 $\widehat{\rho}$的逆，满足（2.6），并将（x_t^u，u_t）替换为（$\widehat{x}_t$，$\widehat{u}_t$）。应用伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
d\Lambda_t &= [\nabla_x h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)x_t^1 + \nabla_u h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)v_t](dY_t - h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)dt)\\
&= [\nabla_x h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)x_t^1 + \nabla_u h(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)v_t]dB_t, \quad \Lambda_0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

定理3.3. 设假设 *2.1*成立。带跳线性随机偏微分方程（*3.1*）存在唯一的右连左极温和解 $x^1 \in \mathbb{H}_2(T)$；方程（*3.2*）和（*3.3*）（分别）存在唯一强解，使得 $y^1 \in C([0,T];\, L^2(\Omega;\,\mathbb{R}^d))$以及$(z^1, r^1, \gamma^1(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0,T];\, \mathcal{L}_2(H;\,\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^{d\times d} \times L^2(\Xi;\,\mathbb{R}^d))$。此外，对任意 $\kappa \geq 2$，我们有 $\mathbb{E}|x_t^1|^\kappa < +\infty$ 和 $\mathbb{E}|\rho_t^1|^\kappa < +\infty$。

证明。 关于 x^1 的存在唯一性的证明4.1将在下一节给出；详情另见 [22] 。关于 $(y^1, z^1, r^1, \gamma^1)$以及 ρ^1 的结果是众所周知的，因为 (3.2) 和 (3.3) 中的所有系数都有界。因此，省略细节。 □

因此，我们得到如下代价展开。

Pro命题 3.4。 我们有 $J(u^\varepsilon) = J(\widehat{u}) + \varepsilon I(v) + o(\varepsilon)$，其中 $I(v)$ 由 b 给出 y

$$\begin{aligned}
I(v) := \widehat{\mathbb{E}}\big[&\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)x_T^1 + \nabla_y\psi(\widehat{y}_0)y_0^1 + \varphi(\widehat{x}_T)\Lambda_T\big]\\
+\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\Big[&\Lambda_t\widehat{L}(t,\alpha) + \nabla_u\widehat{L}(t,\alpha)v_t + \nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)x_t^1 + \nabla_y\widehat{L}(t,\alpha)y_t^1\\
&+\nabla_z\widehat{L}(t,\alpha)z_t^1 + \nabla_r\widehat{L}(t,\alpha)r_t^1 + \nabla_\gamma\widehat{L}(t,\alpha)\gamma_t^1(\alpha)\Big]\pi(d\alpha)dt.
\end{aligned}$$

证明。定义 $\widetilde{x}_{\cdot}^{1,\varepsilon} := \varepsilon^{-1}(x_t^\varepsilon - \widehat{x}_t) - x_t^1$。由引理 3.2 和定理3.3，可得 $|\widetilde{x}^{1,\varepsilon}|_{\mathbb{H}_2(T)} \to 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。同理，定义 $\widetilde{\rho}_{\cdot}^{1,\varepsilon}, \widetilde{y}_{\cdot}^{1,\varepsilon}, \widetilde{z}_{\cdot}^{1,\varepsilon}, \widetilde{r}_{\cdot}^{1,\varepsilon}$，以及 $\widetilde{\gamma}_{\cdot}^{1,\varepsilon}(\alpha)$。于是，$|\widetilde{\rho}^{1,\varepsilon}|_{L^2(\Omega;C([0,T];\mathbb{R}))} + |\widetilde{y}^{1,\varepsilon}|_{C([0,T];L^2(\Omega;\mathbb{R}^d))} \to 0$且 $|\widetilde{z}^{1,\varepsilon}|_{L^2(\Omega\times[0,T];\mathcal{L}_2(H;\mathbb{R}^d))} + |\widetilde{r}^{1,\varepsilon}|_{L^2(\Omega\times[0,T];\mathbb{R}^{d\times d})} + |\widetilde{\gamma}^{1,\varepsilon}(\cdot)|_{L^2(\Omega;L^2([0,T]\times\Xi;\mathbb{R}^d))}$ 趋于零，其中 $L^2([0,T]\times\Xi;\,\mathbb{R}^d)$ 上的测度为 $\pi(d\alpha)dt$。对于 $\iota = x, u, y, z, r, \gamma$，定义 $\nabla_\iota\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon) := \nabla_\iota L(t, \widehat{x}_t + \lambda\varepsilon(x_t^1 + \widetilde{x}_{\cdot}^{1,\varepsilon})$ $\widehat{u}_t + \lambda\varepsilon v_t, \widehat{y}_t + \lambda\varepsilon(y_t^1 + \widetilde{y}_{\cdot}^{1,\varepsilon})$ $\widehat{z}_t + \lambda\varepsilon(z_t^1 + \widetilde{z}_{\cdot}^{1,\varepsilon})$ $\widehat{r}_t + \lambda\varepsilon(r_t^1 + \widetilde{r}_{\cdot}^{1,\varepsilon})$ $\widehat{\gamma}_t(\alpha) + \lambda\varepsilon(\gamma_t^1(\alpha) + \widetilde{\gamma}_{\cdot}^{1,\varepsilon}(\alpha))$。

由（2.9），测度变换可得

$$
\begin{aligned}
J(u^\varepsilon)-J(\widehat{u}) &= \mathbb{E}\Big\{\rho_T^\varepsilon\big[\varphi(x_T^\varepsilon)-\varphi(\widehat{x}_T)\big]+(\rho_T^\varepsilon-\widehat{\rho}_T)\varphi(\widehat{x}_T)+\psi(y_0^\varepsilon)-\psi(y_0)\\
&\qquad +\int_{\Xi_T}\big[(\rho_t^\varepsilon-\widehat{\rho}_t)\widehat{L}(t,\alpha)+\rho_t^\varepsilon\big(\widehat{L}(t,\alpha,\varepsilon)-\widehat{L}(t,\alpha)\big)\big]\pi(d\alpha)dt\Big\}\\
&= \varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[\varphi(\widehat{x}_T)\Lambda_T+\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)x_T^1+\nabla_y\psi(y_0)y_0^1+\int_0^T\Lambda_t\widehat{L}(t,\alpha)dt\Big]+o(\varepsilon)\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\Big[\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)(x_t^1+\widetilde{x}_t^{1,\varepsilon})\Big]d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\Big[\nabla_y\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)(y_t^1+\widetilde{y}_t^{1,\varepsilon})\Big]d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\Big[\nabla_z\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)(z_t^1+\widetilde{z}_t^{1,\varepsilon})\Big]d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\Big[\nabla_r\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)(r_t^1+\widetilde{r}_t^{1,\varepsilon})\Big]d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\Big[\nabla_\gamma\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)(\gamma_t^1(\alpha)+\widetilde{\gamma}_t^{1,\varepsilon}(\alpha))\Big]d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\\
&\quad +\varepsilon\,\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^1\nabla_u\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)v_t d\lambda\,\pi(d\alpha)dt.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$\widehat{\ }$根据 $\nabla_\iota L$的连续性和有界性，控制收敛定理得出

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_{\Xi_T}\int_0^1\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)x_t^1 d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\to\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)x_t^1\pi(d\alpha)dt\\
&\widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_{\Xi_T}\int_0^1\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha,\lambda\varepsilon)\widetilde{x}_t^{1,\varepsilon}d\lambda\,\pi(d\alpha)dt\to 0.
\end{aligned}
$$

(3.5) 中的其他项也有类似结果。证明完毕。 □

3.2. **伴随方程**。 现在固定一个标准正交基 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 于 H，使得假设 2.1 (H4) 成立。对于任意 $\chi\in H$，定义

$$
K_i(t)\chi:=\nabla_x[G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)e_i]\chi=\nabla_x[\widehat{G}_1(t)e_i]\chi\text{ and }\Gamma_t\chi:=\nabla_u[G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)\chi]v_t. \tag{3.6}
$$

假设 3.5. 假设 $e^{tA}\in\mathcal{L}_2(H)$ 对所有 $t>0$ 均成立，且存在常数 $C>0$和 $\vartheta<1/2$，使得 $|e^{tA}|_{\mathcal{L}_2(H)}\le Ct^{-\vartheta},\forall\, t\in(0,T]$.

注 3.6. 根据假设 3.5，我们有 $|K_i(t)|_{\mathcal{L}(H)}\le C$，且 (H2) 推出

$$
\sum_{i=1}^\infty|e^{tA}K_i(s)\chi|_H^2=\sum_{i=1}^\infty|\nabla_x[e^{tA}\widehat{G}_1(s)e_i]\chi|_H=|\nabla_x\big[e^{tA}\widehat{G}_1(s)\chi\big]|_{\mathcal{L}_2(H)}^2\le Ct^{-2\vartheta}|\chi|_H^2.
$$

对所有 $t>0$，$s\ge 0$，$\chi\in H$；参见 [15, 注记 2.2 及第 265]页。

定义 $\beta_t^i:=\langle e_i,W_t\rangle_H, i=1,2,\dots$。则 $\{\beta^i\}$ 是一族相互独立的实值标准布朗运动。现在我们在概率

$\widehat{}$空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$。第一伴随过程 ℓ_t 满足

$$\begin{aligned} d\ell_t =& \int_\Xi \big[\nabla_y \widehat{g}(t,\alpha)\ell_t - \nabla_y \widehat{L}(t,\alpha)\big]\pi(d\alpha)dt + \int_\Xi \big[\nabla_z^* \widehat{g}(t,\alpha)\ell_t - \nabla_z \widehat{L}(t,\alpha)\big]\pi(d\alpha)dW_t \\ &+ \int_\Xi \big[\nabla_r \widehat{g}(t,\alpha)\ell_t - \widehat{h}(t)\ell_t - \nabla_r \widehat{L}(t,\alpha)\big]\pi(d\alpha)dB_t \\ &+ \int_\Xi \big[\nabla_\gamma \widehat{g}(t,\alpha)\ell_t - \nabla_\gamma \widehat{L}(t,\alpha)\big]\widetilde{N}(d\alpha,dt), \quad \ell_0 = -\nabla_y \psi(y_0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

未知过程（P、$Q_{1、t}$、$Q^j_{2、t}$、$Q_{3、t}(\cdot)$）的伴随方程形式上给出如下：

$$\begin{aligned} -dP_t =& \Big\{A^*P_t + \big[\nabla_x \widehat{F}(t) - \widehat{G}_2^j(t)\nabla_x \widehat{h}^j(t)\big]P_t + \sum_{i=1}^\infty K_i^*(t)Q_{1,t}e_i \\ &+\nabla_x^* \widehat{G}_2^j(t)Q_{2,t}^j + \nabla_x^* \widehat{h}^j(t)q_{2,t}^j\Big\}dt - \int_\Xi \big[\nabla_x^* \widehat{g}(t,\alpha)\ell_t + \nabla_x \widehat{L}(t,\alpha)\big]\pi(d\alpha)dt \\ &- \sum_{i=1}^\infty Q_{1,t}e_i d\beta_t^i - Q_{2,t}^j dB_t^j - \int_\Xi Q_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt) \end{aligned} \tag{3.8}$$

终端条件为 $P_T = \nabla_x \varphi(\widehat{x}_T) - \nabla_x^* f(\widehat{x}_T)\ell_T$。最后，辅助伴随过程（$p$、$q_{1、t}$、$q^j_{2、t}$、$q_{3、t}(\cdot)$）满足

$$-dp_t = \int_\Xi \widehat{L}(t,\alpha)\pi(d\alpha)dt - q_{1,t}dW_t - q_{2,t}^j dB_t^j - \int_\Xi q_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt),\ p_T = \varphi(\widehat{x}_T). \tag{3.9}$$

形式上，P_t、p_t、ℓ_t 分别解释为 x_t、ρ_t、y_t 的伴随过程。方程 (3.9) 有唯一解（p、$q_{1、}$ q_2^j、$q_3(\cdot)$）$\in L^2([0,T]\times\Omega;\ \mathbb{R}\times\mathcal{L}_2(H\ \mathbb{R})\times\mathbb{R}^{1\times d}\times L^2(\Xi;\ \mathbb{R}))$，其证明是标准的；参见 [34]。此外，方程 (3.7) 是一个具有线性系数的前向方程，因此存在唯一解。

对于方程（3.8），我们强调，级数 $\sum_{i=1}^\infty K_i^*(t)Q_{1,\ t}e_i$ 出现在（3.8）中，一般而言并不收敛，即使 $Q_{1,\ t}$ 是希尔伯特-施密特算子。这种不收敛性反映了方程（*3.8*）的奇异性质，其根源在于柱状维纳噪声。因此，我们采用 [15] 的逼近方法思路来处理这一项。下面回顾文献 中方程（3.8）的温和解定义，见 [15, 定义 4。1]。

定义 3.7. 若四元组 $(P, Q_1, Q_2^j, Q_3(\cdot))$ 满足 $P \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T], H)$、$Q_1 \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T], \mathcal{L}_2(H))$、$Q_2^j \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T], H)$ 和 $Q_3 \in \mathbb{F}^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T]; H)$，则称其为方程 (3.8) 的温和解，若满足：(i) $\mathbb{K}^m(t) := \sum_{i=1}^m (T-t)^\vartheta K_i^*(t)Q_{1,t}e_i$, $t\in[0,T]$ 在 $L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T]; H)$中弱收敛；(ii) 对任意 $t\in[0,T]$, 我们有 $\widehat{\mathbb{Q}}$-几乎处处成立，

$$\begin{aligned} P_t =& e^{(T-t)A^*}\big[\nabla_x \varphi(\widehat{x}_T) - \nabla_x f(\widehat{x}_T)\ell_T\big] + \sum_{i=1}^\infty \int_t^T e^{(s-t)A^*}K_i^*(s)Q_{1,s}e_i d\beta_s^i \\ &+ \int_t^T e^{(s-t)A^*}\Big\{\Big[\nabla_x \widehat{F}(s) - \widehat{G}_2^j(s)\nabla_x \widehat{h}^j(s)\Big]P_s + \nabla_x^* \widehat{G}_2^j(s)Q_{2,s}^j + \nabla_x^* \widehat{h}^j(s)q_{2,s}^j\Big\}ds \\ &+ \int_t^T \int_\Xi e^{(s-t)A^*}\Big[-\nabla_x^* \widehat{g}(s,\alpha)\ell_s + \nabla_x \widehat{L}(s,\alpha)\Big]\pi(d\alpha)ds \\ &- \sum_{i=1}^\infty \int_t^T e^{(s-t)A^*}Q_{1,s}e_i d\beta_s^i - \int_t^T e^{(s-t)A^*}Q_{2,s}^j dB_s^j \\ &- \int_t^T \int_\Xi e^{(s-t)A^*}Q_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,ds). \end{aligned}$$

