arXiv:2603.01240v1 [hep-th] 1 Mar 2026

关于 SU(N) Chern–Simons 理论中线缺陷半指标的 Okazaki 和 Smith 部分猜想的证明

LIUQUAN WANG 和 YIYANG YUE

ABSTRACT. Okazaki 和 Smith 发现了许多优美公式，将一些矩阵积分表示为著名的 q-级数，例如罗杰斯-拉马努金函数或雅可比 theta 函数。这些积分源自三维 $\mathcal{N}=2$超对称 SU(N) Chern–Simons 理论中的威尔逊线缺陷半指标。我们通过仔细计算一些无穷乘积的常数项来求值这些积分。在此过程中，我们运用了一些关于反对称多元形式劳朗级数的重要事实。因此，我们证明了 Okazaki 和 Smith 的三个一般猜想，这些猜想给出了 SU(N)$_{-N-k}$($k=0,\ 1/2,$ 1) Chern-Simons 理论半指标的显式公式。在这一过程中，我们将这些 SU(N) 公式扩展为包含一个附加参数。此外，我们通过计算任意荷威尔逊线的相应半指标，推广了 SU(N)$^{-N-1/2}$ 和 SU(N)$_{-N-1}$ 猜想。作为这些推广的一个特例，我们还验证了 Okazaki 和 Smith 的 SU(3)$_{-4}$ 猜想。

CONTENTS

1. 引言与主要结果 1 2. 预备知识 8 2.1. 一些记号与基本事实 8 2.2. 从反对称形式洛朗级数中提取项 9 3. SU(N)猜想的证明与推广 16 3.1. SU(N)$_{-N}$ 猜想 16 3.2. SU(N)$^{-N-\frac{1}{2}}$ 猜想 21 3.3. SU(N)$_{-N-1}$ 猜想 29 4. 一些附带结果和注记 35 致谢 37 参考文献 37

1. 引言与主要结果

在带边界的三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称场论中，半指标是分析和验证体-边界系统对偶的主要工具之一；它们仅依赖于给定场的边界条件，并可写成特定的超对称配分函数。例如，若给定场具有BPS边界条件，则可用它来考察体-边界系统中BPS局域算符的谱。

2020 数学主题分类。 05A30, 33D15, 33D60, 33D90, 11F03, 81T13, 81T45。关键词与短语。 Chern–Simons 理论；威尔逊线；半指标；矩阵积分；罗杰斯–拉马努金函数；反对称形式洛朗级数。

作为半指标的推广，场论学家研究了线缺陷半指标，即在带有线缺陷端点的边界上考虑相应的半指标。此时应将相应的线缺陷算符插入半指标公式中。与半指标类似，线缺陷半指标可以刻画边界与缺陷的自由度，并且是检验“体-边界-线”系统对偶性的重要工具。通过研究线缺陷半指标，我们可以探索三维体理论中线缺陷的谱以及诱导边界的结构。

q级数理论在半指标的求值中发挥了重要作用。例如，可以找到半指标的积分表示，这些表示为与根系相关的一些重要恒等式提供了解释，其中包括 Askey–Wilson 型 q-beta 积分 [3]。Okazaki 和 Smith 的近期工作 [10, 11, 12] 给出了许多这样的例子。特别是，他们发现，对于规范场满足诺伊曼边界条件的三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称 SU(N) Chern–Simons（CS）理论，其线缺陷半指标可以优雅地表示为一些著名的 q级数函数。半指标表示为多维矩阵积分，他们还发现了许多有趣的恒等式，将这类积分表示为优雅的 q级数或 eta 乘积。

我们将重点讨论 Okazaki 和 Smith [12], 的工作中 SU(N) CS 理论的半指标求值，关于其物理解释的详情，请参阅 [12] 。令N_f 和 N_a 分别表示带有荷为 R1 的诺伊曼边界条件的基本表示和反基本表示三维手征多重态的数量，并令 M 表示荷为 R0 的基本表示二维Fermi多重态的数量。为抵消规范反常，我们取 CS 级别 $-N-k$ ，其中 [12, （2.2）]

$$k=-\frac{1}{2}(N_f+N_a)+M. \tag{1.1}$$

最初的三个基本情形 $k=0$、$1/2$ 和 1 尤其令人感兴趣，因为我们很快将看到，由下式定义的半指标具有优雅的公式:

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N}}(q):=\frac{(q;q)_\infty^{N-1}}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{ds_i}{2\pi i s_i}\right)\prod_{i\neq j}^{N}(s_is_j^{-1};q)_\infty, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q):=\frac{(q;q)_\infty^{N-1}}{N!}\oint\prod_{i=1}^{N-1}\frac{ds_i}{2\pi i s_i}\prod_{i\neq j}^{N}(s_is_j^{-1};q)_\infty\prod_{i=1}^{N}(q^{\frac{1}{2}}s_ix;q)_\infty, \tag{1.3}$$

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1}}(x;q):=\frac{(q;q)_\infty^{N-1}}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{ds_i}{2\pi i s_i}\right)\prod_{i\neq j}^{N}(s_is_j^{-1};q)_\infty\prod_{i=1}^{N}(q^{\frac{1}{2}}s_i^{\pm}x^{\pm};q)_\infty. \tag{1.4}$$

这里，记号 $(a^{\pm};q)_\infty$ 表示 $(a,\ a^{-1};q)_\infty$ ，其中我们使用以下标准的 q级数记号:

$$(a_1,a_2,\dots,a_m;q)_n:=\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=0}^{n-1}(1-a_iq^k),\quad |q|<1,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{1.5}$$

通过引入垂直于边界的BPS线算符，可以修改半指标，从而得到线缺陷关联函数。特别地，若我们引入与规范群的表示 $\mathcal{R}$ 相关联的Wilson线算符 $W_{\mathcal{R}}$ ，则此类线缺陷关联函数可通过将相应特征标 $\chi_{\mathcal{R}}$ 插入矩阵积分来计算。

在SU(N)的情形下，我们为威尔逊线的集合 W_m 选取一组基，该基由次数为 m的幂对称函数标记。

$$p_m(s) = \sum_{i=1}^{N} s_i^m \tag{1.6}$$

$_N$在限制条件 $\prod s_i = 1$下。沿用 [11, 12], 的说法，我们将由 p_m(s)$_{i=1}$标记的 Wilson 线称为荷-m Wilson 线，并将存在此类 Wilson 线时的半指标记为 $\langle W_m \rangle$。特别地，对应于 SU(N)$_{-N-k}$且满足 $k \in \{0, 1/2, 1\}$的 Wilson 线为

$$\langle W_m \rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-k}}(x;q) := \frac{(q;q)_\infty^{N-1}}{N!} \oint \Big(\prod_{i=1}^{N-1} \frac{ds_i}{2\pi i s_i} \Big) \prod_{i \neq j}^{N} (s_i s_j^{-1}; q)_\infty \times \Big(\prod_{i=1}^{N} (q^{\frac{1}{2}} s_i x; q)_\infty \Big)^{\epsilon_k}$$
$$\times \Big(\prod_{i=1}^{N} (q^{\frac{1}{2}} s_i^{-1} x^{-1}; q)_\infty \Big)^{\delta_k} \times \sum_{i=1}^{N} s_i^m \tag{1.7}$$

其中，对于 $k = 0$，(ϵ_k, δ_k) =(0,0)；对于 $k = 1/2$，为 (1, 0)；对于 $k = 1$，为 (1, 1)。根据定义可知，对于 $k \in \{0, 1/2, 1\}$,

$$\langle W_0 \rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-k}} = N \mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N-k}}. \tag{1.8}$$

一个简单但有用的观察是，计算半指标相当于求被积函数的常数项。利用 Euler 的 q-指数恒等式（例如参见 [2, 推论 2.2]）

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q)_n} \quad (|z| < 1), \quad (-z;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n(n-1)/2}}{(q)_n} \tag{1.9}$$

以及雅可比三重乘积恒等式（例如参见 [2, 定理 2.8]）

$$(q;q)_\infty (z^{-1};q)_\infty (qz;q)_\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)/2} z^m, \tag{1.10}$$

我们可以将（1.7）中的被积函数展开为关于变量 $s_1^{\pm}$、.....、 $s_{N-1}^{\pm}$的形式洛朗级数。在本文中，对于任意关于$\mathbb{C}[[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]]$ 的形式幂级数 F(x)以及任意 $\in \mathbb{Z}^n$ α =(α_1、.....、 α_n)，我们用 $[x^\alpha]F$表示 F中$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$的系数。于是，与威尔逊线关联的半指标可以表示为如下形式的常数项:

$$\langle W_m \rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-k}}(x;q) = \frac{(q;q)_\infty^{N-1}}{N!} [(s_1 s_2 \cdots s_{N-1})^0] \prod_{i \neq j}^{N} (s_i s_j^{-1}; q)_\infty \times \Big(\prod_{i=1}^{N} (q^{\frac{1}{2}} s_i x; q)_\infty \Big)^{\epsilon_k}$$
$$\times \Big(\prod_{i=1}^{N} (q^{\frac{1}{2}} s_i^{-1} x^{-1}; q)_\infty \Big)^{\delta_k} \times \sum_{i=1}^{N} s_i^m. \tag{1.11}$$

Okazaki 和 Smith [12]首次研究了带有威尔逊线算符以及矢量多重态满足 Neumann 边界条件的 3d $\mathcal{N} = 2$超对称 SU(2) CS 理论的线缺陷半指标。在其他结果中，他们得到了以下结论:

(1) 对于 $k=-2$，我们有 [12, 第 3 节。1]

$$\langle W_{2m}\rangle^{\mathrm{SU}(2)_{-2}}(q)=(-1)^m\big(q^{m(m-1)/2}+q^{m(m+1)/2}\big),\quad \langle W_{2m+1}\rangle^{\mathrm{SU}(2)_{-2}}(q)=0. \tag{1.12}$$

(2) 对于 $k=-5/2$，我们有 [12, (3.16) 和 (3.27)]

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(2)_{-5/2}}(x;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}x^{2n}}{(q;q)_n}, \tag{1.13}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(2)_{-5/2}}(x;q)=-q^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}x^{2n+1}}{(q;q)_n}. \tag{1.14}$$

右侧的两个函数本质上就是著名的罗杰斯-拉马努金函数。他们只给出了 $x=1$ 情形的证明。

(3) 对于 $k=-3$，他们给出了 $\langle W_k\rangle^{\mathrm{SU}(2)_{-3}}(x;q)$ 的显式计算，并发现结果取决于模 6 的 k。特别地，我们有 [12, (3.66) 和 (3.71)]

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(2)_{-3}}(x;q)=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}x^{2n}, \tag{1.15}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(2)_{-3}}(x;q)=-\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2+n+\frac{1}{2}}x^{2n+1}. \tag{1.16}$$

他们还研究了具有威尔逊线、且矢量多重态满足诺伊曼边界条件的三维 $\mathcal{N}=2$ SU(3) CS 理论的线缺陷半指标。

(1) 对于 $k=-3$，已证明 [12, (4.11)]

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-3}}(q)=\begin{cases} q^{\frac{m(m-3)}{9}}\Big(1+q^{\frac{m}{3}}+q^{\frac{2m}{3}}\Big), & m\equiv 0 \pmod 3,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1.17}$$

(2) 对于 $k=-7/2$，文中未经证明便指出 [12, (4.17) 和 (4.19)]

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(3)_{-7/2}}(x;x^{-1};q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{3}{2}n^2}x^{3n}}{(q;q)_n}, \tag{1.18}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-7/2}}(x;x^{-1};q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{3}{2}n^2+2n+1}x^{3n+2}}{(q;q)_n}. \tag{1.19}$$

(3) F 或 $k=-4$，文中未经证明便指出 [12, (4.23)、(4.27) 和 (4.29)]

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q)=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3}{2}n^2}x^{3n}, \tag{1.20}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q)=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3}{2}n^2+2n+1}x^{3n+2}, \tag{1.21}$$

$$\langle W_2\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q)=-\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3}{2}n^2+2n+1}x^{-3n-2}. \tag{1.22}$$

他们还发现，$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$ $(3\le m\le 12)$可以用 $\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$、$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$和 $\langle W_2\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$表示。基于这些公式，他们在第 4.3.1 节第 29] 页提出了以下猜想。

猜想 1.1。 $\langle W_m\rangle_{\mathcal{N}\,1\,0}^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$,,的一般情形如下：

- 一个因子 $\begin{cases} \mathbb{III}_{\mathrm{SU}(3)_{\mathcal{N}}\ {}^{-4}}, & m\equiv 0 \pmod 3 \\ \langle W_1\rangle\ {}^{3\,-4}\ \ m\equiv 1 & 3\ {}^{\mathrm{SU}()}, \pmod{} \\ \langle W_2\rangle\ {}^{3\,-4}\ \ m\equiv 2 & 3\ {}^{,\mathrm{SU}()}, \pmod{} \end{cases}$

- 一个因子$(1+q^{m/4}+q^{m/2})$ 适用于 $m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 以及 $m\neq 0$,
- 一个由 q 的单次幂和一个符号 ± 1构成的因子。

Okazaki 和 Smith 在 [12, 第 5] 节中，随后针对一般 SU(N) 规范群的半指标提出了猜想，并通过数值计算验证了其中一些猜想。我们将证明所有有 CS 级别为 $-N-k$($k=0,\ 1/2,$ 1) 的猜想，并将其重述为以下定理。对于 SU(N) 的情形，$_{-N}$ 以下公式是 [12, (5.1)]中提出的猜想。

定理 1.2 （SU$(N)_{-N}$ 猜想）。 对于任意整数 m ， 我们有

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N}}(q)=\begin{cases}(-1)^{\ell(N-1)}q^{(N-1)\ell(\ell-1)/2}\frac{1-q^{\ell N}}{1-q^{\ell}}, & m=\ell N,\\ 0, & m\neq \ell N,\end{cases}\quad \ell\in\mathbb{Z}. \tag{1.23}$$

对于 SU(N)$_{-N-1/2}$ 的情形，Okazaki 和 Smith [12, (5.18) 和 (5.21)] 猜想以下公式。

定理 1.3 （SU$(N)_{-N-1/2}$ 猜想）。 我们有

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{Nn}q^{\frac{Nn^2}{2}}x^{Nn}}{(q;q)_n}, \tag{1.24}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{Nn+(N-1)}q^{\frac{Nn^2}{2}+(N-1)n+\frac{N-1}{2}}x^{Nn+(N-1)}}{(q;q)_n}. \tag{1.25}$$

此外，我们发现一般情形 $\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)$ 可按如下方式求值。

定理 1.4. 对于任意整数 m ， 我们有

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=\sum_{k=\lceil m/N\rceil}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}Y_{i,m,k}(x,q). \tag{1.26}$$

这里，$Y_{i,\ m,\ k}\ (1\le i\le N)$ 如下所示：

$$Y_{i,0,k}(x,q)=\begin{cases}\frac{(-x)^{Nk}q^{Nk^2/2}}{(q;q)_k}, & k\ge 0,\\ 0, & k<0,\end{cases} \tag{1.27}$$

对于 $1\le m\le N$ ， 我们有

$$Y_{i,m,k}(x,q)=\begin{cases}\frac{(-1)^{Nk+1}x^{Nk-m}q^{(Nk^2+m)/2-(N+1-i)k}}{(q;q)_{k-1}}, & N-i+1\le m\le N\ \ and\ k>0,\\ 0, & 0<m<N-i+1\ \ or\ k\le 0,\end{cases} \tag{1.28}$$

对于其他 m、$Y_{i,\ m,\ k}$，可以递归计算：

$$Y_{i,m,k}(x,q)=\begin{cases}q^{\frac{1}{2}}x^{-1}\big(Y_{i,m-1,k}(x,q)+(-1)^N q^{m+i-k-N-1}Y_{i,m-N-1,k-1}(x,q)\big), & m>N,\\ (-1)^{N-1}q^{k-i-m+1}\big(Y_{i,m+N,k+1}(x,q)-xq^{-\frac{1}{2}}Y_{i,m+N+1,k+1}(x,q)\big), & m<0.\end{cases} \tag{1.29}$$

