arXiv:2603.01251v1 [math.AG] 1 Mar 2026

志村簇上特殊循环的模性：综述

FRANC,OIS GREER 与 SALIM TAYOU

ABSTRACT. 我们综述关于 Kudla 猜想的近期结果，该猜想涉及正交与酉志村簇的环面紧化中特殊循环类生成级数的模性。在此过程中，我们针对其他类型志村簇中的特殊循环，以及周期域的更一般商，提出若干关于相关现象的猜想。

1. INTRODUCTION

在他们开创性的论文中，Hirzebruch 和 Zagier [HZ76] 证明了紧化希尔伯特模曲面上修正特殊闭链的生成级数是一个取值于上同调的权 2 模形式。他们的工作推动了一系列发展，最终形成 Kudla 和 Millson [KM90], 的定理，该定理给出了正交与酉志村簇上特殊循环的一般模性陈述。本文的目标有两方面：为其他类型的志村簇提出Kudla-Millson定理的类似结果，并构建一个猜想框架，说明如何在这些志村簇的环面紧化中对特殊循环进行完备化与修正。

设 $(\mathbf{G}, \mathcal{D})$ 是一个 Shimura 志村数据；也就是说，$\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的半单代数群，而$\mathcal{D}$是一个 Hermitian 对称域，配备了 $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ 的传递作用：

$$G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}),$$

其稳定子 K 是紧的，并满足德利涅 [Del71 第 1.5] 节中的公理。特别值得关注的是不可约埃尔米特对称域 $\mathcal{D} = G/K$，它们已被完全分类：包括四个无限族（类型 I–IV）以及两个例外情形（E_6 和 E_7）。本文仅关注这些无限族。

Type	G	$\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$	K	$\dim_{\mathbb{C}}(X)$	模问题
I	$\mathrm{SU}(a, b)$	SL_{a+b}	$S(\mathrm{U}(a) \times \mathrm{U}(b))$	ab	具有复乘的极化阿贝尔簇
II	$\mathrm{SO}^*(2n)$	SO_{2n}	$\mathrm{U}(n)$	$n(n-1)/2$	具有四元数乘法的极化阿贝尔簇
III	$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$	Sp_{2n}	$\mathrm{U}(n)$	$n(n+1)/2$	多项式阿贝尔簇
IV	$\mathrm{SO}(n, 2)$	SO_{n+2}	$S(\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(2))$	n	Kuga-Satake 阿贝尔簇

TABLE 1. 四个无限族，带有 $n > 0$ 和 $a \geq b > 0$。

忠实表示$\mathbf{G} \to \mathbf{GL}(V_{\mathbb{Q}})$的选择，其中 V 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，决定了$\mathbf{G}(\mathbb{Q})$的一个算术子群 Γ，该子群由保持格V的元素组成。双陪集

$$X = X_\Gamma = \Gamma \backslash G / K$$

i根据 Baily-Borel 定理， [BB66 是一个复拟射影簇].

在 I–III 型的志村簇上，存在带有极化、自同态代数和层结构（PEL）的阿贝尔簇自然族 $\mathcal{B}$。在上述每种情形中，X 都支撑一个权为 1 的极化变分霍奇结构，其在每一点 $x \in X$ 处的纤维都同构于$V \simeq H^1(B_x,\ \mathbb{Z})$。

IV 型的情形更为微妙；需要取 SO(n,2) 的双覆盖，即旋量群 Spin(n,2)，它有一个到 Cl(V) 的线性群中的表示，其中 Cl(V) 是 V 的克利福德代数。旋量志村簇通过 Kuga-Satake 构造带有一族 $\mathcal{B}$ 极化阿贝尔簇，其维数为 2^{n+1}。我们有一个同构：

$$\mathrm{Cl}(V) \simeq H^1(B_x, \mathbb{Z}),$$

以及一个嵌入 $V \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(B_x, \mathbb{Z}))$.

对于 I–IV 型中的每一种，我们将回顾志村簇 X 上某些自然特殊循环类的构造，这些循环总是有效的，并介绍如何将它们汇集成生成级数。其中一些构造源自 Kudla、Millson、Zagier 和 Hirzebruch 的早期工作，另一些则是近来才由不同的作者群体加以研究。本综述的首要目标是将这些构造纳入一个统一的框架。

最简单的一类特殊循环以整数 $m \in \mathbb{N}$ 为指标，记作 $\mathcal{Z}(m)$。相关上同调或志村簇 X 的周群中的类 $[\mathcal{Z}(m)]$ 构成经典模形式的傅里叶系数，该模形式的权为 k （见下文），级由算术群 Γ 决定。

$$\Phi(q) = \sum_{m \geq 0} [\mathcal{Z}(m)] q^m \in \mathrm{CH}^c(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Mod}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$$

常数项 $[\mathcal{Z}(0)]$ 被单独定义为 X上的一个典范丛的顶陈类，因此它只有作为循环类时才有意义，并且一般并非有效循环。

Type	G	维数$_{\mathbb{C}}(X)$	c =余维数($Z(m)$)	权 k	模空间描述
I	SU($a,\ b$)	ab	a	$a+b$	Noether–Lefschetz
II	SO$^*(2n)$	$n(n-1)/2$	$n-1$	$2n$	同源分裂
III	Sp$(2n, \mathbb{R})$	$n(n+1)/2$	$n-1$	$2n$	同源分裂
IV	SO$(n, 2)$	n	1	$(n+2)/2$	Noether–Lefschetz

TABLE 2. 志村簇上的特殊循环

正如我们将要说明的，这些循环的定义在类型（I，IV）与类型（II，III）之间存在本质差异。对于前两种类型，每个 $\mathcal{Z}(m)$都是同一类型的子志村簇之并；而对于后两种类型，每个 $\mathcal{Z}(m)$都是某个特定子志村簇 $\mathcal{Z}(1)$的赫克平移，该子志村簇来自两个同一类型的不可约埃尔米特对称域的乘积。

对于每个固定的 $g \geq 1$，可以将上述定义推广到一类余维为 gc 的特殊循环$\mathcal{Z}(M)$；在类型（I, IV）中，这些循环现由一个整正定

[1]这是类型（I，IV）中的定理，也是类型（II，III）中的猜想

对称（或 Hermitian）矩阵作为指标。它们的类 $[\mathcal{Z}(M)]$ 构成 Siegel模形式的傅里叶系数，其权与表 2 中的权相同 k 。

$$\Phi^g(q) = \sum_{M \geq 0} [\mathcal{Z}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^{gc}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Mod}_k(\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}))$$

当 M 仅为半正定时，表达式 $[\mathcal{Z}(M)]$ 需借助适当次幂的典范顶陈类 $[\mathcal{Z}(0)]$ 来解释；参见第 2.1 节。在第 3 节中，我们将提出一个关于 III 型中更高余维循环的 Siegel 模形式级数的猜想。

1.1. 紧化。 对于每个志村簇 X，典范的 Satake-Baily-Borel 紧化 X^* 是一个射影代数簇，其边界按较低维的志村簇分层。每个边界分层 $X' \subset X^*$ 对应于一个唯一的、在 $\mathbb{Q}$ 上定义的极大抛物子群 $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ 的 Γ-共轭类。X^* 的缺点是它通常是奇异的。在 [AMRT 10] 中构造了一类优良的光滑紧化，称为 环面紧化 X^Σ，它们通过对 X^* 的边界进行爆破而得到。这些紧化取决于在与抛物子群$\mathbf{P}$相关的某个锥 $\mathscr{C}$ 内选取的容许扇 Σ 。令

$$\epsilon : X^\Sigma \to X^*$$

表示这个爆破态射。在边界中的每个分层 X' 上， ϵ 限制为一个固有满射态射，并分解为

$$\epsilon^{-1}(X') \xrightarrow{\tau} \mathcal{Y} \xrightarrow{\pi} X',$$

其中， τ 是环面纤维化，而 π 是阿贝尔纤维化。本注记的第二个目标是探究表 1 中各种情形下这些紧化的边界结构，并描述表 2 中特殊循环在 X^Σ边界中的极限。扎里斯基闭包 $\mathcal{Z}(m) \subset X^\Sigma$ 可以组装成一个取值于 X^Σ的相关上同调或周群中的生成级数，但它们不再是模形式；一般而言，预期它们是混合拟模形式 。Kudla 猜想，在类型（I，IV）中，从 X^Σ边界中支撑的有效循环类生成级数中减去一部分后，可以恢复模性。

Shimura 簇上的特殊循环是霍奇轨迹的例子；很自然地，可以在任意基底上的极化（混合）霍奇结构变分这一更一般的背景下研究生成级数，我们将在第 5 节对此进行探讨。

本综述绝非详尽无遗，感兴趣的读者应查阅此处引用的原始论文以及优秀的综述 [Kud04], [Li24], [Li23]。人们可以将我们在此所写的一切表述在志村簇的整模型 $\mathcal{X}$ 上，其中相应的模形式取值于 $\mathcal{X}$ 及其紧化的算术 Chow 群。尽管这一方向在文献中已对类型 I 与 IV 作了详细探讨，本文将对此少作论述。

1.2. 论文结构。我们在第2节综述正交型 (IV) 和酉型 (I) 志村簇的经典构造与结果。在第3节，我们在更一般的 PEL 志村簇情形下定义特殊循环，其中包括 Siegel 模簇 (III) 和四元数志村簇 (II)。在第 4 节，我们讨论将模性结果推广到 Baily-Borel紧化，并进一步推广到一般环面紧化的问题。在第5节，我们讨论非经典周期域的算术商这一更一般的情形；这类周期域不是代数的。最后，在第6节，我们

