arXiv:2603.01255v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

制备与测量场景中模拟量子行为的经典代价界

Sebastian Schlösser[1, 2, 3, *] 和 Matthias Kleinmann[4, 3, †]
[1]乌普萨拉大学物理与天文学系，*Box 516，75120*，瑞典乌普萨拉
[2]*Nordita*、瑞典皇家理工学院和斯德哥尔摩大学，*10691*，瑞典斯德哥尔摩
[3]锡根大学自然科学与技术学院，*57068*，德国锡根
[4]明斯特大学量子技术系，*48149*，德国明斯特

我们研究制备与测量场景，其中 Alice 向 Bob 传输一个量子系统，随后 Bob 对其进行量子测量。Bob 不知道该系统的量子态，而 Alice 不知道所进行的测量。近期研究表明，共享随机性和两比特经典通信是模拟量子比特传输的必要且充分条件。我们证明，通信成本可降至平均 1.89 比特。随后，我们研究受限的态制备集合：首先，对于实值量子比特态的限制，如果经典三进制位的通信足够，我们证明相应协议必然具有复杂的形式。接着，我们将所需两比特经典通信的最小量子比特场景缩减为仅包含 6 种态制备和 5 种测量。对于量子三能级系统，目前尚不清楚通信成本是否有限；我们确定了一个场景，即使仅模拟实量子三元组，也至少需要 5 条经典消息。最后，我们针对受限的量子态集合提出了一种方法，仅依据量子态集合本身，就能给出经典通信成本的下界。

一、引言

量子信息理论中的一个基本问题，涉及量子系统在信息处理任务中相较于经典对应物的优势。霍列沃证明，量子系统与其经典对应物在传输经典信息方面是等价的 [1]。Frenkel 和 Weiner [2], 将这一结果推广，证明经典系统能够重现大小相同的量子系统的关联，前提是接收方使用固定的测量。因此，在制备与测量场景中，量子优势必然需要不相容测量 [3–5]。然而，对于输出还取决于提供给 Bob 的输入的通信任务，量子系统能够优于其经典对应物。随机访问编码就是一个例子：与传输经典比特相比，传输量子比特可以提高成功概率 [6–8]。在一般的制备与测量场景中，研究者会考察能够模拟量子统计的经典模型，尤其是仅使用有限经典通信的模型 [9–15]。Toner 和 Bacon [13], 取得了一项突破：他们证明，受限于投影测量的量子比特制备与测量场景，可以通过两比特通信和共享随机性进行经典模拟。Renner 等人 [14]近期将这一结果推广至广义测量（POVM）：量子比特制备与测量场景可以通过两比特通信进行经典模拟，并且该协议在最坏情况下的通信成本方面已被证明是最优的。据我们所知，这是一个尚未解决的问题：超出量子比特的量子系统能否使用有限经典通信进行模拟，即使只考虑消息长度的平均值也是如此。

在本研究中，我们证明，Toner 和 Bacon [13]以及 Renner 等人 [14] 提出的量子比特模拟协议中所需的两比特通信可以压缩，从而得到一种单次协议，以平均通信成本 1.89 比特、最坏情况通信成本 3 比特来模拟量子比特。我们讨论实量子比特的模拟；Gallego 等人 [16] 和 Renner 等人 [14]的结果表明，对实量子比特的最优模拟协议需要传输一个三进制位（3 条消息）或两比特（4 条消息）。我们证明，如果实量子比特可以用经典三进制位模拟，那么相应协议中的编码步骤必然十分复杂。随后，我们转向最小模拟场景，并证明仅包含 6 种态制备和 5 种投影测量的场景中，使用一个经典三进制位就已能区分量子比特关联与经典关联，从而改进了此前已知的最小构造。关于量子三能级系统这一尚未解决的问题，我们证明实量子三元组的模拟所需通信严格多于量子比特情形，即所需字母表至少包含 5 条消息。最后，我们通过将问题与量子态判别联系起来，证明所有经典模拟模型都具有一项结构性质。具体而言，任何模拟模型都会受到相应态判别任务中量子态可区分性的限制。我们给出经典模拟协议存在的一个必要条件，并将其表示为线性规划。该规划仅取决于一组输入态，能以特别高效的方式证明最坏情况通信成本的下界。

* sebastian.schlosser@physics.uu.se
† matthias.kleinmann@uni-muenster.de

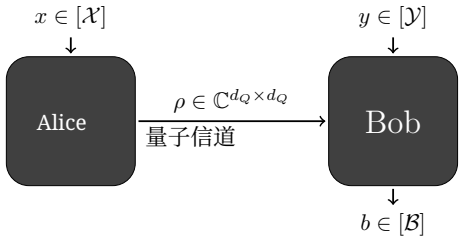

图1. 量子制备-测量场景中，Alice 接收输入 x，制备一个 d_Q 维的量子状态 ρ，并将其传输给 Bob。Bob 接收输入 y，并执行量子测量，产生结果 b。

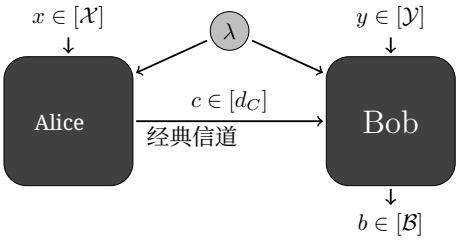

图2. Alice 和 Bob 共享经典关联 λ 时的经典制备与测量场景。Alice 接收输入 x，从长度为 d_C 的字母表中制备一条经典消息，并将其传送给 Bob。Bob 接收输入 y，并给出结果 b。

II. 制备与测量场景的经典模拟

我们考虑制备与测量场景：Alice 制备一个量子态并将其发送给 Bob，由 Bob 对该状态进行量子测量。我们用d_Q表示量子系统的维数。量子态由密度算符描述，即满足 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$的半正定算符 ρ。量子测量由正算子值测度（POVM）描述，也就是一组满足$\sum_b M_b = \mathbb{1}$的半正定算符 $\{M_b\}_b$。

裁判向 Alice 提供标签 x，并要求她制备量子态 ρ_x，然后将其传送给 Bob。Bob 收到标签 y，该标签指定了测量，并执行由 POVM $\{M_{b|y}\}_b$ 表示的测量，其中 b 表示测量结果。根据玻恩规则，所得结果的概率为这些行为

$$p_Q(b|x,y) = \mathrm{Tr}(\rho_x M_{b|y}). \tag{1}$$

对于输入和输出数量有限的设置，我们用 $\mathcal{X}$表示 Alice 输入集的基数，用 $\mathcal{Y}$ 表示 Bob 输入集的基数，用 $\mathcal{B}$表示 Bob 输出集的基数。该场景如图1所示。

我们考虑用于此任务的经典模型，其中允许 Alice 和 Bob 访问取值范围为 Λ、概率分布为 $\pi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$的共享随机变量 λ。也就是说，每一轮中，Alice 和 Bob 都能访问同一个随机值 λ，但裁判并不知道这个值。与之前一样，裁判向 Alice 提供标签x，但在经典模型中，她只能向 Bob 传送一个“维数”为 d_C的经典系统 $c \in [d_C] := \{1, \ldots, d_C\}$。Alice 以概率 $p_A(c|x,\lambda)$选择 c，并将其提交给 Bob。Bob 会收到标签 y，并被要求给出一个结果 b。相应地，他以概率 $p_B(b|c,y,\lambda)$给出结果 b。该情形如图 2 所示。因此，经典模型的行为可表示为

$$p_C(b|x,y) = \int_\Lambda \mathrm{d}\lambda\, \pi(\lambda) \sum_{c=1}^{d_C} p_A(c|x,\lambda) p_B(b|c,y,\lambda). \tag{2}$$

d_Q 维量子制备与测量场景可由一个 d_C 维经典系统模拟，前提是存在编码 $p_A(c|x,\lambda)$、解码$p_B(b|c,y,\lambda)$，以及定义在 Λ 上的合适的 $\pi(\lambda)$，使得

$$p_C(b|x,y) = p_Q(b|x,y), \tag{3}$$

对于所有可能的输入 x 和 y以及输出 b .

我们指出，不失一般性，可以假设 Alice 的行为是确定性的，方法是将她的局部随机性并入共享随机性。为此，我们引入一个新变量 $\lambda' = (\lambda, \mu)$，其中 μ取自 $[0,1]$ 上的均匀分布。现在可以将 Alice 的响应函数写为

$$p_A(c|x,\lambda) = \int_0^1 \mathrm{d}\mu\, D_A(c|x,\lambda'), \tag{4}$$

其中

$$D_A(c|x,\lambda') = \begin{cases} 1 \text{ if } \mu \le p_A(c|x,\lambda) \\ 0 \text{ else,} \end{cases} \tag{5}$$

是一个确定性响应函数。同样的论证也适用于 Bob 的响应函数。将经典模型表示为 Alice 和 Bob 的确定性响应函数后，便可将其实现为一个线性规划 [14, 16], ，我们将在附录 D 中讨论这一点。然而，确定性策略的数量（因此线性规划中的变量和约束数量）会随着输入和输出数量的增加而呈指数增长，因此该线性规划仅适用于规模较小的问题。在附录 D 中，我们介绍一种减少线性规划中确定性策略数量的方法，使我们能够处理规模更大的问题。

以往的研究主要采用两种方式来量化模拟协议的经典通信成本。第一种方法使用长度

经典字母表的长度 $d_C < \infty$ 来量化模拟协议的成本 [13, 14]。我们将这一指标称为最坏情况通信成本 $\mathcal{C} = \log_2 d_C$。第二种方法不要求通信在最坏情况下有限，而只要求通信的平均值有限 [10, 12, 17, 18]。换言之，我们允许字母表长度为无限 d_C，但要求 平均通信成本

$$\bar{\mathcal{C}} = \sup_x \int \mathrm{d}\lambda\, \pi(\lambda) l(x, \lambda) \tag{6}$$