虽然对于每个 m，都可以利用定理 1.4 显式计算 $\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)$，但随着 $|m|$ 增大，公式会变得越来越复杂。这里我们以 $1\le|m|\le N+1$ 的情形为例给出公式。

推论 1.5. 对于 $1\le m\le N$，我们有

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=(-1)^{N+1}(xq^{\frac{1}{2}})^{N-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{Nk}q^{Nk^2/2+(N-m)k}\big(1-q^{m(k+1)}\big)}{(q;q)_k(1-q^{k+1})}. \tag{1.30}$$

对于 $1-N\le m\le -1$，我们有

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=-(xq^{\frac{1}{2}})^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{Nk}q^{Nk^2/2-mk}}{(q;q)_k}. \tag{1.31}$$

对于 $m=-N$，我们有

$$\langle W_{-N}\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=(-1)^{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{Nk}q^{Nk^2/2}}{(q;q)_k}\left(q^k\frac{1-q^N}{1-q}+(-xq^{\frac{1}{2}})^N q^{Nk}\right). \tag{1.32}$$

对于 $|m|=N+1$，我们有

$$\langle W_{N+1}\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=(-1)^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-y)^{Nk-1}q^{(Nk^2+1)/2}}{(q;q)_k}\left(\frac{1-q^{N(k+1)}}{1-q^{k+1}}-q^{-k}\frac{1-q^N}{1-q}\right), \tag{1.33}$$

$$\langle W_{-N-1}\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1/2}}(x;q)=(-1)^{N-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{Nk+1}q^{(Nk^2+1)/2+k}}{(q;q)_k}\left(q^{k+N}+\frac{1-q^N}{1-q}\right). \tag{1.34}$$

对于 SU(N) 的情形，Okazaki 和 Smith [12, (5.25) 和 (5.32)] 猜想了以下公式。

定理 1.6（SU(N)$_{-N-1}$ 猜想）。我们有

$$\mathbb{III}_{\mathcal{N}}^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1}}(x;q)=\frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{Nn}q^{\frac{Nn^2}{2}}x^{Nn}, \tag{1.35}$$

$$\langle W_1\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1}}(x;q)=\frac{(-xq^{\frac{1}{2}})^{N-1}}{(q;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{Nn}q^{\frac{Nn^2}{2}+(N-1)n}x^{Nn}. \tag{1.36}$$

此外，我们还为任意荷 m找到了 $\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1}}(x;q)$ 的优美公式，并由此给出了定理 1.6 的推广。

定理 1.7。设 m 为整数，且 $t=\lfloor m/(N+1)\rfloor$。我们有

$$\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(N)_{-N-1}}(x;q) \tag{1.37}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(q;q)_\infty} x^{-m} q^{(m-N)t+m/2} \frac{1-q^{Nt}}{1-q^t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{Nk} x^{Nk} q^{Nk^2/2-mk}, & m \equiv 0 \pmod{N+1}, \\ -\frac{1}{(q;q)_\infty} x^{-m} q^{mt+m/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{Nk} x^{Nk} q^{Nk^2/2-mk}, & m \not\equiv 0 \pmod{N+1}. \end{cases}$$

特别地，当 $N = 3$时，我们得到 $\langle W_m \rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$ 的显式公式，并证实猜想 1.1。

推论 1.8 （SU(3)$_{-4}$ 猜想）。 我们有

$$\langle W_m \rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q) \tag{1.38}$$
$$= \begin{cases} x^{2m} q^{\frac{3}{4}m^2} (q^{-\frac{m}{4}} + 1 + q^{\frac{m}{4}}) (q^{\frac{3}{2}-2m} x^{-3}, q^{\frac{3}{2}+2m} x^3, q^3; q^3)_\infty / (q;q)_\infty, & m \equiv 0 \pmod 4, \\ x^{2m} q^{\frac{3}{4}m^2 \pm \frac{m}{4}} (q^{\frac{3}{2}-2m} x^{-3}, q^{\frac{3}{2}+2m} x^3, q^3; q^3)_\infty / (q;q)_\infty, & m \equiv \pm 1 \pmod 4, \\ -x^{2m} q^{\frac{3}{4}m^2} (q^{\frac{3}{2}-2m} x^{-3}, q^{\frac{3}{2}+2m} x^3, q^3; q^3)_\infty / (q;q)_\infty, & m \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

因此，猜想 *1.1* 成立。

需要强调的是，上述定理的证明比（1.12）–（1.17）中讨论的特殊情形难得多。我们简要讨论证明 [12]（1.12）–（1.17）的方法。Okazaki 和 Smith [12]首先利用雅可比三重乘积恒等式（1.10）展开无穷乘积，然后我们便可将（1.11）中的常数项表示为若干多重和。对于一些较小的 N，通过精细分析可以进一步化简这些多重和。然而，这种方法需要逐一分析各种情形，无法应用于一般情形。如果利用雅可比三重乘积恒等式展开定理 1.2–1.4、1.6 和 1.7 中积分里的无穷乘积，我们会得到过多的求和项，而要化简它们似乎难以企及。（对于定理 1.3，我们可能还需要欧拉的 q-指数恒等式。）Okazaki 和 Smith 还指出， [12, 第 1 节。2]

> 若能为任意 SU(N) 规范群给出这些公式的解析证明，那将很不错。对于更高秩的规范群，这些公式将由雅可比三重乘积恒等式的某种多变量推广得出。

我们不清楚是否存在式 (1.10) 的这种多变量版本。尽管如此，受 Stembridge 的工作 [13] 启发，我们找到了采用不同方法证明这些猜想的线索。在该工作中，Stembridge 给出了 MacDonald 猜想 [9, (3.1)] 关于根系 A_{n-1} 的一个简短证明：

$$[x^0] \prod_{1\le i<j\le n} (q x_i x_j^{-1}; q)_a (x_j x_i^{-1}; q)_a = \frac{(q;q)_{an}}{(q;q)_a^n}. \tag{1.39}$$

这也是 Andrews 的 q-Dyson 猜想 [1] 的等参数情形，该情形由 Zeilberger 和 Bressoud [15] 证明。受 Stembridge 对式 (1.39) 的证明启发，我们仔细分析了在含有 n 个变量的反对称形式洛朗级数中收集系数的某些方法，并建立了可将其化简的公式。接着，对于一些与定理 1.2–1.4 和 1.6–1.7 的被积函数中的无穷乘积相关的特定级数，我们能够计算它们的常数项，从而证明这些 SU(N) 猜想，并计算具有任意荷的威尔逊线的半指标。此外，我们还将这些 SU(N) 猜想推广到包含一个附加参数的情形（见定理 3.1、3.6 和 3.10）。

本文其余部分安排如下。第 2 节汇集并证明若干关于多变量反对称形式洛朗级数的有用结果。第 3 节给出定理 1.2–1.4 和 1.6–1.7 以及推论 1.5 和

1.8 的证明及推广。最后，第 4 节讨论作为主要结果及其证明的附带成果的一些常数项恒等式，并给出若干评论。

2. Preliminaries

在本节中，我们收集并建立关于多变量反对称多项式的一些重要事实。

2.1. 一些记号与基本事实。我们遵循 [13]来介绍关于提取形式洛朗级数中某些项的一些基本事实。设 S_n 为 $[n]$的对称群：$=\{1,2,\dots,n\}$。我们称形式幂级数 $F_n=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}c_\alpha x^\alpha\in\mathbb{C}[[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]]$ 是对称的，如果对任意置换 $\omega\in S_n$有 $\omega F_n=F_n$，并且它是反对称的，如果 $\omega F_n=(\operatorname{sgn}\ \omega)F_n$，其中我们定义 $\omega(x^\alpha):=x^{\omega\alpha}=x_1^{\alpha_{\omega(1)}}\cdots x_n^{\alpha_{\omega(n)}}$。

在本节中，我们将使用以下记号：

- $\delta=\delta\ (n):=(n-1,n-2,\dots,1,0)\in\mathbb{Z}^n$,
- F_n：关于 $\mathbb{C}[[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]]$ 的反对称形式洛朗级数,
- $e_i=(0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$：$\mathbb{Z}^n$ 的第 i 个标准基,
- β_i：$\beta=(\beta_1,\ \dots,\ \beta_n)\in\mathbb{Z}^n$ 的第 i 个坐标,
- $\omega_t:=(n-t+1,\ \dots,\ n)^{-1}\in S_n$ 是一个 t-循环，并且显然 $\operatorname{sgn}\ \omega_t=(-1)^{t-1}$,
- $x:=x_1\cdots x_n$。

现在我们将 $[x^\alpha]F$视为一种双线性运算。更确切地说，对于 $\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$ 中的 $F=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ 多项式以及 $\mathbb{C}[[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]]$中的 G 形式幂级数，我们定义

$$[F]G=\big[\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha\big]G=\sum_\alpha c_\alpha[x^\alpha]G.$$

容易看出，乘以 $H\in\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$ 的作用为

$$[FH]G=[F]G(x)H(x^{-1})$$

其中 $H(x^{-1})=H(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1})$。

给定任意反对称形式级数 F_n，显然有

$$[x^{\omega(\gamma)}]F_n=(\operatorname{sgn}\ \omega)[x^\gamma]F_n,\quad\forall\gamma\in\mathbb{Z}^n.\tag{2.1}$$

我们将 $\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$ 中的反对称多项式空间记为 $\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]^{\mathrm{alt}}$。我们定义一个从 $\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]^{\mathrm{alt}}$ 到 $\mathbb{C}$ 的线性映射，其作用为

$$\varphi:\sum_{\omega\in S_n}(\operatorname{sgn}\ \omega)\omega x^\alpha\mapsto[x^\alpha]F_n.\tag{2.2}$$

容易看出，φ 是良定义的。

回顾 Macdonald 的书 [8, III, (1.4)] 中的以下事实：

$$\sum_{\omega\in S_n}\omega\Big(\prod_{i<j}\frac{x_i-zx_j}{x_i-x_j}\Big)=\prod_{i=1}^n\frac{1-z^i}{1-z}=:P_n(z).\tag{2.3}$$

这可以改写为

$$\sum_{\omega\in S_n}(\operatorname{sgn}\ \omega)\omega\Big(\prod_{i<j}(x_i-zx_j)\Big)=P_n(z)\prod_{i<j}^n(x_i-x_j).\tag{2.4}$$

特别地，若我们令 $z=0$，则得到

$$\sum_{\omega\in S_n}(\operatorname{sgn}\,\omega)\omega(x^{\delta})=\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j). \tag{2.5}$$

将 φ 应用于 b 将（2.5）的两边乘以 $P_n(z)$，并利用（2.2）和（2.4），得到

$$\Big[\prod_{i<j}^{n}(x_i-zx_j)\Big]F_n=P_n(z)[x^{\delta}]F_n. \tag{2.6}$$

此外，我们陈述 Stembridge 的著作 [13, 中的一个有用引理 3.2]。

引理 2.1。设 $F(z,q)$ 和 $G(z,q)$ 为形式幂级数。若对于无穷多个整数 $k\geq 0$，有 $F(q^k,q)=G(q^k,q)$，则 $F=G$。

2.2. 从反对称形式洛朗级数中提取项。在本小节中，我们将重点讨论对任意反对称形式洛朗级数 $F_n\in\mathbb{C}[[x_1^{\pm},x_2^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]]$ 中系数进行如下汇集方式的显式求值：

$$W(\alpha;y):=\Big[x^{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\Big]F_n(z,q). \tag{2.7}$$

我们将针对若干族指数 α计算 $W(\alpha,y)$。这些结果是第3节的基础，我们将在该节证明定理1.2–1.6。我们有

$$x^{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)=\sum_{T\subseteq[n-1]}(-y)^t x^{\alpha}x_n^t x^{-T}=\sum_{T\subseteq[n-1]}(-y)^t x^{\alpha+te_n}x^{-T}. \tag{2.8}$$

此处 $t:=|T|$，并且当 $T=\{i_1,i_2,\dots,i_t\}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_t)$时，我们也将 T理解为向量 $e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_t}$，从而 $x^{-T}:=\prod_{i\in T}x_i^{-1}$。我们证明中的一个关键事实是，由于 F_n的反对称性，除非 $\gamma\in\mathbb{Z}^n$ 具有互异分量，否则系数 $[x^{\gamma}]F_n$ 为零。因此，我们将着重找出所有可能的子集 $T\subseteq[n-1]$，使得指数向量 $\alpha+te_n-T$ 具有互异分量。

下述引理在 $\alpha=\delta+ke_l$（其中 $k\in\mathbb{Z}$ 且 $1\leq l\leq n$）时计算 $W(\alpha,y)$。

引理 2.2. 设 y 为一个不定元。对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big[x^{\delta}x_l^k\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\Big]F_n(z,q)\\&=\frac{1-y^{n-l}}{1-y}\big[x^{\delta}x_l^k\big]F_n(z,q)+\frac{y^{n-l}-y^n}{1-y}\big[x^{\delta}x_{l+1}^k\big]F_n(z,q),\quad 1\leq l\leq n-1,\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\Big[x^{\delta}x_n^k\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\Big]F_n(z,q)=\sum_{t=0}^{n-1}y^t\big[x^{\delta}x_{n-t}^k\big]F_n(z,q). \tag{2.10}$$

Proof. **(1)** 假设 $1\leq l\leq n-1$。我们将 **(2.8)** 中 x 的第一个指数写作

$$\delta+ke_l+te_n=(\underbrace{n-1,\dots,n-l+1}_{l-1},n-l+k,\underbrace{n-l-1,\dots,1}_{n-l-1},t). \tag{2.11}$$

为确保该向量的分量彼此不同， T 必须满足以下必要条件：

(i) 若 i， $i+1 \in [n-1] \setminus \{l\}$，则 $i \in T$蕴含 $i+1 \in T$；(ii) 若 $i \in T$且 $i \neq l$，则 $n-i-1 \neq t$；(iii) 若 $i = l \in T$，则 $n-l+k-1 \neq t$。

现在我们将讨论分为三种情况。

情况 1。 我们先考虑情况 $0 \leq t \leq n-l-1$。若 $t = 0$，则 $T = \emptyset$。若$1 \leq t \leq n-l-1$，则 $l+1 \leq n-t \leq n-1$ 且

$$\delta + ke_l + te_n = (n-1, \ldots, n-l+1, \underset{\uparrow}{n-l+k}_{x_l}, n-l-1, \ldots, \underset{\uparrow}{t}_{x_{n-t}}, \ldots, 1, t).$$

由于第 $(n-t)$ 个分量与最后一个分量相同，我们必有 $n-t \in T$，于是由 (i) 可得 $\{n-t, \ldots, n-1\} \subseteq T$。由于 $|T| = t$， T 必须是 $\{n-t, \ldots, n-1\}$。对于这样的 T，我们有

$$\begin{aligned}
&\delta + ke_l + te_n - T = (n-1, \ldots, n-l+1, \underset{\uparrow}{n-l+k}_{x_l}, n-l-1, \ldots, t+1, \underset{\uparrow}{t-1}_{x_{n-t}}, \ldots, 0, t) \\
&= \omega_{t+1}(n-1, \ldots, n-l+1, \underset{\uparrow}{n-l+k}_{x_l}, n-l-1, \ldots, t+1, t, \underset{\uparrow}{t-1}_{x_{n-t+1}}, \ldots, 0) \\
&= \omega_{t+1}(\delta + ke_l).
\end{aligned}$$

情形 2. 若 $n-l \leq t \leq n-2$，则 $1 \leq n-t-1 \leq l-1$ 且

$$\delta + ke_l + te_n = \delta + ke_l + te_n = (n-1, \ldots, \underset{\uparrow}{t+1}_{x_{n-t-1}}, \ldots, \underset{\uparrow}{n-l+k}_{x_l}, n-l-1, \ldots, 1, t).$$