推测表 1 中不同族的同源群对所对应的生成级数之间可能存在的关系。

1.3. **致谢**。 S.T. 谨向高等研究院致谢，感谢其热情接待。S.T. 获 NSF 奖项 DMS-2503815 和达特茅斯学院伯克研究启动奖的资助。F.G. 获 NSF 奖项 DMS-2302548 的资助。我们感谢 Carl Lian 对早期稿件提出的宝贵意见。

2. Orthogonal and unitary Shimura varieties

此处我们回顾 [KM90]，所述的正交与酉 Shimura 簇中特殊循环的构造，以及 Kudla 的模性猜想 [Kud04]。

2.1. 正交情形。 设 (L, Q) 是一个符号为 $(n, 2)$ 的二次格，其中 $n \geq 1$。我们用 $(\cdot,\cdot)$ 表示与 Q 相关联的对称双线性形式，其定义关系为 $Q(x) = (x\cdot x)/2$。为简化讨论，我们假设格 (L, Q) 是幺模的，这意味着所得模形式的级为 1。

令 $\mathbf{G}$ 为正交群，作用于 $(L_{\mathbb{Q}}, Q)$，并考虑 Hermitian 对称域

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \,\big|\, (x\cdot x) = 0, (x\cdot \overline{x}) < 0\},$$

它参数化了 L 上的极化 K3 型 Hodge 结构。于是 $(\mathbf{G}, \mathcal{D})$ 是一个 IV 类型的志村数据。选取保持 L 的算术子群 $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})$，得到正交 *Shimura* 簇 $X = \Gamma\backslash\mathcal{D}$，它是一个准射影代数簇。

令 $1 \leq g \leq n$。对每个使 $\mathbb{Z}$ 半正定的 $M \in \mathrm{Sym}_{g\times g}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$，考虑循环

$$\mathcal{Z}(M)^{\mathrm{naive}} = \Gamma\backslash \left(\bigcup_{\substack{\lambda_1,\cdots,\lambda_g \in L \\ \left((\lambda_i\cdot\lambda_j)\right)_{1\leq i,j\leq g} = M}} \{x \in \mathcal{D} \,|\, (x\cdot\lambda_i) = 0,\, 1 \leq i \leq g\} \right).$$

此循环的余维为 $r(M)$，即矩阵 M 的秩。为得到余维为 g 的循环类，我们定义：

$$[\mathcal{Z}(M)] := [\mathcal{Z}(M)^{\mathrm{naive}}] \cap [\mathcal{L}^\vee]^{g-r(M)} \in \mathrm{CH}^g(X)$$

其中 $\mathcal{L} \to X$ 表示典范线丛。我们可以形成生成级数：

$$\Theta_L^g(\tau) = \sum_{M\geq 0} [\mathcal{Z}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^g(X)[\![q]\!],$$

其中 $q^M = e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\tau M)}$ 且 $\tau \in \mathbb{H}_g$ 是亏格为 g的西格尔上半空间中的一个元素。以下定理总结了数十年的活跃研究。

定理 2.1。 生成级数 Θ_L^g 是相对于西格尔模群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$的亏格 g、权 $\frac{n+2}{2}$ 全纯模形式的 q-展开，即：

$$\Theta_L^g \in \mathrm{CH}^g(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Mod}_{\frac{n+2}{2}}(\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})).$$

上述定理是许多学者工作的结果：首先，Kudla-Millson [KM90], 在上同调方面的工作；然后是 Borcherds [Bor98], 在 CH^1 方面的工作；在更高余维方面，则有张伟 [Zha09] 和 Bruinier-Raum [BWR15]的工作；另见 [HP20,HM25] ，其中给出了不同的证明，并将结果推广到整模型。

志村簇 X 通常是非紧的；事实上，只要 $n \geq 3$，它就必定是非紧的。自然会想到，如何将生成级数 Θ_L^g 延拓到 X的环面紧化上，由此得到 Kudla [Kud04]提出的如下猜想。

猜想 2.2. 存在一个光滑环面紧化 $X \hookrightarrow \overline{X}$，一组有限的$(Y_i)_{i\in I}$余维循环，其支集位于边界 $\overline{X} \smallsetminus X$ 上，以及修正特殊闭链$\widetilde{\mathcal{Z}}(M) = \mathcal{Z}(M) + \sum_i a_i(M)Y_i$，对于 $a_i(M) \in \mathbb{Q}$，使得生成级数：

$$\sum_{M\geq 0} [\widetilde{\mathcal{Z}}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^g\left(\overline{X}\right)[\![q]\!]$$

is a 关于 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 的权为 $\frac{n+2}{2}$ 的全纯 ***Siegel*** 模形式。

这一猜想在一般情形下仍未解决，但除子的情形最近已得到证明 [BZ21, Gar23,EGT23], ，零闭链的情形也已解决 [BRZ24]。我们将在第 4 节详细介绍这些结果。

2.2. 酉情形。 设 k 为虚二次域，其整数环为 $\mathcal{O}_k$，并设 (L, h) 为符号为 (a, b) 的自对偶埃尔米特 $\mathcal{O}_k$-模，且满足 $a \geq b$。我们固定一个嵌入 $\tau\colon\ k \hookrightarrow \mathbb{C}$，它指定了 $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上的复结构 J_0。

与此数据相关联的 Hermitian 对称域是如下集合：

$$\mathcal{D} = \{P \subset L_{\mathbb{R}} \text{ of dimension } 2b \,\big|\, P \text{ is } J_0\text{-stable and } h|_P \text{ is negative definite}\}.$$

群 Γ =U(L) 作用在 $\mathcal{D}$ 上，商 $X = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ 是一个酉志村簇。

设 $1 \leq g \leq a$ ，并设 Herm$_g$($\mathcal{O}_k$) 表示系数在 $\mathcal{O}_k$ 中的半正定埃尔米特矩阵空间。对每个 $M \in$Herm$_g$($\mathcal{O}_k$)，我们有一个特殊循环

$$\mathcal{Z}(M)^{\mathrm{naive}} = \Gamma\backslash \left(\bigcup_{\substack{\lambda_1,\cdots,\lambda_g \in L \\ \left((\lambda_i\cdot\lambda_j)\right)_{1\leq i,j\leq g} = M}} \{x \in \mathcal{D} \,|\, (x\cdot\lambda_i) = 0,\ 1 \leq i \leq g\} \right) .$$

该循环的余维为 r(M)b，其中 r(M) 是矩阵 M 的秩。设 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{D}$ 上秩为 b 的重言复向量丛到 X 的下降，并设 c_b($\mathcal{V}$) 表示其顶陈类。为得到余维 gb 中的循环类，我们定义

$$[\mathcal{Z}(M)] := [\mathcal{Z}(M)^{\mathrm{naive}}] \cap [c_b(\mathcal{L}^\vee)]^{g-r(M)} \in \mathrm{CH}^{gb}(X) .$$

令 $\mathcal{H}_g$ 表示埃尔米特上半空间，并令 U$_{g,g}$($\mathbb{Z}$) 为整埃尔米特模群。上文定义的特殊循环类包含在以下生成级数中：

$$\Theta_L^g(\tau) = \sum_{M\in \mathrm{Herm}_g(\mathcal{O}_k)} [\mathcal{Z}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^{gb}(X)[\![q]\!]$$

其中 $q^M = e^{2i\pi \mathrm{T}\ \mathrm{r}(\tau M)}$ 以及 $\tau \in \mathcal{H}_g$。以下结果归功于 Kudla 和 Millson [KM90] :

定理 2.3。 上同调类的生成级数 $[\Theta_L^q]$ 是一个权为 $a+b$ 、相对于$\mathrm{U}_{g,\ g}(\mathbb{Z})$的全纯埃尔米特模形式的 q-展开，即：

$$[\Theta_L^q] \in H^{2gb}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Mod}_{a+b}(\mathrm{U}_{g,g}(\mathbb{Z})).$$

我们在此指出，取值于周群的生成级数 Θ_L^q 的模性仍是一个重大的未解决问题；部分进展见 Xia [Xia22] 。

根据迈耶定理，一旦 $a+b \geq 3$，志村簇 X 必定是非紧的，因此人们希望理解特殊循环在光滑紧化中的闭包的模性行为。这引出了如下猜想 [BRZ24，猜想 1.1]。

猜想 2.4. 存在一个光滑环面紧化 $X \hookrightarrow \overline{X}$、有限集合$(Y_i)_{i\in I}$（由支撑于边界 $\overline{X}\smallsetminus X$的余维 gb 循环组成），以及修正特殊闭链$\widetilde{\mathcal{Z}}(M) = \mathcal{Z}(M) + \sum_i a_i(M)Y_i$（对 $a_i(M) \in \mathbb{Q}$），使得生成级数：

$$\sum_{M\geq 0} [\widetilde{\mathcal{Z}}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^{gb}(\overline{X})[\![q]\!]$$

是一个全纯埃尔米特模形式，权为 $a+b$ 相对于 $\mathrm{U}_{g,g}(\mathbb{Z})$.