消息的长度是有限的。这里， $l(x, \lambda)$ 表示对于给定的 λ，分配给输入 x 的经典消息所包含的比特数。显然，任何具有¯有限 $\mathcal{C}$ 的协议都对应于一个具有有限 $\mathcal{C}$的协议。因此，对于给定的设置，我们有:

$$\min \bar{\mathcal{C}} \leq \min \mathcal{C}, \tag{7}$$

其中，每个最小化都是在所有模拟协议中进行的。已有研究表明，在没有共享随机性的情况下，无法以有限的最坏情况通信成本 $\mathcal{C}$ 对量子比特进行经典模拟 [11]。这直接意味着，具有有限共享随机量 $|\Lambda| < \infty$ 的协议也不可能实现，因为任何有限随机性都可以纳入有限通信中。请注意，在允许双向通信的情形下，任何量子系统都可以通过有限的平均通信成本 [11]进行模拟。

Toner 和 Bacon [13] 证明，对于所有量子比特态和投影测量，最小值为 $\mathcal{C} \leq 2$ 比特。Renner 等人[14] 最近证明，对于所有量子比特态和广义测量（POVM），最小值为 $\mathcal{C} = 2$ 比特，从而解决了最一般量子比特情形下的这一通信成本问题。

已有研究表明，经典模拟所需的经典字母表长度 d_C 至少随量子维数 d_Q [9, 19–21]呈指数增长。文献 [20] 中 Montina 提出的方法可表述为一个正交量子态的态判别任务，其证明用到了关于超球面上距离规避集最大规模的结果。文献 [21] 的作者考虑了一项涉及量子态反判别的任务，并在证明中使用了球面码。除了给出一般性的指数下界外，他们还证明，模拟量子三能级系统（$d_Q = 3$）的协议具有 $d_C \geq 5$ ，而模拟量子四能级系统（$d_Q = 4$）的协议具有 $d_C \geq 10$。

然而，在量子比特情形之外，通信成本的上界尚属未知。特别是，尚不清楚量子三能级系统是否允许以有限通信进行经典模拟，即以 $d_C < \infty$。

III. 模拟协议

A. 量子比特

Renner 等人表明，就最坏情况通信成本 $\mathcal{C}$ 而言，两比特通信对于模拟量子比特 [14]是必要且充分的。此外，他们还讨论了具有¯平均通信成本 $\mathcal{C}$ 低于2比特的可能协议。他们表明，当 Alice 有时发送一个比特（或更少）时，无法模拟量子比特。他们的证明仅适用于 Alice 所发送消息的长度仅由共享随机性决定的情形。然而，一般而言，消息的长度还可以额外依赖于输入状态。

我们现在证明，在一般情况下，量子比特可以通过经典方式模拟，平均通信成本为 $\bar{\mathcal{C}} = 1.89$ 比特。为此，我们采用变长编码 [22, 23] ，因此在某些情况下，Alice 只发送 1 比特，而在另一些情况下，她最多发送 3 比特。这表明，可以对含有非零比特部分的量子比特进行模拟。我们的协议可直接由 Renner 等人提出的协议构造而成 [14], ，唯一的区别在于经典消息的编码和解码。只需考虑纯输入态 ρ_x，因为对于一组纯态，若存在经典模型，则必然存在适用于其凸包的协议。

我们回顾该协议的前两个步骤 [14] ，它们也与 Toner 和 Bacon 协议的前几个步骤相似 [13]。这里， $\Theta(z) = 1$ 当 $z \geq 0$ 时，而 $\Theta(z) = 0$当 $z < 0$时。

1. Alice 和 Bob 共享两个向量 $\vec{\lambda}_1$， $\vec{\lambda}_2 \in \mathbb{R}^3$，它们在单位球面 $\mathbb{S}^2$上均匀且独立分布。2. Alice 获得一个纯态 $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma})$。她根据公式 $c_1 = \Theta(\vec{x} \cdot \vec{\lambda}_1)$ 和 $c_2 = \Theta(\vec{x} \cdot \vec{\lambda}_2)$ 制备两个比特，并将它们发送给 Bob。

传输的两个比特 c_1， c_2 不一定包含两比特的信息，因为对于能够访问共享随机性$\vec{\lambda}_1$， $\vec{\lambda}_2$ [13]的观察者而言，它们通常是相关的。事实上， c_1 和 c_2 不相关的唯一情形是 λ_1 和 λ_2 正交。另一方面，当 $\vec{\lambda}_1$ 和 $\vec{\lambda}_2$ 平行或反平行时，这两个比特完全相关或完全反相关，因此只包含一比特的信息。

我们在布洛赫球上定义四个区域，

$$S_{i,j}(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) = \{\vec{r} \in \mathbb{S}^2 \mid \Theta(\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_1) = i, \Theta(\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_2) = j\}, \tag{8}$$

其中 $i, j \in \{0, 1\}$。它们对应于被分配相同消息的状态集合。在原始协议中，当 $\vec{x} \in S_{i,j}(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)$ 时，Alice 传输比特$c_1 = i$和 $c_2 = j$。对共享随机性进行积分后，消息 (i, j) 的概率 $p(i, j|\alpha, x)$ 在固定角度时与输入 x 无关

$\vec{x}$、$\vec{\lambda}_1$和$\vec{\lambda}_2$之间的相对角度$\alpha = \measuredangle(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) \in [0, \pi]$，因为此时积分中只出现$\vec{}$。我们得到

$$\begin{aligned} p(0,0|\alpha) = p(1,1|\alpha) &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}, \\ p(0,1|\alpha) = p(1,0|\alpha) &= \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \tag{9}$$

香农信源编码定理 [24] 指出，概率分布的熵构成了最佳无损压缩率的下界。当编码块长度趋于无穷大时，最优压缩率收敛于熵。上述概率分布的熵为

$$H(\alpha) = -2\left[\frac{\alpha}{2\pi}\log_2\frac{\alpha}{2\pi} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\log_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\right]. \tag{10}$$

因此，使用仅取决于 α 的编码，压缩率的下界为

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\alpha \frac{\sin\alpha}{2} H(\alpha) \approx 1.85\,\text{bits}, \tag{11}$$

另请参阅参考文献 [13]。这里，$\frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{4\pi}(\int \mathrm{d}\phi)$ $\sin\alpha$ 是从单位球面上的均匀分布中独立抽取的两个向量之间夹角 α 的概率分布。

重要的是，通信可以在单次情形下压缩，也就是说，无需并行执行多轮模拟。

结果 1。量子比特允许进行单次经典模拟，其平均通信成本为 $\mathcal{C} = 1.89$比特，最坏情况通信成本为 $\mathcal{C} = 3$比特。

为此，我们采用霍夫曼编码 [22, 23]，其分组大小为 1，从而实现最小编码。使用二元霍夫曼编码，我们得到二进制编码 $\mathrm{A}^{\pm}$，对于 $\alpha \le \frac{\pi}{3}$ 和 $\alpha \ge \frac{2\pi}{3}$，其平均通信成本小于两个比特。三元霍夫曼编码得到混合信道编码 $\mathrm{B}^{\pm}$，其中始终发送一个三进制位，有时还会额外发送一个比特。由于原始代码包含四个符号，更高阶的霍夫曼码没有实际意义。因此，我们在 α 上分段定义编码，为每个 α选择最优编码，另见图 3。于是，协议的前两个步骤如下。

1. Alice 和 Bob 共享两个向量 $\vec{\lambda}_1$，$\vec{\lambda}_2 \in \mathbb{R}^3$它们在单位球面上均匀且独立地分布 $\mathbb{S}^2$，并定义了单位球面上的四个区域$S_{i,j}(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)$，见公式（8）。

2. Alice 得到一个纯态 $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma})$。她告知 Bob 该状态属于四个区域 $S_{i,j}(\lambda_1, \lambda_2)$ 中的哪一个，也就是说，她向 Bob 发送 (i, j)，并根据 $\alpha = \pi\log_2\beta$ 对消息进行编码，其中 $\alpha = \measuredangle(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)$，如下所示：

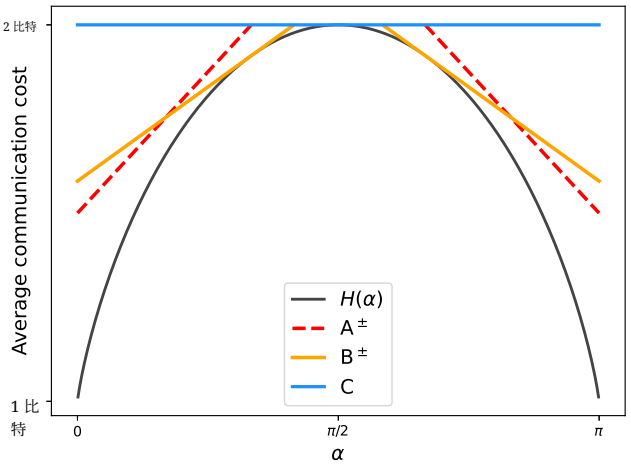

图3. 给定角度 $\alpha = \measuredangle(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) \in [0, \pi]$时不同编码策略的平均通信成本。$\alpha$-渐近编码给出了由熵 $H(\alpha)$给出的下界，见公式（9）。对于单次编码，5 种不同策略（$\mathrm{A}^{\pm}$、$\mathrm{B}^{\pm}$、C）的平均通信成本如图所示，其中编码 C 为原始编码。在每个 α 处选择成本最低的编码，得到我们的分段单次编码，其平均通信成本为 $\bar{\mathcal{C}} \approx 1.89$比特。

Encoding	A^+	B^+	C	B^-	A^-
β	$[1, \frac{9}{8}]$	$(\frac{9}{8}, \frac{4}{3}]$	$(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$	$[\frac{3}{2}, \frac{16}{9})$	$[\frac{16}{9}, 2]$
S_{00}	0_2	0_3	00_2	$2_3 1_2$	111_2
S_{11}	10_2	1_3	11_2	$2_3 0_2$	110_2
S_{01}	110_2	$2_3 0_2$	01_2	1_3	10_2
S_{10}	111_2	$2_3 1_2$	10_2	0_3	0_2

