arXiv:2603.01242v1 [math.PR] 1 Mar 2026

一维空间随机置换的指数局域化

´REUBEN DROGIN、FELIPE HERNANDEZ

Abstract. 我们研究一类区间 $[-n,n]$ 上的随机置换，其中点通常会移动距离 $O(W)$。我们证明，这些圈以 W^3 为尺度局域化，并且具有指数衰减的尾界。与一维随机带状矩阵的本征函数类似，我们推测这些圈局域化的尺度为 W^2.

1. Introduction

对于 $p \in [1,\infty]$ 和 $W \geq 1$，考虑一个置换 $\pi\colon\ [-n,n] \to [-n,n]$，它从以下玻尔兹曼–吉布斯分布中抽取

$$\mathbb{P}_{p,W,n}(\pi) \propto \exp\left(-\frac{1}{W^p}\sum_{i\in[-n,n]}|\pi(i)-i|^p\right). \tag{1}$$

若 $p=\infty$ 我们取 $\mathbb{P}_{\infty,W,n}$ 为置换上的均匀分布，其中点的移动距离至多为 W，则该分布为

$$\mathbb{P}_{p,W,n}(\pi) \propto 1_{\max\limits_{i\in[-n,n]}|\pi(i)-i|\leq W}. \tag{2}$$

这一模型及相关模型有时称为“空间随机置换”。更多背景和相关研究见下文。参数 W 可以视为一个点的典型位移；我们证明，这类置换的圈会指数局域化在尺度 W^3 上。

定理 1。对于任意 $p \in [1,\infty]$、λ、n、$W \geq 1$ 和 $j \in [-n,n]$，我们有

$$\mathbb{P}_{p,W,n}\left(\operatorname{diam} C_\pi(j) \geq \lambda\right) \leq 2\exp\left(-c\frac{\lambda}{W^3}\right),$$

其中 $c>0$ 在所有参数中均为均匀分布，而 $C_\pi(j)$ 是在给定 π 的情况下，j 在 π 中的循环 y

$$C_\pi(j) := \{\pi^k(j) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

日期：2026年3月3日。

1.1. 背景与相关工作。 本文所研究的这一特定模型类别此前已在多项研究中探讨过 [4, 15, 19, 2]„ 其中有两项尤为相关。在 [14], Fyodorov 和 Muirhead 提出了如下猜想:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{diam}\, C_\pi(j) \sim \min(W^2, n),$$

并证明了当 $p = 1$ 这些排列呈现出“带状结构”，其意义为 $\mathbb{E}|\pi(0) - 0| = c(1 + o(1))W$. 最近，Zhong [22] 证明了这一猜想，当 $p = 1$ 时采用“hit and run”抽样。

模型(1)属于更大一类“空间随机置换”；早在1950年代，费曼就将其作为 [13] 中量子玻色气体的模型加以考虑，Mallows则将其作为 [18]中含噪排序的模型。这类模型还包括曼哈顿弹球、洛伦兹镜模型、交换过程，以及Mallows模型；在Mallows模型中，人们用 π的逆序数取代(1)中的位移。所有这些模型中的圈预期都会表现出相似的局域化长度；这一点已由Gladkich和Peled [16], 在Mallows模型的一维情形中证明，并由Kozma和Sidoravicius在未发表的工作中对交换过程加以证明。本文给出的论证相当稳健，可以推广到这些模型；然而，若没有类似于注1中的估计，其精确性会相差 W的一个幂次。

这类模型的一个主要未决问题，见 [20, 3, 16, 2], ，是证明这些模型中的圈是离域的，即当 $d \geq 3$ 时，其大小通常为 n阶；而当 $d = 2$时则是局域化的，尺度为 $O(e^{cW^2})$，其中 W 针对该模型被适当地定义。最近，当 $d \geq 5$ 时，在交换过程、曼哈顿弹球等各种模型中已取得巨大进展，见 [11, 8, 9]。对于树上的交换过程 [1, 17]，这一点也是已知的。在 $d = 2$,3中证明这一点似乎超出了现有方法的能力（不过可参见 [10] ，其中对一个连续模型证明了这一点）。

