arXiv:2603.01256v1 [math.CO] 1 Mar 2026

固定冗余度下最可靠的图

RotemBrand Reuven Cohen Simi Haber Baruch Barzel

以色列拉马特甘巴伊兰大学数学系

*通讯作者。电子邮箱：rotembrand1234@gmail.com、reuven@math.biu.ac.il、simi@math.biu.ac.il、baruchbarzel@gmail.com。

摘要

图 G 的全端可靠度是指当每条边独立地以概率 p失效时， G仍保持连通的概率。对于固定的 n 和 m，一致最可靠问题旨在确定具有 n个顶点和 m条边的图中，哪一个能对所有 $p \in [0,1]$最大化可靠性。尽管此类图并非总是存在，但在 $p \to 0$ 这一范围内，总存在最优图，且其结构由极小割集决定。

我们对在$p = 0$附近最可靠的图给出了结构刻画。我们的结果部分解决了 Bourel 等人的猜想，表明在适当条件下，围长最大的正则图是最优的。将这一分析拓展至冗余度固定为 $r = m - (n - 1)$ 且 n足够大的图后，我们证明，最可靠的图可由具有 $2(r - 1)$ 个顶点的最可靠三次图经细分得到。一般情形下的猜想仍未解决。

以往的结果仅解决了冗余度较小的情形或网络非常稠密的情形，而我们的方法大幅拓展了已知结果的适用范围。对于所有冗余级别 $m - n \leq 19$，我们确定了一致最可靠图的唯一三次图候选，并证明，对于若干具有固定冗余度且 n渐近趋于无穷大的无穷族，不存在一致最可靠图。这些结果显著扩大了候选图的类别，也拓展了可证明其不存在的范围。

1 引言

识别一致最可靠图这一问题，能够单独揭示拓扑结构对网络可靠性的组合影响。我们研究边不可靠的图，其中每条边都以相同概率 p独立失效。图的全端可靠度是指在这一失效模型下所有顶点仍保持连通的概率。具有 n 个顶点和 m条边的一致最可靠图，是指对 p的所有取值都能使可靠性达到最大的图。理解这类图有助于阐明单凭结构性质如何决定可靠性。

尽管该模型很简单，但它在各种基础设施网络中都有广泛的应用，包括通信系统和配电网。文献中已发现若干一致最可靠图的例子 [2, 21, 20, 19,9]。这些图与 3-正则图的细分密切相关，即将三次图中的每条边替换为一条路径 [22]。

由于任何含有 n 个顶点的连通图至少有 $n-1$ 条边，因此自然可以将冗余度（也称为回路秩）定义为 $r = m - (n-1)$，其中 m 是边的总数。

一致最可靠图并非总是存在 [17]。因此，本文引入了零点或一点附近最可靠图这一概念 [8]。如果某个图在零点（分别为一点）附近一个足够小的区间内，对所有 p取值都能在顶点数和边数相同的图中使可靠性最大，那么它就是零点（分别为一点）附近最可靠图。与一致最优性不同，零点或一点附近的最优性总是存在。由于基础设施组件通常具有很高的可靠性，我们重点关注零点附近最可靠的图。

本文提出一种构造零点附近最可靠图的方法。我们的主要结构性结果表明，满足显式结构条件的最大围长正则图是零点附近最可靠图。特别是，这进一步支持了 Bourel 等人的猜想 [4]：一致最可靠正则图具有最大围长。虽然我们在附加条件下验证了这一猜想原则，但一般情形仍未解决。

将这一分析推广到冗余度固定 r 且 n足够大的图后，我们证明，最可靠图可由具有 $2(r-1)$ 个顶点的最可靠三次图经细分得到。通过枚举顶点数较少的大围长 3-正则图，我们确定了顶点数少于 38 的最可靠三次图的唯一候选。它们为确定冗余边不超过 20 且顶点数较多的一致最可靠图奠定了基础（见图 4 ）。

我们还揭示了一种决定可靠性在接近 1 时表现的结构性质，并据此证明，对于若干顶点数渐近增长且冗余度固定的无穷族，不存在一致最可靠图。

本工作的核心贡献是提出一项统一的结构原理，用以揭示广泛冗余级别下可靠性的规律。我们不再局限于考察 r 的孤立取值，而是阐明围长与细分路径的排列如何相互作用，从而在顶点数足够大时优化可靠性。这一结构性洞见使我们能够系统地识别一致最优性的候选图，并得出可实现可靠性关于图规模和冗余度的紧上界。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍核心框架和算法策略，并在不提供详细证明的情况下阐释主要思想。第 3 节建立理论基础，证明围长最大化的正则图能够优化 $p = 0$ 附近的可靠性。第 4 节利用这些结果，刻画冗余度固定且顶点数较大的可靠图。最后，第 5 节将所提出的算法应用于一个包含 5，000 个以上三次图的数据库，并识别出一致最优性的候选图。

2 主要结果概述

本节概述本文的主要思想和方法，并阐释我们方法背后的直觉。后续各节将给出详细证明和技术推导。这里，我们着重介绍构成本文结果基础的核心概念与策略。

为使符号表示一致，我们假设图 G 由 n 个顶点和 m

条边组成。注意，任何连通图都必须至少包含 $n-1$ 条边。因此，我们将图中冗余边的数量定义为 $r = m - (n-1)$，也称为圈秩。这个值可以理解为在满足连通性最低要求之外，可添加边的“预算”。按照惯例，我们用 $V(G)$ 表示图中的顶点集合，用 $E(G)$ 表示边集合。

2.1 最可靠的图

G 的每条边都会独立地以恒定的边失效概率 p失效。 G的全端点可靠性 （ATR）记为 $R_G(p)$，定义为网络保持连通的概率。为方便起见，本文全文采用不可靠度多项式

$$U_G(p) = \Pr(G \text{ is disconnected}). \tag{1}$$

概率空间中的每个事件恰好对应 k 条失效边和 $m-k$条正常工作的边。此类事件的概率为 $p^k q^{m-k}$，其中 $q = 1-p$ 表示边正常工作概率。假设恰好包含 k 条失效边的割集有 b_k 个，则$U_G(p)$可用伯恩斯坦表示表示为:

$$U_G(p) = \sum_{k=1}^{m} b_k p^k q^{m-k}. \tag{2}$$

该表示表明， U_G 是变量 p的 m次多项式。这些多项式单调递增，并满足边界条件 $U_G(0) = 0$和 $U_G(1) = 1$。此外， $U_G(p)$也可以写成标准形式:

$$U_G(p) = \sum_{k=1}^{m} a_k p^k. \tag{3}$$

定义 2.1 （一致最可靠图）。 若一个图有 n 个顶点和 m 条边，且对于每个 $p \in [0,1]$，它在所有具有相同顶点数和边数的图中使不可靠度多项式 $U_G(p)$最小，则称该图为一致最可靠的 。

尽管识别一致最可靠图是可靠性优化的核心目标，但已有研究在1991年证明，这类图并不总是存在 [17]。这一局限促使人们引入较弱的最优性概念，以刻画局部范围内的可靠性 [8]。