(12)

编码（和解码）取决于共享随机性 λ，具体通过 α 实现。此外，由于我们采用了变长编码，消息长度由共享随机性 λ 和状态$\vec{x}$决定。注意，当 $\beta \le \frac{9}{8}$ 或 $\beta \ge \frac{16}{9}$ 时，Alice 在某些情况下只发送一个比特，而在其他情况下最多发送三个比特。当 $\frac{9}{8} < \beta \le \frac{4}{3}$ 或 $\frac{3}{2} \le \beta < \frac{16}{9}$ 时，Alice 总是发送一个三进制位，有时还会额外发送一个比特。对于$\frac{4}{3} < \beta < \frac{3}{2}$，Alice 执行原始编码，并且总是发送两个比特。不同编码在给定角度 α 下的平均消息长度绘于图 3。

该协议的平均通信成本为

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}} &= \sup_{\vec{x}} \int \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \pi(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) l(\vec{x}, \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\alpha \frac{\sin\alpha}{2} L(\alpha) \approx 1.89\,\text{bits}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，$\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \sin\alpha$ 表示单位球面上两个独立均匀向量所夹角度 α 的概率密度。$L(\alpha)$ 表示上述编码的平均码字长度。也就是说，$L(\alpha) = \sum_{i,j} p(i,j|\alpha) L_{i,j}(\alpha)$，其中 $L_{i,j}(\alpha)$ 是

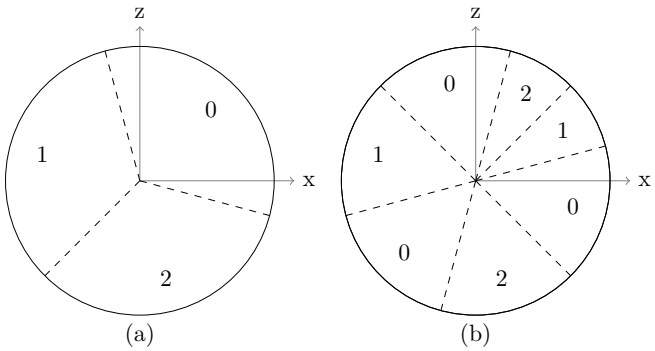

图4. 实量子比特纯态的确定性赋值 $D_A(c|x,\ \lambda)$，其中包含 $d_C = 3$，以及 (a) $N(\lambda)$ 个区段和 (b) $N(\lambda)$ 个区段。

编码的长度 $S_{i,j}$。我们在附录A中计算该积分。

B. 实量子比特

本节将讨论实量子比特，也称为实比特，它对应于量子比特的 xz 平面。也就是说，量子比特态和测量效应被限制在 xz 平面内，因此可以用实数描述。由于实量子比特包含于量子比特中，显然 $d_C = 4$ 已足够，但尚不清楚它是否也是经典协议所必需的。参考文献 [16] 给出了一组实量子比特态和测量设置，它们无法通过 $d_C = 2$ 实现经典模拟，因此对于实量子比特，$\min d_C \in \{3, 4\}$。我们证明，如果 $\min d_C = 3$，那么在相应的模拟协议中，Alice 的消息对其输入的依赖关系将十分复杂。

给定一个确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$，我们将$N(\lambda)$ 定义为沿赤道遍历所有量子态时经典消息c发生变化的次数。该定义如图 4 所示。显然，对于经典字母表长度为 d_C 的最优协议，则有

$$\max_{\lambda} N(\lambda) \geq d_C. \tag{14}$$

如果上述等式不成立，则相应的协议并非最优，因为它分配的消息总是少于d_C 条。另一方面，$N(\lambda)$可以任意大，从而使相应协议的表述变得繁复。我们注意到，Toner 和 Bacon [13] 以及 Renner 等人 [14]在 $d_C = 4$ 条件下的量子比特协议所需的区段不超过必要数量，即 $\max_\lambda N(\lambda) = 4$。

结果2. 对于实量子比特的最优经典模拟协议，要么 *(i)* $d_C = 3$ 且 $\max_\lambda N(\lambda) \geq 7$，要么 *(ii)* $d_C = 4$ 成立。

接下来需要证明，假设存在一种针对实量子比特的模拟协议，且其 $d_C = 3$ 的 $\max_\lambda N(\lambda) \geq 7$。

我们使用有限数量的量子态和测量来获得 $N(\lambda)$ 的界，因为实量子比特的完整模拟必须特别能够模拟任意有限子集。对于给定的 λ，与$D_A(c|x,\ \lambda)$ 兼容的、适用于所有量子态的赋值所需的最少区段数有如下下界：

$$N(\lambda) \geq |\{\, x \in \mathcal{X} \mid c(x,\lambda) \neq c(x+1,\lambda) \,\}|, \tag{15}$$

其中 $c(x,\lambda) \in [d_C]$ 是针对 x 和 λ 发送的消息，加法按模 $\mathcal{X}$ 进行。

我们考虑 $(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{B}) = (32, 16, 2)$ 设置。Alice 接收输入 $x \in [\mathcal{X}]$，并制备状态$\rho_x = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \cos(2\pi x/\mathcal{X})\sigma_x + \sin(2\pi x/\mathcal{X})\sigma_z)$。Bob 接收输入 $y \in [\mathcal{Y}]$ 并执行二元测量 $M_{\pm|y} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \cos(\pi y/\mathcal{Y})\sigma_x \pm \sin(\pi y/\mathcal{Y})\sigma_z)$。相应的线性规划（见附录 D）不可行，其中我们排除了所有满足$N(\lambda) \geq 7$的确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$。我们猜想 $N(\lambda) \geq 7$ 并非根本性的，并且借助更多计算资源可以进一步推进。

IV. 经典维度见证

文献 [16]，引入了一种用于制备与测量场景中行为的经典性认证的概念。一般的经典维度见证 W 可写为

$$W = \sum_{b,x,y} c^b_{x,y}\, p_C(b|x,y) \leq C_{d_C}, \tag{16}$$

其中系数为实数 $c^b_{x,\ y}$。所有字母表长度为 d_C 的经典模型所产生的行为 $\{p_C(b|x,\ y)\}_{b,\ x,\ y}$均满足经典界 C_{d_C}。相反，若违反经典界 C_{d_C}，则可认证不存在使用大小为 d_C 的字母表的经典模型能够模拟给定行为。

对于具有二元结果 $b \in \{\pm\}$ 的设置，经典维度见证通常用期望值表示，即

$$W = \sum_{x,y} c_{x,y} E_{x,y} \leq C'_{d_C}, \tag{17}$$

系数为 $c_{x,\ y}$和 $E_{x,\ y} = p(+|x,\ y) - p(-|x,\ y)$。

首先，我们将介绍能够区分量子比特行为与所有可用三进制模拟的行为的见证。其次，我们将给出一个见证，用以区分可由实量子三元组得到的行为与所有可用 $d_C = 4$ 进行经典模拟的行为。这证明了我们的结论：对实量子三元组进行模拟需要 $d_C \geq 5$。

A. 量子比特

Gallego 等人证明，存在无法用一个经典比特模拟的量子比特行为 [16]。他们

刻画了 $d_C = 2$ 的经典多面体，以及$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}) = (3, 2, 2)$设置，并证明仅存在一个非平凡的面。相应的不等式是 $d_C = 2$ 的一个紧见证，实数值量子比特可以违反该不等式。Renner 等人证明，在(6,11,2) 设置中，存在无法用三进制位模拟的量子比特行为，从而证明了其模拟协议的最优性 [14]。

我们旨在构造一个最小示例。首先，当$d_C \geq \mathcal{X}$时，可以实现完美编码，模拟也就变得轻而易举。此外，当 Bob 只有一个输入时，使用$d_C = d_Q$ [2]即可实现完美的经典模拟。因此，任何包含不可用三进制模拟的关联的场景都满足 $\mathcal{X} \geq 4$，$\mathcal{Y} \geq 2$且 $\mathcal{B} \geq 2$。我们在此确定的最小设置为 (6，5，2)。为此，我们考虑一个包含六个状态 $\vec{x}_i$的设置，这些状态由布洛赫向量 $\pm\hat{e}_x$，$\pm\hat{e}_y$，$\pm\hat{e}_z$ 给出；另有 $\mathcal{Y}$ 个投影测量，由布洛赫向量 $\hat{y}_1$，……$\hat{y}_\mathcal{Y}$给出。注意，为方便起见，我们使用未归一化向量$\vec{y}_j$，并记作 $\hat{y}_j = \vec{y}_j/\|\vec{y}_j\|_2$。因此，期望值为 $E_{i,\,j} = \vec{x}_i \cdot \hat{y}_j$，我们通过以下方式构造见证的系数 $W_{6,\,\mathcal{Y},\,2}$

$$c_{i,j} = \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{y}_j}{2}. \tag{18}$$

如果 $d_C \geq \mathcal{X}$，则始终存在经典模型，并达到见证的代数最大值。对于这种形式的见证，代数最大值为

$$W_{6,\mathcal{Y},2} \leq \sum_j \|\vec{y}_j\|_1 = \sum_{j,\ell} |\vec{y}_{j,\ell}|. \tag{19}$$

使用量子比特设置，可以达到量子比特值

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{x,y} c_{x,y} E_{x,y} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{x}_i \cdot \vec{y}_j) \left(\vec{x}_i \cdot \frac{\vec{y}_j}{\|\vec{y}\|_2} \right) \\ &= \sum_j \|\vec{y}_j\|_2. \end{aligned} \tag{20}$$

我们首先考虑 $\mathcal{Y} = 5$投影测量的情况，这些测量由（未归一化的）向量给出

i	1	2	3	4	5
$\vec{y}_i$	1	1	1	1	1
	-1	-1	0	2	2
	1	0	-1	-1	2

(21)

然后，见证 $W_{6,\,5,\,2}$ 如公式（18）所述，具有经典界

$$W_{6,5,2} \overset{\text{C2}}{\leq} 8 \overset{\text{C3}}{\leq} 10 \overset{\text{C4}}{\leq} 12 \overset{\text{C5}}{\leq} 14 \overset{\text{C6}}{\leq} 16, \tag{22}$$