最后，我们简要提及与一类量子模型的联系。若将排列 π 视为一个矩阵，则可验证该矩阵特征向量的分量在 π的圈上具有支撑集。因此，定理 1可解释为表明该置换矩阵的本征函数局域化到尺度 W^3。所猜想的局域化长度 W^2 与对随机带状矩阵的本征函数所猜想的相同。关于一维随机带状矩阵的这一猜想最近已被解决，见 [21, 12, 5]。在 $d \geq 2$ 中，随机带状矩阵的本征函数预期会表现出与上文对空间随机置换中的圈所猜想的相同局域化长度。关于这方面的最新进展，我们建议读者参阅 [7, 6]。

2. Proof of Theorem 1

2.1. 定理 1 的证明，当 $p = \infty$。 当 $p = \infty$ 时，证明最为清晰，因此我们先证明这种情形。我们对 $C_\pi(0)$证明这一点，因为对 $C_\pi(j)$ 的论证相同。思路是，如果 $C_\pi(0)$ 与 $\lambda + 2W > 0$交叉，那么它在返回 0 的途中也必定与 $\lambda + 2W$ 交叉，见下方图1。因此，可以找到两个点的一个换位 $(a\ b)$

使得 $\max C_{\pi\circ(a\ b)}(0) \in (\lambda,\ \lambda+2W]$. 这使我们能够将满足 $\max\ C_\pi(0)\ > \lambda+2W$ 的 π 的数量，以满足 $\max\ C_\pi(0)\ \in (\lambda,\ \lambda+2W]$ 的 π 的数量为上界。下面将使用“解交映射” Φ_λ，使这一论证更加严谨。

引理 2. 对于任意 W、$n \geq 1$ 和 $\lambda \geq 0$，有

$$\mathbb{P}_{\infty,W,n}\left(\max C_\pi(0) > \lambda + 2W\right) \lesssim W^2 \mathbb{P}_{\infty,W,n}\left(\max C_\pi(0) \in (\lambda, \lambda+2W]\right).$$

证明。对于任意 $\lambda \geq 0$，定义集合 $E_\lambda := \{\pi : \max C_\pi(0)\ > \lambda\}$. 只需证明

$$\mathbb{P}_{\infty,W,n}(E_{\lambda+2W}) \lesssim W^2 \mathbb{P}_{\infty,W,n}(E^c_{\lambda+2W} \cap E_\lambda) \tag{3}$$

对所有 $\lambda \geq 0$ 成立即可。其思路是定义一个映射

$$\Phi_\lambda : E_{\lambda+2W} \cap S_W \to E^c_{\lambda+2W} \cap E_\lambda \cap S_W,$$

其中 S_W 是 $\mathbb{P}_\infty$ 的支撑集，$W,\ n$ 定义为

$$S_W := \{\pi : \max_{i\in[-n,n]} |\pi(i) - i| \leq W\},$$

使得

$$\max_{\tau \in E^c_{\lambda+2W}\cap E_\lambda \cap S_W} \left|\Phi_\lambda^{-1}(\tau)\right| \lesssim W^2.$$

该引理由此成立，因为 $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{\infty,W,n}$ 是 S_W 上的均匀分布，因此我们可以估计

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{\lambda+2W}) &= \sum_{\tau \in E^c_{\lambda+2W}\cap E_\lambda \cap S_W} \mathbb{P}(\tau) \sum_{\pi \in \Phi_\lambda^{-1}(\tau)} \frac{\mathbb{P}(\pi)}{\mathbb{P}(\tau)} \\ &= \sum_{\tau \in E^c_{\lambda+2W}\cap E_\lambda \cap S_W} \mathbb{P}(\tau) \left|\Phi_\lambda^{-1}(\tau)\right| \\ &\lesssim W^2 \mathbb{P}(E^c_{\lambda+2W} \cap E_\lambda). \end{aligned} \tag{4}$$