命题 3.8.在假设 *2.1* 和 *3.5*下，对于 $j=1,\dots,d$，方程(3.8) 存在唯一的温和解$(P,Q_1,Q_2^j,Q_3(\cdot))$，其意义见定义 3.7。此外，$Q_{1,t}\in\mathcal{L}_1(H)$ $d\widehat{\mathbb{Q}}\otimes dt$-几乎处处满足 $\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T(T-t)^{-2\vartheta}|Q_{1,t}|^2_{\mathcal{L}_1(H)}dt<\infty$。

证明。 证明可由定理 4.9推出，详见下一节。 □

定义

$$\widehat{O}_t:=\nabla_x\widehat{F}(t)-\widehat{G}_2^j(t)\nabla_x\widehat{h}^j(t),\quad \widehat{R}_t:=\nabla_u\widehat{F}(t)-\widehat{G}_2^j(t)\nabla_u\widehat{h}^j(t). \tag{3.10}$$

回顾 K_i，Γ 在（3.6）中的定义。将（2.2）代入（3.1），可将 x^1 表示为关于B^j的形式：

$$\begin{aligned}dx_t^1=&\big[Ax_t^1+\widehat{O}_tx_t^1+\widehat{R}_tv_t\big]dt+\sum_{i=1}^{\infty}K_i(t)x_t^1d\beta_t^i+\sum_{i=1}^{\infty}\Gamma_te_id\beta_t^i\\&+\big[\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t\big]dB_t^j+\int_\Xi\big[\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_t^1+\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\big]\widetilde{N}(d\alpha,dt).\end{aligned} \tag{3.11}$$

推导最大值原理的主要思路如下所示，即对偶关系。

命题 3.9。 在前述假设和记号下，设 $R^\dagger\colon[0,T]\times\Omega\to H$和 $\Gamma^\dagger\colon[0,T]\times\Omega\to\mathcal{L}_2(H)$ 渐进可测且有界。令 $\mathcal{X}$为下列方程的唯一温和解

$$\begin{aligned}d\mathcal{X}_t=&\big[A\mathcal{X}_t+\widehat{O}_t\mathcal{X}_t+R_t^\dagger\big]dt+\sum_{i=1}^{\infty}K_i(t)\mathcal{X}_t\,d\beta_t^i+\sum_{i=1}^{\infty}\Gamma_t^\dagger e_i\,d\beta_t^i\\&+\big[\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)\mathcal{X}_t+\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t\big]dB_t^j+\int_\Xi\big[\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)\mathcal{X}_t+\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\big]\widetilde{N}(d\alpha,dt).\end{aligned} \tag{3.12}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\Big[\langle P_t,R_t^\dagger\rangle+\langle Q_{1,t},\Gamma_t^\dagger\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}+\langle Q_{2,t}^j,\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t\rangle+\langle Q_{3,t}(\alpha),\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\rangle\Big]\pi(d\alpha)dt\\&=\widehat{\mathbb{E}}\Big\{\big\langle\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T,\mathcal{X}_T\big\rangle_H\\&\quad+\int_{\Xi_T}\big\langle\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)-\nabla_x^*\widehat{g}(t,\alpha)\ell_t+\nabla_x^*\widehat{h}^j(t)q_{2,t}^j,\mathcal{X}_t\big\rangle_H\pi(d\alpha)dt\Big\}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

证明。 结果由下一节详述的推论4.4得出，其中我们令$s=0$，$\eta=\chi=0$, $\mathcal{R}_t^\dagger=R_t^\dagger$，$\mathcal{R}_t^{2,j}=\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t$，$\mathcal{R}_t^3(\alpha)=\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t$，以及 $\eta=\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T$, $\mathcal{J}_t=\nabla_xL(t,\alpha)-\nabla_x^*\widehat{g}(t,\alpha)\ell_t+\nabla_x^*\widehat{h}^j(t)q_{2,t}^j$。 □

3.3. 随机最大值原理。

接下来，我们给出主要结果 .

定理 3.10。 设假设 *2.1*、*2.2*和 *3.5*成立。设 $(\widehat{x},\ \widehat{u},\ \widehat{y},\ \widehat{z},\ \widehat{r},\ \widehat{\gamma})$ 为最优状态过程。对于任意 $v\in\mathcal{U}_{ad}$，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\Big\{&\big\langle\widehat{R}_t(v-\widehat{u}_t),P_t\big\rangle+\mathrm{Tr}\Big[Q_{1,t}^*(\nabla_u\widehat{G}_1(t)(v-\widehat{u}_t))\Big]\\&+\big\langle Q_{2,t}^j,\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)(v-\widehat{u}_t)\big\rangle+\int_\Xi\big\langle Q_{3,t}(\alpha),\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)(v-\widehat{u}_t)\big\rangle\pi(d\alpha)\\&+\big\langle\nabla_u\widehat{L}(t,\alpha)+\nabla_u^*\widehat{h}^j(t)\,q_{2,t}^j-\nabla_u^*\widehat{g}(t,\alpha)\ell_t,v-\widehat{u}_t\big\rangle_{\mathcal{U}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t^Y\Big\}\geq0,\end{aligned}$$

其中 $(P,\ Q_1,\ Q_2^j,\ Q_3(\cdot))$、$(p,\ q_1,\ q_2^j,\ q_3(\cdot))$以及 ℓ 分别是 (3.8)、(3.9)和 (3.7)的解。

证明。 分别对 $p\Lambda$ 和 $\langle \ell,\ y^1\rangle_{\mathbb{R}^d}$应用伊藤公式，可得

$$\widehat{\mathbb{E}}\big[\Lambda_T\varphi(\widehat{x}_T)+\int_{\Xi_T}\Lambda_t\widehat{L}(t,\alpha)\pi(d\alpha)dt\big]=\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\langle\nabla_x^*\widehat{h}^j(t)\,q^j_{2,t},x^1_t\rangle dt, \tag{3.14}$$

and

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\big[\langle\ell_T,y^1_T\rangle_{\mathbb{R}^d}-\langle\ell_0,y^1_0\rangle_{\mathbb{R}^d}\big]=\widehat{\mathbb{E}}\big[\langle\ell_T,\nabla_x f(\widehat{x}_T)x^1_T\rangle+\langle\nabla_y\psi(y_0),y^1_0\rangle\big]\\&=-\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\big[\nabla_y\widehat{L}(t,\alpha)y^1_t+\nabla_z\widehat{L}(t,\alpha)z^1_t+\nabla_r\widehat{L}(t,\alpha)r^1_t+\nabla_\gamma\widehat{L}(t,\alpha)\gamma^1_t(\alpha)\big]\,\pi(d\alpha)dt\\&\quad-\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\langle\nabla_u\widehat{g}(t,\alpha)v_t+\nabla_x\widehat{g}(t,\alpha)x^1_t,\ell_t\rangle_{\mathbb{R}^d}\,\pi(d\alpha)dt.\end{aligned} \tag{3.15}$$

接下来我们断言，以下对偶性成立：

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\langle P_t,\widehat{R}_tv_t\rangle+\langle Q_{1,t},\Gamma_t\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}+\langle Q^j_{2,t},\nabla_uG^j_2(t)v_t\rangle dt\\&\quad+\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\langle Q_{3,t}(\alpha),\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\rangle\pi(d\alpha)dt\\&=\widehat{\mathbb{E}}\langle\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T,x^1_T\rangle-\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\langle\nabla_x^*\widehat{g}(t,\alpha)\ell_t,x^1_t\rangle\pi(d\alpha)dt\\&\quad+\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\langle\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)+\nabla_x^*\widehat{h}^j(t)q^j_{2,t},x^1_t\rangle\pi(d\alpha)dt.\end{aligned} \tag{3.16}$$

由于 v 被视为有界过程，因此 $\widehat{R}_tv_t=[\nabla_u\widehat{F}(t)\ -\widehat{G}^j_2(t)\nabla_uh^j(t)]v_t$ 有界。然而，由于 3.9 中的命题无法直接应用，因为 Γ 在（3.11）中关于 x^1 并非取有界值的 $\mathcal{L}_2(H)$过程。需要基于命题 3.16，通过逼近论证建立对偶公式（3.9）。

记 $\mathfrak{T}_n$ 为 H 到 span $\{e_1,\dots,e_n\}$上的正交投影，并对 $\chi\in H$,$\Gamma^n_t\chi=\nabla_u[G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)(\mathfrak{T}_n\chi)]v_t=\sum_{i=1}^n\nabla_u[G_1(\widehat{x}_t,\widehat{u}_t)e_i]v_t\langle\chi,e_i\rangle_H$定义。于是，每个 Γ^n_t都是有界的$\mathcal{L}(H)$值过程，因此在 $\mathcal{L}_2(H)$中也有界。令 $x^{1,n}$ 表示将（3.11）中的 Γ_t 替换为 Γ^n_t后的温和解。根据命题 3.9，对于所有 $t\in[0,T]$，将 $\Gamma^\dagger_t,R^\dagger_t$和 $\mathcal{X}$分别替换为 $\Gamma^n_t,\widehat{R}_tv_t$和 $x^{1,n}_t$后，对偶关系（3.13）仍成立。因此，令 $n\to\infty$ 并应用命题 3.8，即可得到所需的对偶关系（3.16）。收敛论证是标准的，故略去；其与第 [15, 页 267–268] 页的证明非常相似。

根据命题3.4，将（3.14）、（3.15）和（3.16）代入（3.5）可得

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\langle\widehat{R}_tv_t,P_t\rangle+\mathrm{Tr}\big[Q^*_{1,t}(\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t)\big]dt+\langle Q^j_{2,t}\nabla_u\widehat{G}^j_2(t)v_t\rangle+\langle\nabla_u^*\widehat{h}^j(t)q^j_{2,t},v_t\rangle dt\\&+\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\langle Q_{3,t}(\alpha),\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\rangle+\langle\nabla_u\widehat{L}(t,\alpha)-\nabla_u^*\widehat{g}(t,\alpha)\ell_t,v_t\rangle\pi(d\alpha)dt\geq0.\end{aligned}$$

由于 $\widehat{u}$ 是最优的，我们有 $J(u^\varepsilon)-J(\widehat{u})\geq0$，通过基于局部化、勒贝格微分定理以及注意到 v 是 $\mathcal{F}^Y$-可测随机变量的标准论证即可完成证明。这就完成了证明。□

4. 带跳奇异后向随机偏微分方程

本节证明命题3.8 和 3.9。受……中的逼近方案启发 [15]，但与……不同 [15]，我们的工作重点是处理补偿泊松随机测度产生的跳跃。

4.1. 带跳线性前向随机偏微分方程及辅助估计。考虑如下带跳跃的线性前向随机偏微分方程：

$$\begin{aligned}d\mathcal{Y}_t&=\Big[A\mathcal{Y}_t+\mathcal{Q}^1_t\mathcal{Y}_t+\mathcal{R}^\dagger_t\Big]dt+\sum_{i=1}^\infty K_i(t)\mathcal{Y}_td\beta^i_t+\sum_{i=1}^\infty K_i(t)\chi_t\,d\beta^i_t+\sum_{i=1}^\infty\Gamma^\dagger_te_i\,d\beta^i_t\\&\quad+\big[\mathcal{Q}^{2,j}_t\mathcal{Y}_t+\mathcal{R}^{2,j}_t\big]dB^j_t+\int_\Xi\big[\mathcal{Q}^3_t(\alpha)\mathcal{Y}_t+\mathcal{R}^3_t(\alpha)\big]\widetilde{N}(d\alpha,dt),\quad\mathcal{Y}_s=y,\end{aligned} \tag{4.1}$$

以及其近似方程，其中 m， $n \in \mathbb{N}^+$ 且初值为 $\mathcal{Y}^{m,\,s\,\,n} = y$,

$$\begin{aligned} d\mathcal{Y}_t^{m,n} = &\Big[A\mathcal{Y}_t^{m,n} + \mathcal{Q}_t^1\mathcal{Y}_t^{m,n} + \mathcal{R}_t^\dagger\Big]dt + \sum_{i=1}^{n} K_i(t)\mathcal{Y}_t^{m,n}\,d\beta_t^i + \sum_{i=1}^{m} K_i(t)\chi_t\,d\beta_t^i \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\Gamma_t^\dagger e_i d\beta_t^i + \big[\mathcal{Q}_t^{2,j}\mathcal{Y}_t^{m,n} + \mathcal{R}_t^{2,j}\big]dB_t^j + \int_\Xi \big[\mathcal{Q}_t^3(\alpha)\mathcal{Y}_t^{m,n} + \mathcal{R}_t^3(\alpha)\big]\widetilde{N}(d\alpha, dt), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中我们假设 $\mathcal{Q}^1$、$\mathcal{R}^\dagger$、$\mathcal{Q}^{2,\,j}$、$\mathcal{R}^{2,\,j}$、$\chi\colon\ [0,T]\times\Omega \to H$ 以及 $\Gamma^\dagger\colon\ [0,T]\times\Omega \to \mathcal{L}_2(H)$ 是渐进可测且有界的。对于 $\zeta = \mathcal{Q}^3$，假设 $\mathcal{R}^3$、ζ 是渐进可测的，并且对所有 $t \in [0,T]$，$\max(|\zeta_t|_{L^\kappa(\Xi,\pi)}\ |\zeta_t|^\kappa_{L^2(\Xi,\pi)})$ 有界。对于 $\chi = 0$，$\mathcal{Y}^{m,\,t\,\,n}$ 与 m 独立，并记为 $\mathcal{Y}_t^n$。为强调对初始数据 y 的依赖，(4.1) 的解也记为 $\mathcal{Y}^y$。

定理4.1。对于 m、$n \in \mathbb{N}^+$ 和 $\kappa \geq 2$，方程 (4.1) 和 (4.2) 分别存在唯一的右连左极温和解 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}^{m,\,n}$ 属于 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$。此外，解映射 $y \mapsto \mathcal{Y}^{y\widehat{}}$ 是从 $L^\kappa(\Omega\ \mathcal{F}、\ \mathbb{Q};\ H)$ 到 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$ 的利普希茨映射，并且有

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[s,T]}|\mathcal{Y}_t|^\kappa\Big] \leq C\Big[&1 + \mathbb{E}|y|^\kappa + |\Gamma^\dagger|^\kappa_{L^\infty_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega;\mathcal{L}(H))} \\ &+ |\chi|^\kappa_{L^\infty_{\mathcal{P}}([s,T]\times\Omega;H)} + \mathbb{E}\Big(\int_0^T |\mathcal{R}_s^\dagger|ds\Big)^\kappa\Big]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

此外，当 $m, n \to \infty$ 趋于 $\mathcal{Y}^{m,\,n} \to \mathcal{Y}^{\infty,\,n}, \mathcal{Y}^{m,\,n} \to \mathcal{Y}^{m,\,\infty}, \mathcal{Y}^{m,\,m} \to \mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{\infty,\,n} \to \mathcal{Y}$ 以及 $\mathcal{Y}^{m,\,\infty} \to \mathcal{Y}$ 时，以下收敛关系在 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$ 中成立。