显然 $n-t-1 \notin T$。因此 $T \subseteq \{n-t, \ldots, n-1\}$。由于 $|T| = t$，我们必有 $T = \{n-t, \ldots, n-1\}$，因此

$$\begin{aligned}
&\delta + ke_l + te_n - T = (n-1, \ldots, t+1, t-1, \ldots, \underset{\uparrow}{n-l+k-1}_{x_l}, n-l-2, \ldots, 0, t) \\
&= \omega_{t+1}(n-1, \ldots, t+1, t, t-1, \ldots, \underset{\uparrow}{n-l+k-1}_{x_{l+1}}, n-l-2, \ldots, 0) \\
&= \omega_{t+1}(\delta + ke_{l+1}).
\end{aligned}$$

情形 3. 若 $t = n-1$，则显然有 $T = [n-1]$ 且

$$\begin{aligned}
&\delta + ke_l + (n-1)e_n - T = (n-2, \ldots, \underset{\uparrow}{n-l+k-1}_{x_l}, n-l-2, \ldots, 0, n-1) \\
&= \omega_n(n-1, n-2, \ldots, \underset{\uparrow}{n-l+k-1}_{x_{l+1}}, n-l-2, \ldots, 0) \\
&= \omega_n(\delta + ke_{l+1}).
\end{aligned}$$

这可与情形 2 合并。

总之，对于每个 $0 \leq t \leq n-1$，至多存在一个 t-集合 $T \subseteq [n-1]$，使得 $\delta + ke_l + te_n - T$具有互异分量。唯一可能的集合是 $T = \{n-t, \ldots, n-1\}$

并且对于这样的 T，我们有

$$x^{\delta}x_l^k x_n^t x^{-T}=\begin{cases}x^{\omega_{t+1}(\delta+ke_l)}, & 0\le t\le n-l-1\\ x^{\omega_{t+1}(\delta+ke_{l+1})}, & n-l\le t\le n-1\end{cases}$$

其中 $\omega_{t+1}=(n-t,n-t+1,\ldots,n)^{-1}$。因此，

$$\left[x^{\delta}x_l^k\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n=\left[\sum_{t=0}^{n-l-1}(-y)^t x^{\omega_{t+1}(\delta+ke_l)}\right]F_n+\left[\sum_{t=n-l}^{n-1}(-y)^t x^{\omega_{t+1}(\delta+ke_{l+1})}\right]F_n$$
$$=\frac{1-y^{n-l}}{1-y}[x^{\delta}x_l^k]F_n+\frac{y^{n-l}-y^n}{1-y}[x^{\delta}x_{l+1}^k]F_n,$$

其中最后一个等式因 (2.1) 而成立。这证明了 (2.9)。

(2) 设 $l=n$。我们将 (2.8) 中 x 的第一个指数写为

$$\delta+(k+t)e_n=(n-1,\ldots,1,k+t). \tag{2.12}$$

与第 (1) 部分一样，为确保 $\delta+(k+t)e_n-T$ 具有互异分量，一个必要条件是 $i\in T\cap[n-2]$ 蕴含 $i+1\in T$。因此，对任意 $0\le t\le n-1$，存在唯一的 t-子集 $\{n-t,\ldots,n-1\}$ 满足该条件。对于这样的 T，我们有

$$\delta+(k+t)e_n-T=(n-1,\ldots,\underset{\uparrow}{t+1}_{x_{n-t-1}},\underset{\uparrow}{t-1}_{x_{n-t}},\ldots,0,k+t)$$
$$=\omega_{t+1}(n-1,\ldots,t+1,\underset{\uparrow}{k+t}_{x_{n-t}},t-1,\ldots,0)=\omega_{t+1}(\delta+ke_{n-t}).$$

由此可得

$$\left[x^{\delta}x_n^k\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n=\sum_{t=0}^{n-1}(-y)^t[x^{\omega_{t+1}(\delta+ke_{n-t})}]F_n=\sum_{t=0}^{n-1}y^t[x^{\delta}x_{n-t}^k]F_n,$$

由此证明了 (2.10)。 □

推论 2.3。我们有

$$\left[x^{\delta}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n(z,q)=\frac{1-y^n}{1-y}[x^{\delta}]F_n(z,q), \tag{2.13}$$

$$\left[x^{\delta}x_n^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n(z,q)=[x^{\delta}x_n^{-1}]F_n(z,q), \tag{2.14}$$

$$\left[x^{\delta}x_n\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n(z,q)=y^{n-1}[x^{\delta}x_1]F_n(z,q). \tag{2.15}$$

证明。在 (2.10) 中令 $k=0$，得到 (2.13)。接下来，在 (2.10) 中令 $k=-1$。注意，对于 $1\le t\le n-1$，x_{n-t} 和 x_{n-t+1} 的指数在 $x^{\delta}x_{n-t}^{-1}$ 中相同，因此 $[x^{\delta}x_{n-t}^{-1}]F_n(z,q)=0$。这证明了 (2.14)。类似地，在 (2.10) 中令 $k=1$，即可得到恒等式 (2.15)。□

对于 $0 \le l \le n-2$，我们定义

$$v_l = v_l(a,b) := (a, \underbrace{1,\dots,1}_{l}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-l-2}, b) \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.16}$$

现在我们将计算 $W(\alpha, y)$，其中 $\alpha = v_l(a,b) + \delta$。

注意，

$$v_l + \delta + te_n = (a+n-1, \underbrace{n-1,\dots,n-l}_{l}, \underbrace{n-l-2,\dots,1}_{n-l-2}, b+t). \tag{2.17}$$

对于 (a,b) 的某些特殊取值，我们发现 $W(\alpha, y)$ 可以表示为 F_n 的少数几个系数的简单组合。

引理 2.4. 设 y 为一个不定元。对于 $1 \le l \le n-1$，我们有

$$\left[x^{v_l(a,0)+\delta} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n = \frac{1-y^{n-l-1}}{1-y}[x^{v_l(a,0)+\delta}]F_n - \frac{y^{n-l-1}-y^n}{1-y}[x^{v_{l+1}(a-1,0)+\delta}]F_n. \tag{2.18}$$

证明。 任何满足 $v_l(a,0) + \delta + te_n - T$ 且具有互异分量的子集 T 都必须满足以下条件：

(i) 若 $i \in T$，则当 $i \in [n-2] \setminus \{1, l+1\}$ 时 $i+1 \in T$；

(ii) If $i \in T$, then $b + t \ne \begin{cases} a+n-2, & i = 1 \\ n-i, & 2 \le i \le l+1 \\ n-i-1, & l+2 \le i \le n-1 \end{cases}$.

我们将关注 (2.17) 中的第 $(n-t)$ 个分量，它是以下量的指数 x_{n-t}。

若 $t = 0$，则 $T = \emptyset$。若 $1 \le t \le n-l-2$，则 $l+2 \le n-t \le n-1$，并且

$$v_l(a,0) + \delta + te_n = (a+n-1, n-1, \dots, n-l, n-l-2, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t}}}{t}, \dots, 1, t).$$

由于第 $(n-t)$ 个分量与最后一个分量相同，我们必有 $n-t \in T$，从而有 $\{n-t, \dots, n-1\} \subseteq T$。由于 $|T| = t$， T 必为 $\{n-t, \dots, n-1\}$。因此，我们有

$$\begin{aligned} v_l(a,0) + \delta + te_n - T &= (a+n-1, n-1, \dots, n-l, n-l-2, \dots, t+1, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t}}}{t-1}, \dots, 0, t) \\ &= \omega_{t+1}(a+n-1, n-1, \dots, n-l, n-l-2, \dots, t+1, t, t-1, \dots, 0) \\ &= \omega_{t+1}(v_l(a,0) + \delta). \end{aligned}$$

若 $n-l-1 \le t \le n-2$，则 $2 \le n-t \le l+1$，并且

$$v_l(a,0) + \delta + te_n = (a+n-1, n-1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t}}}{t+1}, \dots, n-l, n-l-2, \dots, 1, t).$$

由于第 $(n-t)$ 个分量与最后一个分量只相差 1，因此必有$n-t \notin T$，再由 (i) 可推出 $T \subseteq \{1, n-t+1, \dots, n-1\}$。现在我们有$T = \{1, n-t+1, \dots, n-1\}$，因为它们都是 t-集合，并且

$$v_l(a,0) + \delta + te_n - T$$

$$= (a+n-2, n-1, \ldots, \underset{\uparrow}{t+1}, \underset{\uparrow}{t-1}, \ldots, n-l-1, n-l-3, \ldots, 0, t)$$
$$\qquad\quad x_{n-t} \quad x_{n-t+1}$$
$$= \omega_t(a+n-2, n-1, \ldots, t+1, t, t-1, \ldots, n-l-1, n-l-3, \ldots, 0)$$
$$= \omega_t(v_{l+1}(a-1,0)+\delta).$$

对于 $t=n-1$, T 必须是 $[n-1]$，并且

$$v_l(a,0)+\delta+(n-1)e_n - T = (a+n-2, n-2, \ldots, n-l-1, n-l-3, \ldots, 0, n-1)$$
$$= \omega_{n-1}(a+n-2, n-1, n-2, \ldots, n-l-1, n-l-3, \ldots, 0)$$
$$= \omega_{n-1}(v_{l+1}(a-1,0)+\delta).$$

总而言之，对于每个 $0 \le t \le n-1$，至多存在一个 t-集合 $T \subseteq [n-1]$，使得$x^{v_l(a,0)+\delta}x^{-T}$ 可能具有不同的指数:

$$T = \begin{cases} \{n-t, \ldots, n-1\}, & 0 \le t \le n-l-2 \\ \{1, n-t+1, \ldots, n-1\}, & n-l-1 \le t \le n-1 \end{cases}.$$

对于这个集合 T，我们有

$$x^{v_l(a,0)+\delta}x^{-T} = \begin{cases} x^{\omega_{t+1}(v_l+\delta)}, & 0 \le t \le n-l-2 \\ x^{\omega_t(v_{l+1}(a-1,0)+\delta)}, & n-l-1 \le t \le n-1 \end{cases}.$$

我们得出

$$\left[x^{v_l(a,0)+\delta}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n$$
$$= \sum_{t=0}^{n-l-2}(-y)^t[x^{\omega_{t+1}(v_l(a,0)+\delta)}]F_n + \sum_{t=n-l-1}^{n-1}(-y)^t[x^{\omega_t(v_{l+1}(a-1,0)+\delta)}]F_n$$
$$= \sum_{t=0}^{n-l-2}y^t[x^{v_l(a,0)+\delta}]F_n - \sum_{t=n-l-1}^{n-1}y^t[x^{v_{l+1}(a-1,0)+\delta}]F_n$$
$$= \frac{1-y^{n-l-1}}{1-y}[x^{v_l(a,0)+\delta}]F_n - \frac{y^{n-l-1}-y^n}{1-y}[x^{v_{l+1}(a-1,0)+\delta}]F_n,$$

这就是所需的结果。 □

对于 $r \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \le s \le n-1$，我们定义

$$\beta(r,s) := ((r-1)(n-1)+s, \underbrace{-(r-1), \ldots, -(r-1)}_{n-s-1}, \underbrace{-r, \ldots, -r}_{s}) \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.19}$$

注意，$\beta(r,0) = \beta(r-1, n-1)$，且 $\beta(1,0) = 0$。借助引理 2.4，我们能够计算 $W(\alpha, y)$，其中 $\alpha = \beta(r,s)+\delta+ke_1$。

Lemm2.5. 设 y 为一个不定元，且 $k \in \mathbb{Z}$。对于 $1 \le s \le n-1$，我们有

$$\left[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^k\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right]F_n(z,q)$$

$$= \frac{1-y^s}{1-y}\left[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^k\right]F_n(z,q) - \frac{y^s-y^n}{1-y}\left[x^{\beta(r,s-1)+\delta}x_1^k\right]F_n(z,q). \tag{2.20}$$

T这归结为 [13, 引理 3.4]，当 $k=0$ 和 $r\geq 1$ 取特殊级数时 ies

$$F_n(z,q) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)\prod_{1\leq i\neq j\leq n}\frac{(qx_jx_i^{-1};q)_\infty}{(zx_jx_i^{-1};q)_\infty}. \tag{2.21}$$

证明。令 $a=(r-1)(n-1)+r+k+s$ 和 $l=n-s-1$。注意

$$\beta(r,s)+ke_1+r(e_1+\cdots+e_n) = v_l(a,0). \tag{2.22}$$

我们有

$$\left[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^k\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]F_n(z,q) = \left[x^{v_l(a,0)+\delta}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]x^rF_n(z,q). \tag{2.23}$$

注意

$$v_{l+1}(a-1,0) = \beta(r,s-1)+ke_1+r(e_1+\cdots+e_n). \tag{2.24}$$

Appl将引理 2.4 应用于 (2.23) 的右侧，得到所需公式 . □

从现在起，我们令 $\alpha(r):=(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^n$，其中 $0\leq r\leq n$。下面的r引理计算 $W(\alpha(r)+\delta,\ y)$ 和 $W(\alpha(r)+\delta+e_n,\ y)$。

引理 2.6. 设 y 为一个不定元。对于 $0\leq r\leq n-1$，我们有

$$\left[x^{\alpha(r)+\delta}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]F_n(z,q) = \frac{1-y^{n-r}}{1-y}\big[x^{\alpha(r)+\delta}\big]F_n(z,q), \tag{2.25}$$

$$\left[x^{\alpha(r)+\delta}x_n\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]F_n(z,q) = \frac{y^{n-r-1}-y^n}{1-y}\big[x^{\alpha(r+1)+\delta}\big]F_n(z,q). \tag{2.26}$$

证明。(1) 当 $r=0$ 时，(2.25) 恰好就是 (2.13)。

当 $r=n-1$ 时，利用 (2.14) 并注意到下式，我们得到 (2.25)：

$$\left[x^{\alpha(n-1)+\delta}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\ \Big)\right]F_n = \left[x^\delta x_n^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\ \Big)\right]x^{-1}F_n. \tag{2.27}$$

当 $1\leq r\leq n-2$ 时，我们有 $\alpha(r)=v_{r-1}(1,0)$。将引理 2.4 用于 $l=r-1$，利用这个简单事实即可得到 (2.25)：

$$[x^{v_r(0,0)+\delta}]F_n = 0,\quad 1\leq r\leq n-2. \tag{2.28}$$

(2) 现在我们来证明 (2.26)。当 $r=0$ 时，公式 (2.26) 恰好就是 (2.15)。当$r=n-1$时，由 (2.13) 显然可得

$$\left[x^{\alpha(n-1)+\delta}x_n\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]F_n = \left[x^\delta\prod_{i=1}^{n-1}\Big(1-y\frac{x_n}{x_i}\Big)\right]x^{-1}F_n = \frac{1-y^n}{1-y}[x^\delta x^{\alpha(n)}]F_n.$$

还需证明 $1\leq r\leq n-2$ 的 (2.26)。注意，$\alpha(r)+e_n=v_{r-1}(1,\ 1)$。我们记作$l=r-1$，并注意到 $0\leq l\leq n-3$。

若 $0 \le t \le n-l-3$，则 $l+2 \le n-t-1 \le n-1$，于是我们将 (2.17) 写为

$$v_l(1,1)+\delta = (n, n-1, \dots, n-l, n-l-2, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t-1}}}{t+1}, \dots, 1, t+1).$$

由此可得 $n-t-1 \in T$，进而有 $\{n-t-1, \dots, n-1\} \subseteq T$。然而，前一个集合是一个 $(t+1)$-集合，这与事实 $|T|=t$ 矛盾。因此，

$$[x^{v_l(1,1)+\delta+|T|e_n} x^{-T}] F_n = 0, \quad 0 \le t \le n-l-3. \tag{2.29}$$