为构造 Φ_λ，我们取一个 $\pi \in E_{\lambda+2W}$，并施加一个换位，将 $\lambda+2W$ 的第一次交叉与 $\lambda+2W$ 的最后一次交叉连接起来。具体而言，对任意 $\pi \in E_{\lambda+2W} \cap S_W$，定义

$$\begin{aligned} i_{first}(\pi) &:= \inf\{j \geq 0 : \pi^j(0) \leq \lambda + 2W < \pi^{j+1}(0)\}, \\ i_{last}(\pi) &:= \sup\{j \in [0, \mathrm{Period}(\pi)) : \pi^{j+1}(0) \leq \lambda + 2W < \pi^j(0)\}, \end{aligned}$$

and

$$\Phi_\lambda(\pi) = \pi \circ (\pi^{i_{first}(\pi)+1}(0)\ \pi^{i_{last}(\pi)+1}(0)).$$

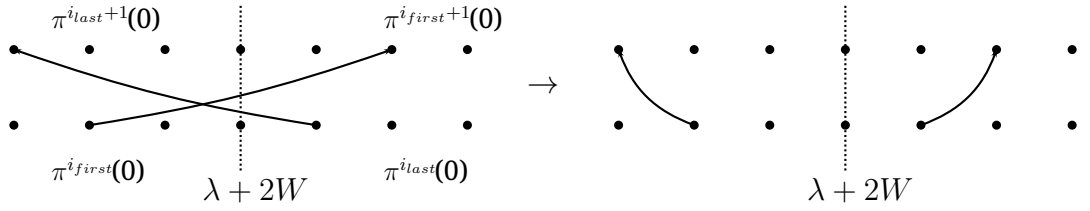

FIGURE 1. 映射的作用 Φ_λ

这里我们用 $(a\ b)$ 表示交换 a 和 b 的排列。注意，对任意 $\pi \in E_{\lambda+2W}$，$i_{first}(\pi)$ 和 $i_{last}(\pi)$ 均存在；此外，对任意 $\pi \in S_W \cap E_{\lambda+2W}$，我们有 $\Phi_\lambda(\pi) \in E^c_{\lambda+2W} \cap E_\lambda \cap S_W$。

剩下的是要证明 $|\Phi_\lambda^{-1}(\pi)| \lesssim W^2$，但这可立即得到，因为$\pi \in S_W$蕴含 $\max_{i\in[-n,n]} |\pi(i) - i| \le W$，因此数对 (i_{last}, i_{first}) 至多可取 $\lesssim W^2$ 个值。该引理由 (4) 得出。□

上述引理蕴含

$$\mathbb{P}_{\infty,W,n}\left(\max C_\pi(0) > \lambda + 2W\right) \le (1 - \frac{c}{W^2})\mathbb{P}_{\infty,W,n}(\max C_\pi(0) > \lambda),$$

并且通过迭代此结论，并注意到同样的论证可应用于一个循环的最小值，定理 1 立即得出。

注1. 上述非尖锐的 W^2 来自对原像 $\Phi_\lambda^{-1}(\pi)$ 大小的高估。若要改为得到尖锐因子 W，只需证明当 $\max C_\pi(0) \le \lambda$ 时，通常有

$$\Phi^{-1}(\pi) = |\{(a,b) : \pi \circ (a,b) \in S_W,\ a \in C_\pi(0),\ and\ b, \pi(b) > \lambda\}| \lesssim W.$$

粗略地说，这应源于对 a 有 $O(1)$ 种选择，而对上述集合中的 b 有 $O(W)$ 种选择。若将 $C_\pi(0)$ 视为一条随机游走，对此的一个启发式解释是：随机游走通常只在其最大值附近走 $O(1)$ 步。

2.2. 关于 $p \in [1,\infty)$ 的定理1的证明。 这种情况下的证明几乎相同，只是还必须考虑 Φ_λ 如何改变排列的能量，即 $\sum_{i=-n}^n |\pi(i) - i|^p$。在本节中，我们固定 $p \in [1,\infty)$、n、$W \ge 1$，并令 π按式 (1) 中的分布抽样。所有常数对于 p、n、W和 λ均一致。下面的引理与引理 2 类似，其中硬截断已被指数权重取代。