定义 2.2 （**零点或一点附近最可靠图**）具有 n 个顶点和m 条边的图，若存在 $p' > 0$ ，使得对所有 $p \in [0, p']$，其不可靠度多项式 $U_G(p)$在所有此类图中取最小值，则称为零点附近最可靠图。类似地，若存在 $p'' < 1$ ，使得对所有$p \in [p'', 1]$， $U_G(p)$取最小值，则称为在*1*附近最可靠。

与一致最可靠图不同，零点或一点附近最可靠图总是存在，因为具有固定 n 和 m 的图的数量有限。

本文主要关注接近 $p = 0$的情形，这对应于由高度可靠的元件组成的系统，这类系统在许多现实世界的基础设施网络中十分常见。此外，我们指出，如果一致最可靠图存在，那么它必然在接近零和一时都是最可靠图。

我们识别最可靠图的主要工具是系数比较法。该方法通过比较图的不可靠度多项式的伯恩斯坦表示所导出的系数向量（b_1，b_2，.....，b_m），来评估图的可靠性。要证明某个图是一致最可靠图，只需证明，在具有相同顶点数和边数的所有图中，该图的每个系数都是最小的。

对于接近零时的最可靠图，我们定义图 G 和 H 之间的全序：若 G 的系数向量按字典序小于 H 的系数向量，则 $G < H$。在此顺序中，比较从第一系数开始；若相等，则比较第二系数，依此类推。类似地，对于接近一时的最可靠图，我们利用反向系数向量的字典序定义相应的全序。

系数比较法依赖于以下基本引理：

引理 2.3 (系数比较 [8]). 设 $f(p) = \sum_{k=1}^{m} c_k p^k (1-p)^{m-k}$ 和 $g(p) = \sum_{k=1}^{m} d_k p^k (1-p)^{m-k}$ 是两个多项式。以下结论成立：

1. 若存在 i 使得 $\forall j \in [0, i)$：$c_j = d_j$ 且 $c_i \leq d_i$，则存在 p' 使得 $\forall p \in [0, p']$：$f(p) \leq g(p)$；*2.* 若存在 i 使得 $\forall j \in [0, i)$：$c_{m-j} = d_{m-j}$ 且 $c_{m-i} \leq d_{m-i}$，则存在 p' 使得 $\forall p \in [p', 1]$：$f(p) \leq g(p)$；*3.* 若 $\forall i$：$c_i \leq d_i$，则 $\forall p \in [0, 1]$：$f(p) \leq g(p)$；

利用系数比较法，我们可以定义一系列可靠性类$\{\mathcal{A}_k\}_{k=0}^{m}$。初始类 $\mathcal{A}_0$对应于$\mathcal{G}_{n,\ m}$，即包含 n个顶点和 m 条边的所有多重图的集合。之后的每个类 $\mathcal{A}_k$由 $\mathcal{A}_{k-1}$ 中在前一个类的所有图里具有最小 k系数的图组成。随着我们沿着这一序列逐步推进，各类会越来越小，而零点附近最可靠的图可以在 $\mathcal{A}_m$中找到。由于不可靠度多项式每种表示中的前 k 个系数唯一确定另一种表示中的前 k 个系数，因此这些类$\mathcal{A}_k$ 也可以等价地用二项式系数（2）或幂级数系数（3）来定义。图3展示了一个示例，其中的可靠性类对应于具有16个顶点和24条边的图。

类似地，我们可以构造一系列集合 $\{B_k\}_{k=0}^{m}$，其中 B_0 同样是$\mathcal{G}_{n,\ m}$。在这种情况下，之后的每个集合 B_k 都包含 B_{k-1} 中具有最小（$m-k$）系数的图。一点附近最可靠的图可以在 B_m 中找到。

2.2 先前结果

一个重要的观察结果是，接近零时最可靠图具有最大边连通度。边连通度定义为使图断连所需移除的最少边数。如果一个图的边连通度为 k，那么其不可靠度多项式中从 b_1 到 b_{k-1} 的所有系数均为零，因此该图属于 $\mathcal{A}_{k-1}$ 类。

Harary [12]构造了一个具有最大边连通度的图族。具有最大边连通度的图会最大化其顶点的最小度，因为一个图的边连通度至多等于其最小度。对于具有n 个顶点和 m 条边的图，最小度为 $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$，而对于最大化

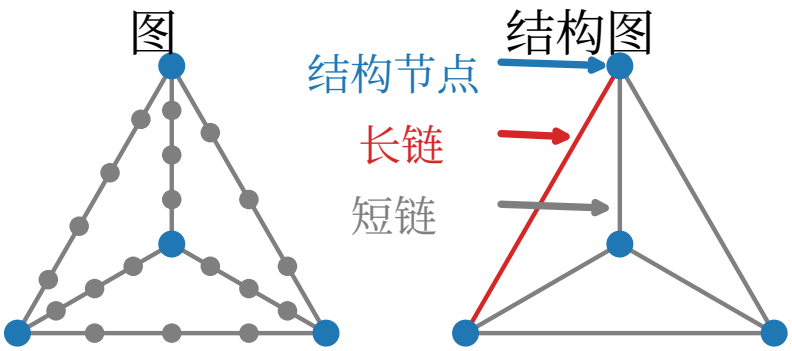


图1：结构图示例。度为二的连续顶点构成一条链，而度不为二的顶点则成为结构顶点。在最优图中，各链的长度相差至多一。在这种情况下，我们将链分为短链和长链。

边连通度的那些图，最大度为 $\lceil \frac{2m}{n} \rceil$。特别地，若 n 整除 $2m$，则具有最大边连通度的图是 k-正则的，其中 $k = \frac{2m}{n}$。

在一点附近，图的可靠性取决于图中生成树的数量。使用系数压缩法，对于范围为$m-(n-2) \leq k \leq m$内的系数 $\{b_k\}$，我们有$b_k = \binom{m}{k}$，因为连接该图至少需要 $n-1$ 条正常工作的边。然而，对于 $r = m-(n-1)$，b_r等于$b_r = \binom{m}{r} - T(G)$，其中 $T(G)$表示图的生成树数量，也称为树数。因此，就 ATR 多项式而言，一点附近最可靠的图是树数最大的图。

本研究主要关注稀疏网络，其中 $n \leq m < 1.5n$。对于接近零时最可靠的稀疏图，其最小度为二，从而确保边连通度也达到最大值二。在这些图中，可以将一条由 $c-1$ 个连续顶点组成、且这些顶点的度均为二的链，替换为一条失效概率为$1-q^c$的边。变换后得到的图称为结构图 或蒸馏，记作 $S(G)$。在结构图中，边称为链，而顶点称为结构顶点。图1展示了一个图及其对应结构图的示例。

根据 [22], 的发现，零点附近最可靠图是一个 3-连通、3-正则的结构图，其链长几乎相等。为尽量减小含两条边的割集所造成的影响，结构图必须是 3-连通的，从而确保唯一含两条边的割集是同一条链内的边对。此外，要减少此类边对的数量，就需要尽量缩短链长，这意味着所有链的长度之差最多为一。进一步将结构图设为 3-正则，可使链的数量最大化，从而更均匀地分布连通性。