若 $n-l-2 \le t \le n-1$，则 $0 \le n-t-1 \le l+1$，并且我们有

$$v_l(1,1)+\delta+te_n = (n, n-1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t-1}}}{t+2}, t+1, \dots, n-l, n-l-2, \dots, 1, t+1). \tag{2.30}$$

显然，在这种情况下，$n-t-1 \notin T$，进而有 $T \subseteq \{n-t, \dots, n-1\}$。由于 $|T|=t$，我们必须有 $T = \{n-t, \dots, n-1\}$。因此，

$$\begin{aligned} v_l(1,1)+\delta+te_n - T &= (n, n-1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t-1}}}{t+2}, t, \dots, n-l-1, n-l-3, \dots, 0, t+1) \\ &= \omega_{t+1}(n, n-1, \dots, t+2, t+1, t, \dots, n-l-1, n-l-3, \dots, 0) \\ &= \omega_{t+1}(v_{l+1}(1,0)+\delta). \end{aligned}$$

综合以上各种情况，我们推得

$$\begin{aligned} \left[x^{v_l(1,1)+\delta} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n(z,q) &= \sum_{t=n-l-2}^{n-1} (-y)^t [x^{\omega_{t+1}(v_{l+1}(1,0)+\delta)}] F_n(z,q) \\ = \sum_{t=n-l-2}^{n-1} y^t [x^{v_{l+1}(1,0)+\delta}] F_n(z,q) &= \frac{y^{n-l-2}-y^n}{1-y} [x^{v_{l+1}(1,0)+\delta}] F_n(z,q). \end{aligned}$$

□

在引理 2.6 中用 xF_n 替换 F_n，并用 $r-1$ 替换 r，即可得到以下推论。

推论 2.7. 对于 $1 \le r \le n$ 我们有

$$\left[\frac{x^\delta}{x_r \cdots x_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n = \frac{1-y^{n-r+1}}{1-y} \left[\frac{x^\delta}{x_r \cdots x_n}\right] F_n, \tag{2.31}$$

$$\left[\frac{x^\delta}{x_r \cdots x_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n = \frac{y^{n-r}-y^n}{1-y} \left[\frac{x^\delta}{x_{r+1} \cdots x_n}\right] F_n. \tag{2.32}$$

最后，我们给出 $W(\delta+ke_1-e_n, y)$的公式，即 $W(\delta+v_0(k,-1)\ y)$。

引理 2.8. 设 y 为一个不定元。对任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\left[x^\delta x_1^k x_n^{-1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1-y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n(z,q) = \left[x^\delta x_1^k x_n^{-1}\right] F_n(z,q) - \frac{y-y^n}{1-y} \left[x^\delta x_1^{k-1}\right] F_n(z,q). \tag{2.33}$$

证明。我们将指数向量写为

$$\delta+ke_1+(t-1)e_n = (n-1+k, n-2, \dots, 1, t-1). \tag{2.34}$$

当 $t=0$ 时，我们有 $T=\emptyset$。

如果 $1 \le t \le n-2$，那么 $2 \le n-t \le n-1$，且我们有

$$\delta + ke_1 + (t-1)e_n = (n-1+k, n-2, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n-t}}}{t}, \ldots, 1, t-1).$$

由此可得 $n-t \notin T$，进而得到 $T \subseteq \{1, n-t+1, \ldots, n-1\}$。由于 $|T| = t$，我们必有 $T = \{1, n-t+1, \ldots, n-1\}$。因此，

$$\begin{aligned}\delta + ke_1 + (t-1)e_n - T &= (n-2+k, n-2, \ldots, t, t-2, \ldots, 0, t-1)\\ &= \omega_t(n-2+k, n-2, \ldots, t, t-1, t-2, \ldots, 0)\\ &= \omega_t(\delta + (k-1)e_1).\end{aligned}$$

当 $t = n-1$ 时，T 必须是 $[n-1]$，并且

$$\begin{aligned}\delta + ke_1 + (t-1)e_n - T &= (n-2+k, n-3, \ldots, 0, n-2)\\ &= \omega_{n-1}(n-2+k, n-2, \ldots, 0) = \omega_{n-1}(\delta + (k-1)e_1).\end{aligned}$$

综合上述各种情况，我们得出

$$\begin{aligned}&\left[x^\delta x_1^k x_n^{-1} \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - y\frac{x_n}{x_i}\right)\right] F_n = [x^\delta x_1^k x_n^{-1}]F_n + \sum_{t=1}^{n-1}(-y)^t [x^{\omega_t(\delta+(k-1)e_1)}]F_n\\ &= [x^\delta x_1^k x_n^{-1}]F_n - \frac{y-y^n}{1-y}[x^\delta x_1^{k-1}]F_n.\end{aligned}$$

这就证明了所需的结论。 □

3. Proofs and generalizations of the SU(N) conjectures

现在我们给出第 1 节中所述猜想的证明及其推广。我们将依赖第 2 节中确立的关键结果。

3.1. SU()猜想。

我们建立下面的常数项恒等式，它推广了定理 1.2。

定理 3.1。设 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 且

$$C_k(z) := [(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^0] F_{k,n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{-1}) \tag{3.1}$$

其中

$$F_{k,n}(x) := \prod_{i \ne j}^{n} \frac{(x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(z x_i x_j^{-1}; q)_\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^k \in \mathbb{Z}[[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]]. \tag{3.2}$$

我们有

$$C_k(z) = 0, \quad k \not\equiv 0 \pmod{n} \tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}C_{nm}(z) = n!(-1)^{(n-1)m} q^{(n-1)m(m-1)/2} &\left(1 + \sum_{l=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{l}\frac{(q^m - z^i)(1 - z^{n-i})}{(1 - q^m z^{n-i})(1 - z^i)}\right)\\ &\times \frac{(z;q)_\infty^{n-1}}{(q;q)_\infty^{n-2}(qz^{n-1};q)_\infty (z;z)_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1}\frac{(z^i q^{1-m}, z^i q^m; q)_\infty}{(z^{i+1}, z^{i-1}q; q)_\infty}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们有

$$C_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x^m] F_{k,n}(x). \tag{3.5}$$

由于 $(x_i x_j^{-1}; q)_\infty / (z x_i x_j^{-1}; q)_\infty$ 是零次齐次的，$[x^m] F_{k,n}(x)$除非 $k = mn$否则为零，因为 $F_{k,n}$ 中每个单项式的次数为 k，而 x^m 的次数为 mn。因此

$$C_k(z) = 0, \quad k \not\equiv 0 \pmod{n} \tag{3.6}$$

and

$$C_{mn}(z) = [x^m] F_{mn,n}(x). \tag{3.7}$$

现在我们将 $[x^m] F_{mn,n}(x)$ 与一个反对称级数联系起来，以便运用第 2.2 节中的结果。我们有

$$\begin{aligned}
[x^m] F_{mn,n}(x) &= [x^0] x^{-m} \prod_{i \neq j}^{n} \frac{(x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(z x_i x_j^{-1}; q)_\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{nm} \\
&= [x^0] \prod_{i<j}^{n} (1 - x_i x_j^{-1})(1 - x_j x_i^{-1}) \cdot x^{-m} \prod_{i \neq j}^{n} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(z x_i x_j^{-1}; q)_\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{nm} \\
&= [x^0] \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)(x_i^{-1} - x_j^{-1}) \cdot x^{-m} \prod_{i \neq j}^{n} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(z x_i x_j^{-1}; q)_\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{nm} \\
&= \left[\prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j) \right] g_{m,n}(z, q) \sum_{i=1}^{n} x_i^{nm}
\end{aligned}$$

其中

$$g_{m,n}(z, q) := x^{-m} \prod_{i \neq j}^{n} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(z x_i x_j^{-1}; q)_\infty} \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j). \tag{3.8}$$

由于 $g_{m,n}(z, q)$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^{nm}$对于 $x_1, \ldots, x_n$是反对称的，由 (2.6) 得 e

$$[x^m] F_{mn,n}(x) = n! [x^\delta] g_{m,n}(z, q) \sum_{i=1}^{n} x_i^{nm}. \tag{3.9}$$

我们记

$$A_i(z, q) = A_{i,m,n}(z, q) := [x^\delta x_i^{-nm}] g_{m,n} \tag{3.10}$$

有时也将 $A_i(z, q)$ 简记为 A_i。于是由 (3.9) 可得

$$[x^m] F_{mn,n}(x) = n! \sum_{i=1}^{n} A_i(z, q). \tag{3.11}$$

现在我们旨在找出 A_i 之间的关系并显式计算它们。当 $m = 0$ 时，很容易看出

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n. \tag{3.12}$$

一般情形较为复杂，我们将在下文进行讨论。

我们首先陈述一个引理，它推广了 [13, 引理 3.3]。

引理 3.2. 对于任意 $\beta \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$q^{\beta_n+m}\left[x^{\beta}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}(z,q)=z^{n-1}\left[x^{\beta}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}(z,q). \tag{3.13}$$

这对应于引理 3.7 的特殊情形 $y=0$，我们稍后将证明它。

现在我们能够确定这些 A_i 之间的关系。

推论 3.3. 对于 $1 \le l \le n-1$ 我们有

$$A_{l+1}=\prod_{i=1}^{l}\frac{(q^m-z^i)(1-z^{n-i})}{(1-q^m z^{n-i})(1-z^i)}A_1. \tag{3.14}$$

证明。由引理 3.2，结合 $\beta=\delta-nme_l$，我们推得

$$q^m\left[x^{\delta}x_l^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}=z^{n-1}\left[x^{\delta}x_l^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}. \tag{3.15}$$

将 (2.9) 与 $y=z$ 一起应用于 (3.15) 的左侧，得到

$$\begin{aligned}
&q^m\left[x^{\delta}x_l^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}\\
&=q^m\frac{1-z^{n-l}}{1-z}[x^{\delta}x_l^{-nm}]g_{m,n}+q^m\frac{z^{n-l}-z^n}{1-z}[x^{\delta}x_{l+1}^{-nm}]g_{m,n}\\
&=q^m\frac{1-z^{n-l}}{1-z}A_l+q^m\frac{z^{n-l}-z^n}{1-z}A_{l+1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

将 (2.9) 与 $y=z^{-1}$ 一起应用于 (3.15) 的右侧，得到

$$\begin{aligned}
&z^{n-1}\left[x^{\delta}x_l^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}\\
&=z^{n-1}\frac{1-z^{l-n}}{1-z^{-1}}[x^{\delta}x_l^{-nm}]g_{m,n}+z^{n-1}\frac{z^{l-n}-z^{-n}}{1-z^{-1}}[x^{\delta}x_{l+1}^{-nm}]g_{m,n}\\
&=\frac{z^l-z^n}{1-z}A_l+\frac{1-z^l}{1-z}A_{l+1}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

将 (3.16) 和 (3.17) 代入 (3.15)，我们推得

$$A_{l+1}=\frac{(q^m-z^l)(1-z^{n-l})}{(1-q^m z^{n-l})(1-z^l)}A_l,\quad 1\le l\le n-1. \tag{3.18}$$

反复迭代即可得到 (3.14)。 □

与前一个推论类似，若将 (2.10) 应用于关于 $\beta=\delta-nme_n$ 的引理 3.2，则可推出

$$\sum_{l=1}^{n}(q^{-(n-1)m}z^{n-l}-z^{l-1})A_l=0.$$

若将它们用 A_1 表示，则可得到一个关于 z 的奇妙恒等式。本文虽不需要用到它，但它本身具有独立的研究价值。

推论 3.4. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\sum_{l=0}^{n}(q^{-nm}z^{n-l}-z^l)\prod_{i=1}^{l}\frac{(q^m-z^i)(1-z^{n-i+1})}{(1-q^mz^{n-i+1})(1-z^i)}=0. \tag{3.19}$$

注 1. 也可以直接利用 q-Chu-Vandermonde 求和公式 [7, (II.6)]证明

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix}a, q^{-n}\\ c\end{matrix};q,q\right)=\frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n}a^n \tag{3.20}$$

及其不变量（反转求和顺序） [7, (II.7)]

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix}a, q^{-n}\\ c\end{matrix};q,cq^n/a\right)=\frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n}. \tag{3.21}$$

这里的 ${}_r\phi_s$ 级数定义为（例如参见 [7, (1.2.22)]）

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r\\ b_1,b_2,\dots,b_s\end{matrix};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_n}{(q,b_1,b_2,\dots,b_s;q)_n}\Big((-1)^nq^{n(n-1)/2}\Big)^{1+s-r}z^n \tag{3.22}$$

其中 $q\neq 0$ whe n $r>s+1$。事实上，若我们写作 $q^m=t$，则 (3.19) 的左边变为

$$\begin{aligned}&t^{-n}z^n{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}t^{-1}z,z^{-n}\\ t^{-1}z^{-n}\end{matrix};z,z^{-1}\right)-{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}t^{-1}z,z^{-n}\\ t^{-1}z^{-n}\end{matrix};z,z\right)\\ &=t^{-n}z^n\frac{(z^{-n-1};z)_n}{(t^{-1}z^{-n};z)_n}-\frac{(z^{-n-1};z)_n}{(t^{-1}z^{-n};q)_n}(t^{-1}z)^n=0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

这里，第一个等号由 (3.20) 和 (3.21) 得出。这就证明了 (3.19)。

因此，我们有

$$\begin{aligned}&[x_1^0x_2^0\cdots x_{n-1}^0]F_{mn,n}(x_1,\dots,x_{n-1},(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{-1})=n!\sum_{l=1}^{n}A_l(z,q)\\ &=n!\left(1+\sum_{l=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{l}\frac{(q^m-z^i)(1-z^{n-i})}{(1-q^mz^{n-i})(1-z^i)}\right)A_1(z,q).\end{aligned} \tag{3.24}$$

当 $m=0$ 时，由 Stembridge 的结果 [13, 定理 3.1]，我们有

$$A_1=[x^\delta]g_{0,n}(z,q)=\frac{(z;q)_\infty^n}{(q;q)_\infty^{n-1}(z^n;q)_\infty(z;z)_{n-1}}. \tag{3.25}$$

我们将沿用 Stembridge 证明 [13, 定理 3.1] 的方法，对一般的 m 给出 A_1 的计算。这将是证明我们定理的一项关键结果。

定理 3.5. 我们有

$$A_{1,m,n}(z,q)=(-1)^{(n-1)m}q^{(n-1)m(m-1)/2}\frac{(z;q)_\infty^{n-1}}{(q;q)_\infty^{n-2}(qz^{n-1};q)_\infty(z;z)_{n-1}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(z^i q^{1-m}, z^i q^m; q)_\infty}{(z^{i+1}, z^{i-1}q; q)_\infty}. \tag{3.26}$$

证明. 在引理 3.2 中取 $\beta = \beta(r,s) + \delta - nme_1$，其中 $s > 0$，可得

$$\begin{aligned} & q^{m-r}\left[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}(z,q) \\ &= z^{n-1}\left[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^{-nm}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]g_{m,n}(z,q). \end{aligned} \tag{3.27}$$

应用引理 2.5，取 $k = -nm$ 与 $y = z$（相应地，$y = z^{-1}$），我们得到 (3.27) 左端（相应地，右端）的等价表达式，化简后得到如下关系：

$$[x^{\beta(r,s)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n} = \frac{(q^m z^s - q^r)(1 - z^{n-s})}{(q^m - q^r z^{n-s})(1 - z^s)}[x^{\beta(r,s-1)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n}. \tag{3.28}$$

回顾 $\beta(r+1,0) = \beta(r,n-1)$ 这一事实，利用 (3.28) 进行迭代，我们有

$$\begin{aligned} [x^{\beta(r+1,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n} &= [x^{\beta(r,n-1)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n} \\ &= \prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^m z^s - q^r)}{(q^m - q^r z^{n-s})}[x^{\beta(r,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n} \\ &= \prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^m z^s - q^r)}{(q^m - q^r z^s)}[x^{\beta(r,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