对于 $g=b=1$，这一猜想已在 [BHK+20] 中得到证明；对于 $g=a, b=1$，则可由近期的工作 [BRZ24] 得出。在第 4 节中，我们将讨论作者与 [GT25] 合作完成的近期工作，其中研究了这一猜想针对 $b=1$ 的上同调版本。

3. PEL Shimura varieties

本节将针对其他志村簇中的某些特殊循环的模性提出若干猜想，其中一些可以推出文献中已有的结论。首先，我们讨论 Siegel模簇和四元数志村簇，随后为一般的 PEL 志村簇提出类似的猜想。本节的一个共同主题是过度交叉类的出现；这些类是典范陈类 $\lambda_i = c_i(\mathbb{E})$ 的乘积，在提出精确的模性猜想之前，必须将其与特殊循环的整个生成级数相乘。

3.1. Siegel模簇。令 $(L,\ \psi)$ 为秩为 $2n$ 的标准辛格。令 $\mathbb{H}_n$ 表示西格尔上半空间。商空间 $\mathcal{A}_n = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_n$ 是一个 Siegel模簇，可解释为主极化阿贝尔簇的模空间。

利用这一模解释，我们在 $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ 中定义一类特殊子簇如下。对于每个 $m \geq 1$，令

$$\mathcal{Z}(m) = \{A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \mid \exists f : E \to A,\ f^\dagger \circ f = [m]_E,\ E \text{ elliptic curve}\}.$$

注意到，并集 $\bigcup_{m\geq 1} \mathcal{Z}(m)$ 恰好对应于以椭圆曲线为同源因子的阿贝尔簇的轨迹。为了在这些子簇 $\mathcal{Z}(m)$ 上分别构造一个代数循环，我们为每个分支赋予一个有限重数，该重数等于映射 $f\colon E \to A$（其范数为 m）的数量；对该分支中一般的 A，这些映射属于 $\mathcal{Z}(m)$。循环 $\mathcal{Z}(m)$ 实际上是 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{n-1}$ 的 Hecke 平移，因此它们在 $\mathcal{A}_n$ 中的余维均为$n-1$。现在考虑以下生成级数：

$$\Theta_{\mathcal{A}_n}(q) = \frac{(-1)^n}{24}\lambda_{n-1} + \sum_{m\geq 1} [\mathcal{Z}(m)] q^m \in \mathrm{CH}^{n-1}(\mathcal{A}_n)[\![q]\!] ,$$

以下猜想出现在 [GL25的猜想 1]中。

猜想 3.1. 生成级数 $\Theta_{\mathcal{A}_n}(q)$ 是一个关于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的权为 $2n$的全纯模形式，取值于 $\mathrm{CH}^{n-1}(\mathcal{A}_n)$。

上同调版本的部分进展出现在 [GL25的定理1.2] （带层结构）中，以及 [IL26的推论 6], 中，其中对 $g \leq 5$给出了证明。利用椭圆曲线的可容许覆盖， [Lia21] 对 $g \leq 3$证明了类似的陈述。

一种更系统地解释循环 $[\mathcal{Z}(m)]$ 中重数的方法，是引入三元组的模空间栈：

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(m) = \{(E, A, f) \mid f : E \to A,\ f^\dagger \circ f = [m]_E\},$$

它具有自然的遗忘态射

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(m) \to \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_n \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{A}_n.$$

由于 $\mathcal{A}_1$ 不是固有的，不能立即前推循环类 $\left[\widetilde{\mathcal{Z}}(m)\right] \in \mathrm{CH}^n(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_n)$，但在 $\mathcal{A}_1^* \times \mathcal{A}_n$中先取闭包后，确实可以恢复 $[\mathcal{Z}(m)]$：

$$[\mathcal{Z}(m)] = \mathrm{pr}_* \left[\mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}(m)\right)\right].$$

为将猜想3.1推广到更高余维，固定一个满足 $1 < g \leq n$的整数 g。对任意正定的 $M \in \mathrm{Sym}_{g\times g}(\mathbb{Z})$，我们定义 $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$的如下特殊子簇：

$$\mathcal{Z}(M) = \{A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \mid \exists f : E^g \to A,\ f^\dagger \circ f = [M]_{E^g},\ E \text{ elliptic curve}\}\ .$$

为了构造支撑在这些子簇 $\mathcal{Z}(M)$ 上的代数循环，我们再次以这类映射 $f : E^g \to A$ 的一般数为权，赋给每个分支：

$$[\mathcal{Z}(M)] = \mathrm{pr}_* \left[\mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}(M)\right)\right].$$

所得循环在 $\mathcal{A}_n$ 中的余维为 $gn-1-\binom{g}{2}$，因为它们是有限映射 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{n-g} \to \mathcal{A}_n$ 的像的赫克平移，该映射将 $(E, B) \mapsto E^g \times B$ 送至相应位置。我们构造特殊循环类的生成级数：

$$\Theta^g_{\mathcal{A}_n}(\tau) = \sum_{M \geq 0} [\mathcal{Z}(M)] q^M \in \mathrm{CH}^{gn-1-\binom{g}{2}}(\mathcal{A}_n)[\![q]\!]\ ,$$

其中 $q^M = e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\tau M)}$ 和 $\tau \in \mathbb{H}_g$，与第2节中的定义相同。

问题3.1. 关于级数 $\Theta^g_{\mathcal{A}_n}$ 的西格尔模性，可以得出什么结论?

我们认为，对于虚 特殊循环也存在相关的模性结论。虚特殊循环的定义是：在应用 pr_* 之前，将归一化循环 $\left[\mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}(M)\right)\right]$ 乘以从因子 $\mathcal{A}_1^*$ 拉回的过度相交项 $\lambda_1^{\binom{g}{2}-1}$。考虑虚级数：

$$\Theta^{g,\mathrm{vir}}_{\mathcal{A}_n}(\tau) = \sum_{M \geq 0} \mathrm{pr}_* \left[\lambda_1^{\binom{g}{2}} \cdot \mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}(M)\right)\right] q^M \in \mathrm{CH}^{gn-1}(\mathcal{A}_n)[\![q]\!]\ .$$

注意，由于 $\dim(\mathcal{A}_1^*) = 1$，这些傅里叶系数只有在 $g \leq 2$ 时才非零。

猜想 3.2。 级数 $\Theta^{2,\mathrm{vir}}_{\mathcal{A}_n}$ 是一个权为 $2n$、相对于 $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ 的全纯 *Siegel* 模形式，取值于 $\mathrm{CH}^{2n-1}(\mathcal{A}_n)$，并在所有尖点处消失。

沿着不同的方向进行推广，现在固定 $1 < r \le n/2$。对于每个 $m \ge 1$，定义 $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ 的以下特殊子簇：

$$\mathcal{Z}_r(m) = \{A \in \mathcal{A}_n \,|\, \exists f : B \to A, f^\dagger \circ f = [m]_B,\ B \text{ ppav of dimension } r\}\ .$$

轨迹 $\mathcal{Z}_r(m)$ 在 $m \ge 1$ 上的并集对应于维数为 g 且以一个 r维主极化阿贝尔簇作为同源因子的主极化阿贝尔簇的轨迹。它们是循环 $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_{n-r}$ 的 Hecke 平移，因此其余维均为 $\binom{n+1}{2} - \binom{r+1}{2} - \binom{n-r+1}{2} = r(n-r)$。我们将按通常方式赋予重数，从而在每个 $\mathcal{Z}_r(m)$ 上构造一个有支撑的代数循环：

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_r(m) = \{(B, A, f) \,|\, f : B \to A, f^\dagger \circ f = [m]_B\} \to \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_n \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{A}_n\ .$$

接下来，我们构造循环类的生成级数 $[\mathcal{Z}_r(m)] \in \mathrm{CH}^{r(n-r)}(\mathcal{A}_n)$；现在，对任意光滑环面紧化 $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}_h'$，该级数定义为利用 $\mathcal{Z}_r(m)$ 在 $\mathcal{A}_h' \times \mathcal{A}_n$ 中的闭包$\widetilde{\ }$：

$$[\mathcal{Z}_r(m)] = \mathrm{pr}_* \left[\mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}_r(m)\right)\right].$$

$$\Theta^r_{\mathrm{Sp}_{2n}}(q) = \sum_{m \ge 0} [\mathcal{Z}_r(m)] q^m \in \mathrm{CH}^{r(n-r)}(\mathcal{A}_n)[\![q]\!]\ .$$

问题 3.2。 关于级数 $\Theta^r_{\mathrm{Sp}_{2n}}(q)$ 的模性，可以得出什么结论?