总而言之，结构图为 3-连通、3-正则，且链长之差最多为一的图，可使不可靠度多项式的第二系数最小化。此类图中的链可分为短链和长链。图1展示了这种结构的一个示例。

接下来，我们着重于最小化不可靠度多项式的第三项系数。需要注意的是，结构图中的每个结构节点都会与连接到该节点的三条链共同构成一个平凡割集。为了最小化第三项系数，我们

要求涉及三条链的割集仅对应于由单个结构节点构成的割集。此外，在结构图中，如果两条长链连接到同一个结构节点，则包含三条边的割集数量会增加。为此，必须尽可能减少在同一结构节点 [22] 处相交的长链数量。图1展示了短链和长链在单个结构节点处相交的示例。

2.3 主要结果

本节介绍本文所采用的主要方法和所得结果。我们首先研究 $m = kn/2$ for natural $k \geq 3$ 的情形，此时平均度为 k。我们证明，在某些情况下，零点附近最可靠图是具有较大围长的 k-正则图。该结果将在第 3 节中正式证明。

随后，我们聚焦于稀疏情形，即 $m < 1.5n$ 且顶点数较大。在这种情形下，平均度小于 3。我们证明，在此情况下，一致最可靠图必须具有适当规模的零点附近最可靠 3-正则图的结构，同时还讨论长链的最优放置方式。最后，我们发现，在某些情况下，一点附近最可靠图具有非平衡链长，即链长之间相差超过 1，从而导致一致最可靠图不存在。我们将在第 4 节中深入研究这些结果。

2.3.1 高围长图在接近零时最可靠

我们的主要结果表明，在适当条件下，高围长正则图在接近零时是最可靠图。本节将介绍这一结果背后的主要思路，并在第 3 节给出正式证明。

这一观察对于设计具有固定数量冗余边的稀疏图尤其重要。在第 4 节中，我们将证明，对于具有 r 条冗余边且顶点数较多的图，一致最可靠图的结构图是在接近零时最可靠的、具有 2($r-1$) 个节点的 3-正则图。因此，每一个在接近零时最可靠的 3-正则图的确定，都对应着一个由一致最可靠图构成的无限族（如果它们存在）。

要理解为什么低围长图的可靠性较低，我们需要考察它们的极小割集。极小割集是指不包含任何更小割集的割集，实际上代表了割集的“原子元素”。每个极小割集都会将图恰好分成两个连通分支。通过关注较小的分量，我们可以观察到，每个极小割集都是由一个连通子图诱导的。

图中的圈会产生低阶割集，从而降低围长较小的图的可靠性。例如，在接近零时最可靠的 3-正则图中，含有三条边的割集只有由单个顶点诱导的那些。相比之下，图2展示了一个含有三个顶点的圈如何诱导出另一个含有三条边的割集。因此，根据系数比较法，围长为三的图不可能在接近零时最可靠。命题 2.4 将这一结果推广，证明圈诱导出的割集阶数低于树诱导出的割集。

命题 2.4（诱导割集的大小）。设 G 是一个 k-正则图。对于任意子图 X，分别用 $c(X)$、$m(X)$ 和 $n(X)$ 表示 X 中连通分支、边和顶点的数量。令 $\partial(X)$ 表示诱导割集。那么：

1. $|\partial(X)| = k \cdot n(X) - 2 \cdot m(X)$;

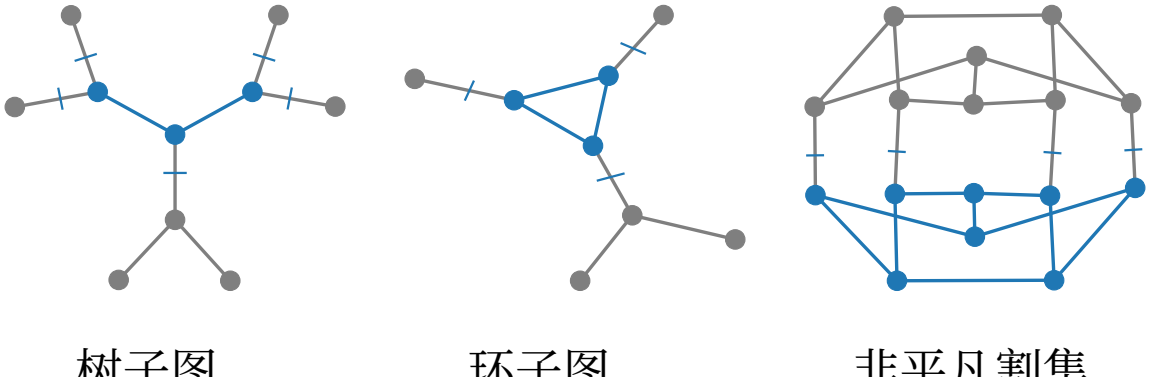


图2：各种子图（骨架）及其诱导割集。

2. 特别地，如果 X 是一片森林，那么 $|\partial(X)| = n(X)\cdot(k-2)+2\cdot c(X)$;

3. If X *is a cycle, then* $|\partial(X)| = n(X)\cdot(k-2)$.

第二和第三个命题可直接由第一个命题推出。第一个命题很容易证明：注意到 X 中的每个顶点都连接着 k 条边，而每条内部边都会使外部边的数量减少两条。图 2 展示了若干子图及其对应的诱导割集。由此可知，圈产生的割集比树产生的割集更小，而在这两种情况下，割集的大小取决于圈或树中的顶点数。因此，为了尽量避免低阶割集，我们希望避免短圈。

在此背景下，将平凡割集 的概念放宽如下会很方便。在围长至少为 g的图中，包含至多$g-1$ 个顶点的任意顶点邻域，都同构于无限 k正则树的一个子图。因此，围长至少为 g 的不同图中的顶点邻域彼此同构（定理 3.2）。每个含有 $\ell \le g-1$ 个顶点的子图都会诱导出一个含有 $\ell(k-2)+2$条边的割集。这些割集之所以被视为“平凡”，是因为它们会出现在所有围长足够大的图中。

如果一个图中至多有 $\ell(k-2)+2$ 条边的割集都只是平凡割集，那么与含有非平凡割集的图相比，它在接近零时更可靠。具体而言，如果一个图不存在边数不超过 g 的非平凡割集，这表明接近零时最优图的围长至少为 g。图3展示了 $\mathcal{G}_{16,\ 24}$ 中可靠性类的一个例子。我们可以看到，在该图中， $\mathcal{A}_k$ 中的图的围长至少为 $k-2$。此外， $\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_4$ 中有一个图的围长为 4，但也含有一个非平凡割集，这例证了一个并非由圈诱导的非平凡割集。