回顾 $A_1 = [x^{\beta(1,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n}$，因为 $\beta(1,0) = 0$。对 (3.29) 进行迭代，我们推出：对任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$[x^{\beta(k,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n} = \prod_{r=1}^{k-1}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^m z^s - q^r)}{(q^m - q^r z^s)}A_1.$$

换言之，我们有

$$A_1(z,q) = \prod_{r=1}^{k-1}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^m - q^r z^s)}{(q^m z^s - q^r)}[x^{\beta(k,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n}(z,q). \tag{3.30}$$

现在我们选取 $k > m$ 并令 $z = q^{k-m}$，则有

$$\begin{aligned} & [x^{\beta(k,0)+\delta}x_1^{-nm}]g_{m,n}(q^{k-m},q) \\ &= [x_1^{(k-m-1)(n-1)}x_2^{-(k-m-1)}\cdots x_n^{-(k-m-1)}]\prod_{i<j}^{n}(qx_i x_j^{-1};q)_{k-m-1}(x_j x_i^{-1};q)_{k-m} \\ &= (-1)^{(n-1)(k-m-1)}q^{(n-1)(k-m-1)(k-m)/2}[x^{\delta(n-1)}]g_{0,n-1}(q^{k-m},q). \end{aligned} \tag{3.31}$$

这里最后一个等式由 [13, (6)–(7)，第 782–783] 页得出。

注意,

$$\prod_{r=1}^{k-1}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^m-q^rq^{s(k-m)})}{(q^mq^{s(k-m)}-q^r)}=\prod_{s=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{k-1}(-q^{m-r})\frac{1-q^{s(k-m)+r-m}}{1-q^{s(k-m)+m-r}} \tag{3.32}$$
$$=(-1)^{(n-1)(k-1)}q^{(k-1)(n-1)m-(n-1)k(k-1)/2}$$
$$\times\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(1-q^{s(k-m)+1-m})\cdots(1-q^{s(k-m)+k-m-1})}{(1-q^{s(k-m)+m-1})\cdots(1-q^{s(k-m)+m-k+1})}$$
$$=(-1)^{(n-1)(k-1)}q^{(k-1)(n-1)m-(n-1)k(k-1)/2}$$
$$\times\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(1-q^{s(k-m)+1-m})\cdots(1-q^{(s+1)(k-m)-1})}{(1-q^{(s-1)(k-m)+1})\cdots(1-q^{s(k-m)+m-1})}$$
$$=(-1)^{(n-1)(k-1)}q^{(k-1)(n-1)m-(n-1)k(k-1)/2}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^{s(k-m)+1-m};q)_\infty(q^{s(k-m)+m};q)_\infty}{(q^{(s+1)(k-m)};q)_\infty(q^{(s-1)(k-m)+1};q)_\infty}.$$

将 (3.31) 和 (3.32) 代入 (3.30)，并利用 (3.25)，我们推得

$$A_1(q^{k-m},q)=(-1)^{(n-1)m}q^{(n-1)m(m-1)/2}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(q^{s(k-m)+1-m};q)_\infty(q^{s(k-m)+m};q)_\infty}{(q^{(s+1)(k-m)};q)_\infty(q^{(s-1)(k-m)+1};q)_\infty}$$
$$\times\frac{(q^{k-m};q)_\infty^{n-1}}{(q;q)_\infty^{n-2}(q^{1+(k-m)(n-1)};q)_\infty(q^{k-m};q^{k-m})_{n-1}}. \tag{3.33}$$

这就证明了关于 $z=q^{k-m}$ 的所需公式 (3.26)。由于 $k>m$ 是任意的，由引理 2.1 可知，(3.26) 对任意满足 $|z|<1$ 的 z 成立。□

定理 *3.1* 的证明。 由 (3.6) 我们得到 (3.3)。将 (3.26) 代入 (3.24)，我们得到 (3.4)。□

定理 *1.2* 的证明。 这由取 $z=0$ 时的定理 3.1 得出。 □

3.2. **该 SU$(N)^{-N-\frac{1}{2}}$猜想**。 我们的首要目标是建立如下推广定理 1.3 的常数项恒等式。

定理 3.6. 设

$$C_m^{(1)}(y,z):=[(x_1x_2\cdots x_{n-1})^0]F(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},(x_1x_2\dots x_{n-1})^{-1}) \tag{3.34}$$

其中

$$F_{m,n}^{(1)}(x):=\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(x_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac{1}{2}}x_iy;q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\in\mathbb{Z}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]. \tag{3.35}$$

我们有

$$C_0^{(1)}(y,z)=\frac{nn!(z;q)_\infty^n}{(q)_\infty^{n-1}(z^n;q)_\infty(z;z)_{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(yq^{\frac{1}{2}})^{nk}\prod_{t=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{t-1}}{1-q^tz^{r-1}}, \tag{3.36}$$

$$C_1^{(1)}(y,z)=\frac{n!(1-z^n)(z;q)_\infty^n}{(q;q)_\infty^{n-1}(1-z)(z^n;q)_\infty(z;z)_{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(yq^{\frac{1}{2}})^{nk-1}(1-q^k)}{z^n-q^{k-1}}\prod_{t=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{t-1}}{1-q^tz^{r-1}}. \tag{3.37}$$

注意，我们也可以将（3.36）写成

$$C_0^{(1)}(y,z)=\frac{nn!(z;q)_\infty^n}{(q)_\infty^{n-1}(z^n;q)_\infty(z;z)_{n-1}}{}_{n+1}\phi_n\left(\begin{matrix}z^{-1},z^{-2},\dots,z^{-n}\\ qz,qz^2,\dots,qz^{n-1}\end{matrix};q,(yq^{1/2})^nz^{n(n+1)/2}\right). \tag{3.38}$$

现在我们继续证明定理 3.6。我们有

$$C_m^{(1)}(y,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x^k]F_{m,n}^{(1)}(x). \tag{3.39}$$

注意，无穷乘积 $(x_ix_j^{-1};q)_\infty/(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty$ 是零次齐次的，而 $(q^{\frac{1}{2}}x_iy;q)_\infty/(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;q)_\infty$ 只包含幂次非负的单项式。因此，当 $nk<m$时，系数 $[x^k]F_{m,\ n}^{(1)}(x)$ 为零。于是 (3.39) 可改写为

$$C_m^{(1)}(y,z)=\sum_{k\geq\lceil m/n\rceil}^{\infty}[x^k]F_{m,n}^{(1)}(x), \tag{3.40}$$

其中，$\lceil m/n\rceil$ 表示不小于 m/n的最小整数。与第 3.1 节类似，我们有

$$[x^k]F_{m,n}^{(1)}(x)=n![x^\delta]h_k(z,q)\sum_{i=1}^{n}x_i^m \tag{3.41}$$

其中

$$h_k(z,q):=x^{-k}\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j)\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(zx_ix_j^{-1};q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac{1}{2}}x_iy;q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;q)_\infty}. \tag{3.42}$$

容易看出，对于 x_1、.....、 x_n， $h_k(z,\ q)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^m$是反对称的。

引理 3.7. 对于任意的 $\beta\in\mathbb{Z}^n$ 和 $1\leq\ell\leq n$，我们有

$$\begin{aligned}&q^{\beta_\ell+k}\left[x^\beta(1-q^{-\frac{1}{2}}yx_\ell^{-1})\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}\left(1-z\frac{x_\ell}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\&=z^{n-1}\left[x^\beta(1-q^{\frac{1}{2}}zyx_\ell^{-1})\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}\left(1-z^{-1}\frac{x_\ell}{x_i}\right)\right]h_k(z,q).\end{aligned} \tag{3.43}$$

当 $y=0$, $h_k(z;\ q)$ 变为 $g_{k,\ n}(z,\ \ q)$ 时，这个引理便归结为引理 3.2。在给出证明之前，我们先陈述一个简单但有用的事实：对于任意 $f(x)\in\mathbb{C}[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$，我们有

$$q^{\beta_i}[x^\beta]f(x_1,\dots,x_n)=[x^\beta]f(x_1,\dots,x_{i-1},qx_i,x_{i+1},\dots,x_n). \tag{3.44}$$

证明。 通过直接计算，我们发现

$$\frac{h_k(z,q;x_\ell\to qx_\ell)}{h_k(z,q)}=z^{n-1}q^{-k}\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}\frac{(1-z^{-1}x_ix_\ell^{-1})}{(1-zq^{-1}x_ix_\ell^{-1})}\times\frac{1-q^{\frac{1}{2}}x_\ell yz}{1-q^{\frac{1}{2}}x_\ell y}.$$

换言之，我们有

$$\begin{aligned}&h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-zx_ix_\ell^{-1})(1-q^{-\frac{1}{2}}x_\ell y)\Big|_{x_\ell\to qx_\ell}\\&=z^{n-1}q^{-k}h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-z^{-1}x_ix_\ell^{-1})(1-q^{\frac{1}{2}}x_\ell yz).\end{aligned}\tag{3.45}$$

利用事实 (3.44)，我们有

$$\begin{aligned}&[x^\beta]h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-zx_ix_\ell^{-1})(1-q^{-\frac{1}{2}}x_\ell y)\Big|_{x_\ell\to qx_\ell}\\&=q^{\beta_\ell}[x^\beta]h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-zx_ix_\ell^{-1})(1-q^{-\frac{1}{2}}x_\ell y)\\&=q^{\beta_\ell}\left[x^\beta(1-q^{-\frac{1}{2}}x_\ell^{-1}y)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-zx_i^{-1}x_\ell)\right]h_k(z,q).\end{aligned}\tag{3.46}$$

另一方面，利用 (3.45)，我们有

$$\begin{aligned}&[x^\beta]h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-zx_ix_\ell^{-1})(1-q^{-\frac{1}{2}}x_\ell y)\Big|_{x_\ell\to qx_\ell}\\&=[x^\beta]z^{n-1}q^{-k}h_k(z,q)\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}(1-z^{-1}x_ix_\ell^{-1})(1-q^{\frac{1}{2}}x_\ell yz)\\&=z^{n-1}q^{-k}\left[x^\beta(1-q^{\frac{1}{2}}zyx_\ell^{-1})\prod_{\substack{i=1\\i\neq\ell}}^{n}\left(1-z^{-1}\frac{x_\ell}{x_i}\right)\right]h_k(z,q).\end{aligned}\tag{3.47}$$

比较 (3.46) 和 (3.47)，即可得到所需结论。 □

当 $m=0$ 时，我们只需计算 $[x^\delta]h_k(z,\ q)$。

引理 3.8. 对于任意 $k\in\mathbb{N}^+$，我们有

$$[x^\delta]h_k(z,q)=(yq^{\frac{1}{2}})^n\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{k-1}}{1-q^kz^{r-1}}[x^\delta]h_{k-1}(z,q).$$

证明. 我们将在引理 3.7 中取 $\beta=\delta-(e_r+\cdots+e_{n-1})$，并使用推论 2.7。对于引理 3.7 的左侧，在推论 2.7 中取 $y=z$，可得

$$\begin{aligned}
&q^k\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_{n-1}}(1-q^{-\frac{1}{2}}yx_n^{-1})\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=q^k\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)-q^{k-\frac{1}{2}}y\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=q^k\frac{z^{n-r}-z^n}{1-z}\left[\frac{x^\delta}{x_{r+1}\cdots x_n}\right]h_k(z,q)-q^{k-\frac{1}{2}}y\frac{1-z^{n-r+1}}{1-z}\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\right]h_k(z,q);
\end{aligned}$$

对右侧取 $y=z^{-1}$，得到

$$\begin{aligned}
&z^{n-1}\left[x^\beta(1-q^{\frac{1}{2}}zyx_n^{-1})\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=z^{n-1}\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)-q^{\frac{1}{2}}z^ny\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=z^{n-1}\frac{z^{-(n-r)}-z^{-n}}{1-z^{-1}}\left[\frac{x^\delta}{x_{r+1}\cdots x_n}\right]h_k(z,q)-q^{\frac{1}{2}}z^ny\frac{1-z^{-(n-r+1)}}{1-z^{-1}}\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\right]h_k(z,q)\\
&=\frac{1-z^r}{1-z}\left[\frac{x^\delta}{x_{r+1}\cdots x_n}\right]h_k(z,q)-q^{\frac{1}{2}}y\frac{z^r-z^{n+1}}{1-z}\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\right]h_k(z,q).
\end{aligned}$$

因此，由引理 3.7 可得以下关系：对于 $1\le r\le n-1$,

$$\left[\frac{x^\delta}{x_{r+1}\cdots x_n}\right]h_k=\frac{yq^{\frac{1}{2}}(1-z^{n-r+1})(z^r-q^{k-1})}{(1-q^kz^{n-r})(1-z^r)}\left[\frac{x^\delta}{x_r\cdots x_n}\right]h_k. \tag{3.48}$$

类似地，对于带有 $\beta=\delta$ 的 (3.43) 左侧，我们有

$$\begin{aligned}
&q^k\left[x^\delta(1-q^{-\frac{1}{2}}yx_n^{-1})\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=q^k\left[x^\delta\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)-q^{k-\frac{1}{2}}y\left[x^\delta x_n^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=q^k\frac{1-z^n}{1-z}[x^\delta]h_k(z,q)-q^{k-\frac{1}{2}}y[x^\delta x_n^{-1}]h_k(z,q).\quad\text{(by Corollary 2.3)}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

对于带有 $\beta=\delta$ 的 (3.43) 右侧，我们有

$$\begin{aligned}
&z^{n-1}\left[x^\delta(1-q^{\frac{1}{2}}zyx_n^{-1})\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=z^{n-1}\left[x^\delta\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)-q^{\frac{1}{2}}z^ny\left[x^\delta x_n^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-z^{-1}\frac{x_n}{x_i}\right)\right]h_k(z,q)\\
&=\frac{1-z^n}{1-z}[x^\delta]h_k(z,q)-q^{\frac{1}{2}}z^ny[x^\delta x_n^{-1}]h_k(z,q).\quad\text{(by Corollary 2.3)}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

根据引理 3.7，(3.49) 和 (3.50) 中的两个表达式彼此相等，因此我们得出

$$[x^\delta]h_k(z,q)=\frac{yq^{\frac{1}{2}}(z^n-q^{k-1})(1-z)}{(1-z^n)(1-q^k)}[x^\delta x_n^{-1}]h_k(z,q), \tag{3.51}$$

这恰好是关系式 (3.48)，其中我们令 $r=n$，并同意 $\left[\frac{x^\delta}{x_{r+1}\cdots x_n}\right]h_k\big|_{r=n}:=[x^\delta]h_k$。

注意 $\left[\frac{x^\delta}{x_1\cdots x_n}\right]h_k=[x^\delta]h_{k-1}$。由 (3.48) 可得

$$\begin{aligned}[x^\delta]h_k&=\frac{yq^{\frac{1}{2}}(z^n-q^{k-1})(1-z)}{(1-z^n)(1-q^k)}[x^\delta x_n^{-1}]h_k\\&=\prod_{r=1}^{n}\frac{yq^{\frac{1}{2}}(1-z^{n-r+1})(z^r-q^{k-1})}{(1-q^kz^{n-r})(1-z^r)}\left[\frac{x^\delta}{x_1\cdots x_n}\right]h_k\\&=(yq^{\frac{1}{2}})^n\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{k-1}}{1-q^kz^{r-1}}[x^\delta]h_{k-1}.\end{aligned}$$

□

定理 *3.6* 的证明。由 (3.40) 和 (3.41) 可推得

$$\begin{aligned}C_0^{(1)}(y,z)&=[x_1^0x_2^0\cdots x_{n-1}^0]F_{0,n}(x_1,\dots,x_{n-1},(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{-1})\\&=n!\sum_{k=0}^{\infty}[x^\delta]h_k(z,q).\end{aligned} \tag{3.52}$$