证明。在假设 2.1 下，具有补偿泊松随机测度的随机偏微分方程的存在性众所周知，细节从略，参见 [22]。其思路是定义一个映射$\mathscr{T}$从 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$ 到其自身，定义如下:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}(\mathcal{Y})_t = &\,e^{(t-s)A}\mathcal{Y}_0 + \textstyle\int_s^t e^{(t-\tau)A}(\mathcal{Q}_\tau^1\mathcal{Y}_\tau + \mathcal{R}_\tau^\dagger)d\tau + \int_s^t e^{(t-\tau)A}\big[\mathcal{Q}_\tau^2\mathcal{Y}_\tau + \mathcal{R}_\tau^2\big]dB_\tau^j \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(\tau)\mathcal{Y}_\tau d\beta_\tau^i + \sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(\tau)\chi_\tau d\beta_\tau^i \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t e^{(t-\tau)A}\Gamma_\tau^\dagger e_i d\beta_\tau^i + \int_{\Xi_s^t} e^{(t-\tau)A}\big[\mathcal{Q}_\tau^3(\alpha)\mathcal{Y}_\tau + \mathcal{R}_\tau^3(\alpha)\big]\widetilde{N}(d\alpha, d\tau). \end{aligned} \tag{4.4}$$

通过证明该映射在 $\mathbb{H}_\kappa([s,T])$ 的等价范数下是压缩映射，即，对某个 $\varrho > 0$，有 $\|\mathcal{Y}\|^\kappa_{\frown} = \mathbb{E}\sup_{t\in[s,T]} e^{-\kappa\varrho t}|\mathcal{Y}_t|^\kappa_H$，即可由巴拿赫不动点定理保证其存在性。

我们继续证明（4.3）。$\mathcal{Q}^1$ 的有界性意味着

$$\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\int_s^t e^{(t-\tau)A}(\mathcal{Q}_\tau^1\mathcal{Y}_\tau + \mathcal{R}_\tau^\dagger)d\tau\Big|^\kappa \leq C_T\int_s^T \widehat{\mathbb{E}}\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|\mathcal{Y}_\sigma|^\kappa d\tau + \widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_s^T|\mathcal{R}_\tau^\dagger|d\tau\Big]^\kappa. \tag{4.5}$$

由 $K_i(t)$ 在(3.6)中的定义以及随机分解公式（见 [9, 定理5.10]）表明，存在一个 $0 < \delta < 1/2 - \vartheta$ 以及一个常数 $c_\delta > 0$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(\tau)\mathcal{Y}_\tau d\beta_\tau^i = \int_s^t e^{(t-\tau)A}\nabla_x\widehat{G}_1(\tau)\mathcal{Y}_\tau dW_\tau = c_\delta\int_s^t(t-\tau)^{\delta-1}e^{(t-\tau)A}\bar{\mathcal{Y}}_\tau d\tau, \tag{4.6}$$

其中 $\bar{\mathcal{Y}}_\tau := \int_s^\tau (\tau-\sigma)^{-\delta} e^{(\tau-\sigma)A}\nabla_x \widehat{G}_1(\sigma)\mathcal{Y}_\sigma dW_\sigma$。BDG不等式蕴含

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}|\bar{\mathcal{Y}}_\tau|^\kappa = \widehat{\mathbb{E}}\Big|\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{-\delta} e^{(\tau-\sigma)A}\nabla_x \widehat{G}_1(\sigma)\mathcal{Y}_\sigma dW_\sigma\Big|^\kappa \\
&\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{-2\delta}|e^{(\tau-\sigma)A}\nabla_x \widehat{G}_1(\sigma)\mathcal{Y}_\sigma|^2_{\mathcal{L}_2(H)}d\sigma\Big]^{\kappa/2} \\
&\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{-2\delta-2\vartheta}|\mathcal{Y}_\sigma|^2 d\sigma\Big]^{\kappa/2} \le C\,\widehat{\mathbb{E}}\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|\mathcal{Y}_\sigma|^\kappa\Big(\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{-2\delta-2\vartheta}d\sigma\Big)^{\kappa/2}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，由 Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\sum_{i=1}^\infty\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(\tau)\mathcal{Y}_\tau d\beta^i_\tau\Big|^\kappa &= c_\delta^\kappa\,\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\int_s^t (t-\tau)^{\delta-1}e^{(t-\tau)A}\bar{\mathcal{Y}}_\tau d\tau\Big|^\kappa \\
&\le C_{\kappa,\delta,T}\int_s^T \widehat{\mathbb{E}}\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|\mathcal{Y}_\sigma|^\kappa d\tau.
\end{aligned}$$

同样，备注3.6以及 $\Gamma^\dagger$ 的有界性意味着

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\sum_{i=1}^\infty\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(t)\chi_\tau d\beta^i_\tau\Big|^\kappa_H &\le C|\chi|^\kappa_{L^\infty_{\mathcal{P}}([s,T]\times\Omega;H)}, \\
\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\sum_{i=1}^\infty\int_s^t e^{(t-\tau)A}\Gamma^\dagger_\tau e_i d\beta^i_\tau\Big|^\kappa_H &\le C|\Gamma^\dagger|^\kappa_{L^\infty_{\mathcal{P}}([s,T]\times\Omega;H)}.
\end{aligned}$$

此外，BDG不等式以及 $\mathcal{Q}^2$ 和 $\mathcal{R}^2$ 的有界性给出

$$\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\int_s^t e^{(t-\tau)A}(\mathcal{Q}^2_\tau\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}^2_\tau)dB^j_\tau\Big|^\kappa \le C_T\Big[1+\int_s^T\widehat{\mathbb{E}}\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|\mathcal{Y}_\sigma|^\kappa d\tau\Big].$$

对于跳跃项（4.4），利用由补偿泊松随机测度驱动的随机卷积的最大不等式（参见 [22, 命题 3.3] 和 [30, 40]）可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[s,T]}\Big|\int_{\Xi_s^t} e^{(t-\tau)A}[\mathcal{Q}^3_\tau(\alpha)\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}^3_\tau(\alpha)]\widetilde{N}(d\alpha,d\tau)\Big|^\kappa \\
&\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\Big[\int_\Xi|\mathcal{Q}^3_\tau(\alpha)\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}^3_\tau(\alpha)|^\kappa\pi(d\alpha)+\Big(\int_\Xi|\mathcal{Q}^3_\tau(\alpha)\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}^3_\tau(\alpha)|^2\pi(d\alpha)\Big)^{\kappa/2}\Big]d\tau \\
&\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\Big(|\mathcal{Q}^3_\tau|^\kappa_{L^\kappa(\Xi;\pi)}+|\mathcal{Q}^3_\tau|^\kappa_{L^2(\Xi;\pi)}\Big)|\mathcal{Y}_\tau|^\kappa+\Big(|\mathcal{R}^3_\tau|^\kappa_{L^\kappa(\Xi;\pi)}+|\mathcal{R}^3_\tau|^\kappa_{L^2(\Xi;\pi)}\Big)d\tau \\
&\le C\Big(1+\int_s^T\mathbb{E}\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|\mathcal{Y}_\sigma|^\kappa d\tau\Big).
\end{aligned}$$

结合上述估计并应用 Grönwall不等式，可得（4.3）。收敛结果直接成立。解映射 $y\mapsto\mathcal{Y}^y$ 的 Lipschitz 连续性可通过与 [22, 定理 2.3]类似的论证得到。细节从略。证明完毕。□

命题 4.2。假设*2.1* 和*3.5*成立，可得

$$\sup_{t\in[s,T]}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t|^2 \le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[1+|y|^2+\Big(\int_s^T|\mathcal{R}^\dagger_\tau|d\tau\Big)^2+|\chi|^2_{L^\infty_{\mathcal{P}}([s,T]\times\Omega;H)}+\int_s^T|\Gamma^\dagger_t|^2_{\mathcal{L}_2(H)}dt\Big] \tag{4.8}$$

且对任意 $s \le t \le T$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t|_H^2 \ \le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[1+|x|^2+\Big(\int_s^t|\mathcal{R}_\tau^\dagger|d\tau\Big)^2+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}|\chi_\tau|^2d\tau\\ +\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}|\Gamma_\tau^\dagger|^2_{\mathcal{L}(H)}d\tau\Big].\end{aligned} \tag{4.9}$$

证明。 我们首先注意到

$$|e^{(t-\tau)A}\Gamma_\tau^\dagger|_{\mathcal{L}_2(H)} \le |e^{(t-\tau)A}|_{\mathcal{L}_2(H)}|\Gamma_\tau^\dagger|_{\mathcal{L}(H)} \le C(t-\tau)^{-\vartheta}|\Gamma_\tau^\dagger|_{\mathcal{L}(H)}. \tag{4.10}$$

为证明 (4.8，我们考虑 $\mathcal{Y}_t$ 在 (4.4) 中的温和形式，其中将 $\mathcal{Y}_t$ 代入 $\mathscr{T}(\mathcal{Y})_t$。对于 (4.4) 中的跳跃项，利用由补偿泊松随机测度驱动的随机积分的 Itô 等距以及 (4.10)（将 $\Gamma^\dagger$ 替换为 $\mathcal{Q}_\tau^3(\alpha) \in \mathcal{L}(H)$），可得

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\Big|\int_s^t\int_\Xi e^{(t-\tau)A}[\mathcal{Q}_\tau^3(\alpha)\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}_\tau^3(\alpha)]\widetilde{N}(d\alpha,d\tau)\Big|^2\\ &\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\int_s^t\int_\Xi|e^{(t-\tau)A}[\mathcal{Q}_\tau^3(\alpha)\mathcal{Y}_\tau+\mathcal{R}_\tau^3(\alpha)]|^2\pi(d\alpha)d\tau\\ &\le C\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[|\mathcal{Q}_\tau^3|^2_{L^2(\Xi;\pi)}|\mathcal{Y}_\tau|^2\Big]d\tau+\widehat{\mathbb{E}}\int_s^t|\mathcal{R}_\tau^3|^2_{L^2(\Xi;\pi)}d\tau\\ &\le C\Big(1+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_\tau|^2d\tau\Big).\end{aligned}$$

对于 (4.4) 右端的其余项，根据假设 3.5 和注记 3.6，我们可以采用与上述类似的论证，得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t|^2 &\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big\{1+|y|^2+\Big(\int_s^t|\mathcal{R}_\tau^\dagger|d\tau\Big)^2+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}|\chi_\tau|^2d\tau\\ &\qquad+\int_s^t\big|e^{(t-\tau)A}\Gamma_\tau^\dagger\big|^2_{\mathcal{L}_2(H)}d\tau+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathbb{E}|\mathcal{Y}_\tau|^2d\tau\Big\}\\ &\le C\,\widehat{\mathbb{E}}\Big[1+|y|^2+\Big(\int_s^T|\mathcal{R}_\tau^\dagger|d\tau\Big)^2+|\chi|^2_{L^\infty}+\int_s^T|\Gamma_\tau^\dagger|^2_{\mathcal{L}_2(H)}d\tau\\ &\qquad+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathbb{E}|\mathcal{Y}_\tau|^2d\tau\Big].\end{aligned} \tag{4.11}$$

利用 [17, 引理 7.1。1], 中的 Grönwall 不等式的一种变式，可以得到估计式 (4.8)。解映射 $y \mapsto \mathcal{Y}^y$ 在 $\mathcal{H}_2([s,T])$ 中的 Lipschitz 连续性可通过与上述类似的论证得出；详情亦见 [22, 定理 2。3] 。

为获得 估计式（4.9），其中范数为 $|\Gamma|_{\mathcal{L}(H)}$，我们再次利用（4.10）。定义

$$\mathfrak{u}(t) := \widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t|^2,\ \mathfrak{a}(t) := C\,\widehat{\mathbb{E}}\big(|\chi_t|^2+|\Gamma_t|^2_{\mathcal{L}(H)}\big),\ \mathfrak{b}(t) := C\,\widehat{\mathbb{E}}\big[1+|y|^2+\big(\textstyle\int_s^t|\mathcal{R}_\tau^1|d\tau\big)^2\big].$$

将（4. 10）代入（4.11）的第一个不等式，并使用上述记号，可得

$$\mathfrak{u}(t) \le \mathfrak{b}(t)+\textstyle\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{a}(\tau)d\tau+C\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{u}(\tau)d\tau.$$

设 $\mathfrak{h}(t) := \mathfrak{b}(t)+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{a}(\tau)d\tau$。在 [17] 中再次使用Grönwall不等式，得到

$$\mathfrak{u}(t) \le \mathfrak{h}(t)+C\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{h}(\tau)d\tau.$$

我们来计算上述不等式右端的第二项:

$$\begin{aligned}\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{h}(\tau)d\tau &= \int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\mathfrak{b}(\tau)d\tau+\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}\int_s^\tau(\tau-\sigma)^{-2\vartheta}\mathfrak{a}(\sigma)d\sigma d\tau\\ &\le \mathfrak{b}(t)\int_s^t(t-\tau)^{-2\vartheta}d\tau+\int_s^t\mathfrak{a}(\sigma)\int_\sigma^t(t-\tau)^{-2\vartheta}(\tau-\sigma)^{-2\vartheta}d\tau d\sigma\\ &\le C\mathfrak{b}(t)+C\int_s^t(t-\sigma)^{-2\vartheta}\mathfrak{a}(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

其中，第二行由积分次序的改变得出，第三行由估计式得出 $\int_\sigma^t(t-\tau)^{-2\vartheta}(\tau-\sigma)^{-2\vartheta}d\tau\le C(t-\sigma)^{-2\vartheta}$。因此，4.9）成立，证明完毕。□

4.2. 带跳跃的奇异后向随机偏微分方程的存在性。考虑如下形式的一类带跳跃的后向随机偏微分方程

$$\begin{aligned}-dZ_t &= \Big[A^*Z_t+\mathcal{V}_tZ_t+\sum_{i=1}^\infty K_i^*(t)Q_{1,t}e_i+\mathcal{E}_t^jQ_{2,t}^j+\mathcal{J}_t\Big]dt\\ &\quad-\textstyle\sum_{i=1}^\infty Q_{1,t}e_id\beta_t^i-Q_{2,t}^jdB_t^j-\int_\Xi Q_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,t),\quad Z_T=\eta,\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中我们假设 $\eta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\widehat{\mathbb{Q}},H)$，$\mathcal{J}\in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T];H)$，并且 $\mathcal{V}$，$\mathcal{E}^j:[0,T]\times\Omega\to H$是渐进可测且有界的。为处理（$\sum_{i=1}^\infty K_i^*(t)Q_{1,t}e_i$ 中漂移项内的级数4.12），我们采用截断论证。对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，考虑

$$\begin{aligned}-dZ_t^n &= \Big[A^*Z_t^n+\mathcal{V}_tZ_t^n+\sum_{i=1}^n K_i^*(t)Q_{1,t}^ne_i+\mathcal{E}_t^jQ_{2,t}^{j,n}+\mathcal{J}_t\Big]dt\\ &\quad-\textstyle\sum_{i=1}^\infty Q_{1,t}^ne_id\beta_t^i-Q_{2,t}^{j,n}dB_t^j-\int_\Xi Q_{3,t}^n(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,t),\quad Z_T^n=\eta.\end{aligned}\tag{4.13}$$