现在我们给出本文的主定理，它构成了我们利用高围长图构造高可靠性网络的方法的基础。该定理的证明见第 3.4 小节。

定理 2.5 (不含非平凡割集的正则图)。 设 $n \ge 2$ 满足$m = kn/2 \in \mathbb{N}$。定义 $\mathcal{D}_{n,\ m}(g)$ 为 $\mathcal{G}_{n,\ m}$ 中所有 k- 正则图所组成的集合，这些图不含边数至多为 $g(k-2)$ 的非平凡割集。假设存在 $g \ge 4$ 使得 $\mathcal{D}_{n,\ m}(g) \ne \emptyset$。那么：

$$\mathcal{A}_{g(k-2)} = \mathcal{D}_{n,m}(g).$$

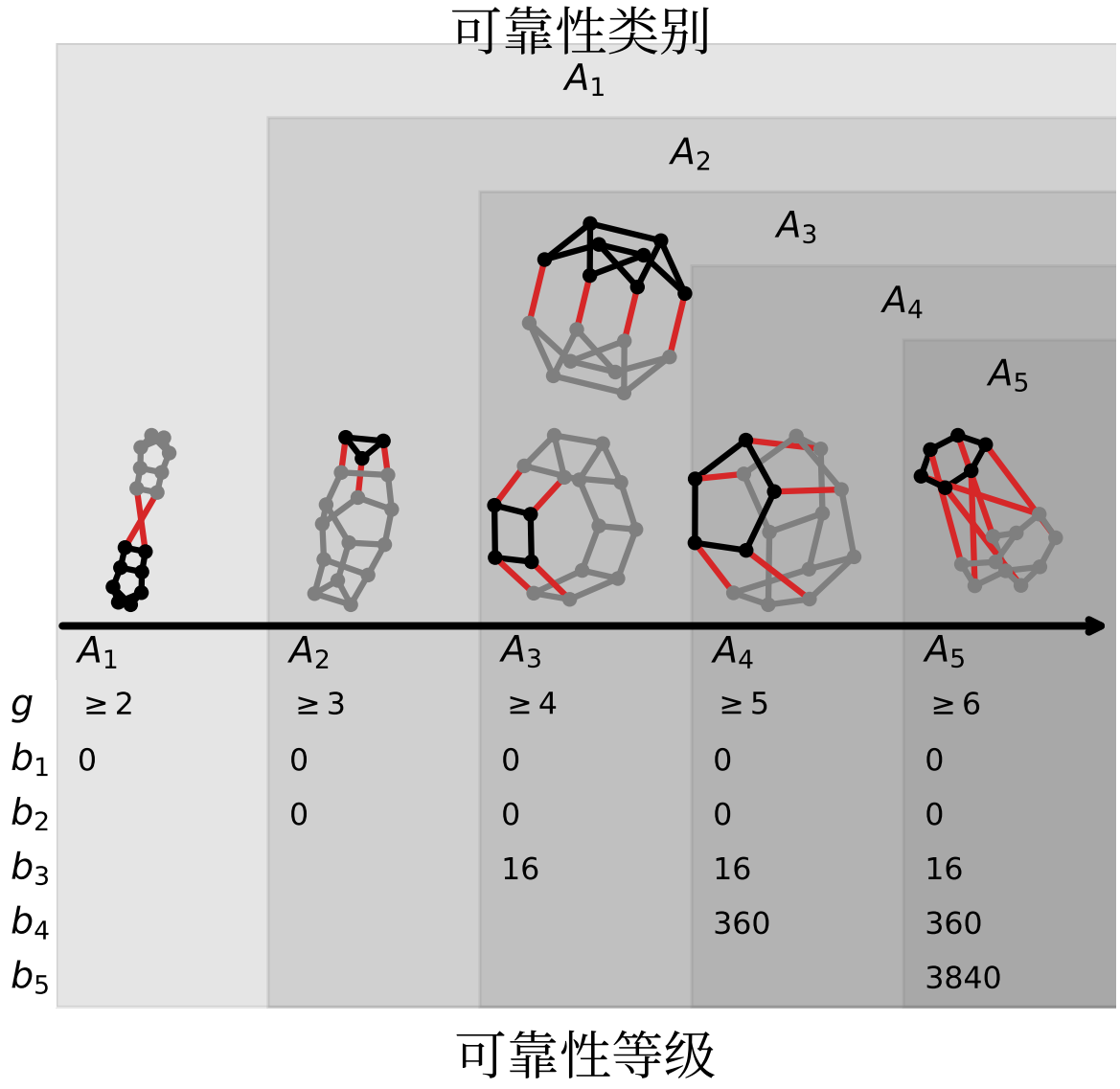


图3：具有16个顶点和24条边的图的可靠性类。所有不属于该类的图 $\mathcal{A}_5$ 都包含由短圈或更大的子图导出的非平凡割集（**红色**），**黑色**）。

通过生成围长较大的正则图并验证其中不存在非平凡割集，我们可以大幅缩小寻找接近零时最可靠图的搜索空间。 [16], [14], 和 [6] 中的技术能够系统地生成所有具有指定围长的正则图。此外，House of Graphs 网站[1] [10]收录了全面的三次图集合。尽管对于较大的图，具有最大围长的图数量相当可观，但对于较小的图而言，这一数量仍相对较少。

图 4 展示了冗余边少于 20 条的最可靠图，其中包括许多具有最大围长的图。验证这些图中不存在非平凡割集后，我们得出结论：它们在零点附近具有更高的可靠性。

此外，我们断言这些图是成为一致最可靠图的唯一候选者，这标志着其识别工作取得了重大进展。迄今为止，只有冗余边少于七条的图被证实为一致最可靠图 [2, 21, 20, 19, 9]。此外， [3]中有人提出，Cantor–M¨obius 图也符合一致最可靠图的条件。

2.3.2 可靠稀疏图

在本小节中，我们聚焦于稀疏且可靠的图。若一个图有 n 个顶点和 m 条边，且满足 $m < 1.5n$，则称其为稀疏图。该阈值的依据是，3- 正则图恰好需要 $1.5n$ 条边。因此，稀疏图的边数低于达到三正则性所需的最小边数，其边连通度至多为 2。

如前所述，现有结果表明，使 b_2 最小的图具有结构图 ，该结构图既是 3-边连通的，也是 3-正则的，并且链长之间的差异至多为一 [22, 13]。

构造链长不均匀的可靠稀疏图包含两个关键步骤：确定可靠的结构图，以及确定长链在其中的放置位置。在结构图的同一个割集中放置两条或更多长链，会增加该割失效的概率。由于可靠三次图中的低阶极小割集通常由彼此紧密相连的边组成，我们的目标是使结构图中长链之间的两两距离最大化。

尽管如此，围长较低的正则图往往具有较大的直径，因为每条边的邻域中包含的边相对较少。这导致了两项相互竞争的要求之间的权衡：采用围长较高的结构图，以及在长链之间保持足够的距离。

幸运的是，当链足够长时，其放置位置的影响变得可以忽略不计。因此，对于常数 r 以及较大的 n值，一致最可靠稀疏图必须具有接近零时最可靠的结构图。因此，构造可靠三次图的方法可用于生成具有长链的高度可靠稀疏图。