为说明上述问题的一些背景，设 $(L_r,\ \psi)$ 是秩为 $2r$ 的标准辛格。格的张量积 $(L,\ Q) = (L,\ \psi) \otimes (L_r,\ \psi_r)$ 配备了一个符号为 $(2rn,\ 2rn)$ 的二次型。设 Y 是参数化 $(L,\ Q)$ 上极化霍奇结构的周期域的算术商。我们得到一个嵌入：

$$\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_n \hookrightarrow Y\ .$$

问题 3.1 和 3.2 的一种自然解决思路，是将正交型 Kudla–Millson 生成级数从 Y 拉回。当 $r > 1$ 时，由于出现过度交，因此会遇到若干困难；这促使我们给出以下虚生成级数的定义：

$$\Theta^{r,\mathrm{vir}}_{\mathrm{Sp}_{2n}}(q) = \sum_{m \ge 0} \mathrm{pr}_* \left[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{r-1} \cdot \mathrm{cl}\left(\widetilde{\mathcal{Z}}_r(m)\right)\right] q^m \in \mathrm{CH}^{r(n-r)+\binom{r}{2}}(\mathcal{A}_n)[\![q]\!]\ .$$

猜想 3.3。 级数 $\Theta^{r,\ \mathrm{vir}}_{\mathrm{Sp}_{2n}}(q)$ 是一个权为 $2gh$ 、相对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$、取值于 $\mathrm{CH}^{r(n-r)+\binom{r}{2}}(\mathcal{A}_n)$ 的全纯模形式。

3.2. 四元数志村簇。 本节考察的最后一类志村簇是 II 型志村簇。

设 B 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个四元数代数。我们用 $\alpha \to \alpha^*$ 表示 B 上的主对合，并设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维向量空间。

定义 3.4。 我们称 V 为四元数斜埃尔米特空间，若它具有右 B 作用以及一个配对

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to B$$

使得

$$\forall v, w \in V, \alpha, \beta \in B :\ (v\alpha, w\beta) = \alpha^*(v, w)\beta, \quad (v, w) = -(w, b)^*\ .$$

设 V 为一个四元数斜厄米空间。酉相似群记作$\mathbf{G} = \mathrm{GU}_B(V)$，它是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群，并且对于每个 $\mathbb{Q}$-代数 R

$$\mathrm{GU}(R) = \{g \in \mathrm{GL}(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) | \, (g(v), g(w)) = \nu(g)(v, w), \, \forall v, w, \text{and some} \, \nu(g) \in R^{\times}\} \, .$$

以下假设 B 在 $\mathbb{R}$上分歧。因此，$\mathbf{G}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbf{GO}^*(2n)$，其中$n = \dim_B(V)$ 是 V 作为 B-模的秩。与 $\mathbf{GO}^*(2n)$ 相关联的厄米对称空间为：

$$\mathcal{H}_{SO^*_{2n}} = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \, | \, {}^tZZ + 1 = 0, \mathrm{Im}(Z) > 0\} \, .$$

设 $\mathcal{O}$ 是 B 中一个在 B 的主对合下稳定的整环，并设 $L \subset V$ 是一个有限秩且在 $\mathcal{O}$ 下稳定的 $\mathbb{Z}$-模。设 Γ 是 $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ 中 L 的稳定子。那么商空间

$$\mathcal{Q}_n := \Gamma \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n}}$$

是一个 四元数 ***Shimura*** 簇。

为了在 $\Gamma \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n}}$ 中定义具有良好模解释的特殊循环，我们将采用与第 3.1 节所讨论的 Siegel 模簇类似的思路。考虑 $V = V_1 \oplus V_2$ 的一个 B- 正交分解，使得斜厄米形式在每个因子上的限制都是非退化的。该分解给出一个代数群嵌入

$$\mathrm{GO}^*(2r) \times \mathrm{GO}^*(2n - 2r) \hookrightarrow \mathrm{GO}^*(2n) \, ,$$

以及厄米对称空间嵌入：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2r}} \times \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n-2r}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n}} \, .$$

设 $L_1 \subseteq L \cap V_1$ 和 $L_2 \subseteq L \cap V_2$ 是有限指数子 $\mathcal{O}$-模。那么 $L_1 \oplus L_2$ 是 L 的有限指数子 $\mathcal{O}$-模，我们将其指数记为 m。

设 Γ_1 是 L_1 的稳定子， Γ_2 是 L_2的稳定子。于是得到一个志村簇之间的有限态射：

$$\iota_{L_1, L_2} : \Gamma_1 \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2r}} \times \Gamma_2 \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n-2r}} \to \mathcal{Q}_n \, .$$

对于 $m \geq 1$，令 $\mathcal{Z}(m)$ 表示像的并集

$$\iota_{L_1, L_2} \left(\Gamma \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2r}} \times \Gamma \backslash \mathcal{H}_{\mathrm{SO}^*_{2n-2r}} \right)$$

遍历 L中指数为 m 的所有可能分解 $L_1 \oplus L_2$。根据 Borel 和 Harish-Chandra 的著名结果， $\mathcal{Z}(m)$ 是 $\mathcal{Q}_n$ 的一个代数子簇，其余维为 $\binom{n}{2} - \binom{r}{2} - \binom{n-r}{2} = r(n-r)$。现在我们可以构造生成级数：

$$\Theta^r_{\mathcal{Q}_n}(q) = \sum_{m \geq 1} [\mathcal{Z}(m)] q^m \in \mathrm{CH}^{r(n-r)}(\mathcal{Q}_n)[\![q]\!] \, .$$

问题 3.3。 关于生成级数 $\Theta^k_{\mathcal{Q}_n}$ 的模性，可以得出什么结论?

注 3.4。 读者会注意到它与问题 3.2 的相似之处，以及如何为上述模性陈述得到类似的启发式论证。

在志村簇 $\mathcal{Q}_n$ 是非紧的情形下，可以提出一个类似于 Kudla 关于环面修正的猜想。

问题 3.5. 是否存在 $\mathcal{Q}_n$ 的环面紧化，并通过边界循环修正循环 $\mathcal{Z}(m)$，使得所得生成级数再次成为具有相同权和级的模形式?

3.3. **PEL 志村簇.** 前两节介绍的志村簇，以及第 2.2 节介绍的酉志村簇，都是*PEL* 类型志村簇的例子。本节将提出一个关于这些志村簇上的特殊循环的一般模性猜想，该猜想涵盖了此前关于 I、II 和 III 型的许多猜想。本节的讨论受到 Kai–Wen Lan 的笔记 [Lan20] 启发。

定义 3.5。 *PEL* 数据（极化、端同态与级结构） *e)*

$$(\mathcal{O}, L, *, (\cdot,\cdot), h_0)$$

定义如下：

(1) 有限维半单 $\mathbb{Q}$-代数 B 中的一个整环 $\mathcal{O}$；(2) $\mathcal{O}$ 上的一个正 *involution* $*$，即一个满足以下条件的二阶反自同构：2

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{R}}(aa^*) > 0,\ \forall a \in \mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\ a \neq 0\ .$$

(3) 有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模 L，其上有 $\mathcal{O}$ 的作用；(4) 一个配对

$$(\cdot,\cdot) : L \times L \to \mathbb{Z}$$

与 *involution* $*$ 相容：

$$(bx, y) = (x, b^* y)$$

对于所有 x、$y \in L$ 和 $b \in \mathcal{O}$。

(5) h_0 是一个 $\mathbb{R}$-代数的态射：

$$h_0 : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}}}(L_{\mathbb{R}})$$

满足以下性质：

(a) 对于所有 $z \in \mathbb{C}$、x、$y \in L_{\mathbb{R}}$，有

$$(h_0(z)x, y) = (x, h_0(\overline{z})\cdot y)\ .$$

(b) $\mathbb{R}$-双线性配对 $(\cdot, h_0(i)(\cdot))$ 是对称正定的。

PEL 数据给出一个阿贝尔簇，它定义为实环面 $A = (L\otimes\mathbb{R})/L$，其复结构由 h_0 给出。极化的显式构造如下：对偶格 $L^\vee$ 到 L 可识别为格：

$$L^\vee = \{x \in L_{\mathbb{Q}} \,|\, \forall y \in L, (x,y) \in \mathbb{Z}\}\ .$$

显然，$L \subset L^\vee$ 给出复环面 $A \to A^\vee = L_{\mathbb{R}}/L^\vee$ 之间的一个同源，因此在 A 上定义了一个极化。

整环 $\mathcal{O}$ 在 L 上的作用给出一个态射：

$$\mathcal{O} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$$

满足 A 上的 Rosati 对合与对合之间的相容条件

$*$ 在 $\mathcal{O}$ 上的对合；我们不在此陈述该条件，而是请参见 [Lan20，方程 (5.1.1.9)]。

给定定义 3.5 中的 PEL 数据，我们可以定义一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的模空间，该空间参数化具有上述 PEL 结构的阿贝尔簇，记作 $\mathcal{M}$。这个模空间与某一类我们现在要定义的志村簇密切相关，另见 [Lan20，第 5.1 节。3]。

设 $(\mathcal{O},\ L,\ *,\ (\cdot,\ \cdot)\ h_0)$ 为 PEL 数据。设 $\mathbf{G}$ 为定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群，使得对每个 $\mathbb{Q}$-代数 R，有

$$\mathbf{G}(R)=\{g\in \mathrm{GL}_{\mathcal{O}}(L\otimes_{\mathbb{Z}} R)\}|,\forall x,y\in L,(gx,gy)=\nu(g)(x,y),\ \nu(g)\in R^{\times}\}\ .$$

数据 $h_0:\mathbb{C}\to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}}}(L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R})$ 给出一个态射：

$$h_0:\mathbb{C}^{\times}\to \mathbf{G}(\mathbb{R})$$

其 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 共轭类定义了一个流形 $\mathcal{D}=\mathbf{G}(\mathbb{R})\cdot h_0$.

