基于散度定理的非局部极值寻优*

Raik Suttner, Christian Ebenbauer,[a] SergeyDashkovskiy[b]

[a] 德国亚琛亚琛工业大学智能控制系统教研室[b] 德国维尔茨堡大学数学研究所

arXiv:2603.01200v1 [math.OC] 1 Mar 2026

摘要

我们针对存在局部极值的多维单积分器系统，提出一种新的极值寻优控制设计策略。该方法采用经过适当设计的正弦抖动信号，使单积分器沿球面运动。随着时间推移，这种球面运动可近似获得目标函数在球面上的积分。利用散度定理，我们将球面上的积分确定为所围成的球内某个积分的梯度。球内的这一积分定义了一个局部平均目标函数。所提出的极值寻优方法使系统状态沿平均目标函数的梯度方向移动。对目标函数进行这样的局部平均可以消除不期望的局部极值，因此有利于全局优化。假设平均目标函数不存在不期望的临界点，我们证明了闭环系统具有实用渐近稳定性。我们的理论分析考虑了足够小的 L_∞目标函数测量误差。

1. 引言

极值寻优控制的设计是一个受到广泛研究的问题，由此产生了各种强大的方法，并已应用于许多实际场景 [27], [11],[17], [15], [16]。大多数成熟的极值寻优方法都会采用抖动信号（或激励信号），以探测状态相关目标函数的响应，并使控制系统近似沿梯度方向移动 [10], [21]。这种基于梯度的方法通常会收敛到最近的局部极值。然而，在许多实际应用中，人们希望实现的不只是局部优化，还包括全局优化 [23]。源寻获问题就是一个典型例子 [5], [12], [1]。在此问题中，自主智能体试图找到一个点，使未知的位置相关场在该点达到最大强度。例如，自主智能体可以是一架无人机，配备机载传感器来测量电磁场的强度。该场可能受到不同物体和源的影响，从而产生空间非均匀性。在这种情况下，该场很可能存在一个最大强度点，同时还存在若干其他局部极值。因此，研究能够克服局部极值、从而达到全局极值的方法至关重要。

众所周知，极值寻优中抖动信号的选择对闭环系统的性能具有显著影响 [22]。对于存在局部极值时的全局极值寻优尤其如此，这一点在数值仿真中也经常可以观察到 [24], [3]。在此背景下，一个经常研究的问题是一维稳态输出函数的全局优化，该函数将稳定系统的稳态输出值描述为一维调节参数的函数，如 [23]所示。可以观察到，所采用的正弦抖动信号若具有足够大的幅值，便有助于克服稳态输出函数的局部极值。 [23] 中针对该一维问题的方法在其他若干研究中得到了进一步发展，例如 [26] 和[14]。为处理多维目标函数，一些研究提出基于已知数值算法的极值寻优，以便在用户指定的紧集上进行优化，例如 [9]中的DIRECT优化方法。然而，当系统状态（或目标函数的自变量）未知时，这种方法难以实现。

在本文中，我们考虑一个系统状态未知的多维单积分器系统。其输出由一个解析形式未知且依赖于状态的目标函数给出，该函数可能具有局部极值。与许多现有的多变量极值搜索方法类似，我们所提出的控制方案采用频率经过适当选取的正弦微扰信号。然而，与现有方法不同，我们的方法并不将系统导向被测目标（或输出）的梯度方向

*本研究得到德国研究基金会（德国研究联合会）的资助，项目编号为 DA 767/13-1 和 EB 425/8-1。通讯作者：Raik Suttner。

Email addresses: {raik.suttner, christian.ebenbauer}@ic.rwth-aachen.de（Raik Suttner、Christian Ebenbauer）

sergey.dashkovskiy@uni-wuerzburg.de（Sergey Dashkovskiy）

函数。相反，单积分器的状态被驱动至一个平均目标函数的梯度方向。平均目标函数由测量输出函数在以当前系统状态为中心、半径由正弦信号幅值给出的球上的局部平均给出。这种局部平均往往比原始目标函数具有更少的局部极值，因为局部极值被“抹平”。平均目标函数的概念也曾在其他基于扰动的方法中被推测，例如在 [25], 中，但缺乏数学上精确的解释。本文对抖动信号的新颖设计使我们能够通过一个简单公式显式地确定平均目标函数。

我们理论分析的关键要素是散度定理 （也称为高斯定理 或奥斯特罗格拉德斯基定理）。所采用的抖动信号经过专门设计，使单积分器能够对球面上的测量输出进行积分。随后，散度定理使我们能够将球面上的积分表示为所围成的球内积分的梯度。这便得到了上述平均目标函数。文献 [19], [20] 也运用了散度定理，为二维欧几里得空间中的独轮车设计源搜索方法。本文提出一种基于散度定理的新方法，可应用于维数为 ≥ 2 的单积分器。利用散度定理的思路在数值优化领域也已为人所知 [8], [13],[6]。然而，这些方法假设状态和目标函数已知，以便计算球面上的积分。我们的方法只需要实时测量输出。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们给出精确的数学问题陈述，并说明散度定理和平均目标函数在所提出的极值寻优方法中的作用。控制方案见第3节，其中还介绍如何在球面上对解析形式未知的目标函数进行积分。我们的主要理论结果见第4节，该结果保证在平均目标函数不存在非期望临界点的假设下，闭环系统具有实际渐近稳定性。平均

目标函数的非期望临界点是否存在取决于平均半径，数值示例见第5节。

2. 问题陈述与基本思路

设 n 是一个整数 ≥ 2。考虑单积分器模型

$$\dot{x} \;=\; u \tag{1}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中，状态为 x ，输入为 u。假设(1) 的状态是一个未知量，无法测量。关于

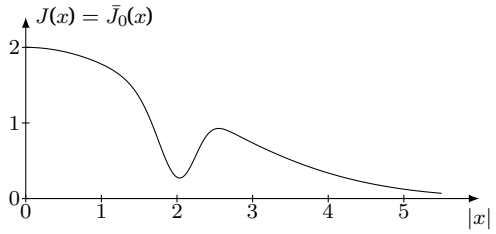

图1： 径向对称目标函数 J 在(3)中的图像。该函数在原点处取得全局最大值。此外，原点周围的球形集合中还存在局部极值。

(1) 当前状态的唯一信息由实值输出 $y = J(x$提供，该输出由光滑输出函数 $J\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$给出。函数 J 是解析未知的，这意味着自变量 $x \in \mathbb{R}^n$与函数值 $J(x) \in \mathbb{R}$ 之间的函数依赖关系未知。只能获得输出的实时测量，且无法存储测量结果。此外，测量可能受到噪声干扰，因此实际测得的输出值为

$$\hat{y} \;=\; J(x) + d(t), \tag{2}$$

其中， $d \in L_\infty$ 表示测量扰动。这里， L_∞ 表示 $\mathbb{R}$上所有勒贝格可测且本质有界的实值函数构成的空间。令 $\|\cdot\|$ 表示 L_∞上的通常本性上确界范数。

输出函数 J 也起到目标函数的作用。本文关注的是最大化 J 的值（这等价于最小化 $-J$）。我们感兴趣的是如下控制律 u ，它适用于(1)，能够将 x （(1)的状态引导至 J 的一个极大点，并且其实现只需要对(2)进行实时测量。这种控制律称为极值寻优控制。许多已知的极值寻优方法会将系统状态近似引导至J的梯度方向。这会使系统收敛至 J最近的局部极大点。然而，局部极大值不一定是全局最大值。例如，考虑 J的情形：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 具有如下形式

$$J(x) \;=\; 2\,\exp\big(-(|x|/3)^2\big) - \exp\big(-(|x|^2 - 2^2)/2\big), \tag{3}$$

其中 $|\cdot|$ 表示欧几里得范数。该径向对称函数的图像可见于图1。可以看出， J 的唯一全局极大值点位于原点。但也存在局部极小值点和极大点的球形集合。这些球形集合对J的梯度流构成了不可逾越的障碍。本文旨在提出一种在存在局部极值时进行全局优化的方法，该方法并不基于 J的梯度。

本文的核心思想是“洗掉” J 的不理想局部极值，以达到全局最大值。通过对 J进行局部平均来实现“洗掉”临界点的想法。为此，令 $\mathbb{B}$表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、半径为 1 的闭球。令 a为一个正实数，它将用作半径。

定义一个平均目标函数 $J_a\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下

$$\bar{J}_a(x) \;:=\; \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{B})} \int_{\mathbb{B}} J(x + a\,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

其中，vol(𝔹)表示 $\mathbb{B}$的体积。因此，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，J_a 在 x 处的值就是 J 在以 x为中心、半径为 a 的球上的局部平均。函数 J_a 可以视为 J的平滑版本。当$a \to 0$趋于极限时，平均目标函数在局部一致收敛于原目标函数。对 J 进行局部平均有助于消除局部极值。对于图1中 J 的例子，相应的平均目标函数 J_a 如图7的上排所示，其中适用于 $a = 1/2$ 和 $a = 1$。可以看出， $J_{1/2}$ 仍具有与 J几乎相同的局部极值球形集合，但局部极值的“深度”和“高度”减小了。若将平均半径 a 增大到 $a = 1$，那么 J 的局部极值就会被彻底“抹去”，这意味着 J_a 只有原点处唯一的全局极大值点，而没有其他临界点。

基于上述观察，我们希望获得梯度 $\nabla J_a\colon$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 平均 目标函数 J_a。计算 J_a 时直接依据(4)中的定义积分相当困难，因为当前状态 $x \in \mathbb{R}^n$ 未知，且函数 J在解析上亦未知。不过，可以表示 ∇J_a 为积分，并可用经适当设计的抖动信号通过极值寻优方法加以近似。在本节其余段落中，我们将推导一个便于使用的积分表示，即 ∇J_a的表示。随后的第3节提出了借助极值寻优控制对该积分的一种近似。

改写平均目标函数 J_a 的梯度，其关键在于散度定理（例如参见 [2]）。借助该定理，可将定义积分，即 J_a 在单位球 $\mathbb{B}$ 上的积分，转化为单位球面 $\partial\mathbb{B}$上的积分。对散度定理作逐分量应用表明，梯度向量场$\nabla \bar{J}_a\colon$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 由下式给出

$$\nabla \bar{J}_a(x) \;=\; \frac{1}{a\,\mathrm{vol}(\mathbb{B})} \int_{\partial\mathbb{B}} J(x + a\,s)\,s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s), \tag{5}$$