可靠性分解

我们首先分解不可靠度多项式，以便用其结构图的组合语言来表达稀疏图的可靠性。

[1] https://houseofgraphs.org/meta-directory/三正则

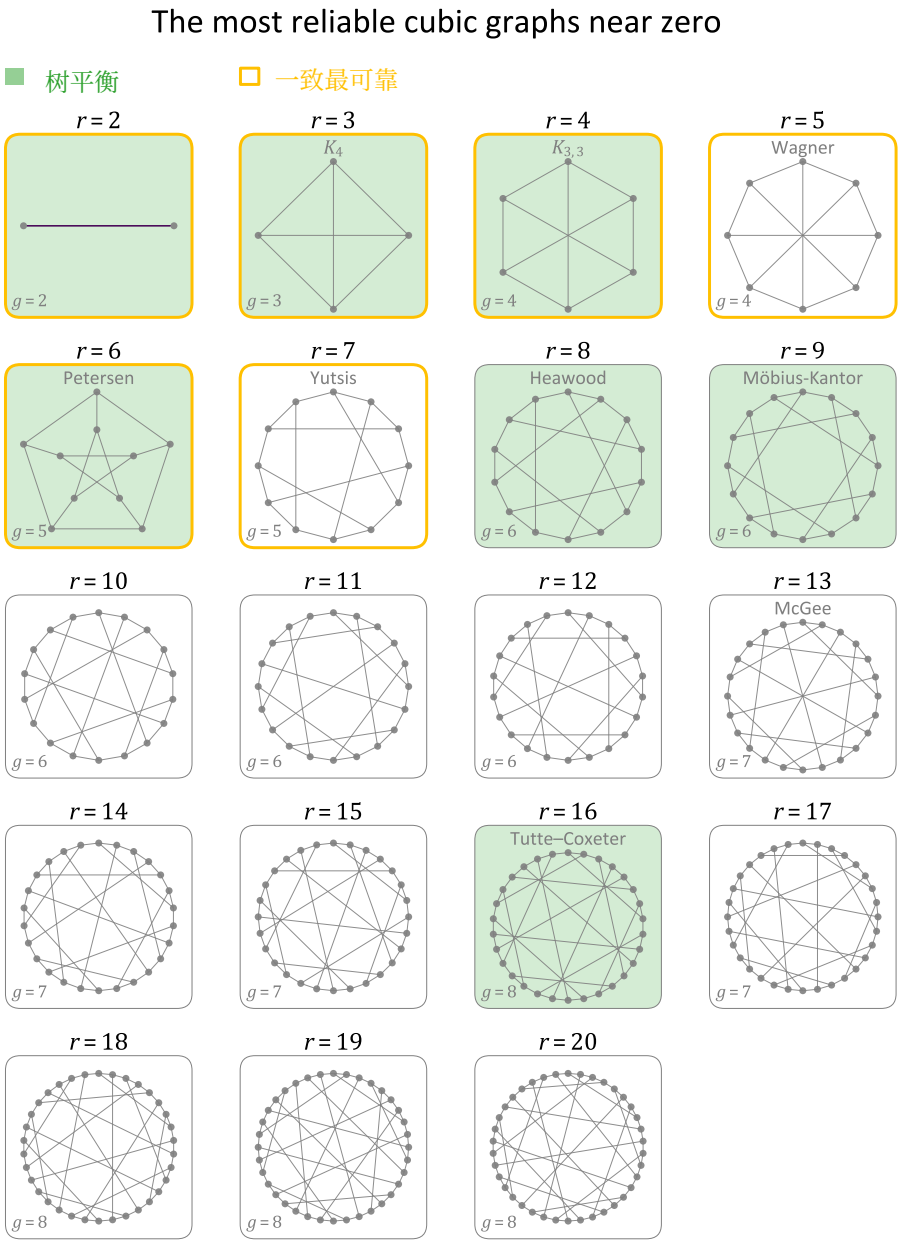


图 4：给定冗余度 r和节点数$n = 2(r - 1)$时，接近零的最可靠图。 g 表示该图的围长。绿色图为树平衡图，金色图此前已被证明是一致最可靠图。

图中长链的数量取决于参数 n 和 r。结构图的冗余度等于原图的冗余度。在相应的三次结构图中，每个结构顶点关联的链数为 1.5 倍。因此，结构图由 $2(r-1)$ 个结构顶点和 $3(r-1)$ 条链组成。假设链均匀分布，其余的 $n-2(r-1)$ 个顶点将分配到 $3(r-1)$ 条链中。

令 $c, \lambda \in \mathbb{N}$ 定义为

$$n - 2(r-1) = (c-1) \cdot 3(r-1) + \lambda, \tag{4}$$

其中 $0 \le \lambda < 3(r-1)$。此处，$c \ge 1$ 对应于每条短链中的边数，而 λ 表示长链的数量。

我们将失效事件分为两类：(1) 每条链至多包含一条失效边的失效事件；(2) 至少有一条链包含两条或更多失效边的失效事件。由于这两类事件互不相交，我们将总不可靠度分解为：

$$U_G = U_G^{(1)} + U_G^{(2)}, \tag{5}$$

其中 $U_G^{(i)}$ 表示类型 (i) 失效事件的概率。

贡献 $U_G^{(2)}$ 仅取决于链长，而不取决于结构图。具体而言，长度为 c_e 的链 e 至多有一条失效边的概率由 $q^{c_e} + c_e p q^{c_e - 1}$给出。因此，若 $S(G)$ 表示 G的结构图，则：

$$U_G^{(2)} = 1 - \prod_{e \in E(S(G))} \left(q^{c_e} + c_e p q^{c_e - 1} \right). \tag{6}$$

相比之下，$U_G^{(1)}$ 既依赖于结构图，也依赖于长链的放置。设 $b_k^{(1)}$ 为 $S(G)$ 中类型 (1) k-割集的数目。则：

$$U_G^{(1)} = \sum_{k=0}^{3(r-1)} b_k^{(1)} p^k (1-p)^{m-k}. \tag{7}$$

由于 $\mathcal{A}_2$ 中的所有稀疏图均具有三次结构，链的数目相同，且链长至多相差一，因此它们对 $U_G^{(2)}$ 给出相同的值。因此，最小化总不可靠度归结为最小化 $U_G^{(1)}$ 。

为进一步分析 $U_G^{(1)}$ ，注意到稀疏图中每一个类型 (1) k-割集都源于结构图的一个 k- 割集 X 。假设 X 恰好包含 ℓ 条长链。则 X 诱导

$$\gamma^{(X)} = c^{k-\ell}(c+1)^{\ell} \tag{8}$$

稀疏图中的不同类型 (1) 割集，因为我们需要在 X 的每条链中恰好选择一条失效边。令 Γ_k 表示结构图中所有 k-割集的集合。使用二项式定理展开上面的 (8) 得到：

$$\begin{aligned} \gamma^{(X)} &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} c^{k-j} \\ b_k^{(1)} &= \sum_{X \in \Gamma_k} \gamma^{(X)} \end{aligned} \tag{9}$$

定义 $\Gamma_{k,\ell}$ 为 Γ_k 的子集，其中包含恰有 ℓ 条长链的割集。按选取的长链数量对各项分组，可得：

$$\begin{aligned} b_k^{(1)} &= \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j}\, c^{k-j} \\ \gamma_{k,j} &= \sum_{\ell=j}^{k} |\Gamma_{k,\ell}| \binom{\ell}{j} \end{aligned} \tag{10}$$