需要注意的是，$(\mathbf{G}\ \mathcal{D})$ 并不总是定义一个 Shimura 数据；但在它确实定义 Shimura 数据时，它与模空间 $\mathcal{M}$ 密切相关。特别是，正如 [Lan20, 第 5.1 节.3] 所述，这一构造涵盖了第 2.2、3.1 和 3.2 节中介绍的所有 Shimura 簇实例。

现在我们在 $\mathcal{M}$ 中定义特殊循环。设 $(\mathcal{O},*,L_1,(\cdot,\cdot))$ 和 $(\mathcal{O},*,L_2,(\cdot,\cdot))$ 是两个子 PEL 数据，满足 $L_1\oplus L_2$ 关于配对 $(\cdot,\cdot)$ 正交，且在 L 中具有有限指数。

令 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 为由上述 PEL 数据构造的 PEL 志村簇。于是我们得到一个有限态射：

$$\iota_{L_1,L_2}:\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2\to\mathcal{M}\ .$$

令 $m\geq 1$，并令 $\mathcal{Z}(m)$表示态射$\iota_{L_1,\ L_2}$ 在所有满足 $L_1\oplus L_2$ 在 L中的指标为 m 的 PEL 子数据上的像的并集。

注 3.6. 循环 $\mathcal{Z}(m)$也可以用模解释来定义：它是由阿贝尔簇 A 构成的轨迹，这些阿贝尔簇同源于乘积 $A_1\times A_2$，其中 A_1 属于$\mathcal{M}_1$，且 A_2 属于 $\mathcal{M}_2$。

最后，定义如下生成级数：

$$\Theta_{\mathcal{M}}(q)=\sum_{m\geq 0}[\mathcal{Z}(m)]q^m\in \mathrm{CH}^*(\mathcal{M})[\![q]\!]\ .$$

问题 3　　.7. 关于生成级数 $\Theta_{\mathcal{M}}$的模性，可以说些什么?

现在我们给出一些启发式论证，说明上述问题有一个合理的答案。这些论证基于近期论文 [GL25]。

令 $\mathcal{M}_1$ 为带有 PEL 数据 $(\mathcal{O}、\ *、\ L_1、(\cdot、\ \cdot))$ 的阿贝尔簇 PEL 模空间。张量积 $W=L_1^{\vee}\otimes_{\mathcal{O}} L_2=\mathrm{Mor}_{\mathcal{O}}(L_1、\ L_2)$ 上存在一个对称双线性配对$Q=\psi_1\otimes\psi_2$。令 Y 为由 W 上权零霍奇结构构成的周期域的算术商，这些霍奇结构由 Q 极化。于是我们得到一个周期映射：

$$\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}\to\Gamma\backslash\mathcal{D}\ .$$

$\mathcal{Z}(m)$ 中的特殊循环拉回到 $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}$ 上的特殊循环，它们在 $\mathcal{M}$ 中的投影在集合论意义上与上文定义的特殊循环一致。根据 Kudla–Millson，特殊循环类 $[\mathcal{Z}(m)]$ 的生成级数在 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ 的上同调中是模的，因此自然会预期，在 $\mathcal{M}$ 中得到的生成级数也是模的。然而，一般而言，非正规交会带来困难。此外，由于 $\mathcal{M}_1$ 可能不是紧的，因此不存在从 $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 的循环上的良定义推前映射。

例 3.6。 当 $\mathcal{O}=\mathbb{Z}$ 时，志村数据恢复了第 3.1 节中引入的西格尔数据。

例 3.7。 设 k 是一个二次虚数域， $\mathcal{O}$ 是 k的整数环。设 L 是一个带有厄米配对的 $\mathcal{O}$-模，其符号为 (a,b)。那么，PEL 志村数据恢复了第 2.2 节中的酉数据

例 3.8。 设 $\mathcal{O}$ 是四元数代数 B 中的一个整环，该代数在 ∞处分歧，即 $\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\simeq\mathbb{H}$ 为哈密顿四元数。那么，我们恢复了第 3.2 节中引入的簇。

最后，我们表述 了这一一般 PEL 型框架下 Kudla 猜想的一个类比 .

问题 3.8。 是否存在 $\mathcal{M}\hookrightarrow\mathcal{M}$ 的光滑紧化，以及对循环闭包 $\mathcal{Z}(m)$作出边界循环修正，使得所得生成级数也是取值于 $\underline{\mathrm{CH}}^*(\mathcal{M})$的模形式?

4. Modularity in compactifications

4.1. **Satake-Baily-Borel 与 L^2-上同调**。 设 $X=\Gamma\backslash\mathcal{D}$ 是由志村数据（$\mathbf{G}$ $\mathcal{D}$）定义的连通志村簇， $X\hookrightarrow X^*$ 是其 Satake-Baily-Borel 紧化 [BB66]。一般而言， X^* 是一个奇异复射影簇。我们简要回顾这种紧化的一般构造方法。

设$\mathbf{P}\subset\mathbf{G}$ 是$\mathbf{G}$的一个极大抛物子群。其 Levi 因子的厄米部分$\mathbf{G}_P$ 确定了一个志村数据（$\mathbf{G}_P$， $\mathcal{D}_P$）。它对应一个志村簇 X_P。极大有理抛物子群 $\mathbf{P}$ 在 Γ下只有有限多个等价类，而它们的并

$$X^*=X\cup\bigcup_{\mathbf{P}/\Gamma}X'_{\mathbf{P}}$$

具有射影代数簇的结构。

作为奇异簇，Baily-Borel 紧化带有交叉上同调群，其定义见 [GM80]。假设给定一族特殊循环 $\mathcal{Z}(m)$，它们位于 X 中，余维为 $c\geq 1$，且其生成级数是一个取值于上同调的模形式。接下来最自然要考虑的生成级数，是 X^*中的 Zariski 闭包级数。根据 Looijenga 的著名定理 [LR91，Loo88] 和 Saper–Stern [SS90],证明了 Zucker 猜想 [Zuc82], ： X^* 的交叉上同调与 X的 L^2-上同调同构。因此，很自然会提出以下猜想:

猜想 4.1. 这些类 $[\mathcal{Z}(m)]$ 实际上定义在 X 的 L^2-上同调中，且它们的生成级数是一个模形式。

据我们所知，这一猜想的主要证据来自 [BZ24] ，作者在其中证明了正交 Shimura 簇在余维不超过中间次数时的结果；此外还有较早的 [GG12] ，研究的是希尔伯特模曲面的情形。

4.2. **边界分层**。每个极大抛物子群 $\mathbf{P}$都是某个 $\mathbb{Q}$-各向同性子空间 $W\subset V$的稳定子，该子空间的维数为 $r>0$。这就是相应边界分层的秩 。$\mathbf{P}$ 的 Levi 商在实点上的取值为 $G_r\times H_r$，其中 G_r 为 Hermitian 型。这会导出志村簇 $X'_{\mathbf{P}}$，并构成 X^*边界中的一个分层。当 $r=1$时， H_1 是一个有限群。当 r 取最大可能值，即$\mathbf{G}$的秩时，Levi 商 $H_{\max}$ 没有 Hermitian 型因子，而相应的

边界分层是一个点。在这种情况下， $H_{\max}$ 自然作用于某个凸锥上，记为 $\mathscr{C}_{\max}$，它将在环面紧化中发挥重要作用。

Type	G	G_1	$G_2 \times H_2$	$H_{\max}$	$\mathscr{C}_{\max}$
I	$\mathrm{SU}(a,b)$	$\mathrm{SU}(a-1,b-1)$	$\mathrm{SU}(a-2,b-2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{SL}_a(\mathbb{C})$	$\mathrm{Herm}_a^+(\mathbb{C})$
II	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{SO}^*(2n-4)$	$\mathrm{SO}^*(2n-8) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$	$\mathrm{Herm}_n^+(\mathbb{H})$
III	$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2n-2, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2n-4, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$
IV	$\mathrm{SO}(n, 2)$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	$\{1\} \times \mathrm{SO}(n-1,1)$	$\mathrm{SO}(n-1, 1)$	$\mathscr{C}^- \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$

TABLE 3. X^* 中与边界分层相关的一些数据

4.3. 环面紧化。 [AMRT10] 构造了一类特别优良的厄米局部对称空间光滑紧化；这些是环面紧化的例子，并且取决于一组选定的组合数据 Σ，称为扇。作为光滑射影簇，它们是 Kudla 猜想 3.8 的自然候选对象。

组合输入 Σ 是 $\mathscr{C}$的一个有理多面锥分解，对于每个极大抛物子群$\mathbf{P}$，该分解都关于 $\Gamma \cap \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}$的作用是容许的。由此得到的射影簇 X^Σ 存在一个双有理态射

$$\epsilon : X^\Sigma \to X^*$$

该态射在 $X \subset X^*$上限制为同构。在边界 $X^* \smallsetminus X$中秩为 r 的每个分层 X'_r 上，真态射 ϵ 分解为:

$$\epsilon^{-1}(X'_r) \xrightarrow{\tau} \mathcal{Y}_r \xrightarrow{\pi} X'_r,$$

在有限群作用意义下，其中 τ 是由扇 Σ决定的环面簇纤维化，而 π 是阿贝尔纤维化。当 $r = 1$、 τ 时，它们总是恒等映射；我们首先关注这种情形。在 IV 型情形中， $\mathcal{Y}_1$ 是模曲线 X'_1上的 Kuga-Sato 簇。在其余的 I–III 型情形中， $\mathcal{Y}_1 \to X'_1$ 是 X'_1上的阿贝尔簇典范 PEL 族。维数计数表明，这给出了环面边界中的一个除子:

Type	G	G_1	维数 (X'_1)	维数 (Y_1)	维数 $(\epsilon^{-1}(X'_1))$
I	$\mathrm{SU}(a, b)$	$\mathrm{SU}(a-1, b-1)$	$ab-a-b+1$	$a+b-2$	$ab-1$
II	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{SO}^*(2n-4)$	$(n-2)(n-3)/2$	$2n-4$	$n(n-1)/2-1$
III	$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2n-2, \mathbb{R})$	$n(n-1)/2$	$n-1$	$n(n+1)/2-1$