由引理 3.8 可得

$$[x^\delta]h_k(z,q)=(yq^{\frac{1}{2}})^n\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{k-1}}{1-q^kz^{r-1}}[x^\delta]h_{k-1}(z,q)=(yq^{\frac{1}{2}})^{nk}\prod_{t=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\frac{z^r-q^{t-1}}{1-q^tz^{r-1}}[x^\delta]h_0(z,q). \tag{3.53}$$

我们有

$$\begin{aligned}[x^\delta]h_0(z,q)&=[x^0]\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(zx_ix_j^{-1};q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac{1}{2}}x_iy;q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;q)_\infty}\\&=[x^0]\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(zx_ix_j^{-1};q)_\infty}=[x^\delta]g_{0,n}(z,q),\end{aligned} \tag{3.54}$$

其中 $g_{m,\ n}(z,\ q)$ 在 (3.8) 中定义。注意，$(qx_ix_j^{-1};\ q)_\infty/(zx_ix_j^{-1};\ q)_\infty$ 的 x-次数为 0，而 $(q^{\frac{1}{2}}x_iy;\ q)_\infty/(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;\ q)_\infty$ 只包含具有非负次幂的单项式。因此，我们需要取 $(q^{\frac{1}{2}}x_iy;\ q)_\infty/(q^{\frac{1}{2}}x_iyz;\ q)_\infty$ 的常数项，即 1。这解释了 (3.54) 中最后一个等号。

将 (3.25) 代入 (3.54)，再将所得结果代入 (3.52)，即可得到 (3.36)。

当 $m=1$ 时，注意到

$$[x^\delta]h_k(z,q)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}[x^\delta x_i^{-1}]h_k(z,q)=[x^\delta x_n^{-1}]h_k(z,q) \tag{3.55}$$

由于 h_k 是反对称的，且对于 $1 \le i < n$，$x^\delta x_i^{-1}$ 的指数并不互异。利用 (3.41)，我们得到

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}(y,z) &= [x_1^0 x_2^0 \cdots x_{n-1}^0] F_{1,n}(x_1,\dots,x_{n-1},(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{-1}) \\ &= n! \sum_{k=0}^{\infty} [x^\delta] h_k(z,q) \sum_{i=1}^{n} x_i = n! \sum_{k=0}^{\infty} [x^\delta x_n^{-1}] h_k(z,q) \quad (\text{by } (3.55)) \\ &= n! \sum_{k=0}^{\infty} (yq^{\frac{1}{2}})^{nk-1} \frac{(1-z^n)(1-q^k)}{(z^n-q^{k-1})(1-z)} \prod_{t=1}^{k} \prod_{r=1}^{n} \frac{z^r - q^{t-1}}{1-q^t z^{r-1}} [x^\delta] g_{0,n}(z,q). \end{aligned}$$

这里，最后一个等式用到了 (3.51)、(3.53) 和 (3.54)。将 (3.25) 代入其中，得到 (3.37)。□

定理 *1.3* 的证明。令 $z=0$，由 (3.36) 和 (3.37) 即可得到此结论。注意，对于后者，我们还需要将 k 替换为 $k+1$。□

我们的第二个目标是证明定理 1.4。为方便起见，我们记

$$B_{i,k} := B_{i,k}(y,q) = [x^\delta (x_i \cdots x_n)^{-1}] h_k(0,q), \tag{3.56}$$

$$C_{i,m,k} := C_{i,m,k}(y,q) = [x^\delta x_i^{-m}] h_k(0,q). \tag{3.57}$$

显然，我们有 $[x^\delta] h_k = B_{1,\ k+1}$。由 (3.48) 取 $z=0$，可得

$$B_{i,k} = (-yq^{\frac{1}{2}})^{i-1} q^{(k-1)(i-1)} B_{1,k}, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.58}$$

由定理 3.6 的证明，我们得到

$$B_{1,k+1} = C_{i,0,k} = [x^\delta] h_k = \begin{cases} \frac{(-y)^{nk} q^{nk^2/2}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & k \ge 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

特别地，$k \ge 0$ 的情形可由 (3.53)、(3.54) 和 (3.25) 得出。

将 (3.59) 代入 (3.58)，可得

$$B_{i,k} = \begin{cases} (-y)^{n(k-1)+i-1} \frac{q^{n(k-1)^2/2 + (i-1)(k-\frac{1}{2})}}{(q;q)_{k-1} (q;q)_\infty^{n-1}}, & k \ge 1, \\ 0, & k \le 0. \end{cases} \tag{3.60}$$

由 (3.40) 和 (3.41) 可得

$$C_m^{(1)}(y,0) = n! \sum_{k=\lceil m/n \rceil}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} C_{i,m,k}(y,q) = n! \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n} C_{i,m,k}(y,q). \tag{3.61}$$

这里，最后一个等号成立是因为 $C_{i,m,k} = 0$ 当 $k < \lceil m/n \rceil$ 时。为了计算 $C_{i,m,k}$，我们需要以下事实，它是引理 3.7 的特殊情形 $z=0$：对于任意 $\beta \in \mathbb{Z}^n$ 和 $1 \le \ell \le n$，有

$$q^{\beta_\ell + k} \big([x^\beta] h_k(0,q) - q^{-\frac{1}{2}} y [x^\beta x_\ell^{-1}] h_k(0,q) \big) = (-1)^{n-1} [x^\beta x_\ell^n] h_{k-1}(0,q). \tag{3.62}$$

定理 3.9。令 $1 \le i \le n$。我们有

$$C_{i,0,k}(y,q) = \begin{cases} \frac{(-y)^{nk} q^{nk^2/2}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & k \ge 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \tag{3.63}$$

$$C_{i,m,k}(y,q)=\begin{cases}\frac{(-1)^{nk+1}y^{nk-m}q^{(nk^2+m)/2-(n+1-i)k}}{(q;q)_{k-1}(q;q)_\infty^{n-1}}, & n-i+1\le m\le n \text{ and } k>0,\\ 0, & 0<m<n-i+1 \text{ or } k\le 0.\end{cases}\tag{3.64}$$

此外，对于其他 m，我们有以下递推关系：

$$C_{i,m,k}(y,q)=\begin{cases}q^{\frac12}y^{-1}\big(C_{i,m-1,k}(y,q)+(-1)^nq^{m+i-k-n-1}C_{i,m-n-1,k-1}(y,q)\big), & m>n,\\ (-1)^{n-1}q^{k-i-m+1}\big(C_{i,m+n,k+1}(y,q)-yq^{-\frac12}C_{i,m+n+1,k+1}(y,q)\big), & m<0.\end{cases}\tag{3.65}$$

证明。 $m=0$ 的结果可以直接由(3.59)得到。

现在，我们假设 $1\le m\le n$。当 $1\le i<n-m+1$时，显然

$$C_{i,m,k}=[x^\delta x_i^{-m}]h_k(0,q)=0$$

由 $h_k(0,\ q)$的反对称性。对于 $n-m+1\le i\le n$，我们有

$$\begin{aligned}C_{i,m,k}&=[x^\delta x_i^{-m}]h_k=[\omega_{n-i+1}^{-1}(x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m})]h_k(0,q)\\&=(-1)^{n-i}[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m}]h_k(0,q).\end{aligned}\tag{3.66}$$

特别地，我们有

$$C_{n-m+1,m,k}=(-1)^{m+1}[x^\delta(x_{n-m+1}\cdots x_n)^{-1}]h_k(0,q)=(-1)^{m+1}B_{n-m+1,k}.\tag{3.67}$$

当 $n-m+2\le i\le n$ 时，幂为 $n-i-m\le -2$。因此，利用 (3.62)，取 $\ell=n$ 与 $\beta=\delta-(e_i+\cdots+e_{n-1})+(n-i-m+1)e_n$，我们推得

$$\begin{aligned}&q^{k+n-i-m+1}\big([x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m+1}]h_k(0,q)-q^{-\frac12}y[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m}]h_k(0,q)\big)\\&=(-1)^{n-1}[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{2n-i-m+1}]h_{k-1}(0,q)\end{aligned}$$

注意 $n-i-m\le -2$ 与 $m\le n$，因此

$$n-i+1\le 2n-i-m+1\le n-1,$$

由此可得 $[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{2n-i-m+1}]h_{k-1}(0,q)=0$。因此我们得到

$$[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m}]h_k(0,q)=y^{-1}q^{\frac12}[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m+1}]h_k(0,q).\tag{3.68}$$

对 (3.68) 进行迭代并与 (3.66) 结合，我们得到

$$\begin{aligned}C_{i,m,k}&=(-1)^{n-i}[x^\delta(x_i\cdots x_{n-1})^{-1}x_n^{n-i-m}]h_k(0,q)\\&=(-1)^{n-i}(y^{-1}q^{\frac12})^{m+i-n-1}[x^\delta(x_i\cdots x_n)^{-1}]h_k(0,q)=(-1)^{n-i}(y^{-1}q^{\frac12})^{m+i-n-1}B_{i,k},\end{aligned}\tag{3.69}$$

鉴于 (3.67)，该式对 $i=n-m+1$ 也成立。将 (3.60) 代入 (3.69)，我们便得到 $1\le m\le n$ 的所需公式。

递推关系 (3.65) 中的情形 $m>n$ 与 $m<0$ 可分别通过令 $\ell=i,\ \beta=\delta+(1-m)e_i$ 与 $\beta=\delta-(m+n)e_i$ 直接由 (3.62) 得到。特别地，对于 $m<0$ 情形，我们还需要将 k 替换为 $k+1$。□

定理 *1.4* 的证明。首先注意到

$$\langle W_m\rangle^{SU(N)_{-N-1/2}}(x;q)=C_N^{(1)}(x,0).\tag{3.70}$$

将 n 替换为 N 并令.....后，使用 (3.61) 和定理 3.9

$$Y_{i,m,k}(x,q)=(q;q)_\infty^{N-1}C_{i,m,k}(x,q),\tag{3.71}$$

即可得到所需结论。 □

推论 *1.5* 的证明。 当 $1 \le m \le n$ 时，将 (3.64) 中的 k 替换为 $k+1$，我们得到

$$C_{i,m,k+1}(y,q) = \begin{cases} \frac{(-1)^{nk+n+1} y^{nk+n-m} q^{(nk^2-n+m)/2+(k+1)(i-1)}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & k \ge 0 \text{ and } n-i+1 \le m \le n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.72}$$

将其代入 (3.61)，我们推得

$$C_m^{(1)}(y,q) = \frac{(-1)^{n+1}(yq^{\frac{1}{2}})^{n-m} n!}{(q;q)_\infty^{n-1}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-y)^{nk} q^{nk^2/2+(n-m)k}\big(1-q^{m(k+1)}\big)}{(q;q)_k (1-q^{k+1})}. \tag{3.73}$$

由 (3.71) 可知，这证明了 (1.30)。

当 $-n+1 \le m \le -1$ 时，则 $1 \le m+n < m+n+1 \le n$，由 (3.72) 可得，对于 $k \ge 0$ ，

$$C_{i,m+n,k+1}(y,q) = \begin{cases} \frac{(-1)^{nk+n+1} y^{nk-m} q^{(nk^2+m)/2+(k+1)(i-1)}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & 1-i \le m \le 0, \\ 0, & -n+1 \le m \le -i, \end{cases}$$

$$C_{i,m+n+1,k+1}(y,q) = \begin{cases} \frac{(-1)^{nk+n+1} y^{nk-m-1} q^{(nk^2+m)/2+(k+1)(i-1)+\frac{1}{2}}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & -i \le m \le -1, \\ 0, & -n+1 \le m < -i. \end{cases}$$

将它们代入 (3.65)，我们得到

$$\begin{aligned} C_{i,m,k}(y,q) &= (-1)^{n-1} q^{k-i-m+1}\big(C_{i,m+n,k+1}(y,q) - yq^{-\frac{1}{2}} C_{i,m+n+1,k+1}(y,q)\big) \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{nk+1} y^{nk-m} q^{(nk^2-m)/2-mk}}{(q;q)_k (q;q)_\infty^{n-1}}, & m=-i, k \ge 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.74}$$

于是由 (3.61) 可得

$$\begin{aligned} C_m^{(1)}(y,0) &= n! \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} C_{i,m,k}(y,q) = n! \sum_{k\in\mathbb{N}} C_{-m,m,k}(y,q) \\ &= \frac{-(yq^{\frac{1}{2}})^{-m} n!}{(q;q)_\infty^{n-1}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{nk} y^{nk} q^{nk^2/2-mk}}{(q;q)_k}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

结合 (3.71)，这就证明了 (1.31)。

当 $m=-n$ 时，由 (3.65) 可得

$$C_{i,-n,k}(y,q) = (-1)^{n-1} q^{k-i+n+1}\big(C_{i,0,k+1}(y,q) - yq^{-\frac{1}{2}} C_{i,1,k+1}(y,q)\big).$$

由 (3.64) 可知，$C_{i,1,k+1} \ne 0$ 仅当 $n-i+1 \le 1$ 时成立，即 $i=n$。因此，由此可得 (3.61)

$$C_{-n}^{(1)}(y,0) = n! \sum_{k\ge -1} \sum_{i=1}^{n} C_{i,-n,k}(y,q)$$

$$= (-1)^{n-1}n!\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{n} q^{k-i+n}C_{i,0,k}(y,q) - yq^{k-\frac{1}{2}}C_{n,1,k}(y,q)\right)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-y)^{nk}q^{nk^2/2+k}}{(q;q)_k}\sum_{i=1}^{n} q^{i-1} - \sum_{k>0} yq^{k-\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{nk+1}y^{nk-1}q^{(nk^2+1)/2-k}}{(q;q)_{k-1}}\right)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-y)^{nk}q^{nk^2/2+k}}{(q;q)_k}\frac{1-q^n}{1-q} + \sum_{k\geq 0}\frac{(-y)^{nk+n}q^{n(k+1)^2/2}}{(q;q)_k}\right).$$

这里，为了得到最后一个等式，我们在第二个求和中将 k 替换为 $k+1$。结合 (3.71)，这就证明了 (1.32)。

由 (3.65) 可得

$$C_{i,n+1,k}(y,q) = q^{\frac{1}{2}}y^{-1}\big(C_{i,n,k}(y,q) + (-1)^n q^{i-k}C_{i,0,k-1}(y,q)\big), \tag{3.76}$$
$$C_{i,-n-1,k}(y,q) = (-1)^{n-1}q^{k-i+n+2}\big(C_{i,-1,k+1}(y,q) - yq^{-\frac{1}{2}}C_{i,0,k+1}(y,q)\big). \tag{3.77}$$

因此，由 (3.61)、(3.63) 和 (3.72) 可得

$$C^{(1)}_{n+1}(y,0) = q^{\frac{1}{2}}y^{-1}n!\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n}\big(C_{i,n,k}(y,q) + (-1)^n q^{i-k}C_{i,0,k-1}(y,q)\big)$$
$$= \frac{q^{\frac{1}{2}}y^{-1}n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{nk+n+1}y^{nk}q^{nk^2/2+(k+1)(i-1)}}{(q;q)_k} + (-1)^n q^{i-k-1}\frac{(-y)^{nk}q^{nk^2/2}}{(q;q)_k}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\sum_{k\geq 0}\frac{(-y)^{nk-1}q^{(nk^2+1)/2}}{(q;q)_k}\left(\frac{1-q^{n(k+1)}}{1-q^{k+1}} - q^{-k}\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

这就证明了 (1.33)。

类似地，由 (3.61)、(3.63) 和 (3.74) 可得

$$C^{(1)}_{-n-1}(y,0) = (-1)^{n-1}n!\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{n} q^{k-i+n+2}\big(C_{i,-1,k+1}(y,q) - yq^{-\frac{1}{2}}C_{i,0,k+1}(y,q)\big)$$
$$= (-1)^{n-1}n!\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(q^{k+n+1}C_{1,-1,k+1}(y,q) - \sum_{i=1}^{n} yq^{k-i+n+\frac{3}{2}}C_{i,0,k+1}(y,q)\big)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\sum_{k\geq 0}\left(q^{k+n}\frac{(-y)^{nk+1}q^{(nk^2+1)/2+k}}{(q;q)_k} + \frac{(-y)^{nk+1}q^{(nk^2+1)/2+k}}{(q;q)_k}\sum_{i=1}^{n} q^{i-1}\right)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}n!}{(q;q)_\infty^{n-1}}\sum_{k\geq 0}\frac{(-y)^{nk+1}q^{(nk^2+1)/2+k}}{(q;q)_k}\left(q^{k+n} + \frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