引理3. 对于任意 $\lambda > 0$，我们有

$$\mathbb{P}(\max C_\pi(0) > \lambda) \lesssim W^2 \sum_{j=0}^{\lambda} \exp\left(-\frac{|\lambda - j|^p}{W^p}\right) \mathbb{P}(\max C_\pi(0) = j).$$

证明。我们再次取 $E_\lambda := \{\pi : \max C_\pi(0) > \lambda\}$。固定 $\lambda > 0$，我们取 $i_{first}(\pi)$ 和 $i_{last}(\pi)$，与上一小节中的定义相同，但将 $\lambda + 2W$ 替换为 λ。注意，它们对任意 $\pi \in E_\lambda$ 都有定义，因此我们也可以定义

$$\Phi_\lambda : E_\lambda \to E_\lambda^c,$$

via

$$\Phi_\lambda(\pi) = \pi \circ (\pi^{i_{first}(\pi)+1}(0)\ \pi^{i_{last}(\pi)+1}(0)).$$

与（4）类似，我们有

$$\mathbb{P}(E_\lambda) = \sum_{\tau \in E_\lambda^c} \mathbb{P}(\tau) \sum_{\pi \in \Phi_\lambda^{-1}(\tau)} \frac{\mathbb{P}(\pi)}{\mathbb{P}(\tau)}.$$

因此，只需证明对任意 $\tau \in E_\lambda^c$，

$$\sum_{\pi \in \Phi_\lambda^{-1}} \frac{\mathbb{P}(\pi)}{\mathbb{P}(\tau)} \lesssim W^2 \exp\left(-\frac{|\lambda - \max C_\tau(0)|^p}{W^p}\right). \tag{5}$$

注意，与 $p = \infty$ 情形不同，$\mathbb{P}(\pi)$ 取决于 π 的能量，由 $\sum_i |\pi(i) - i|^p$ 给出。因此，我们必须同时考虑 能量 和 熵。关键观察是，Φ_λ 使 点不交叉，见图1，从而降低能量。事实上，若 $a, \tau(a) \le \lambda < b, \tau(b)$，则有

$$\frac{\mathbb{P}(\tau \circ (\tau(a)\ \tau(b)))}{\mathbb{P}(\tau)} \le \exp\left(-\frac{|\min(b, \tau(b)) - \max(a, \tau(a))|^p}{W^p}\right).$$

为应用这一点，注意任意 $\pi \in \Phi_\lambda^{-1}(\tau)$ 都等于 $\tau \circ (\tau(a)\ \tau(b))$，其中某些 a 和 b 满足上述条件。此外，必有 $a, \tau(a) \le \max C_\tau(0)$，因为 a 与 0 在同一个循环中，且 $\tau(b)\ b > \lambda$。因此，对 a 和 b 的所有此类可能性求和，得到估计

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in \Phi_\lambda^{-1}(\tau)} \frac{\mathbb{P}(\pi)}{\mathbb{P}(\tau)} &\lesssim \sum_{a \le \max C_\tau(0)} \sum_{b \ge \lambda} \exp\left(-\frac{|b-a|^p}{W^p}\right) \\
&\lesssim \sum_{a \le C_\tau(0)} W \exp\left(-\frac{|\lambda - a|^p}{W^p}\right) \\
&\lesssim W^2 \exp\left(-\frac{|\lambda - \max C_\tau(0)|^p}{W^p}\right),
\end{aligned}$$

由此可推出 (5)，从而得到该引理。 □

现在我们完成定理 1 的证明。令 $p_j := \mathbb{P}(\max C_\pi(0) > j)$，由此引理3推出存在 $C_0 > 0$，使得对于任意 $k \ge 0$

$$p_{k+1} \le C_0 W^2 \sum_{j=0}^{k} \exp\left(-\frac{|k-j|^p}{W^p}\right)(p_j - p_{j+1}).$$