下面的命题确立了带跳跃的半线性后向随机演化方程（BSEE）（4.13）解的存在唯一性。

命题 *4.3.* 存在唯一的温和解 $(Z^n,Q_1^n,Q^{j,n}_2,Q_3^n(\cdot))$ 满足 *(4.13)*，且 $Z^n\in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T];H)$，$Q_1^n\in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T];\mathcal{L}_2(H))$，$Q^{j,n}_2\in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T];H)$，以及$Q_3^n\in\mathbb{F}^2_{\mathcal{P}}([0,T];H)$，满足

$$\begin{aligned}Z_s^n &= e^{(T-s)A^*}\eta+\int_s^T e^{(t-s)A^*}\Big[\mathcal{V}_tZ_t^n+\sum_{i=1}^n K_i^*(t)Q_{1,t}^ne_i+\mathcal{E}_t^jQ_{2,t}^{j,n}+\mathcal{J}_t\Big]dt\\ &\quad-\sum_{i=1}^\infty\int_s^T e^{(t-s)A^*}Q_{1,t}^ne_id\beta_t^i-\int_s^T e^{(t-s)A^*}Q_{2,t}^{j,n}dB_t^j-\int_{\Xi_s^T}e^{(t-s)A^*}Q_{3,t}^n(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt).\end{aligned}\tag{4.14}$$

此外，以下对偶关系成立

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\langle Z_s^n,y\rangle+\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\Big[\langle Z_t^n,\mathcal{R}_t^\dagger\rangle+\sum_{i=1}^m\langle Q_{1,t}^ne_i,K_i(t)\chi_t\rangle+\langle Q_{1,t}^n,\Gamma_t^\dagger\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}+\langle Q_{2,t}^{j,n},\mathcal{R}_t^{2,j}\rangle\\ &+\int_{\Xi_s^T}\langle Q_{3,t}^n(\alpha),\mathcal{R}_t^3(\alpha)\rangle\pi(d\alpha)\Big]dt=\widehat{\mathbb{E}}\langle\eta,\mathcal{Y}_T^{m,n}\rangle+\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\langle\mathcal{J}_t,\mathcal{Y}_t^{m,n}\rangle dt\end{aligned}\tag{4.15}$$

其中 $\mathcal{Y}^{m,n}_t$ 是 (4.2)的解。

证明。注意，（4.13）没有奇异漂移项。因此，方程（4.13）的温和解的存在唯一性可直接由 [7] 通过逐次逼近得到；变分方法另见 [26]。此外，对偶公式可通过标准的伊藤公式应用推出（参见 [19]）。因此，我们省略细节。□

因此，我们将（Z， Q_1， Q_2^j， $Q_3(\cdot)$）定义为方程（4.12）的候选解，它是 $(Z^n, Q_1^n, Q^{j,n}_2, Q_3^n(\cdot))$ 在 $j=1,\ldots\ldots, d$ 中某个希尔伯特空间里的弱极限。

推论 4.4. 我们有 $n\to\infty$,

(1) $(Z^n, Q_1^n, Q^{j,n}_2, Q_3^n(\cdot))$ 弱收敛到空间$L^2_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega; H)\times L^2_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega; \mathcal{L}_2(H))\times L^2_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega; H)\times \mathbb{F}^2_{\mathcal{P}}([0,T]; H)$中的一个元素 $(Z, Q_1, Q_2^j, Q_3(\cdot))$；*(2)* 对每个 $t\in[0,T]$， Z_t^n都弱收敛到 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$ 中的一个元素 $\widetilde{Z}_t$。

此外，对于 $\eta\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$ 以及所有 $m\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\langle\widetilde{Z}_s, y\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\Big[\langle Z_t, \mathcal{R}_t^\dagger\rangle + \sum_{i=1}^m\langle Q_{1,t}e_i, K_i(t)\chi_t\rangle + \langle Q_{1,t}, \Gamma_t^\dagger\rangle_{\mathcal{L}_2(H)} + \langle Q^j_{2,t}, \mathcal{R}_t^{2,j}\rangle\\ &+\int_{\Xi_s^T}\langle Q_{3,t}(\alpha), \mathcal{R}_t^3(\alpha)\rangle\pi(d\alpha)\Big]dt = \widehat{\mathbb{E}}\langle\eta, \mathcal{Y}_T^{m,\infty}\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\langle\mathcal{J}_t, \mathcal{Y}_t^{m,\infty}\rangle dt,\end{aligned}\tag{4.16}$$

其中 $\mathcal{Y}^{m,\infty}_t$ 是方程 (4.2) 在 $n=\infty$条件下的解。特别地，当 $\chi=0$时，过程$\mathcal{Y}^{m,n}_t$不依赖于 m，因此 $\mathcal{Y}^{m,\infty}_t=\mathcal{Y}$ 在 (4.16)中。

证明。 证明过程与 [15, 推论 48],类似，故省略细节。 □

接下来，我们考察 Z_s 的正则性。

命题 4.5。 映射 $s\mapsto\widetilde{Z}_s$从 $[0,T]$到 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$是弱连续的。

证明。 由（4.16），为考察 Z_s的弱连续性，只需考虑满足 $\Gamma^\dagger=\chi=\mathcal{R}^\dagger=\mathcal{R}^2=\mathcal{R}^3=0$ 的线性前向随机偏微分方程（4.1），即

$$d\mathcal{Y}_t = \big[A\mathcal{Y}_t + \mathcal{Q}_t^1\mathcal{Y}_t\big]dt + \textstyle\sum_{i=1}^\infty K_i(t)\mathcal{Y}_t d\beta_t^i + \mathcal{Q}_t^{2,j}\mathcal{Y}_t dB_t^j + \int_\Xi\mathcal{Q}_t^3(\alpha)\mathcal{Y}_t\widetilde{N}(d\alpha, dt)\tag{4.17}$$

满足初始条件 $\mathcal{Y}_s=y$。对于任意 $y\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$，我们将 $\mathcal{Y}^{s,y}_t$记为方程（4.17）的解，以强调其对初始数据 (s,y)的依赖性。定理 4.1 表明，（4.17）存在唯一的温和解

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_t^{s,y} &= e^{(t-s)A}y + \int_s^t e^{(t-\tau)A}\mathcal{Q}_s^1\mathcal{Y}_\tau^{s,y}d\tau + \sum_{i=1}^\infty\int_s^t e^{(t-\tau)A}K_i(\tau)\mathcal{Y}_\tau^{s,y}d\beta_\tau^i\\ &+\int_s^t e^{(t-\tau)A}\mathcal{Q}_\tau^{2,j}\mathcal{Y}_\tau^{s,y}dB_\tau^j + \int_{\Xi_s^t}e^{(t-\tau)A}Q_\tau^3(\alpha)\mathcal{Y}_\tau^{s,y}\widetilde{N}(d\alpha, d\tau),\quad \mathcal{Y}_s^{s,x}=y,\end{aligned}\tag{4.18}$$

在 $\mathbb{H}_2([s,T])\cap\mathcal{H}_2([s,T])$ 中，使得 $\sup_{t\in[s,T]}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}^{s,y}_t|^2\le C_T(1+|y|_H)$ 且

$$\sup_{t\in[s,T]}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t^{s,y}-\mathcal{Y}_t^{s,y'}|^2\le C_T\,\widehat{\mathbb{E}}|y-y'|,\quad\forall\, y'\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,\widehat{\mathbb{Q}},H).\tag{4.19}$$

对于固定的 $y\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$，令 $y_s:=\widehat{\mathbb{E}}(y|\mathcal{F}_s)$。对（4.16）取条件期望得到 $\widehat{\mathbb{E}}\langle\widetilde{Z}_s, y\rangle = \widehat{\mathbb{E}}\langle\widetilde{Z}_s, y_s\rangle = \widehat{\mathbb{E}}\langle\eta, \mathcal{Y}^{s,x_s}_T\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\langle\mathcal{J}_t, \mathcal{Y}^{s,y_s}_t\rangle dt$。

为了证明Z_s的弱连续性，只需证明对于所有的 $t\ge s$，映射 $s\mapsto\mathcal{Y}^{s,y_s}_t$在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$ 的范数下连续。对于任意 $\sigma>s$，注意到

$$\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t^{\sigma,y_\sigma}-\mathcal{Y}_t^{s,y_s}|^2\le\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t^{\sigma,y_\sigma}-\mathcal{Y}_t^{\sigma,y_s}|^2+\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}_t^{\sigma,y_s}-\mathcal{Y}_t^{s,y_s}|^2=:\mathbb{Y}_1+\mathbb{Y}_2.$$

上述项 $\mathbb{Y}_1$由（4.19）控制，并趋于零，因为 $\widehat{\mathbb{E}}|y_s-y_\sigma|^2=\widehat{\mathbb{E}}|\widehat{\mathbb{E}}(y|\mathcal{F}_\sigma)-\widehat{\mathbb{E}}(y|\mathcal{F}_s)|^2$ 趋于 0，当 $\sigma\to s$时。对于项 $\mathbb{Y}_2$，我们注意到 $\mathbb{E}|\mathcal{Y}^{\sigma,y_s}_t-\mathcal{Y}^{s,y_s}_t|^2=\mathbb{E}|\mathcal{Y}^{\sigma,y_s}_t-$

$\mathcal{Y}^{\sigma}_{\cdot,\ t}{}^{\mathcal{Y}^{s\ y_s}_{\sigma}}|^2 \le \mathbb{E}|\mathcal{Y}^{s,\ \cdot,\ \sigma}{}^{y_s} - y_s|^2$。由（4.18），采用与命题 4.2 中类似的论证意味着

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}^{s,y_s}_{\sigma} - y_s|^2 \\
&\le 32\,\widehat{\mathbb{E}}|e^{(\sigma-s)A}y - y_s|^2_H + 32\,\widehat{\mathbb{E}}\Big|\int_s^t e^{(t-\tau)A}\mathcal{Q}^1_\tau \mathcal{Y}^{s,y_s}_\tau d\tau\Big|^2 \\
&\quad +32\,\widehat{\mathbb{E}}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^{\sigma} e^{(\sigma-\tau)A}K_i(\tau)\mathcal{Y}^{s,y_s}_\tau d\beta^i_\tau\Big|^2 + \widehat{\mathbb{E}}\Big|\int_s^{\sigma} e^{(\sigma-\tau)A}\mathcal{Q}^{2,j}_\tau \mathcal{Y}^{s,y_s}_\tau dB^j_\tau\Big|^2 \\
&\quad +32\,\widehat{\mathbb{E}}\Big|\int_s^{\sigma}\int_{\Xi} e^{(\sigma-\tau)A}Q^3_\tau(\alpha)\mathcal{Y}^{s,y_s}_\tau \widetilde{N}(d\alpha,d\tau)\Big|^2 \\
&\le 32\,\widehat{\mathbb{E}}|e^{(\sigma-s)A}y_s - y_s|^2 + C\sup_{\tau\in[s,T]}\widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{Y}^{s,y_s}_\tau|^2\int_s^{\sigma}(\sigma-\tau)^{-2\vartheta}d\tau \to 0
\end{aligned}
$$

如 $\sigma \downarrow s$。对于 $\sigma \uparrow s$，计算类似。因此，证明完成。 □

~我们现在可以证明 Z 与 $\widetilde{Z}$ 重合。

命题 4.6. *$\widetilde{Z}$ 是一个渐进可测过程，且 $\widetilde{Z} = Z$，$d\widehat{\mathbb{Q}}\otimes dt$-几乎必然。*

证明。关于渐进可测性，固定任意 $t \in [0,T]$，我们选取 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$ 的一个基 $\{\upsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$。因此，对所有 $s \le t$，$\widetilde{Z}_s = \sum_{l=1}^{\infty}\widehat{\mathbb{E}}\langle\widetilde{Z}_s,\ \upsilon_l\rangle_H\upsilon_l$。由命题 4.5，
$\widehat{\ }\ \widetilde{\ }\qquad\qquad\qquad

（4.20）的右端对任意有界的 $m \to \infty$ χ均收敛。因此， $\mathbb{K}^m$ 在$L^2_{\mathcal{P}}$（$\Omega \times [0,T]$； H）中弱收敛。

~ ~为证明命题 (ii)，记 $\mathcal{Y}^{m,\chi}_t$ 以及 $\mathcal{Y}^{\chi}_t$ 分别为在以下设定下方程 (4.1) 和 (4.2) 的解： $s = y = \Gamma^\dagger = \mathcal{R}^\dagger = \mathcal{Q}^1 = \mathcal{Q}^k = \mathcal{R}^k = 0$ 对于 $k = 2, 3$，其中 $n = m$，且将 χ 替换为 $(T-\cdot)^\vartheta\chi$。然后，采用与 (i) 部分类似的论证，并将 (4.20) 替换为

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \langle (T-t)^\vartheta \textstyle\sum_{i=1}^m K_i^*(t) Q^m_{1,t} e_i, \chi_t\rangle dt = \widehat{\mathbb{E}}\langle \eta, \widetilde{\mathcal{Y}}^{m,\chi}_T\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \langle \widetilde{\mathcal{Y}}^{m,\chi}_t, \mathcal{J}_t\rangle dt.$$

鉴于定理 4.1 中已建立的收敛性 $\widehat{\mathbb{E}}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{\mathcal{Y}}^{m,\chi}_t - \widetilde{\mathcal{Y}}^{\chi}_t|^2 \to 0$，我们得出项 $(T-\cdot)^\vartheta \sum_{i=1}^m K_i^*(\cdot) Q^m_{1,\cdot} e_i$ 收敛，其极限记为 $(T-\cdot)^\vartheta \sum_{i=1}^\infty K_i^*(\cdot) Q_1 e_i$。证明至此完成。□

以下引理确立了带跳跃且具有无界强迫项的线性倒向随机偏微分方程的解的存在唯一性。该结果为证明带跳跃的奇异后向随机偏微分方程的唯一性提供了一项技术工具（4.12）。

引理*4.8.* 假设 ξ 是 H 中具有 $\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T (T-t)^{2\vartheta}|\xi_t|^2 dt < \infty$的渐进可测过程。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{Q}}; H)$，存在唯一的四元组$(\mathcal{O}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2^j, \mathcal{Z}_3(\cdot))$，其中 $\mathcal{O}$ 是 H 中的渐进可测过程，且具有右连左极路径，使得 $\mathcal{O} \in \mathbb{H}_2(T)$， $\mathcal{Z}_1 \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0,T]; \mathcal{L}_2(H))$， $\mathcal{Z}_2^j \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0,T]; H)$，以及 $\mathcal{Z}_3 \in \mathbb{F}^2_{\mathcal{P}}([0,T]; H)$，满足