这就证明了 (1.34)。 □

3.3. 关于SU(N)$_{-N-1}$ 的猜想。 我们首先证明以下新的常数项恒等式，它推广了定理 1.6。

定理3.10。设

$$C_m^{(2)}(y,z) := [(x_1x_2\cdots x_{n-1})^0]F_{m,n}^{(2)}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},(x_1x_2\dots x_{n-1})^{-1}) \tag{3.78}$$

其中

$$F_{m,n}^{(2)}(x) := \prod_{i\neq j}^{n}\frac{(x_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac12}x_iy,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1};q)_\infty}{(q^{-\frac12}x_iyz,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m. \tag{3.79}$$

我们有

$$C_0^{(2)}(y,z) = n!n\frac{(z;q)_\infty^n}{(q;q)_\infty^{n-1}(qz^n;q)_\infty(z;z)_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(z^iq^{-k},z^iq^{k+1};q)_\infty}{(z^{i+1},z^{i-1}q;q)_\infty}, \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}C_1^{(2)}(y,z) &= n!y^{-1}q^{1/2}\frac{(z;q)_\infty^n(1-z^n)}{(q;q)_\infty^{n-1}(1-z)(qz^n;q)_\infty(z;z)_n}\\ &\quad\times\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2}\frac{1-zq^k}{z^n-q^k}\prod_{i=1}^{n}\frac{(z^iq^{-k},z^iq^{k+1};q)_\infty}{(z^{i+1},z^{i-1}q;q)_\infty}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

注意

$$C_m^{(2)}(y,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}[(x_1x_2\cdots x_n)^k]F_{m,n}^{(2)}(x_1,\dots,x_n). \tag{3.82}$$

显然，我们有

$$\begin{aligned}[x^k]F_{m,n}^{(2)}(x) &= [x^0]x^{-k}\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(x_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac12}x_iy,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1};q)_\infty}{(q^{-\frac12}x_iyz,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\\ &= n![x^\delta]x^{-k}\prod_{i<j}^{n}(x_i-x_j)\prod_{i\neq j}^{n}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac12}x_iy,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1};q)_\infty}{(q^{-\frac12}x_iyz,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\\ &= n![x^0]x^{-k}\prod_{i<j}^{n}\frac{(qx_ix_j^{-1},x_jx_i^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z,x_jx_i^{-1}z;q)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{\frac12}x_iy,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1};q)_\infty}{(q^{-\frac12}x_iyz,q^{\frac12}x_i^{-1}y^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m.\end{aligned}$$

令 $y=x_{n+1}^{-1}q^{\frac12}$，则我们可以得到

$$\begin{aligned}&[x^k]F_{m,n}^{(2)}(x_1,\dots,x_n)\\ &= n![x^0]x^{-k}\prod_{i<j}^{n+1}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\frac{(x_jx_i^{-1};q)_\infty}{(x_jx_i^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\\ &= n!\sum_{t\in\mathbb{Z}}x_{n+1}^t[x^0x_{n+1}^t]x^{-k}\prod_{i<j}^{n+1}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\frac{(x_jx_i^{-1};q)_\infty}{(x_jx_i^{-1}z;q)_\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\\ &= n!\sum_{r=1}^{n}\sum_{t\in\mathbb{Z}}(y^{-1}q^{\frac12})^t[x^0x_{n+1}^0](x\cdot x_{n+1})^{-k}x_{n+1}^{k-t}x_r^m\prod_{i<j}^{n+1}\frac{(qx_ix_j^{-1};q)_\infty}{(x_ix_j^{-1}z;q)_\infty}\frac{(x_jx_i^{-1};q)_\infty}{(x_jx_i^{-1}z;q)_\infty}.\end{aligned}$$

由于现在有 $n+1$个变量，为方便起见，从这里直到本小节结束，我们重新设定以下记号：

- $x:=x_1\cdots x_{n+1}$,

- $\delta := (n, n-1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$,
- $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_{n+1}^{\beta_{n+1}}$ if $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

我们有

$$\begin{aligned}&[(x_1 \cdots x_n)^k] F_{m,n}^{(2)}(x_1, \dots, x_n)\\ &= n! \sum_{r=1}^{n} \sum_{t \in \mathbb{Z}} (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^t [x^0] x^{-k} x_{n+1}^{k-t} x_r^m \prod_{i<j}^{n+1} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(x_i x_j^{-1} z; q)_\infty} \frac{(x_j x_i^{-1}; q)_\infty}{(x_j x_i^{-1} z; q)_\infty}.\end{aligned}$$

注意，$\prod_{i<j}^{n+1} (q x_i x_j^{-1}; q)_\infty (x_j x_i^{-1}; q)_\infty / ((x_i x_j^{-1} z; q)_\infty (x_j x_i^{-1} z; q)_\infty)$只包含次数为 0 的齐次单项式，并且

$$[x^0] x^{-k} x_{n+1}^{k-t} x_r^m \prod_{i<j}^{n+1} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(x_i x_j^{-1} z; q)_\infty} \frac{(x_j x_i^{-1}; q)_\infty}{(x_j x_i^{-1} z; q)_\infty}$$

除非 $-(n+1)k + k - t + m = 0$，即 $t = m - nk$，否则其将消失。现在我们有

$$\begin{aligned}&[(x_1 \cdots x_n)^k] F_{m,n}^{(2)}(x_1, \dots, x_n)\\ &= n! \sum_{r=1}^{n} (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^{m-nk} [x^0] x^{-k} x_{n+1}^{(n+1)k-m} x_r^m \prod_{i<j}^{n+1} \frac{(q x_i x_j^{-1}; q)_\infty}{(x_i x_j^{-1} z; q)_\infty} \frac{(x_j x_i^{-1}; q)_\infty}{(x_j x_i^{-1} z; q)_\infty}\\ &= n! (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^{m-nk} \sum_{r=1}^{n} [x^\delta] x_{n+1}^{(n+1)k-m} x_r^m g_{k,n+1}(z, q)\\ &= n! (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^{m-nk} \sum_{r=1}^{n} [x^\delta x_{n+1}^{m-(n+1)k} x_r^{-m}] g_{k,n+1}(z, q) \qquad (3.83)\\ &= (-1)^n n! (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^{m-nk} \sum_{r=1}^{n} [x^{\delta+1} x_1^{m-(n+1)(k+1)} x_{r+1}^{-m}] g_{k,n+1}(z, q)\\ &= (-1)^n n! (y^{-1} q^{\frac{1}{2}})^{m-nk} \sum_{r=2}^{n+1} [x^\delta] x_1^{(n+1)(k+1)-m} x_r^m g_{k+1,n+1}(z, q). \qquad (3.84)\end{aligned}$$

这里，对于倒数第二行，我们使用了以下事实：$g_{k,n+1}$ 是反对称的，并且

$$\omega_{n+1}(x^{\delta+1} x_1^{m-(n+1)(k+1)} x_{r+1}^{-m}) = x^\delta x_{n+1}^{m-(n+1)k} x_r^{-m}. \qquad (3.85)$$

定理 3.10 的证明。(1) 当 $m = 0$ 我们有

$$\begin{aligned}&[(x_1 x_2 \cdots x_n)^k] F_{0,n}^{(2)}(x_1, \dots, x_n)\\ &= n! n (-1)^n y^{nk} q^{-nk/2} [x^\delta] x_1^{(n+1)(k+1)} g_{k+1,n+1}(z, q) \quad (\text{by (3.84)})\\ &= n! n (-1)^n y^{nk} q^{-nk/2} A_{1,k+1,n+1}(z, q). \quad (\text{by (3.10)}) \qquad (3.86)\end{aligned}$$

将定理 3.5 代入其中，再将所得结果代入 (3.82)，即可得到 (3.80)。

(2) 当 $m = 1$ 时，我们有

$$[(x_1 \cdots x_n)^k] F_{1,n}^{(2)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= n!(-1)^n y^{nk-1} q^{\frac{1-nk}{2}} \sum_{r=2}^{n+1} [x^\delta] x_1^{(n+1)(k+1)-1} x_r g_{k+1,n+1}(z,q) \quad (\text{by } (3.84))$$

$$= n!(-1)^n y^{nk-1} q^{\frac{1-nk}{2}} \sum_{r=2}^{n+1} [x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_r^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q)$$

$$= n!(-1)^n y^{nk-1} q^{\frac{1-nk}{2}} [x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q). \tag{3.87}$$

此处对于 t 最后一个等式中，我们利用了$g_{k+1,\ n+1}(z,\ q)$的反对称性来推出 t

$$[x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_r^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q) = 0, \quad 2 \le r \le n. \tag{3.88}$$

现在考虑含有 $n+1$ 个变量和 $\beta = \delta + (1-(n+1)(k+1))e_1 - e_{n+1}$ 的引理 3.2。对于 (3.13) 的左侧，由 (2.33) 可得

$$q^k \left[x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - z\frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \right] g_{k+1,n+1}(z,q) \tag{3.89}$$

$$= q^k [x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q) - q^k \frac{z - z^{n+1}}{1-z} [x^\delta x_1^{-(n+1)(k+1)}] g_{k+1,n+1}(z,q).$$

对于 (3.13) 的右侧，由 (2.33) 可得

$$z^n \left[x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - z^{-1}\frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \right] g_{k+1,n+1}(z,q) \tag{3.90}$$

$$= z^n [x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q) - \frac{1-z^n}{1-z} [x^\delta x_1^{-(n+1)(k+1)}] g_{k+1,n+1}(z,q).$$

结合 (3.89) 和 (3.90)，由引理 3.2 可推得

$$[x^\delta x_1^{1-(n+1)(k+1)} x_{n+1}^{-1}] g_{k+1,n+1}(z,q) = \frac{(1-z^n)(1-zq^k)}{(1-z)(z^n-q^k)} [x^\delta x_1^{-(n+1)(k+1)}] g_{k+1,n+1}(z,q)$$

$$= \frac{(1-z^n)(1-zq^k)}{(1-z)(z^n-q^k)} A_{1,k+1,n+1}(z,q). \tag{3.91}$$

将 (3.91) 代入 (3.87)，可得

$$[(x_1 \cdots x_n)^k] F_{1,n}^{(2)}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= n!(-1)^n y^{nk-1} q^{\frac{1-nk}{2}} \frac{(1-z^n)(1-zq^k)}{(1-z)(z^n-q^k)} A_{1,k+1,n+1}(z,q). \tag{3.92}$$

将定理 3.5 代入式 (3.92)，再将所得结果代入式 (3.82)，即可得到式 (3.81)。□

定理 *1.6* 的证明。令 $z = 0$，即可由定理3.10 得出此结论。对于后面的公式，我们还需要将 k 替换为 $k+1$。□

现在我们转而证明定理 1.7，它等价于

定理 3.11。设 $t=\lfloor m/(n+1)\rfloor$。我们有

$$C_m^{(2)}(y,0)=\begin{cases}\frac{n!}{(q;q)_\infty^n}y^{-m}q^{(m-n)t+m/2}\frac{1-q^{nt}}{1-q^t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2-mk}, & m\equiv 0 \pmod{n+1},\\ -\frac{n!}{(q;q)_\infty^n}y^{-m}q^{mt+m/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2-mk}, & m\not\equiv 0 \pmod{n+1}.\end{cases}\tag{3.93}$$

证明。对于任意 $\beta\in\mathbb{Z}^{n+1}$，由引理 3.2 及 $z=0$，我们有

$$[x^\beta]g_{m,n+1}(0,q)=(-1)^n q^{-\beta_{n+1}-m}[x^\beta x_{n+1}^{n+1}]g_{m-1,n+1}(0,q).\tag{3.94}$$

将 m 替换为 $m+1$，并将 β 替换为 $\beta-(n+1)e_{n+1}$，可将其写成等价形式：

$$[x^\beta]g_{m,n+1}(0,q)=(-1)^n q^{\beta_{n+1}-n+m}[x^\beta x_{n+1}^{-n-1}]g_{m+1,n+1}(0,q).\tag{3.95}$$

假设 $m=t(n+1)+r$ 且满足 $r\in[0,n]$，我们断言

$$\begin{aligned}&[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{m-(n+1)k}]g_{k,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(t-k)n}q^{(nk(k+1)+(n+2)t^2-nt)/2+rt-mk}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q).\end{aligned}\tag{3.96}$$

事实上，我们通过分别讨论 $t<k$、$t=k$ 和 $t>k$ 的情形来证明这一断言。当$t=k$时，(3.96)显然成立。当 $t<k$时，由 (3.94) 可得

$$\begin{aligned}&[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{m-(n+1)k}]g_{k,n+1}(0,q)=[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k)(n+1)+r}]g_{k,n+1}(0,q)\\&=(-1)^n q^{-(t-k)(n+1)-r-k}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k+1)(n+1)+r}]g_{k-1,n+1}(0,q)\\&=(-1)^n q^{-(t-k)(n+1)-r-k}\times(-1)^n q^{-(t-k+1)(n+1)-r-k+1}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k+2)(n+1)+r}]g_{k-2,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{2n}q^{-(n+1)[(t-k)+(t-k+1)]-2r-2k+(0+1)}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k+2)(n+1)+r}]g_{k-2,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(k-t)n}q^{-(n+1)[(t-k)+\cdots+(-1)]-(k-t)(r+k)+[0+\cdots+(k-t-1)]}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(t-k)n}q^{(n+1)(k-t)(k-t+1)/2-(k-t)(r+k)+(k-t)(k-t-1)/2}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(t-k)n}q^{(nk(k+1)+(n+2)t^2-nt)/2+rt-mk}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q).\end{aligned}$$

类似地，对于 $t>k$，由 (3.95) 可得

$$\begin{aligned}&[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{m-(n+1)k}]g_{k,n+1}(0,q)\\&=(-1)^n q^{(t-k)(n+1)+r-n+k}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k-1)(n+1)+r}]g_{k+1,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{2n}q^{(n+1)[(t-k)+(t-k-1)]+2(r-n+k)+(0+1)}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^{(t-k-2)(n+1)+r}]g_{k+2,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(t-k)n}q^{(n+1)[(t-k)+\cdots+1]+(t-k)(r-n+k)+[0+\cdots+(t-k-1)]}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)\\&=(-1)^{(t-k)n}q^{[nk(k+1)+(n+2)t^2-nt]/2+rt-mk}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q).\end{aligned}$$

由于 $g_{t,n+1}$ 是反对称的，(3.96) 的右侧除非 $r=0$ 或 $r=n+1-i$，否则为零。现在我们计算当 $r=0$ 或 $n+1-i$时的$[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)$。对于 $r=0$,

$$[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)=[x^\delta x_i^{-t(n+1)}]g_{t,n+1}(0,q)=A_{i,t,n+1}(0,q).\tag{3.97}$$

对于 $r=n+1-i$，我们有

$$[x^\delta x_i^{-(t+1)(n+1)+i}x_{n+1}^{n+1-i}]g_{t,n+1}(0,q)=-[x^\delta x_{n+1}^{-t(n+1)}]g_{t,n+1}(0,q)=-A_{n+1,t,n+1}(0,q).\tag{3.98}$$

事实上，如果交换 x_i 和 x_{n+1}，那么 $x^\delta x_i^{-(t+1)(n+1)+i}x_{n+1}^{n+1-i}$就变为 $x^\delta x_{n+1}^{-t(n+1)}$ 和$g_{t,\ n+1}(0,\ q)$变为$-g_{t,\ n+1}(0,\ q)$。