其中 $\lambda_{\partial\mathbb{B}}$ 表示 $\partial\mathbb{B}$上的通常勒贝格测度。方程(5) 至少在理论上，使我们能够通过一个积分计算的梯度 J_a，而该积分仅涉及 J的取值。此外，假设可以通过测量输出(2)来获得 J 的取值。

下一步，我们用球坐标表示流形 $\partial\mathbb{B}$ 上的积分(5)。为此，定义一个全局参数化 $\phi\colon\ \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{B}$ 由 $\partial\mathbb{B}$

$$\phi(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \;:= \tag{6}$$
$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta_0)\,\sin(\vartheta_1)\,\sin(\vartheta_2)\cdots\sin(\vartheta_{n-3})\,\sin(\vartheta_{n-2}) \\ \sin(\vartheta_0)\,\sin(\vartheta_1)\,\sin(\vartheta_2)\cdots\sin(\vartheta_{n-3})\,\sin(\vartheta_{n-2}) \\ \cos(\vartheta_1)\,\sin(\vartheta_2)\cdots\sin(\vartheta_{n-3})\,\sin(\vartheta_{n-2}) \\ \vdots \\ \cos(\vartheta_{n-3})\,\sin(\vartheta_{n-2}) \\ \cos(\vartheta_{n-2}) \end{bmatrix}.$$

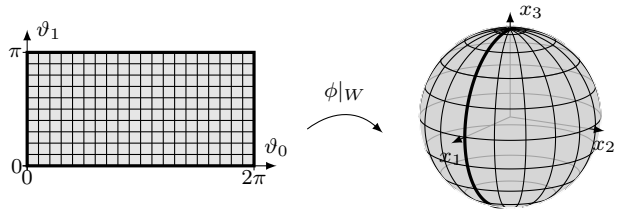

图 2： 维数为3 W 7 $n =$ 时球坐标的示意图。左侧的矩形是()中的集合。映射 ϕ 在(6) 中对集合 W 的限制，除一个零测集外，参数化了整个球面。

众所周知（例如，参见 [2]）， ϕ 在开集合上的限制

$$W \;:=\; (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2} \;\subset\; \mathbb{R}^{n-1} \tag{7}$$

是到 $\partial\mathbb{B}$ 的一个开子流形上的微分同胚，且该开子流形具有全测度，如图 2所示。众所周知（例如参见 [2]），(5) 中的曲面积分可以用 ϕ的坐标表示。为此，令$g\colon$ $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 表示 ϕ的 Gram 行列式的平方根；也就是说，g 定义为

$$g(\vartheta) \;:=\; \sqrt{\det\left(\mathrm{D}\phi(\vartheta)^\top \mathrm{D}\phi(\vartheta)\right)}, \tag{8}$$

其中$\mathrm{D}\phi(\vartheta) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ 是 ϕ 在$\vartheta \in \mathbb{R}^{n-1}$处的雅可比矩阵。已知（参见例如 [2]）， g 由下式给出

$$g(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \;= \tag{9}$$
$$\left|\sin(\vartheta_1)\,\sin^2(\vartheta_2)\cdots\sin^{n-2}(\vartheta_{n-2})\right|.$$

利用 ϕ的格拉姆行列式，可将(5)中的积分写成如下形式

$$\int_{\partial\mathbb{B}} J(x + a\,s)\,s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s) = \int_W J(x + a\,\phi(\vartheta))\,g(\vartheta)\,\phi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{10}$$

因此，若已知(10)右端的积分，则可知梯度(5) 所表示的平均目标函数 J_a 在 (4)中的梯度。下一节提出的控制方案旨在逼近(10)右端的积分。我们将通过沿一条近乎空间填充曲线的一维积分来逼近该多重积分。

3. 控制律与闭环系统

如上一节所述，我们希望获得 (10)右侧的积分。为此，我们现在为极值寻优控制构造合适的周期性抖动信号。令 $\mathbb{N}$表示正整数集合，并令 $\mathbb{R}_+$ 表示正实数集合。为了将映射 $\phi\colon\ \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{B}$ 在 (6) 中的角坐标参数化为时间的函数，对每个 $k \in \mathbb{N}$，定义映射 $\theta_k\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ 如下：

$$\theta_k(\tau) \;:=\; \left[\tau,\ 2^{1\cdot k-1}\,\tau,\ \ldots,\ 2^{(n-2)\cdot k-1}\,\tau\right]^\top. \tag{11}$$

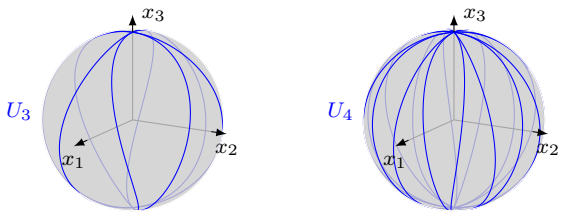

图3： 曲线 U_k 在 (12) 中对应 $k = 3$，4 和 $n = 3$。

接下来，对每个 $k \in \mathbb{N}$，定义一个光滑的 2π-周期映射U_k: $\mathbb{R} \to \partial\mathbb{B}$ 如下：

$$U_k(\tau) \;:=\; \phi(\theta_k(\tau)). \tag{12}$$

映射 U_k 在 $k = 3$，4 和 $n = 3$ 下如图3所示。可以观察到，U_k 的轨迹随着 $\partial\mathbb{B}$ 增大而趋于“填满”整个球面 $k \in \mathbb{N}$。这一特性对于证明 (10) 中的多重积分可以通过沿适当曲线的一维积分来近似至关重要，该曲线由 $\partial\mathbb{B}$值映射 U_k 给出，且 $k \in \mathbb{N}$ 足够大。所提出的极值寻优方法涉及两个周期性抖动信号：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，定义 2π-周期映射 u_k，v_k： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 如下

$$u_k(\tau) \;:=\; \dot{U}_k(\tau) \;=\; \tfrac{\mathrm{d}U_k}{\mathrm{d}\tau}(\tau), \tag{13a}$$
$$v_k(\tau) \;:=\; g(\theta_k(\tau))\, U_k(\tau), \tag{13b}$$

其中 g 由以下式子给出 (9)。

令 a、b和 h 为正实常数，其中常数 a 将在定义 $\bar{}$(4) 的平均目标函数 J_a中充当半径。对于每个参数 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 和每个参数 $k \in \mathbb{N}$，考虑时变输出反馈律

$$u \;=\; a\,\omega\, u_k(\omega t) + (\hat{y} - \eta)\, b\, v_k(\omega t) \tag{14}$$

对于单积分器(1)，其中 $\hat{}y$ 是受噪声污染的输出(2) ，而 η 是高通滤波器的状态，其状态空间方程为

$$\dot{\eta} \;=\; -h\,\eta + h\,\hat{y} \tag{15}$$

以及滤波器输出 $\hat{}y - \eta$。高通滤波器旨在去除测量信号 $\hat{}y$中可能存在的偏移。可以省略高通滤波器，但它可能有助于提高该方法的性能。所提出方案的示意图见图4。

注1. 在维数为 $n = 2$ 时，所提出的控制律与 *[28]* 中针对中度不稳定系统以及无位置测量的自主车辆目标跟踪所采用的极值寻优方法相同。然而， *[28]* 中的分析仅限于纯二次目标函数，并未涉及存在局部极值时的极值寻优。此外， *[28]* 中并未提出以平均目标函数为基础的新颖解释。所提出的方法可以看作是“经典极值寻优”的一种变体，

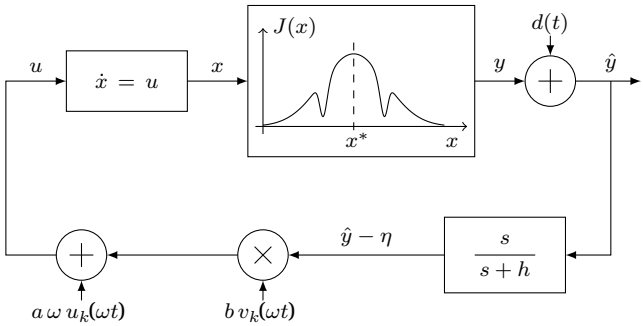

图 4： 所提出控制方案的示意图。该方法在不使用高通滤波器的情况下也能正常工作。

如 *[10]* 和 *[21]*，中所述，经典极值寻优通常旨在获取被测目标函数 J 的梯度。我们对抖动信号 u_k 和 v_k 的新颖设计，使我们能够获取平均目标函数 $\bar{}J_a$ 的梯度。

暂且固定任意控制参数 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in \mathbb{N}$。将所提出的控制律 (14)–(15)应用于输入输出系统(1)–(2)，得到闭环系统

$$\dot{x}(t) \;=\; a\,\omega\, u_k(\omega\, t) + \big(J(x(t)) + d(t) - \eta(t)\big)\, b\, v_k(\omega t), \tag{16a}$$
$$\dot{\eta}(t) \;=\; -h\,\eta(t) + h\,\big(J(x(t)) + d(t)\big) + h\,d(t) \tag{16b}$$

在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$中。此时，尚不清楚 (16) 的动态与平均目标函数(5) 的梯度(4)之间有何关联。下一节将探讨这一问题。作为解释的第一步，我们进行如下变量替换

$$\tilde{x}(t) \;=\; x(t) - a\,U_k(\omega t) \tag{17}$$

对于(16a)中的状态。于是，闭环系统(16)可等价地写为

$$\dot{\tilde{x}}(t) \;=\; J\big(\tilde{x}(t) + a\,U_k(\omega t)\big)\, b\, v_k(\omega t) \tag{18a}$$
$$-\,\eta(t)\, b\, v_k(\omega t) + d(t)\, b\, v_k(\omega t), \tag{18b}$$
$$\dot{\eta}(t) \;=\; -h\,\eta(t) + h\,J\big(\tilde{x}(t) + a\,U_k(\omega t)\big) + h\,d(t). \tag{18c}$$