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_s =& e^{(T-s)A^*}\eta + \int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{V}_t\mathcal{O}_t dt + \int_s^T e^{(t-s)A^*}\sum_{i=1}^n K_i^*(t)\mathcal{Z}_{1,t}e_i dt \\ &+ \int_s^T e^{(t-s)A^*}\xi_t dt + \int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{E}_t^j\mathcal{Z}^j_{2,t} dt - \sum_{i=1}^\infty \int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{Z}_{1,t}e_i d\beta^i_t \\ &- \int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{Z}^j_{2,t} dB^j_t - \int_{\Xi_s^T} e^{(t-s)A^*}\mathcal{Z}_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha, dt).\end{aligned} \tag{4.21}$$

此外，令 $\widetilde{\mathcal{Y}}^n$ 为方程(4.2) 在 $\chi = \mathcal{R}^\dagger = 0, m = \infty$ 和 $\Gamma^\dagger \in L^\infty_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0,T]; \mathcal{L}_2(H))$下的解，我们有

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\langle \mathcal{O}_s, y\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T \Big[\langle \mathcal{Z}_{1,t}, \Gamma_t^\dagger\rangle_{\mathcal{L}_2(H)} + \langle \mathcal{Z}^j_{2,t}, \mathcal{R}^{2,t}_t\rangle + \int_\Xi \langle \mathcal{Z}_{3,t}(\alpha), \mathcal{R}^3_t(\alpha)\rangle \pi(d\alpha)\Big] dt \\ &= \widehat{\mathbb{E}}\langle \eta, \widetilde{\mathcal{Y}}^n_T\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T \langle (T-t)^\vartheta \xi_t, (T-t)^{-\vartheta}\widetilde{\mathcal{Y}}^n_t\rangle dt.\end{aligned} \tag{4.22}$$

证明。 关键思路是应用关于 $W, B^j, \widetilde{N}$和 N的鞅表示定理。这与 [15, 引理 4.3] 及 [18], 的思路类似，因此为简洁起见，省略逐字相同的证明。□

定理 4.9。 推论4.4 中构造的四元组$(Z, Q_1, Q_2^j, Q_3(\cdot))$ 是带跳跃的奇异后向随机偏微分方程(4.12)的唯一温和解。

证明。 **步骤 1：存在性**。 对于任意 $s \in [0,T]$，我们注意到，映射 $\mathfrak{g} \mapsto \int_s^T (T-t)^{-\vartheta} e^{(t-s)A^*}\mathfrak{g}_t dt$ 是从 $L^2_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0,T]; H)$ 到 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{Q}}, H)$ 的有界线性泛函，因此是弱连续的。因此，对每个固定的 $s \in [0,T]$，引理 4.7 意味着，和 $\sum_{i=1}^m \int_s^T e^{(t-s)A^*} K_i^*(t) Q_{1,t} e_i\, dt = \int_s^T (T-t)^{-\vartheta} e^{(t-s)A^*}\mathbb{K}^m(t)\, dt$ 收敛

在 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}_t,\widehat{\mathbb{Q}},H)$ 中弱收敛到一个极限，我们将其记为 $\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^T e^{(t-s)A^*}K_i^*(t)Q_{1,t}e_i dt.$。类似地，$\sum_{i=1}^{n}\int_s^T e^{(t-s)A^*}K_i^*(t)Q_{1,t}^n e_i\,dt$ 在 $L^2(\Omega\ \mathcal{F}_T,\widehat{\mathbb{Q}},H)$ 中弱收敛到 $\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^T e^{(t-s)A^*}K_i^*(t)Q_{1,t}e_i\,dt$。此外，由于推论 4.4 中已证明 $Q_{1,t}^n$ 在 $L^2(\Omega\ \times[0,T];\mathcal{L}_2(H))$ 中弱收敛到 $Q_{1,t}$，我们也有 $\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^T e^{(t-s)A^*}Q_{1,t}^n{}_t e_i d\beta_t^i$ 弱收敛到 $\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^T e^{(t-s)A^*}Q_{1,t}e_i d\beta_t^i$。在 (4.13) 中取极限可知，$(Z,Q_1,Q_2^j,Q_3(\cdot))$ 是 (4.12) 的温和解。

步骤 2：唯一性。设 $(Z,Q_1,Q_2^j,Q_3(\cdot))$ 和 $(Z',Q_1',Q_2'^j,Q_3'(\cdot))$ 是方程 (4.12) 的两个解。定义它们的差为 $\bar{Z}=Z-Z'$, $\bar{Q}_1=Q_1-Q_1'$, $\bar{Q}_2^j=Q_2^j-Q_2'^j$，且 $Q_3(\cdot)=Q_3(\cdot)-Q_3'(\cdot)$。于是，由 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}\bar{Z}_s\ =&\int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{V}_t\bar{Z}_t dt+\sum_{i=1}^{n}\int_s^T e^{(t-s)A^*}K_i^*(t)\bar{Q}_{1,t}e_i dt+\int_s^T e^{(t-s)A^*}\mathcal{E}_t^j\bar{Q}_{2,t}^j dt\\&+\int_s^T e^{(t-s)A^*}(T-t)^{-\vartheta}\bar{\mathscr{W}}_t^n dt-\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^T e^{(t-s)A^*}\bar{Q}_{1,t}e_i d\beta_t^i\\&-\int_s^T e^{(t-s)A^*}\bar{Q}_{2,t}^j dB_t^j-\int_{\Xi_s^T} e^{(t-s)A^*}\bar{Q}_{3,t}(\alpha)\widetilde{N}(d\alpha,dt),\end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathscr{W}}^n$ 为 定义为 $\bar{\mathscr{W}}_t^n:=(T-t)^{\vartheta}\sum_{i=1}^{\infty}K_i^*(t)\,\bar{Q}_{1,\ t}e_i-(T-t)^{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}K_i^*(t)\,\bar{Q}_{1,\ t}e_i.$

因此，引理4.8 推出$(\bar{Z},\bar{Q}_1,\bar{Q}_2^j,$ $Q_3(\cdot))$ 是（4.21）的唯一温和解，其中$\eta=0,\xi_t=(T-t)^{-\vartheta}\bar{\mathscr{W}}_t^n$。因此，（4.22）给出

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\langle\bar{Z}_s,y\rangle+\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\Big[\langle\bar{Q}_{1,t},\Gamma_t^{\dagger}\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}+\langle\bar{Q}_{2,t}^j,\mathcal{R}_t^{2,j}\rangle dt+\int_{\Xi}\langle\bar{Q}_{3,t}(\alpha),\mathcal{R}_t^3(\alpha)\rangle\pi(d\alpha)\Big]dt\\&=\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\big\langle(T-t)^{-\vartheta}\widetilde{\mathcal{Y}}_t^{n,\Gamma^{\dagger}},\bar{\mathscr{W}}_t^n\big\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}dt,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{Y}}_{,t}^{n\ \Gamma^{\dagger}}$ 是（4.2）的温和解，其中 $\chi=\mathcal{R}^{\dagger}=0$。由于 $\bar{\mathscr{W}}^n$ 根据引理 4.7 弱收敛到零，我们将 $n\to\infty$ 代入上述等式，得到

$$\widehat{\mathbb{E}}\langle\bar{Z}_s,y\rangle+\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\big[\langle\bar{Q}_{1,t},\Gamma_t\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}+\langle\bar{Q}_{2,t}^j,\mathcal{R}_t^{2,j}\rangle dt+\int_{\Xi}\langle\bar{Q}_{3,t}(\alpha),\mathcal{R}_t^3(\alpha)\rangle\pi(d\alpha)\big]dt=$$

这就证明了解的唯一性，并完成了证明。 □

4.3. **的迹类正则性**。现在证明，鞅被积函数 Q_1 属于迹类，这一性质对于表述随机极大值原理至关重要。注意到 Q_1 自然取值于希尔伯特–施密特类，而假设 e^{tA} 3.5 中的半群 e^{tA} 所具有的希尔伯特–施密特平滑性质 使我们能够通过对偶论证控制伴随双随机偏微分方程中的奇异漂移项，从而建立加权$\mathcal{L}_1(H)$界。

命题 4.10. 设 $(Z,Q_1,Q_2^j,Q_3(\cdot))$ 是方程 (4.12)的唯一温和解。则有

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T(T-t)^{2\vartheta}|Q_{1,t}|_{\mathcal{L}_1(H)}^2dt\le C\big(\widehat{\mathbb{E}}|\eta|^2+\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T|\mathcal{J}_\tau|^2dt\big).$$

证明。类似于 [15, 附录], 中的论证，下面给出证明的详细过程。由于 $Q_{1,\ t}\in\mathcal{L}_2(H)$ $\mathbb{Q}$-几乎处处成立，因而是紧的，所以可以分解为$Q_{1,\ t}=\sum_{\iota=1}^{\infty}a_\iota(t)e_\iota'(t)\langle e_\iota(t)\ \cdot\rangle$，其中 $a_\iota(t)\in\mathbb{R}$，且 $\{e_\iota'(t)\}_\iota$，$\{e_\iota(t)\}_\iota$ 是 H的标准正交基。过程 $a_\iota(t)$ $e_\iota'(t)$ $e_\iota(t)$被选为渐进可测过程。令

$$\Gamma_t^n=\mathfrak{p}(t)\sum_{\iota=1}^{n}\operatorname{sgn}(a_\iota(t))e_\iota'(t)\langle e_\iota(t),\cdot\rangle \tag{4.23}$$

其中， $\mathfrak{p}$ 是任意的取正值的有界渐进可测过程。由于$|\Gamma_t^n|_{\mathcal{L}(H)} \le \mathfrak{p}(t)$且 Γ_t^n的秩为 n，过程 Γ^n 在 $\mathcal{L}_2(H)$中也是有界的。

令 $\mathcal{Y}^n$ 表示方程（4.1）在 $s = y = \chi = \mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^3 = 0$和 $\Gamma^\dagger = \Gamma^n$下的解。由对偶性（4.15），可得 $\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \langle Q_{1,\ t},\ \Gamma_t^n\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}\, dt = \widehat{\mathbb{E}}\langle \eta,\ \mathcal{Y}_T^n\rangle + \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T \langle \mathcal{J}_t,\ \mathcal{Y}_t^n\rangle dt$. 计算$\langle Q_{1,\ t},\ \Gamma_t^n\rangle$ 并利用 Hölder不等式结合（4.9）估计上述等式右端，得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \sum_{\iota=1}^n |a_\iota(t)|\mathfrak{p}(t)dt \ &\le C\big(\widehat{\mathbb{E}}|\eta|^2\big)^{1/2}\big(1+\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T (T-t)^{-2\vartheta}\mathfrak{p}^2(t)dt\big)^{1/2}\\ &\quad + C\big(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}|\mathcal{J}_t|^2 dt\big)^{1/2}\big(1+\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \mathfrak{p}^2(t)dt\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 并注意到$Q_{1,\ t}|_{\mathcal{L}_1(H)} = \sum_{\iota=1}^\infty |a_\iota(t)|$，可得

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \mathfrak{p}(t)|Q_{1,t}|_{\mathcal{L}_1(H)}dt \le C_{\mathfrak{p},\eta}^{1/2}\Big(1+\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T (T-t)^{-2\vartheta}\mathfrak{p}^2(t)dt\Big)^{1/2},$$

其中 $C_{\mathfrak{p},\ \eta} = C(\mathbb{E}|\eta|^2 + \mathbb{E}\int_0^T |\mathcal{J}_t|^2 dt)$。定义 $\widetilde{\mathfrak{p}}(t) = (T-t)^{-\vartheta}\mathfrak{p}(t)$，我们有

$$\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T \widetilde{\mathfrak{p}}(t)[(T-t)^{-\vartheta}|Q_{1,t}|_{\mathcal{L}_1(H)}]dt \le C_{\mathfrak{p},\eta}^{1/2}(1+|\widetilde{\mathfrak{p}}|_{L^2_{\mathcal{P}}(\Omega\times[0,T])}).$$

由于 $\mathfrak{p}$ 是任意的，证明完成。 □

5. Malliavin微积分方法

本节中，我们将结果推广到非马尔可夫系统，其中 (2.3) 中的所有系数$F, G_1, G_2^j, \Theta, g, h^j$ 以及代价 (2.7) 中的 L, φ 均依赖于 $\omega \in \Omega$。我们假设对于任意固定的 (x, u)，映射 $\omega \mapsto F(t, x, u, \omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$-适应的，且 $G_1, G_2^j, \Theta, g, h^j, L, \varphi$ 也具有类似的适应性。关于使用 Malliavin微积分推导最优控制问题的随机最大值原理，我们参阅文献 [6, 38, 23, 27, 33, 4]及其中的参考文献。

对于任意 $\kappa \in [1, +\infty)$，我们将 Schatten 类 $\mathbb{S}^\kappa$ 定义为紧算子$\mathfrak{B}$ 的空间： $H \to H$ 满足 $\|\mathfrak{B}\|_\kappa := \big[\sum_{i=1}^\infty \lambda_i(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B})^{\kappa/2}\big]^{1/\kappa} < +\infty$，其中 $\lambda_i(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B})$ 是 $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$的第 i 个特征值。对于 $\kappa \in [1, \infty)$，空间 $\mathbb{S}^\kappa$ 是 UMD 巴拿赫空间；此外，当 $\kappa \ge 2$时，它还是 M型 2 巴拿赫空间；参见 [16, 引理 5.1]。关于 UMD 巴拿赫空间上的随机积分的详细论述，请读者参阅 [36, 32] 及其中的参考文献。

5.1. Malliavin微积分预备知识。我们回顾 [24, 25]中Malliavin微积分的一些基本概念和结果。设 V 为实可分Hilbert空间。对于Malliavin可微的 V值随机变量 ζ，我们分别用 $D_t^W\zeta$、 $D_t^{B^j}\zeta$ 和 $D_t^{\tilde{N}}$、$_\alpha\zeta$ 表示其关于 W、 B^j 在 t处的Malliavin导数，以及关于补偿Poisson随机测度$\sim N(\cdot,\cdot)$在$(t,\ \alpha)$处的Malliavin导数。设$\mathbb{D}_{1,2}(V)$为空间，其中包含所有关于 W、 B^j和 N具有Malliavin导数的 V值随机变量$\tilde{}$。再设$\mathbb{L}_{1,2}(V)$为所有渐进可测过程的集合，使得：(i) 对几乎处处的 $t \in [0, T]$， $\zeta(t,\ \cdot)$属于$\in \mathbb{D}_{1,2}(V)$；(ii) $(t,\ \omega) \mapsto D_s^W\zeta(t,\ \omega) \in L^2_{\mathcal{F}}([0, T];\ V)$存在一个渐进可测版本，使得$\widehat{\mathbb{E}}\big(\int_0^T |\zeta(t,\ \omega)|_V^2 dt + \int_0^T\int_0^T \|D_s^W\zeta(s,\ \omega)\|^2_{\mathcal{L}_2(H,\ V)}ds dt\big) < +\infty$，关于 B^j 和 N的Malliavin导数也具有类似性质。分析所用的工具如下