由 (3.14) 和 (3.26)，我们得到

$$A_{l,t,n+1}(0,q)=q^{(l-1)t}A_{1,t,n+1}(0,q)=(-1)^{nt}q^{(l-1)t+nt(t-1)/2}(q;q)_\infty^{-n} \tag{3.99}$$

其中 $1\le l\le n+1$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
C_m^{(2)}(y,0)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}[(x_1\cdots x_n)^k]F_{m,n}^{(2)}(x_1,\dots,x_n)\quad(\text{by (3.82)})\\
&=n!(y^{-1}q^{\frac12})^m\sum_{k\in\mathbb{Z}}(yq^{-\frac12})^{nk}\sum_{i=1}^{n}[x^\delta x_{n+1}^{m-(n+1)k}x_i^{-m}]g_{k,n+1}(0,q)\quad(\text{by (3.83)})\\
&=n!(y^{-1}q^{\frac12})^m\sum_{k\in\mathbb{Z}}(yq^{-\frac12})^{nk}(-1)^{(t-k)n}q^{[nk(k+1)+(n+2)t^2-nt]/2+rt-mk}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{n}[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,n+1}(0,q)\quad(\text{by (3.96)}).
\end{aligned}$$

若 $m\equiv 0$ (模 $n+1$)，则 $r=0$。由 (3.97) 和 (3.99)，我们得到

$$\begin{aligned}
C_m^{(2)}(y,0)&=n!(y^{-1}q^{\frac12})^m\sum_{k\in\mathbb{Z}}(yq^{-\frac12})^{nk}(-1)^{(t-k)n}q^{[nk(k+1)+(n+2)t^2-nt]/2+rt-mk}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{n}(-1)^{nt}q^{(i-1)t+nt(t-1)/2}(q;q)_\infty^{-n}\\
&=\frac{n!}{(q;q)_\infty^n}y^{-m}q^{(m-n)t+m/2}\frac{1-q^{nt}}{1-q^t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2-mk}.
\end{aligned}$$

若 $m\not\equiv 0$ (模 $n+1$)，则 $1\le r\le n$。由 (3.98)、(3.99) 以及上述事实：$[x^\delta x_i^{-m}x_{n+1}^r]g_{t,\ n+1}$ 除非 $i=n+1-r$，否则为零，可推出

$$\begin{aligned}
C_m^{(2)}(y,0)&=-n!(y^{-1}q^{\frac12})^m\sum_{k\in\mathbb{Z}}(yq^{-\frac12})^{nk}(-1)^{(t-k)n}q^{[nk(k+1)+(n+2)t^2-nt]/2+rt-mk}\\
&\quad\times(-1)^{nt}q^{nt+nt(t-1)/2}(q;q)_\infty^{-n}\\
&=-\frac{n!}{(q;q)_\infty^n}y^{-m}q^{m/2+mt}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{nk}y^{nk}q^{nk^2/2-mk}.
\end{aligned}$$

□

定理 *1.7* 的证明。将 n 和 N 替换后，即可由定理 3.11 得出此结论。 □

推论 *1.8* 的证明。由定理 1.7 和 $N=3$ 可得。注意，我们需要在 (1.37) 中用 $k+m$ 替换 k，并且也要使用 (1.10)。□

细心的读者或许已经注意到，猜想 1.1 的第一个断言取决于 m模 3。仅从 (1.17) 中不容易看出这一点（尽管验证起来并不困难）。因此，我们给出下面关于 $\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}$ 的递推关系，由此可以看出猜想 1.1。

推论 3.12. 我们有

$$\langle W_{m+3}\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q)=\begin{cases}\frac{q^{\frac{m}{4}}}{(1+q^{\frac{m}{4}}+q^{-\frac{m}{4}})}\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q), & m=4\alpha,\\ (1+q^{\frac{m+3}{4}}+q^{\frac{2m+6}{4}})\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q), & m=4\alpha+1,\\ -q^{\frac{3m+6}{4}}\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q), & m=4\alpha+2,\\ -q^{\frac{3m+3}{4}}\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q), & m=4\alpha+3.\end{cases}\tag{3.100}$$

证明。若 $m=4\alpha$，则由 (1.38) 和 (1.10) 可得

$$\begin{aligned}\langle W_{m+3}\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q)&=\frac{q^{\frac{3}{4}(m+3)^2-\frac{1}{4}(m+3)}}{(q;q)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{3k+2(m+3)}q^{\frac{3}{2}k^2+2(m+3)k}\\&=\frac{q^{\frac{3}{4}m^2+\frac{1}{4}m}}{(q;q)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{3(k+2)+2m}q^{\frac{3}{2}(k+2)^2+2m(k+2)}\\&=\frac{q^{\frac{m}{4}}}{1+q^{\frac{m}{4}}+q^{-\frac{m}{4}}}\langle W_m\rangle^{\mathrm{SU}(3)_{-4}}(x;q).\end{aligned}$$

运用类似的论证，我们可以得到其余情形。 □

4. 一些副产品与评注

根据第 1 节陈述的结果及其证明，我们可以得到一些常数项恒等式作为副产品。为与其中的定理保持一致，我们仍将它们表述为积分的形式。如第 2 节所示，本节中的积分与 U(N) Chern–Simons理论产生的半指标相关。

推论 4.1。 我们有

$$\frac{(q;q)_\infty^N}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^N\frac{dt_i}{2\pi i t_i}\right)\left(\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty\right)\sum_{i=1}^N t_i^m=\begin{cases}N(q;q)_\infty, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases}\tag{4.1}$$

证明。我们将左侧的积分记为 $L_m(q)$。设 $t=t_1t_2\cdots t_N$。我们将$t_i=t^{1/N}s_i$写成含 $s_1s_2\cdots s_N=1$ 的形式。我们有

$$\prod_{i=1}^N\oint\frac{dt_i}{2\pi i t_i}=\oint\frac{dt}{2\pi i t}\prod_{i=1}^{N-1}\oint\frac{ds_i}{2\pi i s_i}.\tag{4.2}$$

由 (4.2)，我们有

$$L_m(q)=\oint\frac{dt}{2\pi i t}t^{m/N}\oint\left(\prod_{i=1}^{N-1}\frac{ds_i}{2\pi i s_i}\right)\left(\prod_{i\neq j}^N(s_is_j^{-1};q)_\infty\right)\sum_{i=1}^N s_i^m.\tag{4.3}$$

于是显然，对 $m\neq 0$ 有 $L_m(q)=0$，并且利用定理 1.2，我们得到 $L_0(q)$ 的所需表达式。
□

推论 4.2. 我们有

$$\frac{(q;q)_\infty^N}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^N\frac{dt_i}{2\pi i t_i}\right)\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty\prod_{i=1}^N(q^{\frac{1}{2}}t_iy;q)_\infty\sum_{i=1}^N t_i^m=(q;q)_\infty\sum_{i=1}^N Y_{i,m,0}(y,q)\tag{4.4}$$

其中 $Y_{i,m,k}(y,q)$ 在定理 *1.4* 中定义。

证明。 我们将左侧的积分记作 $L_m(q)$。回顾在 (3.35) 中定义的函数 $F_{(1)\,m,\ N}(x)$。我们有

$$\begin{aligned} L_m(q) &= [(t_1\cdots t_N)^0]F^{(1)}_{m,N}(t_1,\dots,t_N)\big|_{z=0} \\ &= N![t^{\delta(N)}]h_0(0,q)\sum_{i=1}^N t_i^m = N!\sum_{i=1}^N C_{i,m,0}(y,q). \end{aligned}$$

这里， $h_k(z,\ q)$ 是在 (3.42) 中定义的，其中 $n=N$ 和 x_i 被 t_i 替换；对于第二个和最后一个等式，我们分别使用了 (3.41) 和 (3.57)。于是，由 (3.71) 可得所需公式。□

因此，我们有

$$\frac{(q;q)_\infty^N}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^N\frac{dt_i}{2\pi i t_i}\right)\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty\prod_{i=1}^N(q^{\frac12}t_iy;q)_\infty\sum_{i=1}^N t_i^m=\begin{cases}N(q;q)_\infty, & m=0,\\ 0, & m\geq 1.\end{cases}\tag{4.5}$$

情形 $m\geq 1$ 几乎是平凡的，而情形 $m=0$ 也可直接由推论 4.1 证明。注意，第一个乘积 $\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty$ 展开后的任意项的次数均为 0，而第二个乘积 $\prod_{i=1}^N(q^{\frac12}t_iy;\ q)_\infty\sum_{i=1}^N t_i^m$ 展开后的任意项的次数均为 $\geq m$。由于 $m\geq 0$，只有当两个乘积都取常数项时，才会出现常数项。因此，当 $m>0$ 时， $L_m(q)=0$ ，并且

$$L_0(q)=N[(t_1t_2\cdots t_N)^0]\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty=N\oint\left(\prod_{i=1}^N\frac{dt_i}{2\pi i t_i}\right)\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty.\tag{4.6}$$

现在利用推论 4.1，我们得到 (4.5)。

推论 4.3. 设 $t=\lfloor m/(N+1)\rfloor$。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{(q;q)_\infty^N}{N!}\oint\left(\prod_{i=1}^N\frac{dt_i}{2\pi i t_i}\right)\prod_{i\neq j}^N(t_it_j^{-1};q)_\infty\prod_{i=1}^N(q^{\frac12}t_i^{\pm}y^{\pm};q)_\infty\sum_{i=1}^N t_i^m\\ &=\begin{cases}y^{-m}q^{(m-N)t+m/2}\frac{1-q^{Nt}}{1-q^t}, & m\equiv 0 \pmod{N+1},\\ -y^{-m}q^{mt+m/2}, & m\not\equiv 0 \pmod{N+1}.\end{cases}\end{aligned}\tag{4.7}$$

证明。 我们将左侧的积分记为 $L_m(q)$。回顾式 (3.79) 中定义的函数 $F_{(2)\,m,N}(x)$。由 (3.83) 可得

$$L_m(q)=[t^0]F^{(2)}_{m,N}(t_1,t_2,\dots,t_N)\big|_{z=0}=N!y^{-m}q^{m/2}\sum_{i=1}^N[t^{\delta(N)}t_{N+1}^mt_i^{-m}]g_{0,N+1}(0,q).\tag{4.8}$$

如同定理 3.11 的证明，我们将 $m=t(N+1)+r$ 写成带有 $0\leq r\leq N$。然后由 (3.96)，我们有

$$[t^{\delta(N)}t_{N+1}^mt_i^{-m}]g_{0,N+1}(0,q)=(-1)^{tN}q^{[(N+2)t^2-Nt]/2+rt}[t^{\delta(N)}t_i^{-m}t_{N+1}^r]g_{t,N+1}(0,q).\tag{4.9}$$

当 $m \equiv 0$ （模 $N+1$）时，即 $r=0$，由 (3.97) 和 (3.99)，我们有

$$\begin{aligned} L_m(q) &= N! y^{-m} q^{m/2} \sum_{i=1}^{N} (-1)^{tN} q^{[(N+2)t^2-Nt]/2} (-1)^{Nt} q^{(i-1)t+Nt(t-1)/2} (q;q)_\infty^{-N} \\ &= \frac{N!}{(q;q)_\infty^N} y^{-m} q^{(m-N)t+m/2} \frac{1-q^{Nt}}{1-q^t}. \end{aligned}$$

当 $m \not\equiv 0 \pmod{N+1}$ 时，由（3.98）、（3.99）以及以下事实，

$$[t^{\delta(N)} t_i^{-m} t_{N+1}^r] g_{t,N+1}(0,q) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq N+1-r,$$

我们得到

$$\begin{aligned} L_m(q) &= N! y^{-m} q^{m/2} (-1)^{tN} q^{[(N+2)t^2-Nt]/2+rt} [t^{\delta(N)} t_{N+1-r}^{-m} t_{N+1}^r] g_{t,N+1}(0,q) \\ &= N! y^{-m} q^{m/2} (-1)^{tN+1} q^{[(N+2)t^2-Nt]/2+rt} A_{N+1,t,N+1}(0,q) \\ &= N! y^{-m} q^{m/2} (-1)^{tN+1} q^{[(N+2)t^2-Nt]/2+rt} (-1)^{Nt} q^{Nt+Nt(t-1)/2} (q;q)_\infty^{-N} \\ &= -\frac{N!}{(q;q)_\infty^N} y^{-m} q^{mt+m/2}. \end{aligned}$$

□

我们以几点备注结束本文。迄今为止，我们已经完成了计算初始情形 $k = 0, 1/2, 1$ 下 SU(N)$_{-N-k}$ Chern–Simons理论的半指标和威尔逊线的任务，并验证了 [12] 中一些引人入胜的猜想。Okazaki 和 Smith [12, 第 5.4 节和第 5.5] 节还提出了一些关于 SU(N)$_{-N-k}$、满足 $k = M$ 和 $M - 1/2$ 的猜想公式。然而，相应的公式 [12, 式（5.35）、（5.38）和（5.41）] 相当复杂，我们不确定能否采用本文的方法处理。此外，在后续工作中，他们 [11] 还研究了具有（特殊）酉、辛、正交和例外规范群的三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称 Chern–Simons理论的线缺陷半指标，以及带有伴随手征场的伴随理论。文中提出了许多优美公式，将半指标表示为 eta乘积。我们计划在后续论文中讨论这些公式。

致谢。本工作得到中国国家重点研发计划（项目编号：2024YFA1014500）的资助。

References

[1] G.E. Andrews，基本超几何函数的问题与展望，《特殊函数理论与应用》（R. Askey 编），Academic Press，纽约，1975，第191–224页。[2] G.E. Andrews，《分拆理论》，Addison–Wesley，1976；剑桥再版，1998。[3] R. Askey 与 J. Wilson，推广雅可比多项式的若干基本超几何正交多项式，Mem. Amer. Math. Soc.54 (1985)。[4] T. Dimofte、D. Gaiotto 与 N. M. Paquette，三维超共形场论中的对偶边界条件，《高能物理杂志》5 (2018)，论文编号 60。[5] J. Frye 与 F.G. Garvan，θ函数恒等式的自动证明，《量子场论中的椭圆积分、椭圆函数与模形式》，Texts Monogr. Symbol. Comput.，Springer，Cham，2019，第195–258页。[6] A. Gadde、S. Gukov 与 P. Putrov，五膜与四维流形，Prog. Math. 319 (2016)，155–245。[7] G. Gasper 与 M. Rahman，《基本超几何级数》，《数学及其应用百科全书》，第2版，第35卷，剑桥大学出版社，2004。

[8] I.G. Macdonald，《对称函数与霍尔多项式》，牛津，1979。[9] I.G. Macdonald，《关于根系的一些猜想》，《SIAM 数学分析杂志》13 (1982)，988–1007。[10] T. Okazaki 与 D.J. Smith，边界禁闭对偶与 Askey-Wilson 型 q-beta 积分，《高能物理杂志》 8 (2023)，048。[11] T. Okazaki 与 D.J. Smith，带缺陷的 Chern–Simons 理论、Rogers–Ramanujan 型函数与 eta 乘积，arXiv: 2408.07893v2。[12] T. Okazaki 与 D.J. Smith，SU(N) Chern-Simons 理论的线缺陷半指标，《高能物理杂志》6 (2024)，论文编号 42。[13] J.R. Stembridge，关于 A 型根系的 MacDonald 猜想的一个简短证明，《美国数学会会刊》102(4) (1988)，777–786。[14] Y. Yoshida 与 K. Sugiyama，三维 $\mathcal{N} = 2$ 超对称理论在$S^1 \times D^2$上的局域化，PTEP no. 11, (2020) 113B02。[15] D. Zeilberger 与 D. Bressoud，Andrews 的 q-Dyson 猜想的一个证明，《离散数学》54 (1985)，201–223。(L. Wang) School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, People's Republic of China电子邮箱: wanglq@whu.edu.cn;mathlqwang@163.com (Y. Yue) School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, People's Republic of China电子邮箱: yiyangyue@whu.edu.cn