换言之，$\gamma_{k,\,j}$ 统计满足以下条件的数对 $(X,\ L)$ 的数量：$X \in \Gamma_k$ 是结构图的 k-割集，且 $L \subseteq X$ 是 j 长链的子集。特别地，$\gamma_{k,\,0} = b_k(S(G))$ 表示结构图中 k-割集的数量 $S(G)$。

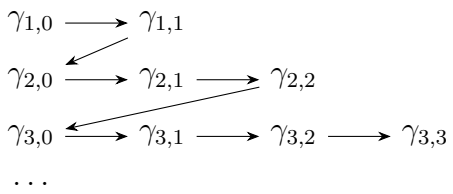
代入 (7)，我们得到：

$$U_G^{(1)} = \sum_{k=0}^{3(r-1)} \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} \cdot c^{k-j} p^k (1-p)^{m-k}. \tag{11}$$

系数比较引理的扩展

当 c 较大时，由于 c较高次幂占主导，j 取较小值的项对 $b_k^{(1)}$ 的贡献更为显著。因此，在此情形下最小化 $b_k^{(1)}$ 需要按照字典序最小化序列 $(\gamma_{k,\,0},\ \gamma_{k,\,1},\ \ldots\ldots,\ \gamma_{k,\,k})$。这一观察自然引出了系数压缩引理的扩展。

引理 2.6（系数比较的扩展）。对于每个 r，存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，具有 n 个顶点和 r条冗余边的一致最可靠稀疏图在接近零处按照数对 （k、j）的字典序最小化系数 $\gamma_{k,\,j}$。也就是说，序列



按指定遍历顺序逐项取最小值。

证明。对于每个 k，我们可以写成 $b_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,\,j} c^{k-j}$。当 c 足够大时，$b_k^{(1)}$ 的主要贡献来自字典序列 $(\gamma_{k,\,0},\ \gamma_{k,\,1},\ \ldots\ldots,\ \gamma_{k,\,k})$ 中的首项系数。因此，对于较大的 c，使 $b_k^{(1)}$ 最小等价于按字典序使该序列最小。

根据系数比较引理 2.3，要使 $U_G^{(1)}$ 接近零处取最小值，就需要按字典序使序列 $(b_1^{(1)},\ b_2^{(1)},\ \ldots\ldots,\ b_3^{(1)\,(r-1)})$ 最小。由此可知，要使 $U_G^{(1)}$ 接近零处取最小值，就需要在 $(k,\ j)$ 上按字典序使 $\gamma_{k,\,j}$ 的全部系数序列最小。

□

系数 $\gamma_{k,\,j}$ 只取决于结构图和长链的位置；与实际链长无关。因此，对于任意固定的冗余度和长链数量，都存在一种结构图与长链布置的组合，使得对于所有较大的 n 值，该组合在接近零处产生最可靠的图。

定义 2.7（标记结构）。 标记结构图 是由一个三次图 G 和边的子集 $L \subseteq E(G)$ 构成的二元组，其中该子集中的边被指定为长链。

定义 2.8（渐近最可靠的标记结构）。 具有 r 条冗余边和 λ 条长链的标记三正则结构图，若在所有具有相同冗余度和长链数量的三正则标记结构中，按字典序使系数 $\gamma_{k,\,j}$ 在 (k, j) 上最小，则称为渐近最可靠。

定理 2.9（零点附近最可靠的大图）。 对于每个 $r \geq 2$，存在 $n_0(r)$，使得对于所有 $n > n_0$，具有 n 个顶点和 r 条冗余边的零点附近最可靠图，其标记结构是渐近最可靠的标记结构，具有 r 条冗余边和 λ 条长链，其中 λ 满足

$$n = 2(r-1) + (c-1)\cdot 3(r-1) + \lambda,$$

对于 $0 \leq \lambda < 3(r-1)$。

该定理直接由引理 2.6 得出，为识别冗余度固定且顶点数量较多时最可靠的图提供了主要工具。

我们将可靠性类别 $\{\mathcal{A}_k\}$ 扩展为一个双参数族 $\{\mathcal{A}_{k,j}\}$，其定义适用于 $0 \leq k \leq 3(r-1)$ 和 $0 \leq j \leq k$。类别 $\mathcal{A}_{k,\,j}$ 由所有满足以下条件的标记结构图构成：对于 $j > 0$，在 $\mathcal{A}_{k,\,j-1}$ 中使 $\gamma_{k,\,j}$ 最小的图；或者当 $j = 0$ 时，在 $\mathcal{A}_{k-1,\,k-1}$ 中使其最小的图。

这种递归构造确保每个类 $\mathcal{A}_{k,\,j}$ 都包含在 $\gamma_{k',\,j'}$ 中按字典序最小的所有图，对所有按字典序排列的 $(k',\ j') < (k,\ j)$ 均如此。特别是，零点附近渐近最可靠的标记结构位于 $\mathcal{A}_{3(r-1),\ 3(r-1)}$ 中。

接下来，我们证明，当 r 固定且 n 足够大时，存在 p，使得对于这个 p，最可靠的图具有一种标记结构，该结构还会在指标数对 $(j,\ k)$ 上按转置字典序依次最小化系数 $\{\gamma_{k,j}\}$。

为此，定义 $s = \frac{p}{1-p}c$，并假设 s 是一个较小的常数。此外，令 $c = s^{-t}$ 对某个固定的 $t > 1$ 成立，使得 c 的增长速度快于 s^{-1}。在此替换下，不可靠度多项式变为

$$U_G^{(1)} = \left(\frac{s^{-t}}{s^{-t}+s}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{3(r-1)} \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j}\, s^{k+jt}. \tag{12}$$

在下面的引理 4.1 中，我们证明，对于足够大的 t 和足够小的 s，在点 $p = \frac{s}{c+s}$ 处最小化 $U_G^{(1)}$，对应于在 $(j,\ k)$ 上按转置字典序最小化系数 $\gamma_{k,\,j}$，即：

$$\gamma_{1,0},\ \gamma_{2,0},\ \ldots,\ \gamma_{1,1},\ \gamma_{2,1},\ \ldots,\ \gamma_{1,2},\ \gamma_{2,2},\ \ldots$$

最小化形如 $\gamma_{k,0} = b_k(S(G))$ 的项，等价于降低结构图的第 k 个系数。因此，在对 (j,k) 进行转置字典序最小化时，当 r 固定且 n 足够大时，一致最可靠图必定具有一个依次最小化所有 b_k 的结构图，因而对应于具有 $2(r-1)$ 个顶点的最可靠三次图。这一观察为寻找接近零处的最可靠三次图提供了依据。

为了将$\gamma_{k,\,1}$最小化，我们注意到，如果结构图只包含大小至多为 k的平凡割集，那么根据引理4.2（我们稍后将证明），每条链出现于

相同数量的此类割集中。在这种情况下，$\gamma_{k,\ 1}$ 的值与长链的放置位置无关。

最后，为了最小化 $\gamma_{k,\ 2}$，我们注意到，每个平凡割集所包含的边之间的距离至多为 $k-2$。在稍后将予以证明的引理4.2中，我们还将证明，距离小于 $k-2$ 的每一对链，出现在大小为 k 的平凡割集中的次数相同。