其中这些界限对应于 $d_C = 2$ （C2）、 $d_C = 3$ （C3）等。这些界限是通过对所有经典策略进行穷举搜索得出的，详见附录 B。根据式（20），量子比特对应的数值为

$$Q = 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \approx 10.01, \tag{23}$$

这证明了量子比特无法用三进制模拟，尽管相对违反量 $Q/C_3 - 1 \approx 0.001$ 非常小。

在具有 $\mathcal{Y} = 10$ 的设置中，我们考虑由（未归一化的）向量给出的投影测量

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\vec{y}_i$	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	0
	1	1	-1	1	1	0	1	-1	0	1
	1	1	1	-1	0	1	1	0	-1	-1

(24)

然后，见证 $W_{6,\,10,\,2}$ 如公式（18）所述，具有经典界

$$W_{6,10,2} \overset{\text{C2}}{\leq} 12 \overset{\text{C3}}{\leq} 15 \overset{\text{C4}}{\leq} 18 \overset{\text{C5}}{\leq} 21 \overset{\text{C6}}{\leq} 24. \tag{25}$$

量子比特设置达到

$$Q = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \approx 15.41, \tag{26}$$

以及 $Q/C_3 - 1 \approx 0.027$。这一设置具有高度对称性：在布洛赫表示中，态矢量指向立方体的 6 个面心点，而测量矢量指向同一立方体的 12 个棱心点和 8 个顶点。

B. 量子三能级系统

本节将证明，对（实）量子三能级系统进行经典模拟，至少需要一个含五个字母的字母表，即 $d_C \geq 5$。此处的实是指所有状态和测量都仅限于实数系数的量子系统。为此，我们将考察 Yu-Oh 设置 [25], ，该设置此前已用于研究 Kochen-Specker 情境性 [26]。在V 节中，我们将讨论其与图着色的联系，并证明，对于给定的一组输入态，模拟成本 d_C 的下界由相应正交图的色数给出。由此可知，仅对于 Yu-Oh 设置，便有 $d_C \geq 4$。在此，我们将把这一$d_C \geq 5$下界进一步提高至。

结果 3。 对（实）量子三能级系统进行经典模拟至少需要一个包含五个字母的字母表，即 $d_C \geq 5$。

13 个 Yu-Oh 态$|\phi_i\rangle = \sum_k z_{i,\,k} |k\rangle$，$i \in [13]$ 由以下态矢量给出，忽略归一化因子。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\|\phi_i\rangle$	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
	1	1	-1	1	1	0	1	-1	0	1	0	1	0
	1	1	1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	0	1

(27)

我们构造了13 个二元测量$M_{\pm,\,j}$ 同样使用向量 $|\phi_i\rangle$，即 $M_{+|j} = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ 和$M_{-|j} = \mathbb{1} - |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$。改进后的线性规划（见附录D）使我们能够证明该设置可以用 $d_C = 5$进行模拟，但不能用 $d_C = 4$进行模拟。注意，具有(10，4，2）设置以及10 个量子态 $|\phi_i\rangle$、 $i \in [10]$ 和

4 个测量 $M_{\pm|j},\ \ j\in[4]$ 足以证明具有 $d_C=4$的经典模型不成立。由对偶问题的解中提取出的见证系数（见参考文献 [14], ）为

$$C^{\intercal}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & 2 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 3 & 3 & 2 & 2 & -3 & -3 & -3 & 2\\ 3 & 3 & -2 & 3 & 2 & -3 & 2 & -3 & 2 & -3\\ 3 & 3 & 3 & -2 & -3 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

其中 $(i,\ \ j)$ 的元素 C 对应于见证中的系数 $c_{i,\ j}$ 参见式（17）。该见证适用于$(10,\ 4,\ 2)$ 场景，并满足以下经典界

$$\begin{aligned} W_{10,4,2} &\overset{\text{C2}}{\leq} 44 \overset{\text{C3}}{\leq} 62 \overset{\text{C4}}{\leq} 68 \overset{\text{C5}}{\leq} 76 \overset{\text{C6}}{\leq} 80\\ &\overset{\text{C7}}{\leq} 88 \overset{\text{C8}}{\leq} 92 \overset{\text{C9}}{\leq} 98 \overset{\text{C10}}{\leq} 104. \end{aligned} \tag{29}$$

三能级量子系统设置达到 $Q=72$ 和 $Q/C_4-1=\frac{1}{17}\approx$0。059。因此，实量子三元组不存在满足 $d_C=4$ 的经典模拟模型。

我们指出，参考文献 [27] 中为纠缠辅助制备与测量场景构造的见证，对于不含纠缠的制备与测量场景也很有意义。它可以区分三能级量子系统行为与在 $d_C=4$ 下可实现的经典行为。该场景构成一个 (9，4，3) 设置，其中输入态 $\{|\psi_i\rangle\}_i$ 对应于 Hesse对称信息完备POVM [28]，即在归一化因子之外，

$$\begin{array}{c|ccccccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ \hline |\psi_i\rangle & 0 & -1 & 1 & 0 & -\omega & 1 & 0 & -\omega^2 & 1\\ & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\omega & 1 & 0 & -\omega^2\\ & -1 & 1 & 0 & -\omega & 1 & 0 & -\omega^2 & 1 & 0 \end{array}, \tag{30}$$

使用 $\omega=e^{2\pi i/3}$。Bob 在四个互 unbiased 基中进行测量，

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&\omega&\omega\\\omega&1&\omega\\\omega&\omega&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&\omega^2&\omega^2\\\omega^2&1&\omega^2\\\omega^2&\omega^2&1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

文献 [27] 中构造的见证 $W_{9,4,3}$ 的系数为 $c^b_{x,y}=4p_Q(b|x,y)-1$。我们得到以下经典界，

$$W_{9,4,3} \overset{\text{C2}}{\leq} 30 \overset{\text{C3}}{\leq} 33 \overset{\text{C4}}{\leq} 35 \overset{\text{C5}}{\leq} 36. \tag{32}$$

对于给定的复数值量子三能级系统状态和测量，我们有 $Q=36$，也就是说，该见证达到了代数最大值，并且 $Q/C_4-1\approx 0.029$，从而证实了在此设置下的 $d_C\geq 5$ [21]。

V. 通过态判别限制经典模型

本节中，我们从状态集合和测量均为有限集的情形出发，推导最坏情况下通信量的下界。首先，我们证明，对于给定的状态集合，任何经典模型都受到这些状态可区分性的限制。随后，我们推导经典模拟协议存在的必要条件。由此，我们得到一个用于认证模拟成本下界的线性规划。此外，我们将寻找下界这一任务与图论联系起来，并发现，量子态排他图的色数可以给出模拟成本的下界。

A. 限制经典模型

每个采用有限态集的经典模拟协议都必须满足以下性质 [20]:

引理1。 对于所有 c，以及所有满足 $\pi(\lambda)>0$ 的 λ，集合$S_c(\lambda)=\{\rho_x\mid p_A(c|x,\lambda)>0\}$ 不包含任何一对正交态。

这一模拟协议性质背后的直观解释如下。在每一轮中，Bob 对状态 ρ_x 的了解仅限于共享变量 λ，以及他从 Alice 收到的经典运消息 c。因此，Bob 可以刻画集合 $S_c(\lambda)$，并推断出 $\rho_x\in S_c(\lambda)$。现在假设 $S_c(\lambda)$ 包含一对正交态ρ_+，ρ_-，且要求 Bob 执行一次测量，以完美区分这两个状态。那么，他无法确定地给出正确结果，经典模拟模型也就无法重现正确的统计。

为了使经典模拟能够完美重现正交态判别的统计，这一条件必须得到满足。现在我们将证明，一般而言，输入态的可区分性会对经典模型施加强约束。如前所述，总可以将 Alice 的局部随机性并入共享随机性，从而假设 Alice 采取确定性策略 λ，参见公式（4）和公式（5）。对于有限设置$(\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{B})$，确定性策略的数量有限，且可由 λ枚举。因此，我们可以将积分写成有限和，经典模型可表示为

$$p_C(b|x,y)=\sum_{\lambda}\pi(\lambda)\sum_{c=1}^{d_C}D_A(c|x,\lambda)p_B(b|c,y,\lambda), \tag{33}$$

其中 $D_A(c|x,\lambda)\in\{0,1\}$ 是 Alice 在 $\sum_c D_A(c|x,\lambda)=1$下的确定性策略，$|\Lambda|=d_C^{\mathcal{X}}$另请参阅附录 D。

我们定义确定性策略集合，以 λ 为标记；这些策略会为给定的输入对 x 和 x' 分配相同的消息，即

$$\Lambda_{=}(x,x')=\{\lambda\in\Lambda|D_A(c|x,\lambda)=D_A(c|x',\lambda)\forall c\}. \tag{34}$$

因此，将不同消息分配给输入 x 和 x' 的确定性策略集合为

$\Lambda_{\neq}(x,x') = \Lambda \setminus \Lambda_{=}(x,x')$。现在假设输入态集合 $\{\rho_x\}_{x=1}^{\mathcal{X}}$ 至少包含一对正交态。那么，根据引理1 可知，特别地，任何确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$ 都不得为这对正交态分配相同的消息，除非相应的权重 $\pi(\lambda)$ 为零。推广这一结果，下面将看到，为一对状态 $\rho_x,\rho_{x'}$ 分配不同消息的策略所作的贡献，下界由这些状态的迹距离（即其可区分性）给出。这里，$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}(\sqrt{T^\dagger T})$ 表示迹范数。

结果4. 给定一个针对有限组量子态 $\mathcal{P} = \{\rho_x\}_{x=1}^{\mathcal{X}}$ 和一组测量 $\mathcal{M}$ 的经典模拟协议，其中包含针对每一对量子态进行态判别的最优测量，则有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\neq}(x,x')} \pi(\lambda) \geq \frac{1}{2}\|\rho_x - \rho_{x'}\|_1 \quad \forall x,x' \in [\mathcal{X}]. \tag{35}$$