对偶公式：对于$\zeta \in \mathbb{D}_{1,\ 2}(V)$，有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\big[\big\langle \zeta, \int_0^T \widehat{\varphi}(s) dW_s \big\rangle_H\big] = \widehat{\mathbb{E}} \int_0^T \big\langle \widehat{\varphi}(s), D_s^W \zeta \big\rangle_{\mathcal{L}_2(H)} ds \\
&\widehat{\mathbb{E}}\big[\big\langle \zeta, \int_0^T \widetilde{\varphi}(s) dB_s^j \big\rangle_V\big] = \widehat{\mathbb{E}} \int_0^T \big\langle \widetilde{\varphi}(s), D_s^{B^j} \zeta \big\rangle_V ds, \\
&\mathbb{E}\big[\big\langle \zeta, \int_0^T \int_\Xi \widetilde{\psi}(s,\alpha) \widetilde{N}(d\alpha, ds) \big\rangle_V\big] = \widehat{\mathbb{E}} \int_0^T \int_\Xi \big\langle \widetilde{\psi}(s,\alpha), D_{s,\alpha}^{\widetilde{N}} \zeta \big\rangle_V \pi(d\alpha) ds,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

~对任意 $\mathcal{F}_s$-可料过程 $\widehat{\varphi}(s) \in \mathcal{L}_2(H)$ 与 $\widetilde{\varphi}(s)$ $\psi(s,\alpha) \in V$，使得右侧积分绝对收敛。此外，我们还需要 Malliavin 导数的如下性质：若 $\zeta \in \mathbb{D}_{1,2}(V)$ 是 $\mathcal{F}_s$-可测的，则 $D_t^W \zeta = D_t^{B^j} \zeta = D_t^{\widetilde{N},\alpha} \zeta = 0, \forall t > s$。下文中，视情况将 V 取为 $\mathbb{R}$ 和 H。

5.2. 带跳跃的线性随机偏微分方程的随机流。 接下来，我们考虑关于 $t \in [s,T]$ 的如下带跳跃的线性随机偏微分方程：

$$\begin{aligned}
dx_t^1 &= \big[Ax_t^1 + \widehat{O}_t x_t^1\big] dt + \nabla_x \widehat{G}_1(t) x_t^1 dW_t \\
&\quad + \nabla_x \widehat{G}_2^j(t) x_t^1 dB_t^j + \int_\Xi \nabla_x \widehat{\Theta}(t,\alpha) x_t^1 \widetilde{N}(d\alpha, dt), \quad x_s^1 = x \in H.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

方程（5.2）的解按通常方式在温和意义下理解，并在 H 中具有右连续有左极限轨道，记为 $x^{1,\ x}_{\cdot,t}, t \geq s$。设 $\Delta := \{(s,t) : 0 \leq s \leq t < +\infty\}$。

定义 5.1. 如果存在映射 $\Phi{:}\Delta \times \Omega \to \mathcal{L}(H)$，使得：(i) 对每个 $s \geq 0$ 和 $x \in H$，过程 $\Phi(t,s,\cdot)(x)$ $t \geq s$ 在 H, $\widehat{\mathbb{Q}}$-几乎必然意义下具有右连续有左极限轨道；(ii) 对每个 $s \geq 0$ 和 $x \in H$，有 $\Phi(t,s)(x) = x^{1,\ x}_{\cdot,t}\widehat{\ }$，对所有 $t \geq s$, $\mathbb{Q}$-几乎必然成立；(iii) 对所有 $0 \leq s \leq t \leq r$ 和 $\omega \in \Omega$，$\Phi(r,t;\omega) \circ \Phi(t,s;\omega) = \Phi(r,s;\omega)$。

本小节的目标是通过5.2式的随机流来表示上述方程的解，即 $x_t^1 = \Phi(t,s)x_s^1$，其中 $\Phi(t,s)$ 表示一个满足以下随机演化算子的算子值带跳跃的随机偏微分方程，形式上写作

$$\begin{aligned}
d\Phi(t,s) &= \big[\mathcal{A}\Phi(t,s)dt + \widehat{O}_t \Phi(t,s)\big] dt + \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t)\Phi(t,s)\, d\beta_t^i \\
&\quad + \nabla_x \widehat{G}_2^j(t)\Phi(t,s) dB_t^j + \int_\Xi \nabla_x \widehat{\Theta}(t,\alpha)\Phi(t,s)\widetilde{N}(d\alpha, dt),\ \Phi(s,s) = I,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是半群 $\mathcal{S}(t)$ 的无穷小生成元，定义为 $\mathcal{S}(t)\Phi := e^{tA} \circ \Phi$，其中$t \geq 0$，且 $\Phi \in \mathcal{L}(H)$，其中 $\circ$ 表示算子复合。

自然地，我们希望在有界算子空间上寻找一个随机流 Φ，使其满足（5.3）。然而，当 H 是无限维时，$\mathcal{L}(H)$上尚无完善的随机积分理论。相反，可以在较小的算子空间上建立随机积分理论，例如 Flandoli 发展的希尔伯特–施密特类理论 [12, 11]，，以及更一般地，在 [16]中讨论的 Schatten 类理论。还要注意，（5.3）由无穷多个布朗运动驱动 $\{\beta^i\}_{i=1}^{\infty}$。因此，[23]，所采用的方法不适用于此处；该方法依赖于欧几里得空间中的 Kunita 随机流理论，而这要求驱动布朗运动的数量有限。我们的方法在思路上与 [16], 相关，其中在 UMD 巴拿赫空间上的随机积分起着核心作用。尽管如此，[16]的结果不能直接应用于我们的情形，因为其分析假设算子 K_i 是满足可求和条件 $\sum_{i=1}^{\infty} |K_i|^2_{\mathcal{L}(H)} < +\infty$的时间无关算子；而这一条件在我们的框架中并不成立，参见注 3.6。因此，还需要作出额外调整。

根据 [16, 引理 5.3]，$\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(t)\}$ 在 $\mathcal{L}(H)$上构成一个半群，但通常不满足 C_0-性质（在 $\mathcal{L}(H)$上）。尽管如此，将其限制在 Schatten 类 $\mathbb{S}^\kappa$上后，它就成为一个 C_0-压缩映射半群。

定理 *5.2.* 假设存在常数 $\vartheta' < 1/2$ 和 $C > 0$，使得 $\|e^{tA}\|_\kappa \leq Ct^{-\vartheta'}, \forall\, t \in [0,T]$。设假设 *2.1* 对空间 $\mathcal{L}_2(H)$ 成立，且 *(H2)* 中的常数 ϑ 分别替换为 $\mathbb{S}^\kappa$ 和 ϑ'。那么，对于任意 $s \geq 0$，*(5.3)* 在$\mathbb{S}^\kappa$中存在唯一的温和解。此外，$(s,+\infty) \ni t \mapsto \Phi(t,s) \in \mathbb{S}^\kappa$ 是右连左极的 $\mathbb{Q}$-几乎处处成立。因此，Φ 是与 *(5.2)* 对应的随机流。

证明。为简化叙述，我们在 (5.2) 和 (5.3) 中令 $\widehat{O}_t = 0$ and $\nabla_x \widehat{G}_2^j(t) = 0$。一般情形的处理类似。固定 $0 \leq s < T < +\infty$，为简便起见，令 $\Phi(t) := \Phi(t,s)$。记 $\mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$ 为所有适应可测过程 $\Phi : (s,T] \times \Omega \to \mathbb{S}^\kappa$ 的集合，使得 $\widehat{\mathbb{E}} \int_s^T \|\Phi(t)\|_\kappa^2 dt < +\infty$。在 $\mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$ 上，考虑其等价范数 $|||\Phi|||_\varrho := \big[\widehat{\mathbb{E}} \int_s^T e^{-\varrho t} \|\Phi(t)\|_\kappa^2 dt\big]^{1/2}$，其中 $\varrho \geq 0$。

根据我们的假设，存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 $\Phi \in \mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^\infty \widehat{\mathbb{E}} \int_s^t \|\mathcal{S}(t-r)K_i(r)\Phi(r)\|_\kappa^2 dr \leq \sum_{i=1}^\infty \widehat{\mathbb{E}} \int_s^t \|e^{(t-r)A}\nabla_x \widehat{G}_1(r)\|_{\mathcal{L}(H;\mathbb{S}^\kappa)}^2 |\Phi(r)e_i|_H^2 dr \\
&\leq C\,\widehat{\mathbb{E}} \int_s^t (t-r)^{-2\vartheta'} \|\Phi(r)\|_2^2 dr \leq C\,\widehat{\mathbb{E}} \int_s^t (t-r)^{-2\vartheta'} \|\Phi(r)\|_\kappa^2 dr,
\end{aligned}$$

其中最后一行由富比尼定理以及 $\|\Phi(r)\|_2 \leq \|\Phi(r)\|_\kappa$，$\forall\, \kappa \geq 2$ 得出。根据 Schatten类 $\mathbb{S}^\kappa$ 的理想性质以及假设 (H6)，我们还有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}} \int_s^t \int_\Xi \|e^{(t-r)A}\nabla_x \widehat{\Theta}(r,\alpha)\Phi(r)\|_\kappa^2 \pi(d\alpha)dr \\
&\leq \widehat{\mathbb{E}} \int_s^t \int_\Xi \|e^{(t-r)A}\|_\kappa^2 \|\nabla_x \widehat{\Theta}(r,\alpha)\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|\Phi(r)\|_\kappa^2 \pi(d\alpha)dr \leq C\,\widehat{\mathbb{E}} \int_s^t (t-r)^{-2\vartheta'} \|\Phi(r)\|_\kappa^2 dr.
\end{aligned}$$

因此，映射

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\Phi(t) := \mathcal{S}(t-s)I + \textstyle\sum_{i=1}^\infty \int_s^t \mathcal{S}(t-r)K_i(r)\Phi(r)d\beta_r^i \\
+ \int_s^t \int_\Xi \mathcal{S}(t-r)\nabla_x \widehat{\Theta}(r,\alpha)\Phi(r)\widetilde{N}(d\alpha,dr)
\end{aligned}$$

是从 $\mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$ 到 $\mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$ 的良定义映射。因此，当 $\varrho > 0$ 足够大时，$\mathcal{T}$ 是 $(\mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)\ |||\cdot|||_\varrho)$ 上的压缩映射。事实上，对于任意 Φ_1，$\Phi_2 \in \mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$，我们有

$$\begin{aligned}
|||\mathcal{T}(\Phi_1) - \mathcal{T}(\Phi_2)|||_\varrho^2 &\leq C_T \widehat{\mathbb{E}} \int_s^T e^{-\varrho t} \int_s^t (t-r)^{-2\vartheta'} \|\Phi_1(r) - \Phi_2(r)\|_\kappa^2 dr dt \\
&\leq C_T\,\widehat{\mathbb{E}} \int_s^T e^{-\varrho r} \|\Phi_1(r) - \Phi_2(r)\|_\kappa^2 \int_r^T e^{-\varrho(t-r)}(t-r)^{-2\vartheta'} dt\, dr \\
&\leq \frac{C_T}{\varrho^{1-2\vartheta'}}\, \check{\Gamma}(1-2\vartheta')\, \widehat{\mathbb{E}} \int_s^T e^{-\varrho r} \|\Phi_1(r) - \Phi_2(r)\|_\kappa dr,
\end{aligned}$$

这里用到了 $\int_0^\infty e^{-\varrho t} t^{-2\vartheta'} dt = \varrho^{2\vartheta'-1}\Gamma(1-2\vartheta')$ 这一事实，其中 $\check{\Gamma}$ 是伽马函数。根据巴拿赫不动点定理，存在一个 $\Phi(s,\cdot) \in \mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$，使得 $\mathcal{T}(\Phi(s,\cdot)) = \Phi(s,\cdot)$。对于任意 $\Phi \in \mathbb{T}(\mathbb{S}^\kappa)$ 和 $t \geq s$，Φ 的右连左极性质可由以下事实得出：随机积分 $\sum_{i=1}^\infty \int_s^t \mathcal{S}(t-r)K_i(r)\Phi(r)d\beta_r^i$ 在 $\mathbb{S}^\kappa$ 上具有连续轨道，而 $\int_s^t \int_\Xi \mathcal{S}(t-r)\nabla_x \widehat{\Theta}(r,\alpha)\Phi(r)\,\widetilde{N}(d\alpha,dr)$ 在 $\mathbb{S}^\kappa$ 上具有右连左极轨道；这是通过在 [9] 中使用标准随机因子分解方法得到的；另请参见 [22] 以及定理4.1中的类似论证。定义 5.1 中的随机流性质直接成立。因此证明完毕。□

5.3. **随机最大值原理**。 在本小节中，我们考虑 $\kappa = 2$ 和 $\vartheta' = \vartheta$定理 5.2 中的情形，并令 $\Phi(\cdot, s)$ 为 5.3 式在 $\mathbb{S}^2$ 中的解。我们引入一些新的伴随过程。定义 $\aleph(t)$: $= \varphi(\widehat{x}_T) + \int_t^T \int_\Xi \widehat{L}(s,\alpha)\pi(d\alpha)$ ds 和

$$\Pi_t := e^{(T-t)A^*}\left[\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T) - \nabla_x^* f(\widehat{x}_T)\ell_T\right] + \int_t^T \int_\Xi e^{(s-t)A^*}\nabla_x\widehat{L}(s,\alpha)\pi(d\alpha)ds. \tag{5.4}$$

根据里斯表示定理，我们将 $\mathcal{L}(H;\mathbb{R})$ 与 H 等同，因此将 Π_t 视为一个H值过程。对于取值于 $\mathcal{L}(H;\mathbb{R})\widehat{\ }$的其他量，也在需要时采用相同约定。回顾 O_t 式（3.10），我们引入

$$\begin{aligned}
\nabla_x\widehat{\mathscr{H}}(s) :=& \int_\Xi \Big\{ \big[\widehat{O}_s\big]^*\Pi_s + \big[\nabla_x\widehat{G}_1(s)\big]^* D_s^W\Pi_s + \big[\nabla_x\widehat{G}_2^j(s)\big]^* D_s^{B^j}\Pi_s \\
&+\big[\nabla_x\widehat{\Theta}(s,\alpha)\big]^* D_{s,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_s + \big[\nabla_x\widehat{h}^j(s)\big]^* D_s^{B^j}\aleph(s) - \big[\nabla_x\widehat{g}(s,\alpha)\big]^*\ell_s\Big\}\pi(d\alpha) \\
\Psi(t,s) :=& \,[\Phi(t,s)]^*\nabla_x\widehat{\mathscr{H}}(s) \\
M_s :=& \,\Pi_s + \int_s^T \Psi(t,s)dt,\ N_{1,s} := D_s^W M_s,\ N_{2,s} := D_s^{B^j} M_s,\ N_{3,s} := D_{s,\alpha}^{\widetilde{N}} M_s.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