因此，对于 k，依次最小化 $\gamma_{k,\ 2}$，等价于最小化结构图中距离恰为 $k-2$ 的长链数对数量。

然而，在冗余度给定且顶点数量较大的情况下，与一致最可靠图相关的若干结构性质可能彼此冲突。例如，在围长较大的图中，每条链的 d-邻域内都有更多边，这会增加相邻链对的数量，使得长链之间难以保持较大的距离。

在第 4.1 小节中，我们将介绍顶点数量较大时一致最可靠图的其他性质。在某些情况下，这些性质彼此不相容，我们据此论证一致最可靠图不可能存在。在另一些情况下，这些性质彼此一致，有助于缩小候选图的搜索空间。

最后，在第 5.2 小节中，我们总结这些结果，并给出一种用于在渐近情形下识别一致最可靠图的算法。随后，我们利用第 5.4 小节所述的三次图数据库，在某些情形下缩小渐近一致最可靠图的搜索空间，并在其他情形下排除其存在性。

2.3.3 一致最可靠图的不存在性

我们现在将注意力转向稀疏图在 $p=1$ 附近的行为。在该情形下，可靠性由生成树的数目决定，该数目也称为 树数。我们提出一种在具有长链的稀疏图中最大化树数的方法，并在第 4.2 小节中证明其正确性。

在该分析中，链 e_i 中的边数表示为 $c+r_i$，其中 r_i 可以变化（包括负值）。可以证明，树数可表示为变量 c 的多项式；并且随着 c 增大，目标变为从最高度到最低度最小化该多项式的系数。

由此可得出两个关键认识。第一，当 c 充分大时，使树数最大化的稀疏图也必须具有使树数最大化的结构图。第二，存在这样的情形：当顶点数目很大时，不平衡链长（即 $r_i \notin \{0,1\}$）会得到更高的树数。

随后，我们逐一评估接近零时最可靠的各个 3-正则图，以判断它们能否作为一致最可靠稀疏图的结构。该分析揭示了若干一致最可靠图不存在的情形，从而给出了这一设定下已知最强的矛盾。

定义 2.10（树平衡图）. 设 G 为一个图，并令 $T(G)$ 表示其树数。我们称 G 是树平衡 的，如果对每一对边 $e_1, e_2 \in E(G)$，都有 $T(G-e_1) = T(G-e_2)$。

这里，$T(G-e)$ 表示移除边 e 后图 G 的树数。

如果结构图不是树平衡的，那么对于足够大的 n，可以通过延长对应于 $n()$值较高的边的链，来增加整体树数

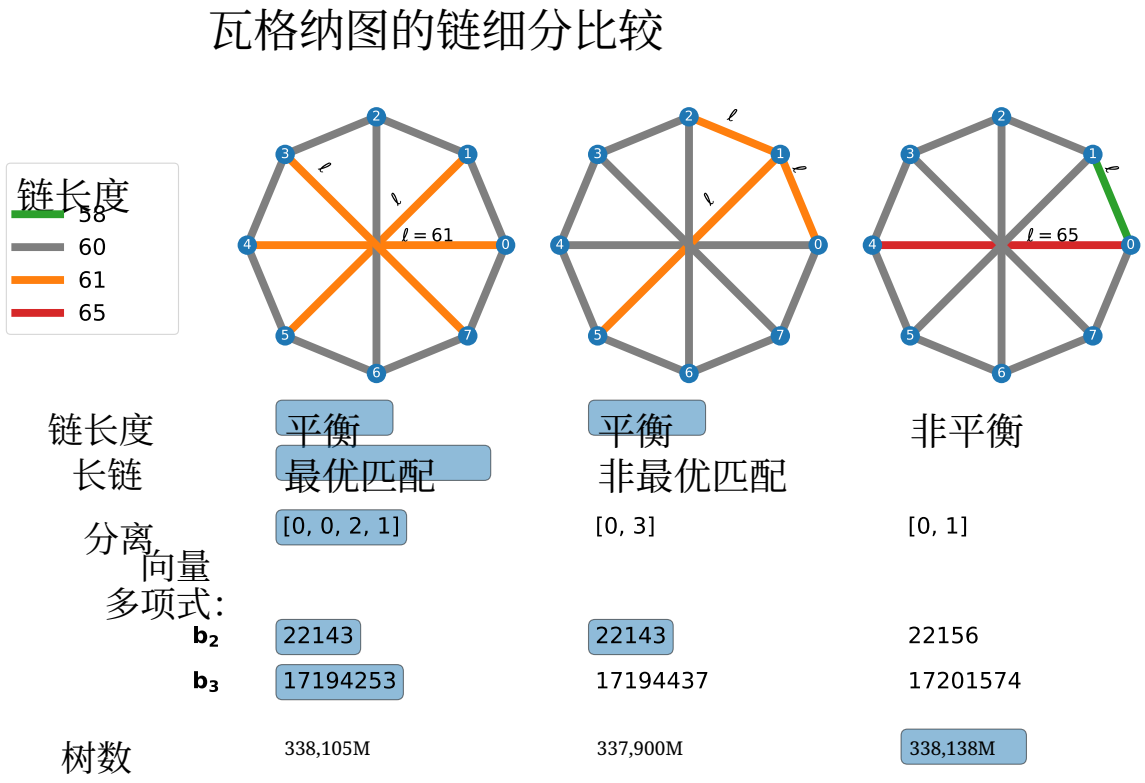


图5：比较瓦格纳图上的不同链配置。该图有8个顶点和12条边，是零点附近最可靠图。在第一个和第二个图中，链长最多相差1。第一个图中的长链构成匹配，其分离向量为最优，因此它是接近零时更可靠的图。相比之下，第二个图中的长链并不构成匹配。在第三个图中，除了一条极长链和一条极短链外，所有链的长度都相等；移除极长链时树数最大，移除极短链时树数最小。正如预期，第三个图的树数在所示图中最高。

并缩短对应于较低值的边的链。因此，与链长均匀的图相比，相应的图具有更高的树数。

引理 4.9 对此进行了形式化：它断言，当顶点数足够大时，非生成树平衡结构图不可能对应一致最可靠图。

图5通过一个$\mathcal{G}_{8,\ 12}$中的图展示了这一现象。我们将零点附近最可靠图与另一幅图进行比较，后者的链长相差超过 1，但树数更高。

最后，图 4 总结了一致最可靠图不存在的情形。对于每个接近零时最可靠的图，我们都会验证它是否为树平衡。

3 可靠正则图

本节严格证明了论文的主要结论：围长较大的正则图在零点附近具有更高的可靠性。在围长较大的 k 正则图中，

每个顶点的邻域构成一个 k 正则树结构（见图 6），从而提供了许多替代路径。对于围长至少为 g 的图，可以证明所有包含少于 g 个顶点的连通子图彼此同构。通过选取连接这些子图与其补图的边，我们定义了所谓的“平凡”割集。在围长至少为 g 的图中，这些割集被视为平凡割集。相反，由 g 个顶点构成的圈会产生另一类割集，称为“非平凡”割集。因此，不含非平凡割集的图，尤其是围长较大的图，在零点附近具有更高的可靠性。我们的一些方法基于扩张论证。为了让组合学以外的读者也能理解本文，我们选择使用直白的术语。