注意，除标量因子 b外，(18a) 右端的表达式与(10) 在 $x = \tilde{x}(t)$ 和 $\vartheta = \theta_k(\omega t)$ 时右端的被积函数相同。若从积分变换的格拉姆行列式中省略因子 $b > 0$ 和权重项$g(\theta_k(\omega t))$，则(18a)右端可写为

$$J\big(\tilde{x}(t) + a\,\phi(\theta_k(\omega t))\big)\,\phi(\theta_k(\omega t)). \tag{19}$$

单积分器 (18a)–(18b) 正在对(19)关于时间进行积分。(19) 随时间变化的函数 t 示意图见图 5左侧的图。若控制参数 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 足够大，则状态$\tilde{x}(t)$ 相对于抖动信号的快速变化几乎保持静止。因此，在一个抖动信号周期内对(19)

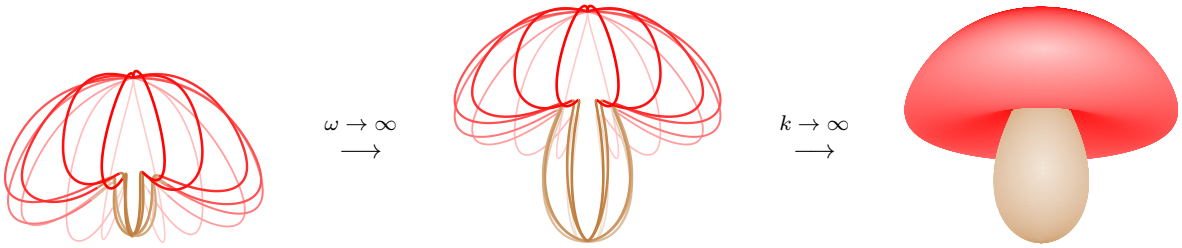

图 5： 针对目标函数 J在(3) 中且维数为 $n = 3$的情况，考虑变换后的闭环系统(18)，其中 $a = b = 1$，$\omega = \frac{1}{20}$，$k = 4$，初始条件 $\tilde{x}(0) = [0, 0, 2.62]^\top$，$\eta(0) = 0$。最左侧的图展示了(19) 关于 $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$的函数图像。中间的图展示了(20) 在 $t = 0$ 下关于 $\tau \in [0, 2\pi]$的函数图像。最右侧的图展示了(2Ī) 在 $t = 0$ 下关于 $s \in \partial\mathbb{B}$的函数图像。不同颜色仅用于改善三维物体的可视化效果。

的积分近似等于对

$$J\big(\tilde{x}(t) + a\,\phi(\theta_k(\tau))\big)\,\phi(\theta_k(\tau)) \tag{20}$$

相对于 $\tau \in [\omega t, \omega t + 2\pi]$。中间图给出了(20) 关于 τ 的示意图，见图 5。如果控制参数 $k \in \mathbb{N}$ 也足够大，那么曲线 $\phi \circ \theta_k = U_k$在一个周期内几乎“填满”整个球面$\partial\mathbb{B}$，因此 2π上的(20)且$\tau \in [\omega t, \omega t + 2\pi]$ 的集合在

$$J\big(\tilde{x}(t) + a\,s\big)\,s \tag{21}$$

与 $s \in \partial\mathbb{B}$，它是(10)左侧的被积函数。(21)关于 s 的示意图见图 5最右侧的曲线图。抖动信号 v_k 定义中的格拉姆行列式 $g\circ\theta_k$是应用(10) 进行理论分析所必需的。上述（尽管较为模糊的）推理链表明，(18a) 右侧关于时间 t 的一维积分，与(10)左侧所需的多重积分有关。下一节将更详细地描述当控制参数 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in\mathbb{N}$ 足够大时，式(18)的行为，并给出本文的主要稳定性结果。

4. 主要结果

对变换后的闭环系统(18) 在极限 $\omega \to \infty$ 下进行理论分析，基于标准的平均化过程。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，当极限 $\omega \to \infty$ 时，(18a) 右侧的时间平均可以˘由定义在 F_k 上的向量场 $\mathbb{R}^n$ 描述，其定义如下：

$$\breve{F}_k(\tilde{x}) := \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} J\big(\tilde{x} + a\,\phi(\theta_k(\tau))\big)\,g(\theta_k(\tau))\,\phi(\theta_k(\tau))\,\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

相应地，对于每一个 $k \in \mathbb{N}$，(18b) 中第一项在极限 $\omega \to \infty$ 下的时间平均可以˘由映射 E_k：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 描述，其定义为

$$\breve{E}_k(\eta) := -\frac{b}{2\pi}\,\eta\int_0^{2\pi} g(\theta_k(\tau))\,\phi(\theta_k(\tau))\,\mathrm{d}\tau. \tag{23}$$

由引理 1 （附录）可知，对于每一个足够大的 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 以及每一个 $k \in \mathbb{N}$，子系统 (18a)–(18b)的解近似于

$$\dot{\breve{x}}(t) = \breve{F}_k(\breve{x}(t)) + \breve{E}_k(\eta(t)) + d(t)\,b\,v_k(\omega t). \tag{24}$$

如第3节和图3所示，曲线$U_k = \phi \circ \theta_k$ 在极限情况下趋于“填满”球面 $\partial\mathbb{B}$ $k \to \infty$。更准确地说，可以证明（见附录中的引理 2）：

$$\lim_{k\to\infty} \breve{F}_k(\breve{x}) = \frac{b}{2\pi^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}} J(\breve{x} + a\,s)\,s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s), \tag{25}$$

$$\lim_{k\to\infty} \breve{E}_k(\eta) = -\frac{b}{2\pi^{n-1}}\,\eta\int_{\partial\mathbb{B}} s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s) = 0 \tag{26}$$

对于每个 $\breve{x} \in \mathbb{R}^n$ 以及每个 $\eta \in \mathbb{R}$。由于(26)，(24)的动力学在极限情况下不再依赖于高通滤波器状态 η $k \to \infty$。根据散度定理中的关系(5) ，(25)中的极限给出了所需的梯度

$$\lim_{k\to\infty} \breve{F}_k(\breve{x}) = a\,b\,c\,\nabla\bar{J}_a(\breve{x}) \tag{27}$$

¯平均目标函数 J_a 在(4)中，其中

$$c := \mathrm{vol}(\mathbb{B})/(2\pi^{n-1}). \tag{28}$$

上述陈述表明，对于足够大的$\omega \in \mathbb{R}_+$ 和足够大的 $k \in \mathbb{N}$，子系统(18a)–(18b) 的解逼近

$$\dot{\bar{x}}(t) = a\,b\,c\,\nabla\bar{J}_a(\bar{x}(t)) + b\,d(t)\,v_k(\omega t). \tag{29}$$

事实上，我们可以证明如下逼近结果。

¯ ˜命题 *1.* 设 K 和 $\tilde{K}$ 是 ˜$\mathbb{R}^n$ 的紧子集，且 K 包含于 $\tilde{K}$的内部。设$\delta, \rho > 0$满足：对于每个 $\tilde{x} \in \tilde{K}$和每个 $s \in \partial\mathbb{B}$，$\big|J(\tilde{x}) + a\,s\big| + \delta \le \rho$。那么，对于任意大的 $T > 0$和任意小的 $\varepsilon > 0$，都存在足够大的 $\omega_0 \in \mathbb{R}_+$ 和 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $\omega \ge \omega_0$、每个 $k \ge k_0$、满足 $\|d\| \le \delta$的每个 $d \in L_\infty$、每个 $t_0 \in \mathbb{R}$、¯每个$\tilde{x}_0 \in K$，以及满足 $|\eta_0| \le \rho$的每个 $\eta_0 \in \mathbb{R}$，以下蕴含成立：若方程 *(29)* 的极大解 $\bar{x}$ 在初始条件 $\bar{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ 下定义于 $[t_0, t_0+T]^-$，且对于每个 $t \in [t_0, t_0+T]$均满足 $\bar{x}(t) \in K$，则还

极大解 $(\tilde{x},\ \eta)$ 的 (18)，其初始条件为$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0,\ \ \eta(t_0) = \eta_0$ 定义于 $[t_0, t_0+T]$ 并满足

$$|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| \ \leq\ \varepsilon \tag{30}$$

且对每个 $t \in [t_0, t_0+T],\ \ |\eta(t)| \leq \rho$。

命题 1 的证明可见附录。

接下来，我们将注意力转向(29)的稳定性性质。为此，我们考虑稍微一般化的系统

$$\dot{\bar{x}}(t) \ =\ a\,b\,c\,\nabla \bar{J}_a(\bar{x}(t)) + b\,\bar{d}(t) \tag{31}$$

$\bar{d}$属于 $\mathbb{R}^n$，其中 d 是空间 L_∞^n 中的一个元素，该空间由定义在 $\mathbb{R}$上的勒贝格可测且本质有界的 $\mathbb{R}^n$值函数构成，并配备通常的本质上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$。注意，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，抖动信号 $v_k \in L_\infty^n$ 的范数为 $\|v_k\| \leq 1$。因此，对于每个$\delta > 0$、每个 $k \in \mathbb{N}$，以及每个范数为 $\|d\| \leq \delta$的扰动 $d \in L_\infty$，扰动 $d := d\,v_k \in L_\infty^n$ $\bar{d}$的范数也为 $\|d\| \leq \delta$。(31)中的扰动 d 随后被视为输入到状态稳定性（ISS）意义下的“输入扰动”。梯度系统 (31) 关于扰动$d \in L_\infty^n$ 具有 ISS 型性质，至少要求梯度不消失。因此，我们作出如下假设。

假设 1. 存在实数 y_* 和 y_0，且$y_* > y_0$，使得 J_a 的 y_0-上水平集是紧的$\bar{}$，并且 J_a 的梯度在每一个满足 $y_* > J_a(\bar{x}) \geq y_0$的$\bar{}$点 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 处均不为零。