定理 5.3。 假设假设*2.1*、*3.5*和*2.2* 成立。设(3.7) 存在唯一解 $\ell \in L^2_{\mathcal{P}}([0,T]\times\Omega;\mathbb{D}_{1,2}(\mathbb{R}^d))$。此外，假设 $\varphi, L \in \mathbb{D}_{1,2}(\mathbb{R})$、$\nabla_x\varphi, \nabla_x L$和 $\Psi(t,s)$ 对所有 $0 \le s \le t \le T$均属于 $\mathbb{L}_{1,2}(H)$。那么有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_\Xi \Big\{ &[\widehat{R}_s]^* M_s + [\nabla_u\widehat{G}_1(s)]^* N_{1,s} + [\nabla_u\widehat{G}_2^j(s)]^* N_{2,s} \\
&+[\nabla_u\widehat{\Theta}(s,\alpha)]^* N_{3,s} + [\nabla_u\widehat{h}^j(s)]^* D_s^{B_j}\aleph(s) - [\nabla_u\widehat{g}(s,\alpha)]^*\ell_s\Big\}\pi(d\alpha)\,\Big|\,\mathcal{F}_s^Y\Big] = 0,
\end{aligned}$$

其中 R_s 定义见 (3.10) 以及 M_s，$N_{1,\,s}$，$N_{2,\,s}$，$N_{3,\,s}$ 定义见 (5.5)。

证明。由于 $\widehat{u}$ 是 J的局部极小值，命题 3.4 蕴含 $0 = [dJ(u^\varepsilon)/d\varepsilon]_{\varepsilon=0} = I(v)$。我们将 $I(v)$的第一行改写为 $\widehat{\mathbb{E}}\big[(\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)x_T^1 - \ell_T\nabla_x f(\widehat{x}_T)x_T^1) + \ell_T\nabla_x f(\widehat{x}_T)x_T^1 + \varphi(\widehat{x}_T)\Lambda_T\big]$。由 (3.4)，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\big[\varphi(\widehat{x}_T)\,\Lambda_T\big] &= \widehat{\mathbb{E}}\big\{\varphi(\widehat{x}_T)\int_0^T\left[\nabla_x\widehat{h}^j(t)x_t^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(t)v_t\right]dB_t^j\big\} \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\left\langle\nabla_x\widehat{h}^j(t)x_t^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(t)v_t, D_t^{B^j}\varphi(\widehat{x}_T)\right\rangle_{\mathbb{R}}dt
\end{aligned} \tag{5.6}$$

而富比尼定理蕴含

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\big[\textstyle\int_{\Xi_T}\Lambda_t\,\widehat{L}(t,\alpha)\pi(d\alpha)dt\big] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_{\Xi_T}\widehat{L}(t,\alpha)\int_0^t\left[\nabla_x\widehat{h}^j(s)x_s^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(s)v_s\right]dB_s^j\,\pi(d\alpha)\,dt \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_0^T\int_0^t\left[\nabla_x\widehat{h}^j(s)x_s^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(s)v_s\right]\int_\Xi\big(D_s^{B^j}\widehat{L}(t,\alpha)\big)\pi(d\alpha)\,ds\,dt \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_0^T\Big(\int_t^T\int_\Xi D_t^{B^j}\widehat{L}(s,\alpha)\pi(d\alpha)\,ds\Big)\left[\nabla_x\widehat{h}^j(t)x_t^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(t)v_t\right]dt.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

结合（5.6）和（5.7），并回顾 $\aleph$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\big[\varphi(\widehat{x}_t)\,\Lambda_T + \textstyle\int_{\Xi_T}\Lambda_t\,\widehat{L}(t,\alpha)\pi(d\alpha)dt\big] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_0^T\left\langle\nabla_x\widehat{h}^j(t)x_t^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(t)v_t, D_t^{B^j}\varphi(\widehat{x}_T) + \int_t^T\int_\Xi D_t^{B^j}\widehat{L}(s,\alpha)ds\right\rangle_{\mathbb{R}}dt \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_0^T\left\langle\nabla_x\widehat{h}^j(t)x_t^1 + \nabla_u\widehat{h}^j(t)v_t, D_t^{B^j}\aleph(t)\right\rangle_{\mathbb{R}}dt.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

回顾（3.11），将 x_T^1 改写为温和形式，并应用（5.1），可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\big\{\langle\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T,x_T^1\rangle\big\}\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\Big\{\Big\langle\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T,\int_0^T e^{(T-t)A}\big[\widehat{O}_tx_t^1+\widehat{R}_tv_t\big]dt\\
&\quad+\int_0^T e^{(T-t)A}\Big[\big(\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t\big)dW_t+\big(\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t\big)dB_t^j\Big]\\
&\quad+\int_{\Xi_T}e^{(T-t)A}\big(\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_t^1+\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t\big)\widetilde{N}(d\alpha,dt)\Big\rangle\Big\}\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\Big\{\int_0^T\big\langle\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T,e^{(T-t)A}\big[\widehat{O}_tx_t^1+\widehat{R}_tv_t\big]\big\rangle\\
&\qquad+\big\langle e^{(T-t)A}\big(\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t\big),D_t^W\big[\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T\big]\big\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}\\
&\qquad+\big\langle e^{(T-t)A}\big(\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t\big),D_t^{B^j}\big[\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T\big]\big\rangle_H\\
&\qquad+\int_\Xi\big\langle e^{(T-t)A}(\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_t^1+\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t),\\
&\qquad\qquad D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}[\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\nabla_x^*f(\widehat{x}_T)\ell_T]\big\rangle_H\pi(d\alpha)dt\Big\}.
\end{aligned}\tag{5.9}$$

通过将满足条件 x_t^1 （3.11）改写为温和形式，可以得出类似的论证

$$\widehat{\mathbb{E}}\textstyle\int_{\Xi_T}\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)x_t^1\pi(d\alpha)dt=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4,\tag{5.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_1&:=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\{e^{(t-s)A}(\widehat{O}_sx_s^1+\widehat{R}_sv_s)\big\}ds\,\pi(d\alpha)dt\\
\mathscr{E}_2&:=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\big\langle e^{(t-s)A}\big[\nabla_x\widehat{G}_1(s)x_s^1+\nabla_u\widehat{G}_1(s)v_s\big],D_s^W\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}ds\,\pi(d\alpha)dt\\
\mathscr{E}_3&:=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\big\langle e^{(t-s)A}\big[\nabla_x\widehat{G}_2^j(s)x_s^1+\nabla_u\widehat{G}_2^j(s)v_s\big],D_s^{B^j}\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\rangle_Hds\,\pi(d\alpha)dt\\
\mathscr{E}_4&:=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\big\langle e^{(t-s)A}\big[\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_s^1+\nabla_u\widehat{\Theta}(s,\alpha)v_s\big],D_{s,\alpha}^{\widetilde{N}}\nabla_xL(t,\alpha)\big\rangle ds\,\pi(d\alpha)dt.
\end{aligned}$$

就 $\mathscr{E}_2$而言，利用（5.1），可将其改写为

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_2&=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\big\langle e^{(t-s)A}\big[\nabla_x\widehat{G}_1(s)x_s^1+\nabla_u\widehat{G}_1(s)v_s\big],D_s^W\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}ds\,\pi(d\alpha)dt\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_0^t\big\langle\nabla_x\widehat{G}_1(s)x_s^1+\nabla_u\widehat{G}_1(s)v_s,e^{(t-s)A^*}D_s^W\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}ds\,\pi(d\alpha)dt\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_s^T\big\langle\nabla_x\widehat{G}_1(s)x_s^1+\nabla_u\widehat{G}_1(s)v_s,e^{(t-s)A^*}D_s^W\nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)\big\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}dt\,ds\pi(d\alpha)\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\int_t^T\big\langle\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t,e^{(s-t)A^*}D_t^W\nabla_x\widehat{L}(s,\alpha)\big\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}ds\,dt\pi(d\alpha)\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\big\langle\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t,D_t^W\int_{\Xi_t^T}e^{(s-t)A^*}\nabla_x\widehat{L}(s,\alpha)\pi(d\alpha)ds\big\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}dt.
\end{aligned}$$

这里，配对 $\langle\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}:=\mathrm{Tr}(\mathcal{K}_2^*\mathcal{K}_1)$ 对任意$\mathcal{K}_1\in\mathcal{L}(H)$ $\mathcal{K}_2\in\mathcal{L}_2(H)$都定义良好，且为 $\mathcal{K}_2^*\mathcal{K}_1\in\mathcal{L}_1(H)$。此外，第三行应用了富比尼定理，以便

交换时间积分的顺序。将 $\mathscr{E}_2$ 的类似论证应用于 $\mathscr{E}_3, \mathscr{E}_4$,(5.9)，将 (5.9) 与 (5.10) 相加，并回顾 Π_t 在 (5.4) 中可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\big(\nabla_x\varphi(\widehat{x}_T)-\ell_T\nabla_x f(\widehat{x}_T)\big)x_T^1+\int_0^T\int_\Xi \nabla_x\widehat{L}(t,\alpha)x_t^1\pi(d\alpha)dt\Big]\\
&=\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T\Big\{\big\langle\widehat{O}_t x_t^1+\widehat{R}_t v_t,\Pi_t\big\rangle_H+\big\langle\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_1(t)v_t,D_t^W\Pi_t\big\rangle_{\mathcal{L}(H),\mathcal{L}_2(H)}\\
&\qquad+\big\langle\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_t^1+\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)v_t,D_t^{B^j}\Pi_t\big\rangle_H\\
&\qquad+\int_\Xi\big\langle\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_t^1+\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)v_t,D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_t\big\rangle_H\pi(d\alpha)\Big\}dt.
\end{aligned}\tag{5.11}$$

回顾（3.15），将（5.8）、（5.11）和（3.15）代入 $I(v)$ 命题3.4 可得

$$\begin{aligned}
I(v)=&\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\Big\{\big\langle[\widehat{O}_t]^*\Pi_t+[\nabla_x\widehat{G}_1(t)]^*D_t^W\Pi_t+[\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)]^*D_t^{B^j}\Pi_t\\
&+[\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)]^*D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_t+[\nabla_x\widehat{h}^j(t)]^*D_t^{B^j}\aleph(t)-[\nabla_x\widehat{g}(t,\alpha)]^*\ell_t,x_t^1\big\rangle_H\Big\}\pi(d\alpha)dt\\
&+\widehat{\mathbb{E}}\int_{\Xi_T}\Big\{\big\langle[\widehat{R}_t]^*\Pi_t+[\nabla_u\widehat{G}_1(t)]^*D_t^W\Pi_t++[\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)]^*D_t^{B_j}\Pi_t\\
&+[\nabla_u\widehat{\Theta}(t,\alpha)]^*D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_t+[\nabla_u\widehat{h}^j(t)]^*D_t^{B^j}\aleph(t)-[\nabla_u\widehat{g}(t,\alpha)]^*\ell_t,v_t\big\rangle_{\mathcal{U}}\Big\}\pi(d\alpha)dt.
\end{aligned}\tag{5.12}$$

按照 [38, 27], ，我们取一个特定的控制 $v_t=\nu\mathbf{1}_{(s,s+\theta]}(t)$，其中 $\nu=\nu(\omega)$ 是一个有界的 $\mathcal{F}_s^Y$- 可测随机变量，且 $0\le s\le s+\theta\le T$。在这种情况下，对于任意 $0\le t\le s$，方程（3.1）给出 $x_t^1=0$。因此，（5.12）变为 $I_1(\theta)+I_2(\theta)=0$，其中 $I_1(\theta)$ 和$I_2(\theta)$ 定义为

$$\begin{aligned}
I_1(\theta):=&\widehat{\mathbb{E}}\int_s^T\int_\Xi\big\langle[\widehat{O}_t]^*\Pi_t+[\nabla_x\widehat{G}_1(t)]^*D_t^W\Pi_t+[\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)]^*D_t^{B^j}\Pi_t\\
&+[\nabla_x\Theta(t,\alpha)]^*D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_t+[\nabla_x\widehat{h}^j(t)]^*D_t^{B_j}\aleph(t)-[\nabla_x\widehat{g}(t,\alpha)]^*\ell_t,x_t^1\big\rangle_H\pi(d\alpha)dt,\\
I_2(\theta):=&\widehat{\mathbb{E}}\int_s^{s+\theta}\int_\Xi\big\langle[\widehat{R}_t]^*\Pi_t+[\nabla_u\widehat{G}_1(t)]^*D_t^W\Pi_t+[\nabla_u\widehat{G}_2^j(t)]^*D_t^{B_j}\Pi_t\\
&+[\nabla_u\Theta(t,\alpha)]^*D_{t,\alpha}^{\widetilde{N}}\Pi_t+[\nabla_u\widehat{h}^j(t)]^*D_t^{B^j}\aleph(t)-[\nabla_u\widehat{g}(t,\alpha)]^*\ell_t,\nu\big\rangle_{\mathcal{U}}\pi(d\alpha)dt.
\end{aligned}$$

对于这个特定的控制 $v_t=\nu\mathbf{1}_{(s,s+\theta]}(t)$，注意对于任意 $t\ge s+\theta$，第一个变分方程 x^1 变为

$$dx_t^1=\{Ax_t^1+\widehat{O}_t x_t^1\}dt+\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1dW_t+\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_t^1dB_t^j+\int_\Xi\nabla_x\widehat{\Theta}(t,\alpha)x_t^1\widetilde{N}(d\alpha,dt),$$

这是一个带跳线性随机偏微分方程。注意 $\nabla_x\widehat{G}_1(t)x_t^1dW_t=\sum_{i=1}^\infty K_i(t)x_t^1d\beta_t^i$。因此，定理 5.2 意味着$x_t^1=\Phi(t,s+\theta)x_{s+\theta}^1$，其中 $\Phi(\cdot,s+\theta)$ 是初始时刻为5.3的解 $s+\theta$。再次注意到 $x_t^1=0$ 对所有 $t\le s$，的温和形式具有如下表示： $x_{s+\theta}^1$

$$\begin{aligned}
x_{s+\theta}^1=&\int_s^{s+\theta}e^{(s+\theta-\tau)A}\Big\{\widehat{O}_\tau x_\tau^1d\tau+\nabla_x\widehat{G}_1(\tau)x_\tau^1dW_\tau+\nabla_x\widehat{G}_2^j(t)x_\tau^1dB_\tau^j\\
&\qquad+\int_\Xi\nabla_x\widehat{\Theta}(\tau,\alpha)x_\tau^1\widetilde{N}(d\alpha,d\tau)\Big\}\\
&+\int_s^{s+\theta}e^{(s+\theta-\tau)A}\Big\{\widehat{R}_\tau\nu d\tau+\nabla_u\widehat{G}_1(\tau)\nu dW_\tau+\nabla_u\widehat{G}_2^j(\tau)\nu dB_\tau^j\\
&\qquad+\int_\Xi\nabla_u\widehat{\Theta}(\tau,\alpha)\nu\widetilde{N}(d\alpha,d\tau)\Big\}=:x_{s+\theta,1}^1+x_{s+\theta,2}^1.
\end{aligned}\tag{5.13}$$