设定 对 $0 \le j \le k$，有 g $w_j^{(k)} := \exp\left(-|k-j|^p / W^p\right)$；再通过分部求和可得 s

$$p_{k+1} \le C_0 W^2 \Big[-p_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} p_j (w_j^{(k)} - w_{j-1}^{(k)}) \Big],$$

约定 $w_{-1}^{(k)} = 0$。整理后可得

$$p_{k+1} \le (1 - cW^{-2}) \sum_{j=0}^{k} p_j (w_j^{(k)} - w_{j-1}^{(k)})$$

可以验证，当 $c_0 > 0$ 足够小时，界 $p_k \le 2\exp(-c_0 \frac{k}{W^3})$ 在这一递推关系下得以保持，从而证明定理。

References

[1] Omer Angel。《随机无限置换与循环时间随机游走》。载于：离散数学与理论计算机科学 （2003年1月）。[2] Volker Betz。《正则格上的随机置换》。载于：统计物理学杂志 155.6（2014），第1222–1248页。[3] Volker Betz和Daniel Ueltschi。《空间随机置换与无穷环》。载于：数学物理通讯 285.2（2009），第469–501页。[4] Marek Biskup和Thomas Richthammer。《一维离散点集上置换的吉布斯测度》。载于：应用概率论年刊25.2（2015），第898–929页。[5] REUBEN DROGIN。《一维随机带状矩阵的局域化》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2508.05802* （2025）。[6] Sofiia Dubova等。《非平均场随机矩阵在 $d \ge 3$维中的离域》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2507.20274* （2025）。[7] Sofiia Dubova等。《二维随机带状矩阵的离域》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2503.07606* （2025）。[8] Dor Elboim、Antoine Gloria和Felipe Hernández。《高维洛伦兹镜像游走的扩散率》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2505.01341* （2025）。[9] Dor Elboim和Gady Kozma。《高维一次强化随机游走》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2601.17972* （2026）。[10] Dor Elboim和Ron Peled。《欧几里得随机置换的极限分布》。载于：数学物理通讯 369.2（2019），第457–522页。[11] Dor Elboim和Allan Sly。《五维交换过程中的无穷环》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2211.17023* （2022）。[12] L´aszl´o Erd˝os和Volodymyr Riabov。《随机带状矩阵的之字形策略》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2506.06441* （2025）。[13] 理查德·费曼。《氦中 λ 跃迁的原子理论》。载于：物理评论 91.6（1953），第1291–1301页。

[14] Yan V. Fyodorov和Stephen Muirhead。《空间随机置换模型的带状结构》。载于：概率论及相关领域 179.3–4（2021），第543–587页。[15] Daniel Gandolfo、Jean Ruiz和Daniel Ueltschi。《论随机环模型》。载于：统计物理学杂志 129.4（2007），第663–676页。[16] Stefan Grosskinsky、Alexander A. Lovisolo和Daniel Ueltschi。《格点置换与环长度的泊松-狄利克雷分布》。载于：统计物理学杂志 146（2012），第1105–1121页。[17] Alan Hammond。《树上随机搅拌模型中的无穷环》。载于：中央研究院数学研究所通报（新系列）8.1（2013），第85–104页。[18] C. L. Mallows。《非零排序模型（一）》。载于：*Biometrika* 44（1957），第114–130页。[19] Sumit Mukherjee。《随机置换的不动点与环结构》。载于：电子概率期刊 21（2016），第1–18页。[20] B´alint T´oth。《自旋1/2海森堡铁磁体热力学压强的改进下界》。载于：数学物理快报 28.1（1993），第75–84页。[21] 姚鸿泽和Jun Yin。《一维随机带状矩阵的离域》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2501.01718*（2025）。[22] Chenyang Zhong。《具有 L^1 和 L^2 距离的Mallows置换模型 I：hit-and-run算法与混合时间》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2112.13456*（2021）。