$\bar{}$ y_0-上水平集（即 J_a 的）表示一组容许初始状态$\bar{}$，而 y_*-上水平集（即 J_a 的）表示$\bar{}$一组期望状态，在这些状态上 J_a 的取值较大。$\bar{}$例如，y_* 可以是 J_a的最大值，$\bar{}$前提是 J_a 达到全局最大值。假设 1$\bar{}$要求平均目标函数 J_a 没有不期望的临界点。但这并不必然排除原始目标函数 J的临界点，甚至局部极值。

注释 2. 一般来说，无法保证$\bar{}$平均目标函数 J_a 的局部极值少于未知的原始目标函数 J。检验 假设 *1*需要了解 J，而这通常在极值寻优的背景下并未提供。选择合适的半径 $a > 0$ 尤其需要对 J中不期望局部极值的深度和宽度有一定了解。

在 假设 1下，梯度系统 (31) 具有以下 ISS 型性质。

命题 *2*。设假设 *1* 对其中的 y_* 与 y_0 成立。则存在 J_a 的 y_0-上水平集的一个开$\bar{}$邻域 U、一个实数 $y_0' < y_0$、一个类 $\mathcal{KL}$ 的函数 β，其对每个 $s \geq 0$ 满足 $\beta(s, 0) = s$、一个类 $\mathcal{K}$的函数 γ，以及一个正实数 δ，使得 J_a 在 U 上的$\bar{}$限制的 y_0'-上水平集是紧的，并且对每一个 $t_0 \in \mathbb{R}$、每一个满足 $J_a(\bar{x}_0) \geq y_0'$ 的 $\bar{x}_0 \in U$，以及每一个 $\bar{}$ $d \in L_\infty^n$ 且 $\|d\| \leq \delta$，极大解 $\bar{x}$ 关于 (31)、以初始条件 $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ 满足

$$y_* - \bar{J}_a(\bar{x}(t)) \ \leq \ \max\left\{\beta\big(\max\{y_* - \bar{J}_a(\bar{x}_0), 0\}, t - t_0\big),\ \gamma(\|\bar{d}\|)\right\} \tag{32}$$

对于每个 $t \geq t_0$。

命题 命题 2 的证明与 [18] 中的定理 1 的证明非常相似，因此此处省略。

此时，根据 命题 1，我们知道(18a)–(18b) 的解在 (29)的解足够大的 $\omega \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in \mathbb{N}$时可得到近似。我们还根据 命题 2 知道 (29) 在满足 假设 1 时表现出 ISS 型行为。因此，若(18a)–(18b)在$\omega \in \mathbb{R}_+$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 足够大时表现出实用 ISS 型行为，就不足为奇了。下面的定理将对这一实用 ISS 型性质作出精确表述。

定理 *1.* 假设假设 *1* 满足其中的y_* 和 y_0。令 K_0 为J_a 的 y_0-上水平集。令 ρ_0 为一个正实数。则存在一个 β 类函数 $\mathcal{KL}$，使得对于每个$s \geq 0,\ \ \beta(s, 0) = s$；还存在一个 γ 类函数 $\mathcal{K}$，以及正实常数 δ, ρ，具有以下性质：对于任意小的 $\varepsilon > 0$，都存在足够大的$\omega_0 > 0$ 和 $k_0 > 0$，使得对于每个 $\omega \geq \omega_0$、每个$k \geq k_0$、每个 $t_0 \in \mathbb{R}$、每个 $\tilde{x}_0 \in K_0$、每个满足$|\eta_0| \leq \rho_0$的 $\eta_0 \in \mathbb{R}$，以及每个满足 $\|d\| \leq \delta$的 $d \in L_\infty$，以初始条件 $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \eta(t_0) = \eta_0$ 为初值的方程 *(18)* 的极大解 $(\tilde{x}, \eta)$ 满足

$$y_* - \bar{J}_a(\tilde{x}(t)) \ \leq \ \max\left\{\beta\big(\max\{y_* - \bar{J}_a(\tilde{x}_0), 0\}, t - t_0\big), \gamma(\|d\|)\right\} + \varepsilon \tag{33}$$

并且 $|\eta(t)| \leq \rho$ 对每个 $t \geq t_0$成立。

定理 1 可以很容易地由命题 1和2推导得出。比较函数 β 和 γ 在定理 1中与命题 2中的相同。只需将最大扰动幅值 $\delta > 0$ 充分减小。因此，我们省略定理 1的证明。

注记*3.* 定理 *1* 给出了状态 $\tilde{x}$ 收敛到 J_a的某个上水平集的充分条件。然而请注意，当 $a > 0$ 较大时，原始目标函数 J 的形状可能与平均目标函数 J_a 的形状有很大差异。具体而言，当 $a > 0$ 较大时，J 的全局最大值点的位置可能与 J_a 的全局最大值点的位置有很大差异。所提出的极值寻优方法使 J_a 最大化，但不一定使 J最大化。为保证 J最大化，还需要附加假设：定理 *1* 中 J_a 的 y_*-上水平集“足够小”，且其中包含一个全局最大值点 J。理想情况下，定理 *1* 中 J_a 的 y_*-上水平集只包含 J的一个全局最大值点。然而，一般而言，情况并非如此；示例见第*5.1*节。

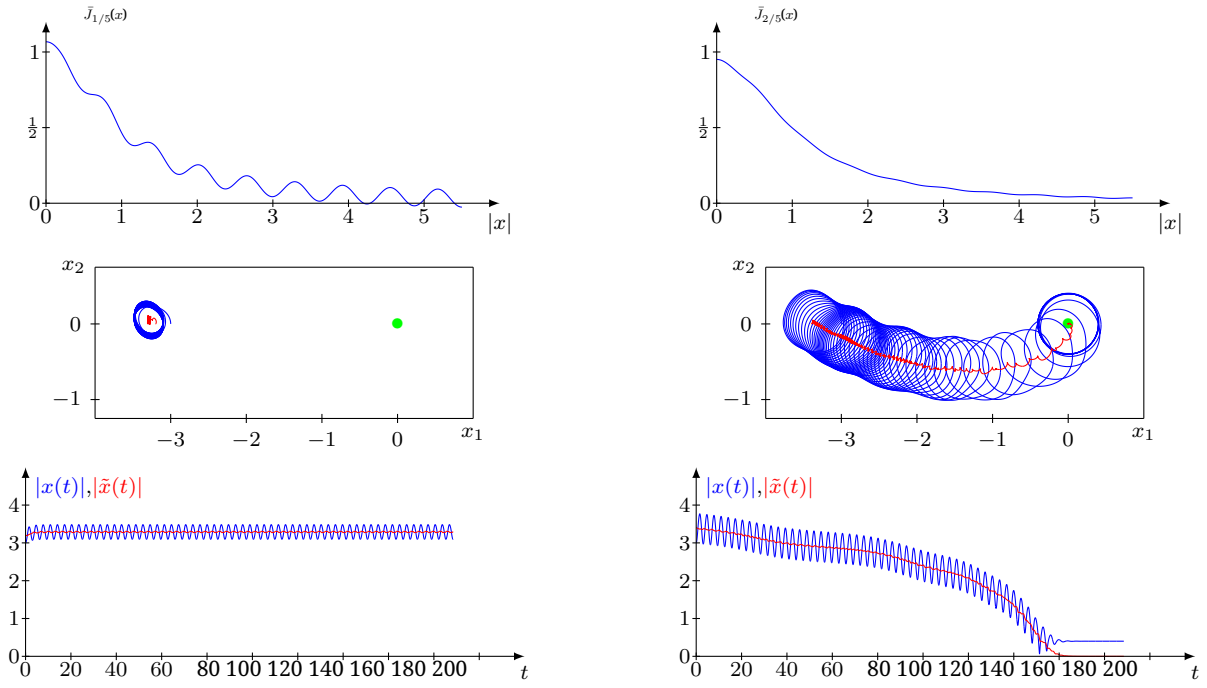

图6： 目标函数的仿真结果 J 在 (34) 以及维数 $n = 2$。上排给出了平均目标函数 $\bar{J}_a$ 在 (4) 分别取 $a = 1/5$ （左）和 $a = 2/5$ （右）时的曲线。其他曲线展示了闭环系统 (16) 的状态 $\tilde{x}(t)$以及变换后的闭环系统 (18)的状态。

5. 数值示例

我们通过数值仿真测试所提出的方法。

5.1. 示例1

在第一个示例中，状态空间的维数 n 为 $n = 2$ ，目标函数 J 定义为

$$J(x) = \frac{1}{1+|x|^2} + \frac{1}{10}\sin(10\,|x|). \tag{34}$$

函数 J 可理解为 $\mathbb{R}^2$ 中一种二次衰减信号的强度，其信号源位于原点，并叠加了正弦空间扰动。在维数$n = 2$ 下，对于中度不稳定系统以及在没有位置测量的情况下进行自主车辆目标跟踪时，所提出的极值寻优方法与 [28] 中的方法相同（参见注1）。可以将二维单积分器模型视为源搜寻车辆的一种过度简化模型。 J_a 的平均目标函数如图6上排所示，对应 $a = 1/5$ 和 $a = 2/5$。对于 $a = 1/5$，正弦空间扰动清晰可见；但对于 $a = 2/5$，这些扰动则完全被“抹去”。这是因为对于 $a = 2/5$，局部平均圆盘的直径 $2a = 4/5$ 大于扰动的空间周期 $2\pi/10$。图6中排和下排展示了仿真结果，对应 $\omega = 2$、$a \in \{1/5, 2/5\}$、 $b = 1$、 $h = 1$、扰动 $d = 0$以及初始条件 $x(0) = [-3, 0]^\top$、 $\eta(0) = 0$。对于 $a = 1/5$， 离 $x(0) = [-3, 0]^\top$ 最近的 $\bar{J}_a$ 局部极大值点位于$[-3.29, 0]^\top$。可以观察到，对于 $a = 1/5$ ，在左侧收敛到了 J_a 的这一局部（但非全局）极大值点图6图6。在右侧图6中，可以观察到收敛到了 J_a 中位于原点的全局极大值点，对应 $a = 2/5$。然而请注意，原点并非原始目标函数 J的全局极大值点。