模拟协议具有这一性质的直观解释如下。如果 Alice 和 Bob 必须能够对一对输入态进行最优态判别，那么能够区分这对量子态的确定性策略的权重 $\pi(\lambda)$就必须足够大。另一方面，如果这些权重较低，他们就无法达到 Helstrom界。从这个意义上说，Helstrom测量尤其难以通过经典协议进行模拟。

结果4的证明。 考虑最小错误量子态判别任务：源以相同概率制备 ρ_x 或 $\rho_{x'}$，我们尝试通过执行一个其效应为 $\{M_+, M_-\}$的二元测量，来推断标签 x，x'。成功概率为

$$\begin{aligned} p_{\text{success}} &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\rho_x M_+) + \mathrm{Tr}(\rho_{x'} M_-)\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[(\rho_x - \rho_{x'})M_+\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

通过对状态 $\rho_x, \rho_{x'}$执行 Helstrom测量 [29]，可使成功概率最大化，我们将其记为 $M_{\pm|y}$。该测量由 $\rho_x - \rho_{x'}$ 的正、负特征子空间上的投影算符给出，所得成功概率为

$$p_{\text{success}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\|\rho_x - \rho_{x'}\|_1. \tag{37}$$

对于经典模拟，我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\rho_x - \rho_{x'}\|_1 &= \mathrm{Tr}[(\rho_x - \rho_{x'})M_{+|y}] \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} \pi(\lambda) \sum_{c=1}^{d_C} p_B(+|c,y,\lambda) \\ &\qquad (D_A(c|x,\lambda) - D_A(c|x',\lambda)) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_{\neq}(x,x')} \pi(\lambda) \sum_{c=1}^{d_C} p_B(+|c,y,\lambda) \\ &\qquad (D_A(c|x,\lambda) - D_A(c|x',\lambda)) \\ &\leq \sum_{\lambda\in\Lambda_{\neq}(x,x')} \pi(\lambda), \end{aligned} \tag{38}$$

其中最后一个不等式通过略去负项并利用 $\sum_{c=1}^{d_C} p_B(+|c,y,\lambda)$ $D_A(c|x,\lambda) \leq 1$ 得到。由于这对每一对 x,x' 均成立，该命题得证。

□

至关重要的是，结果 4 给出了经典模型存在的必要条件，因此可用于认证模拟成本的下界。它可以表述为以下线性规划：

$$\begin{aligned} \text{given} \quad & \{\rho_x\}_{x=1}^{\mathcal{X}}, d_C \\ \text{find} \quad & \pi(\lambda), \quad \lambda \in \{1,\ldots,d_C\}^{\mathcal{X}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\lambda:\lambda_x\neq\lambda_{x'}} \pi(\lambda) \geq \frac{1}{2}\|\rho_x - \rho_{x'}\|_1 \quad \forall x,x', \\ & \pi(\lambda) \geq 0 \quad \forall\lambda, \\ & \sum_{\lambda} \pi(\lambda) = 1, \end{aligned} \tag{39}$$

其中，λ_x 对应于消息 c，相应的确定性策略 $D_A(c|x,\lambda) = 1$。

该线性规划无需显式处理测量，即可认证经典消息长度为 d_C 时，无法模拟一组状态 $\{\rho_x\}_{x=1}^{\mathcal{X}}$，因为我们隐含地假设，经典模型尤其必须能够模拟 Helstrom测量。一个重要应用是：为量子三能级系统选择两组互 unbiased 基（另见式（31））， 当 $d_C = 4$时，该线性规划无可行解，从而给出了或许是证明量子三能级系统 $d_C \geq 5$最简单的方法。与模拟行为的线性规划相比，该线性规划所涉及的变量和约束更少，见附录 D中的式（D2。变量数为 $N_{\text{var}} = |\Lambda|$，约束数为$N_{\text{con}} = |\Lambda| + \mathcal{X}(\mathcal{X}-1)/2 + 1$。

粗略地说，我们有 $|\Lambda| = d_C^{\mathcal{X}}$。然而，由于这些约束仅依赖于标签间差异，而不依赖于具体标签本身，它们在重新标记下保持不变。因此，只需从标记的每个等价类中保留一个代表元即可。此外，只需考虑使用每一个的 λ

消息 $c \in [d_C]$ 至少一次，因为我们总是可以将省略一个或多个标签的赋值的权重重新分配给使用全部标签的赋值。因此，$|\Lambda|$ 由第二类斯特林数 $\left\{ {\mathcal{X} \atop d_C} \right\}$ 给出，它计数将含有 $\mathcal{X}$个元素的集合划分为 d_C 个非空子集的方式数。

此外，只需考虑与正交图 G 中输入态 $\{\rho_x\}_{x=1}^{\mathcal{X}}$的正常着色相对应的确定性策略，因为问题的约束保证了正常着色。在下一节中，我们将阐述正交图的图论与图着色之间的联系。此外，在附录D中，我们将更详细地讨论线性规划中确定性策略的化简，但这里先简要介绍其主要思路。为此，请注意，式（35）意味着

$$\sum_{\Lambda=(x,x')} \pi(\lambda) = 0 \quad \forall x, x' \in [\mathcal{X}] \text{ s.t } \operatorname{Tr}(\rho_x \rho_{x'}) = 0, \quad (40)$$

因为 $\pi(\lambda) \geq 0$ 且 $\sum_{\lambda\in\Lambda} \pi(\lambda) = 1$。这一点尤其有用，因为它使我们能够减少线性规划中的变量数量：我们可以预先排除 $\lambda \in \Lambda$ 中满足 $\pi(\lambda) = 0$ 的项（另见附录D）。

B. 图论表述

现在，我们利用图论和引理1来获得通信成本的下界。为此，我们考虑一个有限的制备与测量设定，其中输入集合 $[\mathcal{X}]$ 对应于d_Q维希尔伯特空间中的向量 $|\psi_x\rangle$ 。我们定义正交图 G，其顶点由 $|\psi_x\rangle$ 给出；若一对顶点对应的量子态正交，则这两个顶点相连$\langle\psi_x|\psi_{x'}\rangle = 0$。色数 $\chi(G)$表示对 G进行正常着色所需的最少颜色数，即一种顶点着色，使得相邻顶点颜色不同。色多项式$P(G,k)$是关于 k的多项式，其取值等于使用 k 种颜色对 G进行正常图着色的方案数。因此显然，$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} | P(G,k) > 0\}$。

我们可以将 Alice 的确定性策略$D_A(c|x,\lambda)$视为 G的着色；对于给定的 λ，我们为每个顶点 $|\psi_x\rangle$ 指定满足 $= 1$的$D_A(c|x,\lambda)$对应的消息（颜色） c 。根据式（40），所有不是 G 正常着色的着色都会导致$\pi(\lambda) = 0$。特别是，当 $d_C < \chi(G)$时，不存在使用 d_C 种颜色对 G 进行正常着色的方案，因此经典模拟会失败。

引理 2。量子维数为 d_Q 的系统的模拟成本 d_C ，下界由任意具有d_Q维表示的正交图 G 的色数 $\chi(G)$ 给出。也就是说，

$$d_C \geq \max_G \chi(G), \quad (41)$$

其中最大值取遍维数 d_Q中所有量子态的正交图。

该引理直接蕴含平凡下界$d_C \geq d_Q$，因为 $\chi(K_{d_Q}) = d_Q$ ，其中 K_{d_Q} 表示具有 d_Q 个顶点的完全图，而在维数 d_Q 中，它是与量子态的完备基相关联的正交图。

重要的是，确实存在色数大于其表示维数的正交图。不过，我们必须超越量子比特才能找到这类图，因为每个量子比特状态只有一个正交状态，因此每个量子比特正交图都是 2-可着色的。对于量子三能级系统，我们可以考虑 Yu-Oh 图 G_{YO} ，其 $\chi(G_{\mathrm{YO}}) = 4$ [25, 30]。该图可用维数为 13 的实值量子态表示，见式（27）。因此，对于任何满足 $d_C \geq d_Q + 1$ 的模拟协议，均有此结论，因为如果表示维数增加一，我们就可以添加一个与所有先前顶点正交的顶点，从而使色数增加一。此外，随着量子维数 d_Q增加，可以构造一系列图，使其色数随 d_Q 呈指数增长，例如使用 Hadamard 图。Hadamard 图色数的下界[31, 32] 意味着，对于 $d_Q = 4k$，其中 k 是素数幂，有

$$d_C > \left(\frac{27}{16}\right)^{d_Q/4} > 1.139^{d_Q}, \quad (42)$$

见附录 C。请注意，其他方法可以突破这一界，参见文献 [20, 21]。此外，文献 [33]给出了所有具有量子表示且维数为 d_Q的正交图的色数上界，即

$$\max_G \chi(G) \leq \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^{2d_Q} < 14.657^{d_Q}. \quad (43)$$

我们想强调的是，虽然公式（43）限制了根据正交图的色数所能得到的 d_C 下界，但通过公式（39）中的线性规划所能得到的下界可以超过色数。更确切地说，当 $d_C < \chi(G)$ 时，线性规划不可行；然而 $d_C \geq \chi(G)$并不能推出可行性：前文中维数为 $d_Q = 3$ 的两个互 unbiased 基的例子，其色数为$\chi(G) = 3$ ，但要求 $d_C = 5$。

VI. 讨论

在本研究中，我们考察了单次制备与测量场景的经典模拟。我们首先讨论了通信成本的两种主要定义，即平均通信成本和最坏情况通信成本。受 Toner 和 Bacon [13], 的启发，最坏情况通信成本已得到详尽研究；我们在此证明，平均成本可能显著低于最坏情况

通信成本。为此，我们利用量子比特的最优最坏情况协议，给出平均成本的界，并得到了一个所需通信量为 1.89 比特的显式模拟协议。对于更高的量子维数，这种差距可能会更加显著。