$\widehat{}$回顾 $\nabla_x \mathscr{H}(t)$ 在5.5中的定义，并注意到 $x_s^1 = 0$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=0} &= \frac{d}{d\theta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_{s+\theta}^{T}\big\langle \nabla_x \widehat{\mathscr{H}}(t), \Phi(t,s+\theta)x_{s+\theta}^1\big\rangle_H dt\Big]_{\theta=0}\\ &= \int_s^T \frac{d}{d\theta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\big\langle \nabla_x \widehat{\mathscr{H}}(t), \Phi(t,s+\theta)x_{s+\theta}^1\big\rangle_H\Big]_{\theta=0} dt = \int_s^T \frac{d}{d\theta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\big\langle \Psi(t,s), x_{s+\theta}^1\big\rangle_H\Big]_{\theta=0} dt.\end{aligned}$$

现在将 $x_{s+\theta}^1$ 表示为（5.13），并应用（5.1）。由此可得 t

$$\begin{aligned}&\int_s^T \frac{d}{d\theta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\big\langle \Psi(t,s), x_{s+\theta,1}^1\big\rangle\Big]_{\theta=0} dt\\ &= \int_s^T \frac{d}{d\theta}\,\widehat{\mathbb{E}}\Big\{\int_s^{s+\theta}\Big[\big\langle \Psi(t,s), e^{(s+\theta-\tau)A}(\widehat{O}_\tau x_\tau^1)\big\rangle\\ &\qquad +\big\langle e^{(s+\theta-\tau)A}\nabla_x \widehat{G}_1(\tau)x_\tau^1, D_\tau^W \Psi(t,s)\big\rangle + \big\langle e^{(s+\theta-\tau)A}\nabla_x \widehat{G}_2^j(\tau)x_\tau^1, D_\tau^{B^j}\Psi(t,s)\big\rangle\\ &\qquad +\int_\Xi \big\langle e^{(s+\theta-\tau)A}\nabla_x \widehat{\Theta}(\tau,\alpha)x_\tau^1, D_{\tau,\alpha}\Psi(t,s)\big\rangle \pi(d\alpha)\Big] d\tau\Big\}_{\theta=0} dt\\ &= \int_s^T \widehat{\mathbb{E}}\Big[\big\langle \nabla_x \widehat{G}_1(s+\theta)x_{s+\theta}^1, D_{s+\theta}^W\Psi(t,s)\big\rangle + \big\langle \nabla_x \widehat{G}_2^j(s+\theta)x_{s+\theta}^1, D_{s+\theta}^{B_j}\Psi(t,s)\big\rangle\\ &\quad +\int_\Xi \big\langle \nabla_x \widehat{\Theta}(s+\theta,\alpha)x_{s+\theta}^1, D_{s+\theta,\alpha}^{\tilde{N}}\Psi(t,s)\big\rangle\pi(d\alpha) + \big\langle \Psi(t,s), \widehat{O}_{s+\theta}x_{s+\theta}^1\big\rangle\Big]_{\theta=0} dt = 0,\end{aligned}$$

其中，最后一行用到了以下事实： $x_s^1 = 0$在计算 $\theta = 0$之后。此外，按照上述类似的论证可得

$$\begin{aligned}&\int_s^T \frac{d}{d\theta}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\big\langle \Psi(t,s), x_{s+\theta,2}^1\big\rangle\Big]_{\theta=0} dt\\ &= \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T \Big[\big\langle \Psi(t,s), \widehat{R}_{s+\theta}\nu\big\rangle + \big\langle \nabla_u \widehat{G}_1(s+\theta)\nu, D_{s+\theta}^W\Psi(t,s)\big\rangle\\ &\quad +\big\langle \nabla_u \widehat{G}_2^j(s+\theta)\nu, D_{s+\theta}^{B_j}\Psi(t,s)\big\rangle + \int_\Xi \big\langle \nabla_u \widehat{\Theta}(s+\theta,\alpha)\nu, D_{s+\theta,\alpha}^{\tilde{N}}\Psi(t,s)\big\rangle\pi(d\alpha)\Big]_{\theta=0} dt \qquad (5.14)\\ &= \widehat{\mathbb{E}}\int_s^T \big\langle \Psi(t,s), \widehat{R}_s\nu\big\rangle + \big\langle \nabla_u \widehat{G}_1(s)\nu, D_s^W\Psi(t,s)\big\rangle + \big\langle \nabla_u \widehat{G}_2^j(s)\nu, D_s^{B_j}\Psi(t,s)\big\rangle\\ &\qquad +\int_\Xi \big\langle \nabla_u \widehat{\Theta}(s,\alpha)\nu, D_{s,\alpha}^{\tilde{N}}\Psi(t,s)\big\rangle\,\pi(d\alpha)dt.\end{aligned}$$

根据 $I_2(\theta)$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dI_2(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=0} = \widehat{\mathbb{E}}\Big\langle \int_\Xi \Big\{&[\widehat{R}_s]^*\Pi_s + [\nabla_u \widehat{G}_1(s)]^* D_s^W\Pi_s + [\nabla_u \widehat{G}_2^j(s)]^* D_s^{B_j}\Pi_s\\ &+[\nabla_u \widehat{\Theta}(s,\alpha)]^* D_{s,\alpha}^{\tilde{N}}\Pi_s + [\nabla_u \widehat{h}^j(s)]^* D_s^{B^j}\aleph(s) - [\nabla_u \widehat{g}(s,\alpha)]^*\ell_s\Big\}\pi(d\alpha), \nu\Big\rangle_{\mathcal{U}}.\end{aligned} \qquad (5.15)$$

回忆一下 M， N_1， N_2， N_3 在 (5.5) 中的定义，结合 (5.14) 和 (5.15) 可得

$$\begin{aligned}\frac{dJ(u^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \widehat{\mathbb{E}}\Big\langle \int_\Xi \Big\{&[\widehat{R}_s]^* M_s + [\nabla_u \widehat{G}_1(s)]^* N_{1,s} + [\nabla_u \widehat{G}_2^j(s)]^* N_{2,s}\\ &+[\nabla_u \widehat{\Theta}(s,\alpha)]^* N_{3,s} + [\nabla_u \widehat{h}^j(s)]^* D_s^{B_j}\aleph(s) - [\nabla_u \widehat{g}(s,\alpha)]^*\ell_s\Big\}\pi(d\alpha), \nu\Big\rangle_{\mathcal{U}}.\end{aligned}$$

由于上述等式对任意有界的 $\mathcal{F}_s^Y$-可测 ν 都成立，我们得出

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_{\Xi}\Big\{[\widehat{R}_s]^*M_s+[\nabla_u\widehat{G}_1(s)]^*N_{1,s}+[\nabla_u\widehat{G}_2^j(s)]^*N_{2,s}\\ +[\nabla_u\widehat{\Theta}(s,\alpha)]^*N_{3,s}+[\nabla_u\widehat{h}^j(s)]^*D_s^{B_j}\aleph(s)-[\nabla_u\widehat{g}(s,\alpha)]^*\ell_s\Big\}\pi(d\alpha)\,\Big|\,\mathcal{F}_s^Y\Big]=0.$$

因此，证明完毕。 □

参考文献

[1] *N. U. Ahmed*，《*Zakai* 型无限维随机系统的最优松弛控制》，*SIAM* 控制与优化杂志，*34*（*1996*），第 *1592–1615* 页。[2] *N. U. Ahmed*，《巴拿赫空间上的部分观测随机演化方程及其最优利普希茨反馈控制律》，*SIAM* 控制与优化杂志，*57*（*2019*），第 *3101–3117* 页。[3] *F. Bao*、*Y. Cao* 和 *H. Qian*，《随机偏微分方程部分观测最优控制的数值近似》，*https://arxiv.org/abs/2504.00381*，（*2025*）。[4] *J. S. Baras*、*R. J. Elliott* 和 *M. Kohlmann*，《部分观测随机最小值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*27*（*1989*），第 *1279–1292* 页。[5] *A. Bensoussan*，《分布参数系统的随机最大值原理》，富兰克林研究所期刊，*315*（*1983*），第 *387–406* 页。[6] *A. Bensoussan*，《部分可观测系统的随机控制》，剑桥大学出版社，剑桥，*1992*。[7] *G. Cao* 和 *K. He*，《带跳跃的无限维半线性后向随机演化方程的逐次逼近》，随机过程及其应用，*117*（*2007*），第 *1251–1264* 页。[8]*Y. Cao*、*H. Qian* 和 *G. Yin*，《部分观测下随机偏微分方程的最优控制：随机最大值原理与数值近似》，*https://arxiv.org/abs/2504.14431*，（*2025*）。[9] *G. Da Prato* 和 *J. Zabczyk*，《无限维随机方程》，剑桥大学出版社，*2014*。[10] *R. Dumitrescu*、*B. Ø ksendal* 和 *A. Sulem*，《带跳跃的平均场随机偏微分方程的随机控制》，优化理论与应用期刊，*176*（*2018*），第 *559–584* 页。[11] *F. Flandoli*，《抛物型随机偏微分方程的正则性理论与随机流》，*CRC*出版社，*2024*。[12] *F. Flandoli* 和 *K. Uwe Schaumloffel*，《有界区域上的随机抛物方程：随机演化算子与李雅普诺夫指数》，*Stochastics*，*29*（*1990*），第 *461–485* 页。[13] *W. H. Fleming*，《部分可观测扩散过程的最优控制》，*SIAM* 控制期刊，*6*（*1968*），第 *194–214* 页。[14] *W. H. Fleming* 和 *E. Pardoux*，《部分观测扩散过程的最优控制》，*SIAM* 控制与优化杂志，*20*（*1982*），第 *261–285* 页。[15]*M. Fuhrman*、*Y. Hu* 和 *G. Tessitore*，《白噪声驱动偏微分方程最优控制的随机最大值原理》，随机偏微分方程：分析与计算，*6*（*2018*），第 *255–285* 页。[16] *B. Goldys* 和 *S. Peszat*，《论线性随机流》，美国数学会会刊，*377*（*2024*），第 *753–774* 页。[17] *D. Henry*，《半线性抛物方程的几何理论》，施普林格出版社，*1981*。[18] *Y. Hu* 和 *S. Peng*，《半线性随机演化控制系统的最大值原理》，*Stochastics*，*33*（*1990*），第 *159–180* 页。[19] *Y. Hu* 和 *S. Peng*，《后向半线性随机演化方程的适应解》，*Stoch. Anal. Appl.*，*9*（*1991*），第 *445–459* 页。[20] *P. Kotelenez*，《随机卷积积分与随机演化方程的停时 *Doob* 不等式》，*Stoch. Anal. Appl.*，*2*（*1984*），第 *245–265* 页。[21] *G. Liu* 和 *S. Tang*，《具有递归效用的随机演化方程最优控制的最大值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*61*（*2023*），第 *3467–3500* 页。[22] *C. Marinelli*、*C. Prévôt* 和 *M. Röckner*，《具有乘性泊松噪声的随机演化方程对初始数据的正则依赖性》，泛函分析杂志，*258*（*2010*），第 *616–649* 页。

[23] *O. Menoukeu Pamen*、*T. Meyer-Brandis*、*F. Proske* 和 *H. Binti Salleh*，《*Malliavin*微积分在带跳跃随机偏微分方程最优控制中的应用》，*Stochastics*，*85*（*2013*），第 *431–463* 页。[24] *D. Nualart*，《*Malliavin*微积分及相关主题》，*Springer*，*2006*。[25] *G. D. Nunno*、*B. Øksendal* 和 *F. Proske*，《*Lévy* 过程的*Malliavin*微积分及其在金融中的应用》，*Springer*，*2008*。[26] *B. Øksendal*、*F. Proske* 和 *T. Zhang*，《带跳跃的后向随机偏微分方程及其在随机跳场最优控制中的应用》，*Stochastics*，*77*（*2005*），第 *381–399* 页。[27] *B. Øksendal* 和 *A. Sulem*，《带跳跃正倒向随机微分方程最优控制的最大值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*48*（*2010*），第 *2945–2976* 页。[28] *E. Pardoux*，《非线性滤波方程及其在部分观测随机控制中的应用》，《非线性滤波与随机控制》，（*1982*），第 *208–248* 页。[29] *S. Peng*，《后向随机微分方程、非线性期望与风险度量》，中国数学暑期学校讲义，山东大学（威海），山东，（*2004*）。[30] *S. Peszat* 和 *J. Zabczyk*，《具有 *Lévy* 噪声的随机偏微分方程：演化方程方法》，剑桥大学出版社，*2007*。[31] *R. Situ*，《关于带跳跃后向随机微分方程的解及其应用》，随机过程及其应用，*66*（*1997*），第 *209–236* 页。[32] *B. Rüdiger*，《可分巴拿赫空间上关于补偿泊松随机测度的随机积分》，*Stochastics*，*76*（*2004*），第 *213–242* 页。[33] *S. Tang*，《随机微分方程部分观测最优控制的最大值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*36*（*1998*），第 *1596–1617* 页。[34] *S. Tang* 和 *X. Li*，《具有随机跳跃的随机系统最优控制的必要条件》，*SIAM* 控制与优化杂志，*32*（*1994*），第 *1447–1475* 页。[35] *J. van Neerven*、*M. Veraar* 和 *L. Weis*，《*UMD* 巴拿赫空间中的随机积分》，概率年刊，*35*（*2007*），第 *1438–1478* 页。[36] *J. M. A. M. van Neerven*、*M. C. Veraar* 和 *L. Weis*，《*UMD* 巴拿赫空间中的随机演化方程》，泛函分析杂志，*255*（*2008*），第 *940–993* 页。[37] *G. Wang* 和 *Z. Wu*，《部分信息下随机递归最优控制问题的最大值原理》，*IEEE* 自动控制汇刊，*54*（*2009*），第 *1230–1242* 页。[38] *G. Wang*、*Z. Wu* 和 *J. Xiong*，《具有相关状态噪声与观测噪声的正倒向随机控制系统的最大值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*51*（*2013*），第 *491–524* 页。[39] *Y. Zheng* 和 *J. Shi*，《随机跳跃部分观测正倒向随机系统渐进最优控制的全局最大值原理》，*SIAM* 控制与优化杂志，*61*（*2023*），第 *1063–1094* 页。[40] *J. Zhu*、*Z. a. Brzeźniak* 和 *E. Hausenblas*，《巴拿赫空间中由补偿泊松随机测度驱动的随机卷积的极大不等式》，亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊，*53*（*2017*），第 *937–956* 页。奥本大学数学与统计系，奥本，阿拉巴马州 *36849*。电子邮箱：*hjqian.math@gmail.com*

康涅狄格大学数学系，CT 06269电子邮箱地址: gyin@uconn.edu

奥本大学数学与统计系，阿拉巴马州 36849电子邮箱地址: yzc0009@auburn.edu

橡树岭国家实验室计算机科学与数学部，TN 37830电子邮箱地址: zhangg@ornl.gov