5.2. 例2

在第二个示例中，状态空间的维数 n 为 $n = 3$ ，目标函数 J 由式（3）给出。从图1可以看出， J 在原点处取得唯一的全局最大值。另一方面，原点周围还存在局部极值球形集合：半径为$r_{\min} \approx 2.03$ 的局部极小值球形集合，以及半径为 $r_{\max} \approx 2.55$的局部极大值球形集合。在半径为$r_{\min}$的闭球之外， J 的梯度流只能收敛到半径为 $r_{\max}$的球面，这意味着无法到达全局优化器。然而，通过改用半径 $a > 0$足够大的式（4）中的平均目标函数 J_a ，可以消除 J 的不期望局部极值。图7上排展示了 $a = 1/2$ 和 $a = 1$对应的 J_a 。对于 $a = 1/2$，可以看出平均半径还不够大，无法“抹去” J的不期望局部极值。不过，如果将半径增大到 $a = 1$，那么平均目标函数除了原点处的全局极大值点外，不再有其他临界点。

假设单积分器的初始状态(1) 为 $x(0) = [3, 3, 3]^\top \in \mathbb{R}^3$。基于上述观察和命题 1，可以合理预期，我们的极值寻优方法将无法诱导

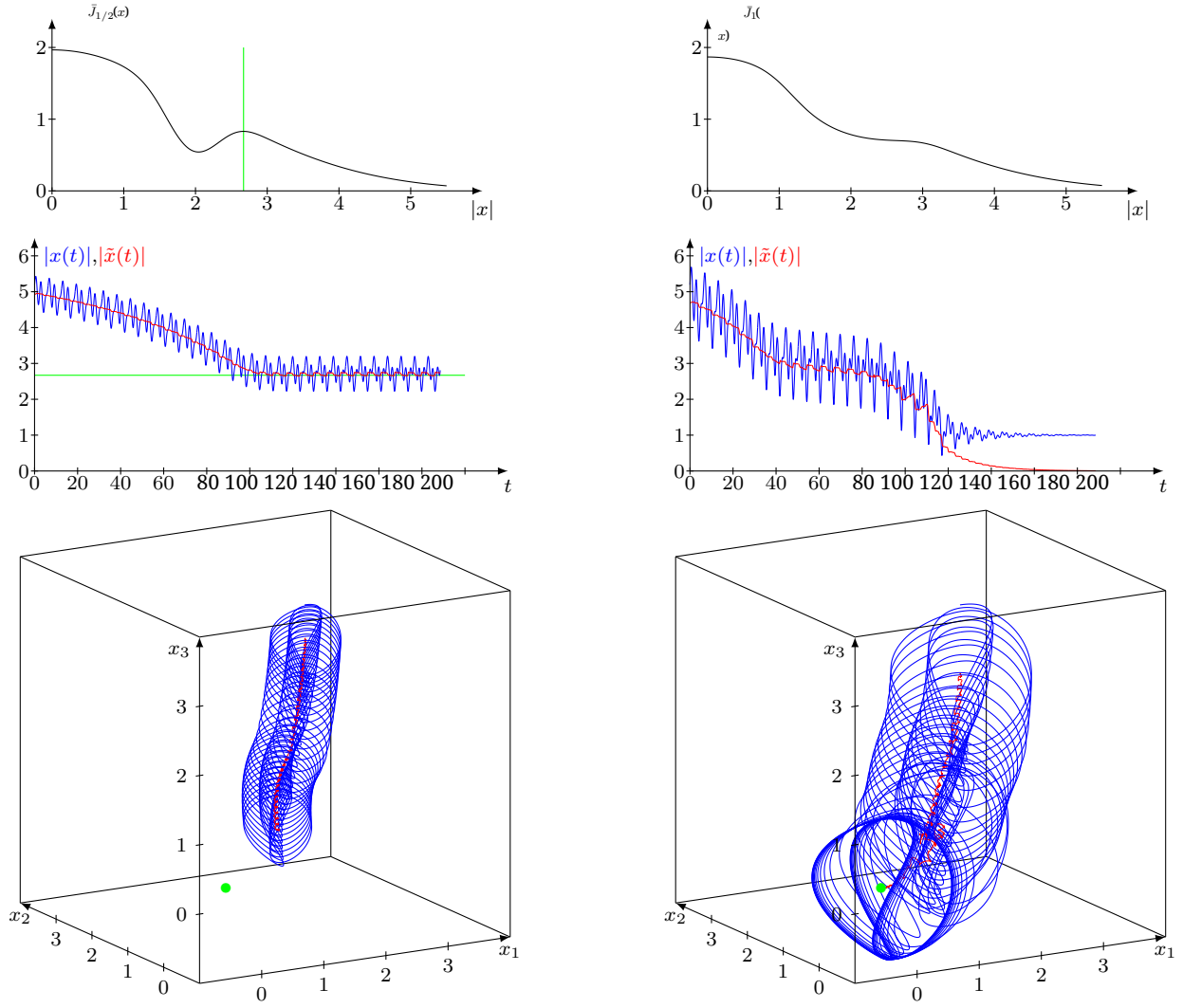

图7： 目标函数的仿真结果 J，其中 (3) 的维数为 $n = 3$。上排绘制了 $\bar{J}_a$ 在 (4) 中的平均目标函数 $a = 1/2$ （左）和 $a = 1$ （右）。其他图显示了闭环系统 （t）的状态 (16) 以及变换后的闭环系统 （t）的状态 (18)。

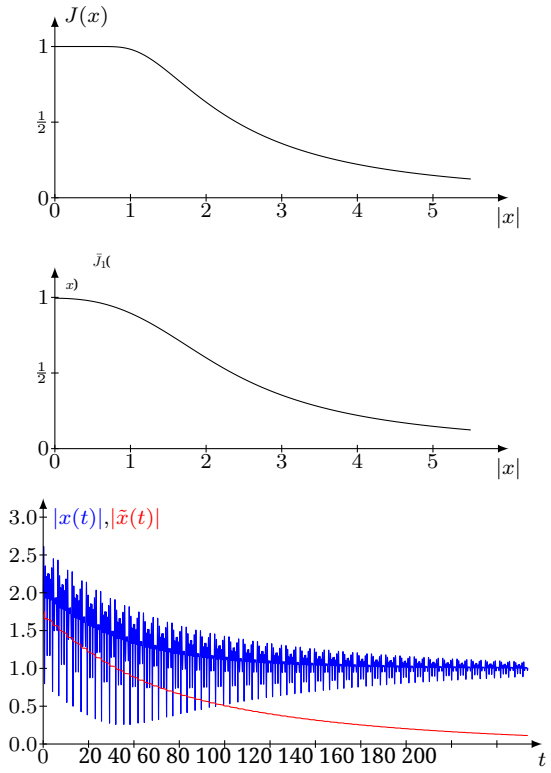

图 8: 目标函数 J 在 (35) 且维数为 $n = 4$ 时的仿真结果。上方和中间的图分别显示原始目标函数 J 及平均目标函数 $\bar{J}_a$ 在 $a =$ 1 x t 时的情况。下方的图显示闭环系统 (16) 的状态 ( ) 以及变换后的闭环系统 $\tilde{x}(t)$ 的状态 (18)。

若 $a = 1/2$，则不会收敛到原点，但若 $a = 1$，则会成功。图 7 中间行和下方行的图验证了这一预期。这些图显示了在参数 $k = 2, \omega = 1, a \in \{1/2, 1\}, b = 1$，$h = 1$、扰动 $d = 0$ 以及初始条件 $x(0) = [3, 3, 3]^\top$，$\eta(0) = 0$ 下，闭环系统 (16) 和变换后的闭环系统 (18) 的状态。左列的图对应于 $a = 1/2$，右列的图对应于 $a = 1$。对于 $a = 1/2$，可以观察到状态收敛到半径为 ≈ 2.67 的局部极大值点球形集合。相反，对于 $a = 1$，可以观察到状态收敛到原点处的全局极大值点。

5.3. 例 3

在第三个例子中，状态空间的维数为 n，目标函数 J 定义为

$$J(x) = 1 - \exp\left(-\frac{4}{|x|^2}\right) \tag{35}$$

对于每个 $x \neq 0$ 且由 $J(0) = 1$。如图 8上方图所示，该目标函数在原点处达到唯一的全局最大值。函数 J在原点附近的梯度非常弱，这可能导致沿着 J的梯度流上升时收敛速度非常慢。此处，局部平均可以帮助重新塑造目标函数，使其不再那么“平坦”。图 8 中间的图展示了 $a = 1$时的平均目标函数 $\bar{J}_a$。可以观察到，与 J相比，J_1 在原点附近不那么“平坦”。图 8 下方的图展示了参数$k = 2$、$\omega = 1$、$a = 1$、$b = 1$、$h = 1$、扰动 $d = 0$以及初始条件 $x(0) = [1, 1, 1, 1]^\top$、$\eta(0) = 0$下的仿真结果。尽管变换后的系统状态 $\tilde{x}$ 向原点收敛的速度较慢，但仍显著快于 J的梯度流的收敛速度。然而，由于 $a = 1$，实际系统状态 x 仅收敛到以原点为中心、半径为 1 的球面。因此，所提出的方法只能使时间平均系统状态 $\tilde{x}$ 较快地收敛到原点，而不能使实际系统状态 x较快地收敛。实际系统状态趋向于围绕原点做球面运动。

6. 结论与展望

我们为经典极值寻优控制方案中的抖动信号提出了一种新的设计策略。对周期探索信号作出这一特定选择，可得到平均目标函数梯度的近似值。原始目标函数的局部平均是在用户指定半径 $a > 0$ 的球上计算的。由于原始目标函数在解析形式上未知，通常难以恰当地选择半径 $a > 0$。较大的半径 $a > 0$ 有助于“洗去”局部极值，并加快向“平坦”的全局极值收敛。然而，当 $a > 0$ 较大时，平均目标函数可能与原始目标函数显著不同。基于这些观察，研究所提出方案在时变半径 a 下的扩展可能很有价值：$[0, \infty) \to (0, \infty)$。例如，可以研究单调递减的半径，或对半径进行自适应选择。无论如何，要恰当选择或设计这样的时变半径，都需要对未知目标函数的形状有一些先验知识。