TABLE 4. PEL 的秩1边界维数计数

对于秩 $r > 1$，纤维化中存在非平凡的环面部分，而阿贝尔纤维化π： $\mathcal{Y}_r \to X'_r$ 是典范 PEL 族的自纤维积。更确切地说，对每个极大抛物子群$\mathbf{P}$，都有一个带有相应复结构或四元数结构的有理各向同性子空间 $W \subset V$，并且我们取 $\mathcal{Y}_r = \mathcal{Y}_1 \otimes_F W$，其中 $F = \mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$或 $\mathbb{H}$，具体取决于情形。 τ： $\epsilon^{-1}(X') \to \mathcal{Y}_r$ 的纤维维数为 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}_r) - 1$，而由 Σ的射线构造的环面簇的有限并。

Type	G	G_r	维数(X'_r)	维数(Y_r)	维数($\mathscr{C}_r$)
I	$\mathrm{SU}(a,b)$	$\mathrm{SU}(a-r,b-r)$	$ab-r(a+b)+r^2$	$r(a+b-2r)$	r^2
II	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{SO}^*(2n-4r)$	$(n-2r)(n-2r-1)/2$	$r(2n-4r)$	$r(2r-1)$
III	$\mathrm{Sp}(2n,\ \mathbb{R})$	$\mathrm{Sp}(2n-2r,\ \mathbb{R})$	$(n-r)(n-r+1)/2$	$r(n-r)$	$r(r+1)/2$

TABLE 5. PEL 的秩边界维数计数 r

容易验证，最后三列之和等于 $\dim(X)$，因此原像 $\epsilon^{-1}(X'_r)$ 确实是 X^Σ中的余维 1 子集。至此，我们粗略描述了 $X^\Sigma \smallsetminus X$的不可约除子分支。

每个环面紧化边界除子中，特殊循环 $\mathcal{Z}(m)$ 的极限可描述如下。在 IV 型中，闭包 $\mathcal{Z}(m)$ 与 X^Σ 的每个边界除子相交于一个超曲面；当，2 时，该超曲面支配 X'_r。对于 $r=1$，它是 Kuga-Sato 簇中位于 X'_1 上的阿贝尔超曲面族之并；对于 $r=2$，它是点 X'_2 上的环面特征超曲面之并。I–III 型的情形则性质不同；闭包 $\mathcal{Z}(m)$ 与每个边界除子相交于一个余维 c子簇，该子簇支配特殊循环 $\mathcal{Z}'(m) \subset X'_r$。其在 X'_r 中各点上的纤维，是 ϵ的纤维中余维 r 半阿贝尔子簇（的闭包）之并。半阿贝尔子簇的枚举会产生加权 theta 级数；由于存在环面簇因子，我们预期这些级数在 $r=1$时是拟模的，在 $r>1$时是混合模拟模的。

在下一节中，我们将通过两个例子$\mathbf{G} = \mathrm{SO}(n,\ 2)$，$\mathrm{SU}(n,\ 1)$，更明确地展现这一几何结构。

4.3.1. 正交情形。本节总结 [EGT23], 的主要结果；这些结果由 [Gar23], 独立获得，也见于更早的工作 [BZ21]。

我们将沿用第2.1节的设定。正交志村簇 X 的 Baily-Borel紧化包含两类边界分支（$r=1,\ 2$），它们由 Γ-等价类的 L 各向同性子空间参数化。这些类型的命名（见下文）遵循 Kulikov 对 K3曲面退化的惯例。为避免与志村簇类型的命名混淆，读者也可以将 $r=1$ 用于 II 型，将 $r=2$ 用于 III 型。

- **II型分支：** 它们由全各向同性本原平面$J \subset L$ 参数化，而在 X^* 中相应的边界分支是一条模曲线 X'_J。
- **III型分支：** 它们由各向同性本原直线 $I \subset L$参数化，而相应的边界分支 X^* 是一个点 $\{*_I\}$。

至于环面紧化，它们取决于以下数据：对于每条各向同性本原直线 I，格 $K = I^\perp/I$ 的符号为（$n-1,\ 1$）。扇数据 Σ 对应于一个容许锥分解的选择

$$\mathscr{C}^- = \{x \in K_{\mathbb{R}} \,|\, Q(x) < 0\}\ ,$$

其在算术群 $\Gamma_K \subset \mathrm{O}(K,\ Q)$ 下保持不变。通过选取 Σ 单纯的且幺模的结构，我们可以确保紧化 X^Σ 是光滑的。边界除子描述如下：

• **II 型除子：** 这些是 X^*的 II 型边界分支的原像，并且同构于 Kuga–Sato 簇 $\mathcal{Y} \otimes_{\mathbb{Z}} J^\perp/J \to X'_J$，其中 $\mathcal{Y} \to X'_J$是普遍椭圆曲线。我们将此类边界除子记为 $\mathcal{B}_J$。

•**III 型除子：** 它们是 X^* 的 III 型边界分支的原像，并且与 Γ_K-轨道一一对应，这些轨道由 σ 中的一维射线 Σ 在 $\mathcal{C}^-$的扇分解中给出。我们将相应的边界除子记为 $\mathcal{B}_{I,\,\sigma}$。

令 $\theta(\tau)$ 表示正定格的通常 θ 级数，令 $E_2(\tau) = 1 - 24\sum \sigma_1(n)q^n, n\geq 1$

并令 $F_N^+(\tau)$ 表示权为 $3/2$、在 [EGT23, 2.3] 中引入的 Zagier 拟模形式。下述定理解决了余维 1 的循环的 Kudla 猜想。

The定理 4.2 ([EGT23])。 假设 $n \geq 3$。修正后的生成级数 s

$$\sum_{m\geq 0}[\overline{\mathcal{Z}}(m)]q^m - \frac{1}{2}\sum_{(I,\sigma)}\left(\theta_{\sigma^\perp}\cdot F^+_{N(\sigma)}\right)\otimes \mathcal{B}_{I,\sigma} + \frac{1}{12}\sum_J \left(E_2\cdot\theta_{J^\perp/J}\right)\otimes \mathcal{B}_J$$

取值于皮卡群$\mathbb{Q}(\ X^\Sigma)[\![q]\!]$ 是一个权为 $1+\frac{n}{2}$、关于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的弱全纯模形式 – .

最后，我们提及，正交 Shimura 簇最高余维情形下的 Kudla 猜想也已在 [BRZ24] 中得到解决。

4.3.2. 酉情形。 本节概述 [GT25]的主要结果。为简便起见，我们将沿用第 2.2 节的设定，其中 $a = n+1$、 $b = 1$ 和 Γ 均为 neat。酉志村簇 X 是一个球商。X 的 Baily-Borel 紧化 X^* 是通过添加有限多个点得到的，这些点对应于 Γ-等价类的本原各向同性 $\mathcal{O}_k$-直线 $I \subset L$。给定这样一条直线 I， $\mathcal{O}_k$ 格 $I^\perp/I$ 上赋有一个正定的厄米形式。X 在其典范环面紧化 X^{tor} 中的边界是不交并的除子 $\mathcal{B}_I$，由直线 I索引。由于 Γ 是 neat，我们有 $\mathcal{B}_I \simeq E\otimes_{\mathcal{O}_k} I^\perp/I$，其中 $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_k$。

我们使用的第一个工具是以下分裂结果，它是通过分别在每个边界除子 $\mathcal{B}_I$ 上应用硬 Lefschetz 定理证明的。

引理 4.1. 对于 $2g \leq n$，以下同调上的推前映射是满射的 :

$$H_{2g}(X,\mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{\{I\}/\Gamma} H_{2g}(\mathcal{B}_I,\mathbb{Q}) \to H_{2g}(X^{\mathrm{tor}},\mathbb{Q})\ .$$

设 $2g \leq n$，并令 $C \in H_{2g}(X^{\mathrm{tor}},\mathbb{Q})$ 为一个同调类。根据上面的引理，我们可以写成 $C = C_1 + C_2$，其中 $C_1 \in H_{2g}(X,\mathbb{Q})$ 且 $C_2 \in \bigoplus_{\{I\}/\Gamma} H_{2g}(\mathcal{B}_I,\mathbb{Q})$。

根据 Kudla 和 Millson 的定理 [KM90], , 生成级数

$$\sum_{M\in \mathrm{Herm}_g(\mathcal{O}_k)_{\geq 0}} \left([\mathcal{Z}(M)]\cap C_1\right) q^M$$

是关于 $\mathrm{U}(g,\ g)(\mathbb{Z})$ 的算术子群、亏格为 g、权为 $n+1$ 的厄米全纯模形式。因此，只需分析特殊循环生成级数与 C_2 的交，而该交完全发生在边界内。

设 $J = I^{\perp}/I$。特殊循环与边界的交可描述如下：对于每个 $\lambda \in J$，令 $Z(\lambda) \subset \mathcal{B}_I$ 表示阿贝尔簇映射的核：

$$E \otimes_{\mathcal{O}_k} J \xrightarrow{(\cdot,\lambda)} E,$$

并且我们将循环重数指定为 $\lambda \in J$ 平方的整除性。

引理 4.2. 特殊循环 $\mathcal{Z}(M)$ 与 $\mathcal{B}_I$ 的交在集合论意义上由以下和给出：

$$\sum_{\substack{\underline{\lambda} \in J^g \\ h(\underline{\lambda}) = M}} Z(\lambda_1) \cap \cdots \cap Z(\lambda_g) \ .$$

根据上述引理，生成级数 $\Theta_L^g(q)$ 到 $\mathcal{B}_I$ 的限制就简单地变成生成级数：

$$\sum_{\underline{\lambda} \in J^g} [Z(\underline{\lambda})] q^{h(\underline{\lambda})} \in \mathrm{CH}^g(\mathcal{B}_I)[\![q]\!] \ .$$