最坏情况通信成本 $d_C > d_Q$ 可以理解为一种量子优势：通信维度为 d_Q 的量子系统，显著比通信维度为 d_C 的经典系统高效。找出能够产生量子优势的最小场景，是理解量子系统及其潜在技术应用的基础。我们研究了实现此类优势的最小场景，并给出了相应的见证，即关联不等式：要达到量子比特（三能级系统）的值，经典系统的维度必须达到 $d_C = 4$（$d_C = 5$）。例如，我们确定的最小设置分别使用了 6（10）种态制备和 5（4）种二结果测量。

最坏情况通信成本的下界通常通过给出一组（有限的）量子态和测量，并证明相应的量子行为无法被经典模拟来构造。我们发现，使用用于最优成对态判别的测量，已经对经典维度施加了很强的约束。所得的线性规划可用于在不指定测量的情况下排除一组量子态的可模拟性，从而也显著减小线性规划的规模。作为应用，我们发现少至6个量子三能级系统的量子态便足以达到 $d_C \geq 5$的模拟成本。

最重要的开放问题是三能级系统的经典模拟，尤其是经典维度能否有限，$d_C < \infty$。我们还提出了另一个不同的开放模拟问题：实量子比特。由于实量子比特是量子比特的子集，其通信成本不会高于量子比特，但能否通过 $d_C = 3$ 实现效率严格更高的模拟，仍是一个有趣（且出人意料地错综复杂）的问题。我们证明，如果确实如此，那么所得协议就不可能具有简单的形式。发展回答这一问题的方法，或许是攻克三能级系统问题的关键一步，尤其是通过研究三能级系统的低维截面。

致谢

我们感谢 Carlos de Gois、Giulio Gasbarri、Martin J. Renner、Pauli Jokinen、Armin Tavakoli 和 Roope Uola 的讨论。我们感谢使用锡根大学的 OMNI 集群进行计算。本工作得到德国研究联合会（DFG，德国研究联合会，项目编号 447948357 和 440958198）、中德科学促进中心（项目 M-0294）、德国联邦教育与研究部（项目 QuKuK，BMBF 资助号 16KIS1618K）以及瓦伦堡网络与量子信息倡议（WINQ）的支持。

[1]A. S. Holevo，量子通信信道所传输信息量的界，《信息传输问题》9, 3 (1973)。[2] P. E. Frenkel 和 M. Weiner， n能级量子系统中的经典信息存储，数学物理通讯 340, 563 (2015)。[3] C. Vieira、C. de Gois、L. Pollyceno 和 R. Rabelo，经典与量子纠缠辅助通信场景之间的相互作用，《新物理学杂志》25, 113004 (2023)。[4] C. de Gois、G. Moreno、R. Nery、S. Brito、R. Chaves 和 R. Rabelo，制备与测量场景中经典性认证的一般方法，PRX Quantum 2, 030311 2021年( )。[5] S. Egelhaaf、J. Pauwels、M. Túlio Quintino 和 R. Uola，在制备与测量场景和贝尔场景中认证测量不相容性，物理学杂志A 58, 095304 2025( )。[6] S. Wiesner，共轭编码，ACM SIGACT News 15, 78 1983( )。[7] A. Ambainis、A. Nayak、A. Ta-Shma 和 U. Vazirani，稠密量子编码及单向量子自动机的下界（ 1998 9804043 ），[ ] arXiv:quant-ph/ quant-ph 。[8] A. Ambainis、D. Leung、L. Mancinska 和 M. Ozols，具有共享随机性的量子随机存取码 (2009)，arXiv:0810.2937 [quant-ph]。

[9] G. Brassard、R. Cleve 和 A. Tapp，使用经典通信精确模拟量子纠缠的成本，《物理评论快报》83，1874（1999）。[10] N. J. Cerf、N. Gisin 和 S. Massar，量子比特的经典隐形传态，《物理评论快报》84，2521（2000）。[11] S. Massar、D. Bacon、N. J. Cerf 和 R. Cleve，在没有局域隐变量的情况下对量子纠缠进行经典模拟，《物理评论 A》63，052305（2001）。[12] M. Steiner，迈向非局域信息传递的量化：有限比特非定域性，《物理快报 A》270，239（2000）。[13] B. F. Toner 和 D. Bacon，模拟贝尔关联的通信成本，《物理评论快报》91，187904（2003）。[14] M. J. Renner、A. Tavakoli 和 M. T. Quintino，传输量子比特的经典成本，《物理评论快报》130，120801（2023）。[15] J. Degorre、S. Laplante 和 J. Roland，将量子关联模拟为分布式采样问题，《物理评论 A》72，062314（2005）。[16] R. Gallego、N. Brunner、C. Hadley 和 A. Acín，经典与量子维度的设备无关检验，《物理评论快报》105，230501（2010）。[17] A. Hansen、A. Montina 和 S. Wolf，用于计算量子通信过程通信复杂度的简单算法，《物理评论 A》93，

042315（2016）。[18] T. Maudlin，贝尔不等式、信息传输与棱镜模型，PSA：科学哲学协会双年会论文集 1992，404（1992）。[19] H. Buhrman、R. Cleve 和 A. Wigderson，量子与经典通信和计算，载于第三十届年度 ACM 计算理论研讨会论文集，STOC '98（ACM Press，纽约，NY，美国，1998），第 63 页。[20] A. Montina，使用后续秩一投影测量对量子信道进行经典模拟的通信成本，《物理评论 A》84，060303（2011）。[21] V. Havlíček 和 J. Barrett，源自量子态反区分性的简单通信复杂度分离，《物理评论研究》2，013326（2020）。[22] D. A. Huffman，构造最小冗余码的一种方法，IRE 论文集 40，1098（1952）。[23] H. H. F. Yin、X. Wang、K. H. Ng、R. W. F. Lai、L. K. L. Ng 和 J. P. K. Ma，关于非对称字母表信道的多信道霍夫曼码（2021 2105 03606），[ ] arXiv：cs.IT。[24] C. E. Shannon，通信的数学理论，《贝尔系统技术期刊》27，379（1948）。[25] S. Yu 和 C. H. Oh，使用 13 条射线对 Kochen–Specker 定理作与状态无关的证明，《物理评论快报》108，030402（2012）。[26] S. Kochen 和 E. Specker，量子力学中的隐变量问题，印第安纳大学数学期刊 17，59（1967）。[27] J. Pauwels、A. Tavakoli、E. Woodhead 和 S. Pironio，制备与测量场景中的纠缠：许多问题、若干答案，《新物理学杂志》24，063015（2022）。[28] H. B. Dang、K. Blanchfield、I. Bengtsson 和 D. M. Ap- pleby，《Weyl–Heisenberg 轨道中的线性依赖》，《量子信息处理》12，3449（2013）。[29] C. W. Helstrom，《量子统计中估计的最小均方误差》，《物理快报 A》25，101（1967年）。[30] L. Mančinska 和 D. E. Roberson，《量子着色的奇特之处》，《波罗的海现代计算杂志》4，846（2016年）。[31] P. Frankl，《n 维立方体中的正交向量与缺失距离码》，《组合数学》6，279（1986年）。[32] F. Ihringer 和 H. Tanaka，《维数为 $2k$ 的正交图的独立数》，《组合数学》39，1425（2019年）。[33] P. J. Cameron、A. Montanaro、M. W. Newman、S. Sev- erini 和 A. Winter，《关于图的量子色数》，《电子组合数学杂志》14，R81，15（2007年）。[34] M. Araújo、F. Hirsch 和 M. T. Quintino，《单次测量下的贝尔非定域性》，《Quantum》4，353（2020年）。[35] N. Ito，《Hadamard 图 I》，《图与组合数学》1，57（1985年）。[36] A. Tavakoli、A. Pozas-Kerstjens、P. Brown 和 M. Araújo，《量子关联的半定规划松弛》，《现代物理评论》96，045006（2024年）。[37] A. Fine，《隐变量、联合概率与贝尔不等式》，《物理评论快报》48，291（1982年）。[38] J. Arndt 和 N. J. A. Sloane，《计数按"标准顺序"排列的词》（2016年），在线整数数列百科全书中的条目 A278984。

附录 A：量子比特协议的平均通信成本

该协议的平均通信成本由下式给出

$$\bar{\mathcal{C}} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\alpha \frac{\sin\alpha}{2} L(\alpha), \tag{A1}$$

其中 $L(\alpha)$ 表示编码的平均码字长度，$\frac{1}{4\pi}(\int \mathrm{d}\phi) \sin\alpha = \alpha$ 是一对从单位球面上的均匀分布中独立抽取的向量所夹角度 α 的分布。由于我们的量子比特模拟协议涉及分段编码，该积分按分段定义，我们有

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{C}} = &\int_0^{\pi\log_2(9/8)} \mathrm{d}\alpha \left(\frac{3}{2}+\frac{3\alpha}{2\pi}\right)\frac{\sin\alpha}{2} + \int_{\pi\log_2(9/8)}^{\pi\log_2(4/3)} \mathrm{d}\alpha \left(\log_2(3)+\frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{\sin\alpha}{2} + \int_{\pi\log_2(4/3)}^{\pi\log_2(3/2)} \mathrm{d}\alpha\, 2\,\frac{\sin\alpha}{2} \\ &+ \int_{\pi\log_2(3/2)}^{\pi\log_2(16/9)} \mathrm{d}\alpha \left(\log_2(3)+1-\frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{\sin\alpha}{2} + \int_{\pi\log_2(16/9)}^{\pi} \mathrm{d}\alpha \left(3-\frac{3\alpha}{2\pi}\right)\frac{\sin\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{A2}$$

由于对称性，该积分可简化为

$$\bar{\mathcal{C}} = \int_0^{\pi\log_2(9/8)} \mathrm{d}\alpha \left(\frac{3}{2}+\frac{3\alpha}{2\pi}\right)\sin\alpha + \int_{\pi\log_2(9/8)}^{\pi\log_2(4/3)} \mathrm{d}\alpha \left(\log_2(3)+\frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\alpha + 2\int_{\pi\log_2(4/3)}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \sin\alpha, \tag{A3}$$