参考文献

[1] Mahmoud Abdelgalil 和 Haithem Taha。《递归平均及其在仿生三维源寻获中的应用》。*IEEE* 控制系统快报，6:2816–2821，2022年。[2] Herbert Amann 和 Joachim Escher。《分析学 III》。Birkh¨auser，巴塞尔，2009年。[3] Diganta Bhattacharjee 和 Kamesh Subbarao。具有衰减稳态振荡的极值寻优控制。*Automatica*，125:109432，2021年。[4] Francesco Bullo 和 Andrew D. Lewis。《机械系统的几何控制》，《应用数学丛书》第49卷。Springer，纽约，2005年。

[5] Hans-Bernd D¨urr、Milo˘s S. Stankovi´c 和 Karl H. Johansson。车辆极值寻优的李括号近似。载于第*18*届 *IFAC* 世界大会论文集，第11393–11398页，2011年。

[6]Abraham D. Flaxman、Adam T. Kalai 和 H. Brendan McMahan。在多臂老虎机设定下的在线凸优化：无梯度的梯度下降。载于第十六届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集，第 385–394 页，2005年。

[7]Gonzalo García 和 Gaspar Mora。使用 δ-一致曲线逼近连续函数的多重积分。费拉拉大学年刊 `费拉拉大学，67(1)：59–71，2021年。

[8] Anatoliy M. Gupal。近似可微函数的最小化方法。控制论，13：115–117，1977年。

[9]Sei Z. Khong、Dragan Nešić、Chris Manzie 和 Ying Tan。通过 DIRECT 优化算法进行多维全局极值搜索。自动化，49(7)：1970–1978，2013年。

[10] Miroslav Krsti´c 和 Hsin-Hsiung Wang。一般非线性动态系统极值寻优反馈的稳定性。*Automatica*，36(4):595–601，2000年。[11] Shu-Jun Liu 和 Miroslav Krsti´c。随机平均与随机极值寻优。《通信与控制工程》。Springer，伦敦，2012年。[12] Alexey S. Matveev、Michael C. Hoy 和 Andrey V. Savkin。非完整移动机器人三维环境极值寻优导航。*Automatica*，50(7):1802–1815，2014年。[13] David Q. Mayne 和 Elijah Polak。通过自适应平滑进行非微分优化。《优化理论与应用杂志》，43(4):601–613，1984年。[14]Nicola Mimmo、Lorenzo Marconi 和 Giuseppe Notarstefano。通过极值寻优实现一致非凸优化。*IEEE* 自动控制汇刊，69(12):8263–8276，2024年。[15] Tiago R. Oliveira 和 Miroslav Krsti´c。时滞与偏微分方程中的极值寻优。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2022年。[16] Alexander Scheinker。极值寻优百年：综述。*Automatica*，161:111481，2024年。[17] Alexander Scheinker 和 Miroslav Krsti´c。通过极值寻优实现无模型稳定化。Springer 控制、自动化与机器人丛书。Springer，查姆，2017年。

[18] Eduardo D. Sontag。平滑稳定化蕴含互素因式分解。*IEEE* 自动控制汇刊，34(4):435–443，1989年。

[19]Raik Suttner 和 Miroslav Krsti´c。《尽管存在局部极值，仍进行非局部非完整源搜索》。*IEEE* 自动控制汇刊，69(4):2575–2582，2024年。

[20] Raik Suttner 和 Miroslav Krsti´c。《利用散度定理和时滞克服力矩驱动源搜索中的局部极值》。*Automatica*，167:111799，2024年。

[21] Ying Tan、Dragan Ne˘si´c 和 Iven Mareels。《极值寻优控制的非局部稳定性性质》。*Automatica*，42(6):889–903，2006年。

[22] Ying Tan、Dragan Ne˘si´c 和 Iven M. Y. Mareels。《极值寻优系统中抖动信号的选择：案例研究》。*Automatica*，44(5):1446–1450，2008年。

[23] Ying Tan、DraganNe˘si´c、IvenM. Y. Mareels 和 Alessandro Astolfi。关于存在局部极值时的全局极值寻优。*Automatica*，45(1):245–251，2009年。

[24] Libin Wang、Songlin Chen 和 Kemao Ma。关于无稳态振荡极值寻优控制的稳定性与应用。*Automatica*，68:18–26，2016年。[25] Stefan Wildhagen、Simon Michalowsky、Jan Feiling 和 Christian Ebenbauer。极值寻优中的学习动态特征：梯度平均与非凸性的作用。载于第*57*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第21–26页，2018年。[26] Maojiao Ye、Guanghui Wen、Shengyuan Xu 和 Frank L. Lewis。具有可能非凸目标函数的全局社会成本最小化：基于极值搜索的方法。*IEEE* 系统、人与控制论：系统，51(12):7413–7422，2021年。[27]Chunlei Zhang 和 Ra´ul Ord´o˜nez。极值寻优控制及其应用。工业控制进展。Springer，伦敦，2012年。[28] Chunlei Zhang、Antranik Siranosian 和 Miroslav Krsti´c。面向中度不稳定系统的极值寻优，以及无需位置测量的自主车辆目标跟踪。*Automatica*，43(10):1832–1839，2007年。

A. 命题 命题 1

在本附录中，我们采用与¯ ˜ 命题 1相同的记号：设 K 和 K 是

$\mathbb{R}^n$ 使得 K 包含于 K的内部。设δ， $\rho > 0$ 使得

$$\left|J(\tilde{x}) + a\, s\right| + \delta \;\leq\; \rho \tag{36}$$

对于每一个 $\tilde{x} \in K$ 以及每一个 $s \in \partial\mathbb{B}$。我们的目标是证明所断言的逼近性质(30)。为此，我们将首先在A.1节和A.2中推导两个引理，然后证明命题 1 ，见A.3节

A.1. 大 ω情形下的逼近

第一个引理表明，对于每一个充分大的$\omega \in \mathbb{R}_+$ 以及每一个 $k \in \mathbb{N}$，子系统(18a)–(18b)的解逼近(24)的解。

引理 *1.* 存在充分大的 ω_1、 c_1、 $c_2 \in \mathbb{R}_+$，使得对于每一个 $\omega \geq \omega_1$、每一个 $k \in \mathbb{N}$、每一个 $d \in L_\infty$满足 $\|d\| \leq \delta$、每一个解$(\tilde{x}, \eta)$: $I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 属于*(18)*，以及所有 t_0、$t_2 \in I$ 满足 $t_0 < t_2$，如下蕴含关系成立：若 $\tilde{x}(t) \in K$ ，且若 $\eta(t) \in [-\rho, \rho]$ 对于每一个 $t \in [t_0, t_2]$，则

$$\left|\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Big(\breve{F}_k(\tilde{x}(t)) + \breve{E}_k(\eta(t)) + d(t)\, b\, v_k(\omega t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \frac{1}{\omega}\left(c_1 + c_2\,|t_1 - t_0|\right)$$

对于每个 $t_1 \in [t_0, t_2]$。

证明。 我们沿用 [4]中定理9.15的证明。对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tau \in \mathbb{R}$和每个 $\eta \in \mathbb{R}$，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义光滑向量场 $\tilde{X}[k, \eta, \tau]$、 $\breve{X}[k, \eta]$、 $Y[k, \tau, \eta]$和$Z[k, \tau]$ 如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}[k, \tau, \eta](\tilde{x}) &:= J\big(\tilde{x} + a\, U_k(\tau)\big)\, b\, v_k(\tau) - \eta\, b\, v_k(\tau),\\
\breve{X}[k, \eta](\tilde{x}) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{X}[k, \tau, \eta](\tilde{x})\,\mathrm{d}\tau,\\
Y[k, \tau, \eta](\tilde{x}) &:= \int_0^{\tau} \big(\tilde{X}[k, \tau, \eta](\tilde{x}) - \breve{X}[k, \eta](\tilde{x})\big)\,\mathrm{d}\sigma,\\
\tilde{Z}[k, \tau](\tilde{x}) &:= v_k(\tau).
\end{aligned}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tau \in \mathbb{R}$、每个 $\eta \in \mathbb{R}$和每个 $d \in \mathbb{R}$，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义光滑实值函数 $E[k, \tau, \eta, d]$如下:

$$E[k, \tau, \eta, d](\tilde{x}) \;:=\; -h\,\eta + h\, J\big(\tilde{x} + a\, U_k(\tau)\big) + h\, d.$$

那么，对于 $\omega \in \mathbb{R}_+$、 $k \in \mathbb{N}$和 $d \in L_\infty$，变换后的闭环系统(18) 可写为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{X}[k, \omega t, \eta(t)](\tilde{x}(t)) + d(t)\, b\, Z[k, \omega t](\tilde{x}(t)), \tag{37a}$$
$$\dot{\eta}(t) = E[k, \omega t, \eta(t), d(t)](\tilde{x}(t)) \tag{37b}$$

且系统(24)可写为

$$\dot{\breve{x}}(t) \;=\; \breve{X}[k, \eta(t)](\breve{x}(t)) + d(t)\, b\, Z[k, \omega t](\breve{x}(t)). \tag{38}$$

若能证明存在充分大的 $\omega_1, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ ，使得对于每个 $\omega \geq \omega_1$，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，对于每个 $d \in L_\infty$ 满足 $\|d\| \leq \delta$的每个解 $(\tilde{x}, \eta)$: $I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (37)，以及所有 $t_0, t_2 \in I$满足 $t_0 < t_2$ 的情形，下述蕴含关系成立：若 $\tilde{x}(t) \in K$且若 $\eta(t) \in [-\rho, \rho]$ 对每个 $t \in [t_0, t_2]$均成立，则

$$\left|\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Big(\breve{X}[k, \eta(t)](\tilde{x}(t)) + d(t)\, b\, Z[k, \omega t](\tilde{x}(t))\Big)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \frac{1}{\omega}\left(c_1 + c_2\,|t_1 - t_0|\right) \tag{39}$$

对于每个 $t_1 \in [t_0, t_2]$。

对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和每个 $\eta \in \mathbb{R}$，令 $(t, \tilde{x}) \mapsto \Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\tilde{x})$ 表示向量场$Y[k, \tau, \eta]$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的流 （例如参见 [4]） 。令 $\breve{K}$为 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集，使得 K 包含于 $\breve{K}$ 的内部。利用 $\|U_k\|, \|v_k\| \leq 1$ 以及 $\tau \mapsto Y[k, \tau, \eta](\tilde{x})$ 是 2π-周期的这一事实，可以证明存在足够大的 $\omega_1, c_\Phi > 0$ ，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tau \in \mathbb{R}$、每个$\eta \in [-\rho, \rho]$和每个 $t \in [-1/\omega_1, 1/\omega_1]$，以下三个条件均成立:

- $\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})$ exists for every $\breve{x} \in \breve{K}$,
- $\left|\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x}) - \breve{x}\right| \leq c_\Phi\,|t|$ for every $\breve{x} \in \breve{K}$,
- $\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\tilde{x}) \in \breve{K}$ for every $\tilde{x} \in \tilde{K}$.