命题 4.3. 存在一个多项式 $f\colon J_{\mathbb{R}}^g \to \mathcal{H}^{g,g}(E \otimes J, \mathbb{C})$，使得对每个 $\lambda \in J$，调和微分形式 $f(\lambda)$ 的上同调类等于 $[Z(\lambda)]$。多项式 f 满足以下不变性：

$$\forall \underline{\lambda} \in J_{\mathbb{R}}^g, \forall A \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{C}),\ f(\underline{\lambda} \cdot A) = |\det A|^2 f(\underline{\lambda}) \ .$$

满足此不变性条件的所有多项式 $P\colon J_{\mathbb{R}}^g \to \mathbb{C}$ 的空间记为 $\mathcal{F}_{n,g}$，并且它是一个有限维向量空间。我们证明以下关键定理。

定理 4.4. 直和 $\bigoplus_{\ell=0}^n \mathcal{F}_{n,\ell}$ 容许一个 $\mathfrak{sl}_2$-作用，其中降算子是 $J_{\mathbb{R}}$ 上的拉普拉斯算子，它在 $\mathrm{U}(h)$ 的作用下不变。

边界 $\mathcal{B}_I$ 的余法丛 $\mathcal{N}_{\mathcal{B}_I}^{\vee}$ 是丰沛的，并且除相差一个标量外，它与 $E \otimes_{\mathcal{O}_k} L$ 上的极化一致；该极化由自然极化 E 和 J 上的厄米形式 h 构造而成。我们将相应的除子类记为 $D \in \mathrm{Pic}(\mathcal{B}_I)$。

循环 $Z(\lambda)$ 自然地属于 $H^{g,g}(E, \mathbb{Q}) \otimes \mathcal{F}_{n,g}$。利用 Lefschetz 型分解，我们能够证明以下定理：

定理 4.5。对于每个 $0 \le k \le g$，都存在一个代数余维为 k 的代数循环族 $(W_i^k)_{i \in I_k}$，以及由这些循环唯一确定的调和多项式族 $P_i^k \in \mathcal{F}_{n,k}$，使得对于每个 $\lambda \in J_{\mathbb{R}}^g$：

$$[Z(\underline{\lambda})] = \sum_{\ell=0}^{g} \sum_{i \in I_\ell} (\Lambda^{g-\ell} P_i^\ell)(\underline{\lambda}) W_i^\ell \cap D^{g-\ell} \ \in H^{2g}(\mathcal{B}_I, \mathbb{R}),$$

其中 Λ 是定理 *4.4* 中给出的升算子。

由上述定理可知

$$\mathcal{Z}(\underline{\lambda}) - \sum_{\ell=0}^{g-1} \sum_{i \in I_\ell} (\Lambda^{g-\ell} P_i^\ell)(\underline{\lambda}) W_i^\ell \otimes D^{g-\ell}$$

是 λ 中的一个调和多项式，并满足$\mathcal{F}_n$中元素的线性不变性性质. $_g$。现在利用 Freitag 和 Shimura 的一个定理即可得到结果。关于证明的结尾，请读者参阅 [GT25，第 5] 节。

5. Non-classical period domains

在本节中　接下来，我们将推测更一般周期域的模性定理　　.

5.1. 霍奇结构变分。设 $\mathbb{V}=\{\mathbb{V}_{\mathbb{Z}},\mathcal{F}^{\bullet}\mathcal{V},Q,\nabla\}$ 是权为 $2k$ 、定义在光滑、连通准射影代数簇 $\mathcal{S}$ 上的纯极化霍奇结构变分。它由以下数据组成：一个有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模的局部系统 $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$，定义在 $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$ 上的二次型 Q，以及由黎曼–希尔伯特对应将 $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$ 关联得到的平坦丛 $(\mathcal{V}=\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}\otimes\mathcal{O}_S,\ \nabla)$ 上的全纯滤子 $\mathcal{F}^{2k}\subset\ldots\subset\mathcal{F}^{0}=\mathcal{V}$。

这类数据的例子来自几何起源的变分：若 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{S}$ 是光滑射影态射，则 $R^{2k}f_*\mathbb{Z}/$扭子是 $\mathcal{S}$ 上的一个局部系统。平坦向量丛 $R^{2k}f_*\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\mathcal{S}}\simeq R^{2k}f_*(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ 带有由超上同调复形 $R^{2k}f_*\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ 上的朴素滤子诱导的霍奇滤子。最后，二次型是利用庞加莱配对以及一个 f-相对丰线丛得到的。

下文我们将注意力限制在权为 2 的纯变分情形。令 $\sim\pi$ 为 $\mathcal{S}$的万有覆盖，并令 $L=H^0(S,\ \pi^*\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$。那么$(L,\ Q)$是一个赋有符号为$(n,\ 2p)$的二次型的自由$\mathbb{Z}$-模。与该变分相关的周期域等于：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\{W\subset L_{\mathbb{C}}\,\big|\,\dim(W)=p,\,Q|_W=0,\,Q(v,\overline{v})>0,\,\forall v\in W\smallsetminus\{0\}\}\\&\simeq \mathrm{SO}(n,2p)/\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{U}(p)\ .\end{aligned}$$

对于 $p>1$，$\mathcal{D}$ 不是$\mathrm{SO}(n,\ 2p)$的对称空间，后者等于

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}=\mathrm{SO}(n,2p)/S(\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(2p))\ .$$

令 $\Gamma=O(L)$，或取任意一个包含局部系统 $\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}$的单值群像的同余子群。复流形 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ 具有一族由 Kudla 和 Millson 定义的特殊循环：取 $\lambda\in L^{\vee}$ 使得 $Q(\lambda)>0$。那么子簇

$$\mathcal{D}(\lambda)=\{W\in\mathcal{D}\,|\,\lambda\text{ is orthogonal to }W\}$$

是与群 $\mathrm{SO}(n-1,\ 2p)$相关的子域。

令 $m\in\mathbb{Q}_{>0}$，并设 $\mathcal{Z}(m)=\Gamma\backslash\left(\bigcup_{Q(\lambda)=m}\mathcal{D}(\lambda)\right)$。由从局部对称空间 $\Gamma\backslash\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$拉回的 Kudla–Millson 定理 [KM90], 可知，生成级数：

$$\Phi(q)=\sum_{m\geq 0}[\mathcal{Z}(m)]q^m\in H^{2p}(\Gamma\backslash\mathcal{D},\mathbb{Q})[\![q]\!]$$

是一个全纯模形式的 q-展开。沿分类态射 $\mathcal{S}\to\Gamma\backslash\mathcal{D}$进一步拉回后，Noether–Lefschetz 位集的生成级数：

$$\Phi^{\mathrm{NL}}(q)=\sum_{m\geq 0}[\mathrm{NL}(m)]q^m\in H^{2p}(\mathcal{S},\mathbb{Q})[\![q]\!]$$

也是一个权为 $(n+2p)/2$ 的全纯模形式。由于 $\mathcal{S}$ 是一个代数簇，自然会提出以下问题。

问题 5.1。是否　诺特–勒夫谢茨生成级数是取值于 $\mathrm{CH}^p(\mathcal{S})$ 的模形式吗?

5.2. **紧化**。 复代数簇 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ 一旦满足 $p>1$便不再是代数的；参见 [GRT14]。因此，为这些周期域商空间表述 Kudla 猜想 3.8 是毫无意义的。然而，代数簇 $\mathcal{S}$ 存在射影紧化，研究其中诺特–勒夫谢茨循环闭包的模性行为仍然很有意义。

考虑一个简单正规交叉射影紧化：

$$\mathcal{S}\hookrightarrow\overline{\mathcal{S}},$$

并假设所有局部单值算子都是幺幂的。

问题 5.2. 存在对扎里斯基闭包 $\mathrm{NL}(m)$ 的适当修正 $\widetilde{\mathrm{NL}(m)}$，由支撑在边界 $\overline{\mathcal{S}}\smallsetminus\mathcal{S}$ 上的循环给出，使得所得生成级数是取值于 $\underline{\mathrm{CH}^p}(\mathcal{S})_{\mathbb{Q}}$ 的全纯模形式。

这一普遍程度适用于 [Gar23], 中的方法，其中拉回到 $\mathcal{S}$ 的 Kudla-Millson 形式在 $p=\dim(\mathcal{S})=1$时被证明是可积的。

6. Curious coincidences

表 1 中来自不同族的某些低维群对之间存在一份简短的例外同源列表。我们在此记录它们以供参考：

(1)	$\mathrm{SU}(1,1)\to\mathrm{SO}(1,2)$	(4)	$\mathrm{SU}(3,1)\to\mathrm{SO}^*(6)$
(2)	$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})\to\mathrm{SO}(3,2)$	(5)	$\mathrm{SO}^*(8)\to\mathrm{SO}(6,2)$
(3)	$\mathrm{SU}(2,2)\to\mathrm{SO}(4,2)$		

每对中的两个群具有相同的 Hermitian 对称域 $\mathcal{D}$，因此尤其可以导出同一个 Shimura 簇 X。与此同时，特殊循环生成函数的余维和权可能看起来大不相同，这取决于所使用的是同源对中的哪一个群。

问题 6.1. 对于上面列表中的每个同源 $G_1\to G_2$，我们可以安排两个相关的生成级数 $\Phi_i(q)$、$i=1,\ 2$，它们取值于同一个 Shimura 簇 X 的 $\mathrm{CH}^d(X)$ 中：

$$\Phi_i(q)\in\mathrm{CH}^d(X)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{Mod}_{k_i}(\mathrm{Sp}_{2g_i}(\mathbb{Z}))\ .$$

是否存在模形式空间之间的自然提升，使 Φ_1 与 Φ_2 相关联?