其计算结果为

$$\bar{\mathcal{C}} = \frac{3}{2} - \frac{\sin(\pi\log_2 3)}{\pi} - \frac{\sin(2\pi\log_2 3)}{2\pi} \tag{A4}$$

$$\approx 1.89 \text{ bits}. \tag{A5}$$

附录 B：经典界

给定一个经典维度见证

$$\sum_{b,x,y} c^b_{x,y}\ p_C(b|x,y) \le C_d, \tag{B1}$$

其值为 $c^b_{x,\ y} \in \mathbb{R}$。由于经典行为构成一个凸集，而我们要对线性泛函取最大值，因此最大值总是在某个极端点处取得，经典界 C_d 为

$$C_d \ = \max_{\lambda} \left[\sum_{x,c,y,b} c^b_{x,y}\ D_A(c|x,\lambda) D_B(b|c,y,\lambda) \right] \tag{B2}$$

$$= \max_{\lambda} \left[\sum_{c,y,b} D_B(b|c,y,\lambda) \sum_x c^b_{x,y}\ D_A(c|x,\lambda) \right]. \tag{B3}$$

为了使该表达式最大化，Bob 必须输出 b 使$\sum_x c^b_{x\text{最大化的}y}\ D_A(c|x,\ \lambda)$，参见文献 [14, 34]。因此，经典界为

$$C_d = \max_{\lambda} \left[\sum_{c,y} \max_b \sum_x c^b_{x,y}\ D_A(c|x,\lambda) \right]. \tag{B4}$$

附录 C：来自 Hadamard 图的指数下界

设 d_Q 为一个自然数，令 $V(d_Q) = \{\pm 1\}^{d_Q}$ 为构成该图顶点的向量集合。若一对顶点对应的向量正交，则这两个顶点相连，也就是说，边集合为$E = \{(u,\ v) | \langle u|v\rangle = 0,\ u \in V,\ v \in V\}$。图 $H(d_Q) = (V(d_Q)\ E)$ 是 Hadamard 图 [35]。重要的是，每个 Hadamard 图都对应一个由 d_Q 维量子态构成的正交图。对于每个 $u \in V(d_Q)$，我们考虑量子态

$$|\psi(u)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{d_Q} u_i\, |i\rangle\,. \tag{C1}$$

因此，根据引理 2，d_Q维制备与测量场景的模拟成本特别地以下界为相应 Hadamard 图的色数 $H(d_Q)$，即

$$d_C \ge \chi(H(d_Q)), \tag{C2}$$

其中，$\chi(G)$ 表示图 G 的色数。已有研究表明

$$\alpha(G_{4k}) = 4 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{4k-1}{i} < \frac{4^{4k}}{3^{3k}}, \tag{C3}$$

对于 $k = p^q$，其中 $p \ge 3$ 是素数，且 $q \ge 1$ [31]，以及对于满足 $r \ge 0$ [32] 的 $k = 2^r$。这里，$\alpha(G)$ 表示 G 的独立数，即一个不包含相邻顶点的子集的最大大小。由于 $\chi(G) \ge {}^{|V|}_{\alpha\ G}()$，我们有

$$\chi(G_{4k}) \ge \frac{2^{4k}}{4\sum_{i=0}^{k-1}\binom{4k-1}{i}} > \frac{2^{4k}3^{3k}}{4^{4k}} = \left(\frac{27}{16}\right)^k. \tag{C4}$$

因此，对于 $d_Q = 4k$,

$$d_C(d_Q) \ge \chi(G_{4k}) \ge \frac{2^{4k}}{4\sum_{i=0}^{k-1}\binom{4k-1}{i}} > \left(\frac{27}{16}\right)^{d_Q/4}, \tag{C5}$$

当 k 为素数幂时。

附录 D：线性规划的改进表述

在这里，我们将介绍本研究所采用的线性规划。判断目标行为 $\{p(b|x,\ y)\}_{b,\ x,\ y}$ 是否具有经典模型，且该模型的经典消息长度为 d_C，可以表述为一个线性规划问题[4, 14, 16, 36]。首先，我们将对问题进行形式化描述，然后介绍一种改进问题缩放的方法，使我们能够求解此前无法处理的实例。

1. 原问题的表述

考虑一个有限的制备与测量场景，其中 Alice 有 $\mathcal{X}$ 个输入，Bob 有 $\mathcal{Y}$ 个输入和 $\mathcal{B}$ 个输出。Alice 的输入记为 x，Bob 的输入记为 y，Bob 产生的输出记为 b。所得行为 $\{p(b|x,y)\}_{b,x,y}$ 由玻恩规则给出。判断给定行为是否允许字母表长度为 d_C 的经典模拟模型，这一任务可表述如下：

$$
\begin{aligned}
\text{given}\quad & \{p(b|x,y)\}_{b,x,y}, d_C \\
\text{find}\quad & \pi(\lambda), p_A(c|x,\lambda), p_B(b|c,y,\lambda) \\
\text{s.t.}\quad & p(b|x,y) = \int_\Lambda \mathrm{d}\lambda \sum_{c=1}^{d_C} \pi(\lambda)\ p_A(c|x,\lambda)\ p_B(b|c,y,\lambda), \quad \forall b,x,y \\
& \pi(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \\
& p_A(c|x,\lambda) \geq 0, \quad \forall c,x,\lambda \\
& \sum_{c=1}^{d_C} p_A(c|x,\lambda) = 1, \quad \forall x,\lambda \\
& p_B(b|c,y,\lambda) \geq 0, \quad \forall b,c,y,\lambda \\
& \sum_{b=1}^{\mathcal{B}} p_B(b|c,y,\lambda) = 1, \quad \forall c,y,\lambda
\end{aligned}
\tag{D1}
$$

其中 $\int_\Lambda \mathrm{d}\lambda\ \pi(\lambda) = 1$ 成立，因为 $\sum_b p(b|x,y) = 1\ \forall x,y$。当 $d_C \geq \mathcal{X}$ 或 $d_C \geq \mathcal{Y}\mathcal{B}$ 时，模拟是平凡可行的，因为 Alice 可以简单地在经典消息中编码其状态，或编码 Bob 所能执行的每一次测量的合适测量结果。注意，上述问题表述不是线性的，因为目标函数关于优化变量是三次的。为了将问题改写为线性形式，关键在于注意到分布 $\{p_A(c|x,\lambda)\}_{c,x,\lambda}$ 构成一个多面体，其中 $d_C^{\mathcal{X}}$ 个极端点由确定性分布 $D_A(c|x,\lambda) \in \{0,1\}$ 给出。同样，分布 $\{p_B(b|c,y,\lambda)\}_{b,c,y,\lambda}$ 构成一个多面体，其中 $\mathcal{B}^{d_C\mathcal{Y}}$ 个极端点由确定性分布 $D_B(b|c,y,\lambda)$ 给出。我们将这些极端分布称为确定性策略，因为它们可以解释为 Alice 和 Bob 针对给定 λ 所采取的策略。将 λ 视为固定确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$ 的标签往往很有用。随后 Alice 获得输入 x 并产生消息 c。数字 $\{0,\ldots,d_C^{\mathcal{X}}-1\}$ 的每个 d_C 进制表示都可以与一个确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$ 相对应。特别地，Alice 对给定 x 所发送的消息 c 由 $\lambda \in \{0,\ldots,d_C^{\mathcal{X}}-1\}$ 的 d_C 进制表示的第 x 位数字给出。同样的考虑也可应用于 Bob 的确定性策略 $D_B(b|c,y,\lambda)$。

由于确定性策略的总数有限，Fine定理 [37] 因此允许我们将积分写成有限和，从而使问题的表述变为线性。我们将采用文献 [14] 中描述的较新问题表述。我们不将问题改写为 Alice 和 Bob 双方均采取确定性策略，而是将问题改写为仅一方采取确定性策略，并对问题应用一个变换。具体而言，我们令 Alice 采取确定性策略，并应用变换 $p'_B(b|c,\ y,\ \lambda) :=$

$\pi(\lambda)p_B(b|c,\ y,\ \lambda)$ 问题可写为 [14]:

$$\begin{aligned} \text{given} \quad & \{p(b|x,y)\}, d_C \\ \text{find} \quad & \pi(\lambda), p'_B(b|c,y,\lambda) \\ \text{s.t.} \quad & p(b|x,y) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{c=1}^{d_C} p'_B(b|c,y,\lambda)D_A(c|x,\lambda), \quad \forall b,x,y \\ & p'_B(b|c,y,\lambda) \geq 0, \quad \forall b,c,y,\lambda \\ & \sum_{b=1}^{\mathcal{B}} p'_B(b|c,y,\lambda) = \pi(\lambda), \quad \forall c,y,\lambda \end{aligned} \tag{D2}$$

其中 $|\Lambda| = d_C^{\mathcal{X}}$。也就是说，在这种表述中，问题规模仅随 Alice 的输入数量呈指数增长。正如文献 [14]，的作者所指出的，当 $\mathcal{B}^{d_C\mathcal{Y}} > d_C^{\mathcal{X}}$ 时，让 Bob 采取确定性行动并应用变换 $p'_A(c|x,\ \lambda) := \pi(\lambda)p_A(c|x,\ \lambda)$ 可能会更高效。

上述线性规划被表述为一个可行性问题，可以很容易地转化为鲁棒性优化问题。我们不再判断给定的行为能否用一个 d_C 维系统进行经典模拟，而是求最大可见度参数 η，使得概率 $\eta\ p(b|x,\ y) + (1-\eta)\ \frac{1}{\mathcal{B}}$ 存在经典模型。项 $\frac{1}{\mathcal{B}}$ 表示 Bob 正确猜出测量结果的概率。该线性规划的鲁棒性表述如下 [14]:

$$\begin{aligned} \text{given} \quad & \{p(b|x,y)\}, d_C \\ \text{max.} \quad & \eta \\ \text{s.t.} \quad & \eta\ p(b|x,y) + (1-\eta)\frac{1}{\mathcal{B}} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{c=1}^{d_C} p'_B(b|c,y,\lambda)D_A(c|x,\lambda), \quad \forall b,x,y \\ & p'_B(b|c,y,\lambda) \geq 0, \quad \forall b,c,y,\lambda \\ & \sum_{b=1}^{\mathcal{B}} p'_B(b|c,y,\lambda) = \pi(\lambda), \quad \forall c,y,\lambda \end{aligned} \tag{D3}$$