现在，对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tau \in \mathbb{R}$、每个 $\eta \in [-\rho, \rho]$、每个 $t \in [-1/\omega_1, 1/\omega_1]$、每个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 X 、每个定义在 $\mathbb{R}^n$上的实值函数 f ，以及每个 $\breve{x} \in K$，我们可以定义

$$\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* X(\breve{x}) \;:=\; \mathrm{D}\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^{-1}\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})\big)\, X\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})\big), \tag{40}$$

$$\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* f(\breve{x}) \;:=\; f\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})\big), \tag{41}$$

其中 $\mathrm{D}\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^{-1}\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^{-1}$ 在 $\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}(\breve{x})$处的雅可比矩阵。上述定义的向量场 $\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* X$ （相应地，函数 $\big(\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* f$) 称为 X （相应地， f）通过 $\Phi_t^{Y[k,\tau,\eta]}$得到的拉回（参见例如 [4]） 。对于 $\mathbb{R}^n$的某个开子集上的任意光滑向量场 X_1 和 X_2 ，令 $[X_1, X_2]$ 表示X_1 与 X_2 的李括号 （参见例如 [4]） 。定义

$$R\colon \mathbb{N} \times [0, 1/\omega_1] \times \mathbb{R} \times \breve{K} \times [-\rho, \rho] \times [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$$

by

$$\begin{aligned}
&R(k, t, \tau, \breve{x}, \eta, d) \;:=\\
&\int_0^1 \big(\Phi_{\sigma t}^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* \big[Y[k, \tau, \eta], \tilde{X}[k, \tau, \eta]\big](\breve{x})\,\mathrm{d}\sigma\\
&- \int_0^1 \int_0^\sigma \big(\Phi_{\nu t}^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* \big[Y[k, \tau, \eta], \tilde{X}[k, \tau, \eta]\big](\breve{x})\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\sigma\\
&+ \int_0^1 \int_0^\sigma \big(\Phi_{\nu t}^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* \big[Y[k, \tau, \eta], \breve{X}[k, \eta]\big](\breve{x})\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\sigma\\
&+ d\, b \int_0^1 \big(\Phi_{\sigma t}^{Y[k,\tau,\eta]}\big)^* \big[Y[k, \tau, \eta], Z[k, \tau]\big](\breve{x})\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$+ b \int_0^1 \left(\Phi_{\sigma t}^{Y[k,\tau,\eta]}\right)^* E[k,\tau,\eta,d](\check{x})\,\mathrm{d}\sigma \cdot \int_0^\tau \Big(v_k(\nu) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_k(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa\Big)\mathrm{d}\nu.$$

利用 $\|U_k\|$, $\|v_k\| \le 1$、R 是连续的，以及 R 关于其第三个自变量是 2π-周期的，可以证明 R 由某个足够大的常数 $r > 0$全局有界。同样容易看出，存在某个足够大的利普希茨常数 $L_{\check{X}} > 0$，使得

$$\left|\check{X}[k,\eta](\tilde{x}) - \check{X}[k,\eta](\check{x})\right| \le L_{\check{X}}\,|\tilde{x} - \check{x}| \tag{42}$$

对每一个 $k \in \mathbb{N}$、每一个 $\eta \in [-\rho,\rho]$ 以及所有 $\tilde{x}$, $\check{x} \in \check{K}$。最后，令 $c_1 := 2\,c_\Phi > 0$ 以及 $c_2 := L_{\check{X}}\,c_\Phi + r > 0$。

尚需验证，上述对 ω_1、c_1、c_2 的选取能够达到目的。为此，令 $\omega \ge \omega_1$，令 $k \in \mathbb{N}$，令$d \in L_\infty$满足 $\|d\| \le \delta$，令 $(\tilde{x},\eta)$: $I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 为 (37) 的一个解，并令 t_0、$t_2 \in I$ 满足 $t_0 < t_2$。假设˜对每一个 $t \in [t_0,t_2]$ 都有 $\tilde{x}(t) \in K$ 以及 $\eta(t) \in [-\rho,\rho]$。则

$$\check{x}(t) := \Phi_{-1/\omega}^{Y[k,\omega t,\eta(t)]}(\tilde{x}(t)) \tag{43}$$

定义了一条连续可微曲线ˇx，它位于 $[t_0,t_2]$ˇ上且取值于 K。例如，利用 [4]，中的命题 3.85 和习题 E9.4，可以验证

$$\dot{\check{x}}(t) = \check{X}[k,\eta(t)](\check{x}(t)) + d(t)\,b\,Z[k,\omega t](\check{x}(t)) \tag{44a}$$
$$+ R\big(k, 1/\omega, \omega t, \check{x}(t), \eta(t), d(t)\big) \tag{44b}$$

对每个 $t \in [t_0,t_2]$。将 (44) 写成积分形式，可得

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \Big(&\check{X}[k,\eta(t)](\tilde{x}(t)) \\ &+ d(t)\,b\,Z[k,\omega t](\tilde{x}(t))\Big)\,\mathrm{d}t \\ = \big(\tilde{x}(t_1) - \check{x}(t_1)\big) - \big(\tilde{x}(t_0) - \check{x}(t_0)\big) \\ + \int_{t_0}^{t_1} \big(\check{X}[k,\eta(t)](\tilde{x}(t)) - \check{X}[k,\eta(t)](\check{x}(t))\big)\,\mathrm{d}t \\ + \int_{t_0}^{t_1} R\big(k,1/\omega,\omega t,\check{x}(t),\eta(t),d(t)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对每个 $t_1 \in [t_0,t_2]$，由此可(38) 轻易得出。 □

A.2. 大 k 时的近似

第二个引理表明，对于每个充分大的 $k \in \mathbb{N}$，(24) 的解近似于 (29)的解。

引理 2。 存在一个 α，它属于 $\mathcal{K}_\infty$ 类，使得

$$\left|\check{F}_k(\tilde{x}) - \frac{b}{2\pi^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}} J(\tilde{x} + a\,s)\,s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s)\right| \le \frac{1}{2\,\alpha(k)},$$
$$\left|\check{E}_k(\eta)\right| \le \frac{1}{2\,\alpha(k)}$$

˜对于每个 $k \in \mathbb{N}$、每个 $\tilde{x} \in K$ 和每个 $\eta \in [-\rho,\rho]$。

证明。 作为缩写，令 $d := n-1$。设 saw: $\mathbb{R} \to [0,1]$ 为振幅和周期均为 1 的锯齿波；即，对于每个 $\sigma \in \mathbb{R}$，saw(σ) := σ 模 1。对于每个$k \in \mathbb{N}$，通过 γ_k: $[0,1] \to [0,1]^d$定义

$$\gamma_k(\sigma) := \big[\mathrm{saw}(\sigma),\ \mathrm{saw}(2^k\sigma),\ \ldots,\ \mathrm{saw}\big(2^{(d-1)k}\sigma\big)\big]^\top.$$

对于每个连续的 f: $[0,1]^d \to \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$，令

$$\omega(f,\varepsilon) := \sup\big\{|f(z) - f(\zeta)|\colon z,\zeta \in [0,1]^d, |z-\zeta| \le \varepsilon\big\}$$

是 f 的 ε 阶连续模。

命题 1。 设 f: $[0,1]^d \to \mathbb{R}$ 连续，设 $k \in \mathbb{N}$。则

$$\Big|\int_0^1 f(\gamma_k(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma - \int_{[0,1]^d} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le \omega\big(f;\tfrac{\sqrt{d}}{2^k}\big).$$

命题 *1* 的证明。 我们沿用 [7] 中定理 3.1 的证明。设 $\mathcal{I}$ 为 $[0,1]$ 的标准划分所构成的集合，该划分分成 $2^{d\cdot k}$ 个长度为 $2^{-d\cdot k}$ 的子区间。我们通过映射 $\mathcal{I}$ 对 i: $\{0,1,\ldots,2^k-1\}^d \to \mathcal{I}$ 进行编号，其定义如下

$$i(a) := a_1\,2^{-1\cdot k} + \cdots + a_d\,2^{-d\cdot k} + [0,2^{-d\cdot k}]. \tag{45}$$

设 $\mathcal{C}$ 为 $[0,1]^d$ 的标准划分所构成的集合，该划分分成 $2^{d\cdot k}$ 个边长为 2^{-k} 的子立方体。我们通过映射 c: $\{0,1,\ldots,2^k-1\}^d \to \mathcal{C}$ 对 $\mathcal{C}$ 中的元素进行编号，其定义如下

$$i(a) := 2^{-k}\,a + [0,2^{-k}]^d. \tag{46}$$

由于 i 和 c 均为双射，因此 $\varphi := c \circ i^{-1}$: $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 也是双射。此外，根据 γ_k的定义，不难验证

$$\gamma_k(\mathrm{int}(I)) \subset \varphi(I) \tag{47}$$

对每个 $I \in \mathcal{I}$，其中 int(I) 表示 I 的内部。因此

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{[0,1]^d} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^1 f(\gamma_k(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\Big| \\ &\le \sum_{I\in\mathcal{I}}\Big|\int_{\varphi(I)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_I f(\gamma_k(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\Big|\end{aligned} \tag{48}$$