对于同源 (1) 和 (2)，这两个不同的特殊除子生成级数很可能通过某种形式的志村提升 [Shi87] 相关联：

$$\xi_{\mathrm{Sh}}:\mathrm{Mod}_{k+1/2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\to\mathrm{Mod}_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

Sankaran [San13], [San14] 已详细阐述了同源 (1) 这一观点在模曲线算术 Chow 群中的应用。

对于同源 (3)，预期的关系是通过 Saito-Kurokawa 提升 [Zag81]：

$$\xi_{\mathrm{SK}}:\mathrm{Mod}_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\to\mathrm{Mod}_{k+1}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})).$$

猜想 *6.1.* 设 X 是一个对应于 *SU(2, 2)* $\sim$ *SO(4, 2)* 的志村簇，同时具有酉型和正交型。余维 *2* 正交特殊循环的生成级数 $\Phi_2(q)\in CH^2(X)\otimes Mod_3(Sp_4(\mathbb{Z}))$ 是余维 *2* 酉特殊循环生成级数 $\Phi_1(q)\in CH^2(X)\otimes Mod_4(SL_2(\mathbb{Z}))$ 的 *Saito-Kurokawa* 提升。

同源 (5) 最近借助 Kuga-Satake 构造在 [Poo25], 中得到了模解释。我们预期 Ikeda 提升 [Ike01] 会关联相应志村簇上余维 4 特殊循环的成对生成级数。在同源 (4) 的情形下，Ikeda 提升的厄米版本 [Ike08] 应关联余维 2 特殊循环的成对生成级数。

再进一步，自然会想到这样一个问题：经过适当选择光滑环面紧化后，取值于 $\mathrm{CH}^d(X^\Sigma)$ 的一对经 ***Kudla*** 修正的 生成级数之间是否也存在相同的提升关系?

References

[AMRT10] Avner Ash、David Mumford、Michael Rapoport 和 Yung-Sheng Tai。《局部对称簇的光滑紧化》。Peter Scholze 合作。剑桥：剑桥大学出版社，2010。[BB66] W. L. Baily, Jr. 和 A. Borel。《有界对称域算术商的紧化》。《数学年刊》（第2辑），84：442–528，1966。[BHK+20] Jan H. Bruinier、Benjamin Howard、Stephen S. Kudla、Michael Rapoport 和 Tonghai Yang。《酉志村簇上除子生成级数的模性》。《Astérisque》，421，《正交与酉志村簇上的算术除子》：7–125，2020。[Bor98] Richard E. Borcherds。《格拉斯曼流形上的奇异自守形式》。《数学发明》，132(3)：491–562，1998。[BRZ24] Jan Hendrik Bruinier、Eugenia Rosu 和 Shaul Zemel。《志村簇环面紧化上的特殊 0-循环》。arXiv 电子预印本，编号 arXiv:2404.06254，2024年4月。[BWR15] Jan Hendrik Bruinier 和 Martin Westerholt-Raum。《Kudla 模性猜想与形式傅里叶-雅可比级数》。《Forum Math. Pi》，3：30，2015。编号 e7。[BZ21] Jan Hendrik Bruinier 和 Shaul Zemel。《正交 Shimura 簇环面紧化上的特殊循环》。《数学杂志》，2021。[BZ24] Jan Bruinier 和 Riccardo Zuffetti。《Kudla-Millson θ 函数的 Lefschetz 分解》。arXiv 电子预印本，编号 arXiv:2406.19921，2024年6月。[Del71] Pierre Deligne。《志村的工作》。《Bourbaki研讨会》，第*23*˙年（1970/71），报告第389号，第123–165页。《数学讲义》，第244卷，1971。[EGT23] Philip Engel、Fran¸cois Greer 和 Salim Tayou。《特殊除子的混合模拟模性》。arXiv 电子预印本，编号 arXiv:2301.05982，2023年1月。[Gar23] Luis E. Garc´ıa。《Kudla-Millson 形式与霍奇结构的单变量退化》。arXiv 电子预印本，编号 arXiv:2301.08733，2023年1月。[GG12] Jayce Getz 和 Mark Goresky。《系数取交叉同调的希尔伯特模形式与二次基变换》，《数学进展》第298卷。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012。[GL25] Fran¸cois Greer 和 Carl Lian。《具有层结构的 d-椭圆轨迹》。《伦敦数学学会杂志》，第II辑，112(1)，2025。编号 e70212。[GM80] Mark Goresky 和 Robert MacPherson。《交叉同调理论》。《拓扑学》，19：135–165，1980。[GRT14] Phillip Griffiths、Colleen Robles 和 Domingo Toledo。《非经典旗域的商不是代数簇》。《代数几何》，1(1)：1–13，2014。

[GT25] Fran¸cois Greer 和 Salim Tayou。《酉志村簇的上同调Kudla猜想》。预印本，arXiv:2507.13299 [math.NT] (2025)，2025。[HM25] Benjamin Howard 和 Keerthi Madapusi。《正交 Shimura 簇整模型上的 Kudla 模性猜想》。预印本，arXiv:2211.05108[math.NT] (2025)，2025。[HP20] Benjamin Howard 和 Keerthi Madapusi Pera。《Borcherds 乘积的算术》。《Astérisque》，（421，《正交与酉志村簇上的算术除子》）：187–297，2020。[HZ76] F. Hirzebruch 和 D. Zagier。《希尔伯特模曲面上曲线的相交数与Nebentypus模形式》。《数学发明》，36：57–113，1976。[Ike01] Tamotsu Ikeda。《将椭圆尖点形式提升为$2n$度Siegel尖点形式》。《数学年刊》（第2辑），154(3)：641–681，2001。[Ike08] Tamotsu Ikeda。《埃尔米特模形式的提升》。《组合数学》，144(5)：1107–1154，2008。[IL26] Aitor Iribar L´opez。《阿贝尔簇模空间上的Noether-Lefschetz闭链》。《Forum Math. Pi》，14：30，2026。编号 e2。[KM90] Stephen S. Kudla 和 John J. Millson。《局部对称空间上循环的相交数与多个复变量全纯模形式的傅里叶系数》。《高等科学研究所数学出版物》，71：121–172，1990。[Kud04] Stephen S. Kudla。《特殊循环与艾森斯坦级数的导数》。载于《Heegner点与Rankin L-级数》。关于Rankin L-级数特殊值的专题研讨会论文集，美国加利福尼亚州伯克利，2001年12月，第243–270页。剑桥：剑桥大学出版社，2004。[Lan20] 蓝凯文。《志村簇入门：基于实例的介绍》。即将发表于苏黎世联邦理工学院动机与复乘暑期学校论文集，第80页，2020。[Li23] Chao Li。《从两个平方数之和到算术Siegel-Weil公式》。《美国数学会通报》（新系列），60(3)：327–370，2023。[Li24] Chao Li。《几何与算术theta对应》。arXiv 电子预印本，编号 arXiv:2402.12159，2024年2月。[Lia21] Carl Lian。《亏格2和3中的 d-椭圆轨迹》。《国际数学研究通知》，20：15959–16007，2021。[Loo88] Eduard Looijenga。《局部对称簇的 L^2-上同调》。《组合数学》，67(1)：3–20，1988。[LR91] E. Looijenga 和 M. Rapoport。《Baily-Borel紧化局部上同调中的权》。载于《复几何与李理论》。1989年5月26日至30日在美国犹他州桑丹斯举行的专题讨论会论文集，第223–260页。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1991。[Poo25] Flora Poon。《Picard秩为14的K3曲面族上的Kuga-Satake构造》。预印本，arXiv:2504.08270 [math.AG](2025)，2025。[San13] Siddarth Sankaran。《志村曲线上的酉闭链与志村提升，I》。《文献数学》，18：1403–1464，2013。[San14] Siddarth Sankaran。《志村曲线上的酉闭链与志村提升，II》。《组合数学》，150(12)：1963–2002，2014。

[Shi87] 志村五郎. 关于半整数权希尔伯特模形式. 《杜克数学杂志》, 55(4):765 – 838, 1987.[SS90] Leslie Saper 和 Mark Stern. 算术簇的 L_2-上同调.《数学年刊》（第 *2* 辑）, 132(1):1–69, 1990.[Xia22] 夏嘉成. 酉志村簇的 Kudla 模性猜想的若干情形.《数学论坛·西格玛》, 10:31, 2022. 编号 e37.[Zag81] D. Zagier. 关于 Saito-Kurokawa 猜想（据 H. Maass）. 载于巴黎数论研讨班，*1979–80*，第 12 卷《数学进展》，第 371–394 页. Birkh¨波士顿，马萨诸塞州，1981 年.[Zha09] 张伟.志村簇上特殊循环生成函数的模性. 博士论文，哥伦比亚大学，纽约，2009 年.[Zuc82] Steven Zucker. 扭曲积的 L_2 上同调与算术群.《数学发明》, 70:169–218, 1982.

Department of Mathematics, Michigan State University, 619 Red Cedar Rd, East Lansing,MI 48824电子邮箱地址: greerfra@msu.edu

Department of Mathematics, Dartmouth College, Kemeny Hall, Hanover, NH 03755, USA电子邮箱地址: salim.tayou@dartmouth.edu