其中 $|\Lambda| = d_C^{\mathcal{X}}$。这里，$\eta \geq 1$ 证明经典模型的存在，而 $\eta < 1$ 则证明给定的行为无法通过长度为 d_C 的经典字母表进行模拟。在 $\eta < 1$ 的情况下，对偶问题给出一个超平面，将所有经典行为与某些非经典行为分隔开。文献 [14]，推导了上述问题对偶形式的显式表达。

2. 改进线性规划

现在，我们将介绍两项改进，它们既可应用于公式（D2）中的可行性表述，也可应用于公式（D3）中的鲁棒性表述。第一项改进取决于产生目标行为 $\{p(b|x,y)\}_{b,x,y}$ 的量子态集合 $\mathcal{P}$ 中的正交关系。第二项改进具有普遍适用性，不依赖于问题的特定结构，但其带来的改进幅度相对于输入规模而言是常数。

首先讨论第一项改进，它取决于 $\mathcal{P}$ 中的正交关系。为使改进的表述更简便，我们假设对于每一对正交态，测量集合中都包含一个用于完美态判别的测量。若不满足这一要求，需要进行的调整也可以直接从我们随后所作的讨论中推知。由结果 4 以及引理 1可知，将同一消息 c 分配给一对正交态的确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$ 对经典模型没有贡献，也就是说，相应的权重 $\pi(\lambda) = 0$。因此，给定一对正交态 $\rho_x, \rho_{x'}$，有：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_=(x,x')} \pi(\lambda) = 0, \tag{D4}$$

其中 $\Lambda_=(x,x') = \{\lambda\in\Lambda | D_A(c|x,\lambda) = D_A(c|x',\lambda)\forall c\}$（参见结果 4）。因此，仅根据 ρ_x与 $\rho_{x'}$的正交关系，我们便可将变量的数目限制为 $|\Lambda_{\neq}(x,x')| < |\Lambda| = d_C^{\mathcal{X}}$。当考虑到所有成对的

正交态时，我们有

$$\pi(\lambda)=0 \quad \forall\lambda\in\bigcup_{\substack{\rho_x,\rho_{x'}\in\mathcal{P},\\ \mathrm{Tr}(\rho_x\rho_{x'})=0}}\Lambda_=(x,x'). \tag{D5}$$

因此，我们可以从问题中排除满足 $\pi(\lambda)=0$ 的变量 λ 及其对应的约束。这样，我们通过从问题的表述中移除不必要的变量，强制满足问题表述中包含的约束。

式 (D2) 中可行性问题的改进表述如下 :

$$\begin{aligned}
\text{given}\quad & \{p(b|x,y)\}, d_C \\
\text{find}\quad & \pi(\lambda), p'_B(b|c,y,\lambda) \\
\text{s.t.}\quad & p(b|x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda(\mathcal{P})}\sum_{c=1}^{d_C}p'_B(b|c,y,\lambda)D_A(c|x,\lambda), \quad \forall b,x,y \\
& p'_B(b|c,y,\lambda)\geq 0, \quad \forall b,c,y \quad \text{and} \quad \forall\lambda\in\Lambda(\mathcal{P}) \\
& \sum_{b=1}^{\mathcal{B}}p'_B(b|c,y,\lambda)=\pi(\lambda), \quad \forall c,y \quad \text{and} \quad \forall\lambda\in\Lambda(\mathcal{P})
\end{aligned} \tag{D6}$$

其中

$$\Lambda(\mathcal{P})=\Lambda\setminus\bigcup_{\substack{\rho_x,\rho_{x'}\in\mathcal{P},\\ \mathrm{Tr}(\rho_x\rho_{x'})=0}}\Lambda_=(x,x'), \tag{D7}$$

并且 $\Lambda_=(x,x')=\{\lambda\in\Lambda|D_A(c|x,\lambda)=D_A(c|x',\lambda)\forall c\}$。换言之，集合 $\Lambda(P)$ 由所有满足以下条件的 λ 构成：对应的确定性策略不会将相同的消息分配给 $\mathcal{P}$ 中任意一对正交态。每个确定性策略 $D_A(c|x,\lambda)$ 都对应于由 $\mathcal{P}$ 诱导的正交图的一种着色（见第五节）。简言之，由状态集合 $\mathcal{P}$ 诱导的正交图 $G=(\mathcal{P},E)$ 包含一组顶点，记为 $\mathcal{P}$，以及一组边，记为 $E=\{(\rho_x,\rho_{x'})|\mathrm{Tr}(\rho_x\rho_{x'})=0,\rho_x\in\mathcal{P},\rho_{x'}\in\mathcal{P}\}$。

我们可以将 $D_A(c|x,\lambda)$ 与 $G(\mathcal{P},E)$ 的顶点着色对应起来：对于给定的 λ，它们会为每个状态 ρ_x 指派一条消息（颜色） c 。集合 $\Lambda(\mathcal{P})$ 恰好对应于那些 λ，使得 $D_A(c|x,\lambda)$ 构成正交图 $G(\mathcal{P},E)$ 的正常着色，也就是说，相邻顶点的颜色不同。因此，我们有

$$|\Lambda(\mathcal{P})|=P(G,d_C), \tag{D8}$$

其中 $P(G,d_C)$ 是色多项式。它统计正交图$G=(\mathcal{P},E)$ 的正常着色 d_C的数量。因此，与原始表述相比，变量数量减少了 $R=\frac{|\Lambda(\mathcal{P}|}{|\Lambda|}=\frac{P)(G,d_C)\ d_C^{\mathcal{X}}}{}$ 倍，约束数量也以大致相同的倍数减少。

只要 $\mathcal{P}$ 不包含任何一对正交态，我们就有 $R=1$，也就是说，问题的复杂度并未降低。另一方面，当 $\mathcal{P}$ 至少包含一对正交态时， $R<1$。例如，当$\mathcal{P}$ 由 d_Q 中（以及 $d_C\geq d_Q$ 中）的 n 个完备基组成时，我们有

$$\begin{aligned}
R &= \frac{|\Lambda(\mathcal{P})|}{|\Lambda|} && \text{(D9)}\\
&= \left(\frac{P(K_{d_Q},d_C)}{d_C^{d_Q}}\right)^n && \text{(D10)}\\
&= \left(\frac{d_C!}{d_C^{d_Q}(d_C-d_Q)!}\right)^n, && \text{(D11)}
\end{aligned}$$

其中， K_q 表示具有 q 个顶点的完全图。对于 $d_C<d_Q$ ，我们有 $R=0$ ，这与经典模型的存在相矛盾。

现在，我们将讨论对线性规划的第二项改进。这项改进普遍适用，不受特定目标行为或底层量子态集合的影响。它基于这样一个观察：所有

在 c 的重新标记下等价的确定性策略 $D_A(c|x,\ \lambda)$ 可以合并为一个确定性策略。

为此，考虑一对确定性策略 $D_A(c|x,\ \lambda_1)$ 和 $D_A(c|x,\ \lambda_2)$，它们在重新标记意义下等价。对于 $d_C = 2\,(c \in \{1, 2\})$，这类策略中最简单的一对例子是：一个策略对所有输入都赋予消息 $c = 1$，另一个策略对所有输入都赋予 $c = 2$。

关键在于要注意，这两种策略在 Bob 一侧的局部随机硬币作用下等价。也就是说，无论他们共同抽取 λ_1 还是 λ_2，Bob 收到的关于 x 的信息都相同，唯一的区别在于重新标记。不过，这种重新标记也可以通过 Bob 一侧的局部随机硬币来实现，也就是说，可以由他的响应 $p'_B(b|c,\ y,\ \lambda)$ 来体现。因此，对于一组在重新标记意义下等价的策略 $D_A(c|x,\ \lambda)$，只需选取其中一种，并将其余策略从经典模型中排除，实际上将它们的权重 $\pi(\lambda)$ 设为零。给定所有满足 $|\Lambda| = d_C^{\mathcal{X}}$ 的确定性策略 Λ，对线性规划的这一改进使我们能够将确定性策略的数量减少到

$$N_\lambda(d_C, \mathcal{X}) = \sum_{j=1}^{d_C} \left\{ {\mathcal{X} \atop j} \right\} \tag{D12}$$

$$= \sum_{j=1}^{d_C} \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^{\mathcal{X}}. \tag{D13}$$

这里，$\left\{ {k \atop l} \right\}$ 表示第二类斯特林数，它表示将一个 k元素集合划分为 l 个非空子集的方法数。对于 $\mathcal{X} \to \infty$，有 $N_\lambda(d_C,\ \mathcal{X}) \sim {d_C^{\mathcal{X}} \atop d_C!}$。一种高效构造有效策略的方法是构造所有按标准顺序排列的词（着色）。字母表 $\mathcal{X}$ 上的长度为 $[d_C] = \{1, ..., d_C\}$ 的词按标准顺序排列，当且仅当每当字母 $s\,(2 \le s \le d_C)$ 出现时，字母 $s - 1$ 已经在该词中出现过 [38]。形式化地，所有按标准顺序排列的词构成的集合为

$$W(d_C, \mathcal{X}) = \{\, (s_1, s_2, ..., s_{\mathcal{X}}) | s_1 = 1, s_i \in [\min\{\max\{s_1, ..., s_{i-1}\} + 1, d_C\}]\ \forall i \in \{2, ..., \mathcal{X}\}\,\}. \tag{D14}$$

这两种约化可以结合起来，使得需要考虑的确定性策略由正交图 $G = (\mathcal{P},\ E)$ 的正常着色中按标准顺序排列的那些着色给出。它们是 G 的所有有效着色的真子集，因此，$R < 1$ 对所有图都成立。