在 命题 1 证明的其余部分中，任取一个 $I \in \mathcal{I}$ 并令 $C := \varphi(I)$。由于 $\mathcal{C}$ 由 $2^{d\cdot k}$组成，若能证明命题 1，则命题 1 的证明即告完成。

$$\Big|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_I f(\gamma_k(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma\Big| \le \frac{1}{2^{d\cdot k}}\,\omega\big(f;\tfrac{\sqrt{d}}{2^k}\big). \tag{49}$$

暂时固定一个任意整数 $m > k$。设$\mathcal{I}_m$ 为将 I 标准划分为 $2^{d\cdot(m-k)}$ 个长度为 $2^{-d\cdot m}$的子区间的集合。设 $\mathcal{C}_m$ 为将 C 标准划分为 $2^{d\cdot(m-k)}$个边长为 2^{-m}的子立方体的集合。对每个 $J \in \mathcal{I}_m$，设$s_{m,J}$为 J的中心点。对每个 $D \in \mathcal{C}_m$，设$\zeta_{m,D}$为 D的中心点。由于 γ_k 在 I 上连续，并且

由于 f 在 C上连续，根据黎曼积分的构造，我们有

$$\int_I f(\gamma_k(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma \;=\; \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2^{d\cdot k}}\sum_{J\in\mathcal{I}_m} f(\gamma_k(s_{m,J})), \tag{50}$$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2^{d\cdot k}}\sum_{D\in\mathcal{C}_m} f(\zeta_{m,D}). \tag{51}$$

对于命题 1证明的其余部分，固定任意整数$m > k$、$J \in \mathcal{I}_m$和 $D \in \mathcal{C}_m$。由于$s_{m,\,J}$位于 I的内部，由(47)可知 $\gamma_k(s_{m,\,J}) \in \varphi(I) = C$。由于 C 是维数 d中边长为 2^{-k} 的立方体，其对角线长度为 $\sqrt{d}\,2^{-k}$。根据连续模的定义，这意味着

$$\big|f(\gamma_k(s_{m,J})) - f(\zeta_{m,D})\big| \;\le\; \omega\big(f;\tfrac{\sqrt{d}}{2^k}\big). \tag{52}$$

现在(49)由(50)–(52) 以及如下事实得出： $\mathcal{I}_m$与 $\mathcal{C}_m$ 包含相同数量的元素。□

定义 Θ： $[0,1]^d \to [0,2\pi]\times[0,\pi]^{d-1}$ 为

$$\Theta(z_0,z_1,\dots,z_{d-1}) \;:=\; \pi\,[2z_0,z_1,\dots,z_{d-1}]^{\top}. \tag{53}$$

断言2。对所有 $k\in\mathbb{N}$、 $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$和 $\eta\in\mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned}\breve{F}_k(\tilde{x}) \;&=\; b\int_0^1 J\big(\tilde{x}+a\,\phi\big(2\Theta(\gamma_k(\sigma))\big)\big)\\ &\qquad\cdot g\big(2\Theta(\gamma_k(\sigma))\big)\,\phi\big(2\Theta(\gamma_k(\sigma))\big)\,\mathrm{d}\sigma,\\ \breve{E}_k(\eta) \;&=\; -b\,\eta\int_0^1 g\big(2\Theta(\gamma_k(\sigma))\big)\,\phi\big(2\Theta(\gamma_k(\sigma))\big)\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

断言2由下列定义得出：(11)、(22)和(31)，以及 2π-周期性，即 ϕ、 g 关于其各自自变量的周期性，以及换元积分。□

断言3. 存在一个 α 类函数 $\mathcal{K}_\infty$ ，使得

$$\begin{aligned}&\Big|\breve{F}_k(\tilde{x}) - b\int_{[0,1]^d} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(2\Theta(z))\big)\\ &\qquad\cdot g(2\Theta(z))\,\phi(2\Theta(z))\,\mathrm{d}z\Big| \;\le\; \frac{1}{2\,\alpha(k)},\\ &\Big|\breve{E}_k(\eta) + b\,\eta\int_{[0,1]^d} g(2\Theta(z))\,\phi(2\Theta(z))\,\mathrm{d}z\Big| \;\le\; \frac{1}{2\,\alpha(k)}\end{aligned}$$

对于每个 $k\in\mathbb{N}$、每个 $\tilde{x}\in K$以及每个 $\eta\in[-\rho,\rho]$。

证明 断言3。 断言3 由断言1 和 2以及一个已知事实可知：紧集上的连续映射是一致连续的。 □

令 $\tilde{x}\in K$。回忆 $d=n-1$。由于 断言3，只要证明引理 2 的证明便告完成

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^{n-1}} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(2\Theta(z))\big)\,g(2\Theta(z))\,\phi(2\Theta(z))\,\mathrm{d}z\\ &\qquad=\; \frac{1}{2\pi^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}} J(\tilde{x}+a\,s)\,s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s),\end{aligned} \tag{54}$$

$$\int_{[0,1]^{n-1}} g(2\Theta(z))\,\phi(2\Theta(z))\,\mathrm{d}z \tag{55}$$

$$=\; \frac{1}{2\pi^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}} s\,\mathrm{d}\lambda_{\partial\mathbb{B}}(s) \;=\; 0.$$

我们仅说明如何验证(54)，因为验证 (55) 的过程非常相似。第一步，通过换元积分可得

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^{n-1}} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(2\Theta(z))\big)\,g(2\Theta(z))\,\phi(2\Theta(z))\,\mathrm{d}z\\ &\quad=\; \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{(2\pi)^{n-2}}\int_{2W} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(\vartheta)\big)\,g(\vartheta)\,\phi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta,\end{aligned} \tag{56}$$

其中集合 W 定义于(7)。在第二步中，将长方体 $2W$ 划分为 2^{n-1} 与 W边长相同的长方体，可以证明

$$\begin{aligned}&\int_{2W} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(\vartheta)\big)\,g(\vartheta)\,\phi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\\ &\quad=\; 2^{n-1}\int_{W} J\big(\tilde{x}+a\,\phi(\vartheta)\big)\,g(\vartheta)\,\phi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.\end{aligned} \tag{57}$$

最后，所述等式(54)可由方程 (56)、(57)和(10)推出。至此，引理 2的证明完成。 □

A.3. 命题 1 的证明

设 ω_1， c_1， $c_2>0$ 如 引理 1 并设 $\alpha\in\mathcal{K}_\infty$ 如引理 2。设 $L>0$ 作为利普希茨常数，用于¯光滑梯度向量场 ∇J_a 在紧集¯K上。固定任意大的 $T>0$ 以及任意小的$\varepsilon>0$。在必要时缩小 $\varepsilon>0$后，我们可以假设¯ ¯闭 ε-邻域（ K ）包含于 K。我们选取充分大的 $\omega_0\ge\omega_1$ 和 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\big(\tfrac{1}{\omega}\,c_1 + \big(c_2+\tfrac{1}{\alpha(k)}\big)T\big)\,\exp(a\,b\,c\,L\,T) \;<\; \varepsilon \tag{58}$$

对每一个 $\omega\ge\omega_0$ 以及每一个 $k\ge k_0$。

我们验证上述对 ω_0 和 k_0 的选择确实可行。为此，令 $\omega\ge\omega_0$，令 $k\ge k_0$，令 $d\in L_\infty$¯且满足 $\|d\|\le\delta$，令 $t_0\in\mathbb{R}$，令 $\tilde{x}_0\in K$，并令 $\eta_0\in\mathbb{R}$ 且满足 ¬$|\eta_0|\le\rho$。令 $(\tilde{x},\eta)\colon I\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$为方程 (18) 在初始条件 $\tilde{x}(t_0)=\tilde{x}_0$, $\eta(t_0)=\eta_0$下的极大解。令¯$\bar{x}\colon I\to\mathbb{R}^n$ 为方程 (29) 在初始条件 $\bar{x}(t_0)=\tilde{x}_0$下的极大解。假设 $[t_0,t_0+T]\subset I$且¯对于每个 $t\in[t_0,t_0+T]$都有 $\bar{x}(t)\in K$。若能证明 $[t_0,t_0+T]\subset I$且对于每个 $t\in[t_0,t_0+T]$，(30) 和 $|\eta(t)|\le\rho$成立，则证明完成。令 $t_2>t_0$ 为~ ~ $[t_0,t_0+T]$与 I的交集中满足对于每个 $t\in[t_0,t_2]$都有 $\tilde{x}(t)\in K$的最大元素。利用 η 的定义微分方程 (18c) 和不等式 (36)，可得对于每个 $t\in[t_0,t_2]$，都有 $|\eta(t)|\le\rho$ 。因此，我们可以应用引理 1，其内容为

$$\begin{aligned}&\Big|\tilde{x}(t_1)-\tilde{x}(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}\Big(\breve{F}_k(\tilde{x}(t))+\breve{E}_k(\eta(t))\\ &\qquad+d(t)\,b\,v_k(\omega t)\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \tfrac{1}{\omega}\,\big(c_1+c_2\,|t_1-t_0|\big)\end{aligned} \tag{59}$$

对于每个 $t_1 \in [t_0, t_2]$。 引理 2 和方程 (5)，可推出 (28)

$$\left|\breve{F}_k(\tilde{x}(t)) + \breve{E}_k(\eta(t)) - a\,b\,c\,\nabla \bar{J}_a(\bar{x}(t))\right| \;\leq\; \tfrac{1}{\alpha(k)} \tag{60}$$

对每个 $t_1 \in [t_0, t_2]$。将 (29) 写成积分形式，由 (59) 和 (60) 可得

$$\begin{aligned}|\tilde{x}(t_1) - \bar{x}(t_1)| \;\leq\; & \tfrac{1}{\omega}\left(c_1 + \left(c_2 + \tfrac{1}{\alpha(k)}\right)|t_1 - t_0|\right) \\ & + a\,b\,c\,L\int_{t_0}^{t_1} |\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{61}$$

对每个 $t_1 \in [t_0, t_2]$。利用格朗沃尔引理和(58) 可得 $|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ 对每个 $t \in [t_0, t_2]$。由于 $\bar{x}(t) \in K$，因此 $\tilde{x}(t)$ 对每个 $t \in [t_0, t_2]$都位于 K 的内部。这意味着 $t_2 = t_0 + T$，并完成了命题 1的证明。 □