为证明主要结论，我们建立平凡割集集合之间的同构。我们用 $\mathcal{C}_G$ 表示 G 中所有极小割集的集合。用 F_X 表示“边集 X 中的所有边均失效”这一事件。计算图的不可靠度的一种方法是使用容斥原理：

$$U_G = \Pr\left(\bigcup_{X\in\mathcal{C}_G} F_X\right) = \sum_{\emptyset\neq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}_G} (-1)^{|\mathcal{A}|-1}\cdot p^{|\cup_{X\in\mathcal{A}}X|}, \tag{13}$$

因此，如果我们能够证明平凡割集集合之间存在同构，就可以得出结论：包含非平凡割集的图可靠性较低。

为建立这种同构，我们分三步进行。首先，在顶点的邻域之间构造局部同构。接着，将这种同构扩展到涵盖图中的所有平凡割集。最后，证明平凡割集集合之间存在同构。

为方便起见，我们指定其中一个顶点为源顶点，并将其用作参照。由于可以任意选择该顶点，因此对于任意选择的源点，结论均成立。

3.1 平凡割集

在本小节中，我们旨在建立局部同构和全局同构。令 $\mathcal{C}_G(\ell)$表示包含至多 ℓ 条边的所有极小割集组成的集合。由于每个极小割集 X 都会将图恰好划分为两个子图，因此我们将割集的骨架 定义为 X失效后形成的较小连通分支。如果两个子图的大小相同，则将包含源顶点的连通分支视为骨架。

反过来，对于 G中的连通子图 X，我们将 $\partial(X)$定义为连接 X 与其补图 $G-X$的边集合。注意，尽管 $\partial(X)$始终构成一个割集，但不一定是极小割集。

图2展示了极小割集及其对应的骨架。正如命题 2.4所述，诱导割集的大小由子图中的顶点数和边数决定。

我们将围长为 g 的图 G 的平凡割集 定义为由至多含有 $(g-1)$ 个顶点的树所诱导的所有极小割集。我们将 G 中所有平凡割集构成的集合记为 $\mathcal{C}_G^t$，将至多含有 ℓ 条边的所有平凡割集构成的集合记为 $\mathcal{C}_G^t(\ell)$。此外，我们将 G 中至多含有 ℓ 个顶点的所有连通子图构成的集合记为 $\sigma_G(\ell)$，将所有与顶点 v 相交的子图构成的集合记为 $\sigma_G(\ell;v)$。

由于小子树能够唯一确定平凡割集，我们的目标是证明，在围长相同的图中，小子树的集合彼此同构。本节中，

比较以指定源顶点为基准，该顶点充当同构的参照点。因此，我们研究有根图。有根图 是带有一个指定顶点的图，该顶点称为根。有根图之间的同构必须将根映射到根，从而保留有根结构。尤其是，只有当根在子图中的位置得到保留时，两个有根子图才被视为同构。此有根框架仅用于本节的稀疏图分析；在后续章节中，相应的同构将在不参照指定顶点的情况下建立。

引理 3.1（局部同构）。设 G_1 与 G_2 为两个具有相同顶点数和边数、且围长至少为 ℓ 的 k-正则图。设 $v_1 \in G_1$ 与 $v_2 \in G_2$ 为两个顶点。则在 $\sigma_{G_1}(\ell-1; v_1)$ 与 $\sigma_{G_2}(\ell-1; v_2)$之间存在有根同构。

证明。我们通过对每个图执行深度优先搜索（DFS），分别从 G_1 中的 v_1 和 G_2 中的 v_2 开始，并在访问 $\ell-1$ 个顶点后停止，从而建立该同构。

由于这两个图的围长均至少为 ℓ，深度优先搜索遍历中的每个顶点至多出现一次；否则将存在一个顶点数少于 ℓ 的圈，从而与围长条件矛盾。

反设某个子图由两个不同的深度优先搜索序列表示。这将意味着存在一个顶点数少于 ℓ 的圈，再次与围长条件矛盾。因此，$\sigma_{G_1}(\ell-1;\ v_1)$ 与 $\sigma_{G_2}(\ell-1;\ v_2)$ 中的每个子图都通过深度优先搜索过程具有唯一表示。

最后，我们根据相同的深度优先搜索序列，将 $\sigma_{G_1}(\ell-1; v_1)$ 和 $\sigma_{G_2}(\ell-1; v_2)$ 中的子图配对，从而构造所需的同构。 □

基于引理 3.1 中建立的局部同构，我们现在将这一结果推广为全局同构，使所有顶点数不超过 $(\ell-1)$ 的连通子图之间都存在全局同构。

引理 3.2 (全局同构)。设 G_1,$G_2 \in \mathcal{G}_{n,m}$ 是围长至少为 ℓ 的两个 k-正则图。设 s_1 和 s_2 分别是 G_1 和 G_2 的源顶点。那么，存在一个有根同构 h，从 $\sigma_{G_1}(\ell-1)$ 到 $\sigma_{G_2}(\ell-1)$。

证明。我们从局部同构引理所保证的同构 $h : \sigma_{G_1}(\ell-1; s_1) \to \sigma_{G_2}(\ell-1; s_2)$ 开始。我们的目标是将其扩展为全局同构$h : \sigma_{G_1}(\ell-1) \to \sigma_{G_2}(\ell-1)$。

令 X 为 $\sigma_{G_1}(\ell-1)$ 中任意一棵树。根据局部同构引理，对于 G_1 中的每个顶点 v，以 v 为根的、与 X 同构的子树数量，等于 G_2 中对应顶点处以该顶点为根的此类子树数量。此外，每棵含有 t 个顶点的子树恰好出现在 t 个顶点邻域中（每种根顶点选择对应一次），因此 G_1 中与 X 同构的子图总数等于 G_2 中的总数。

特别地，在两个图中，包含源顶点的此类子图数量相同。因此，与 X 同构且不包含源顶点的子图数量也相同。

因此，我们可以通过将 G_1 中每个子图同构类与 G_2 中对应的同构类匹配，来扩展 h，同时保留以 s_1 和 s_2 为根的子图之间的对应关系。

□

3.2 平凡割集的集合

既已证明，在任意两个围长至少为 g 的 k-正则图中，包含至多 $(g-1)$ 个顶点的平凡割集彼此同构，我们现在将这一结果推广到这类割集的集合

。具体而言，我们通过考察子树族并比较它们在两个图中的嵌入，建立平凡极小割集集合之间的同构关系，从而刻画平凡割集的不同并集。在下一小节中，这些嵌入将作为评估高围长图可靠性的基础。

定义 3.3（子树嵌入）。设 G 是一个围长为 g 的 k-正则图。子树嵌入 $\varphi \subset \sigma_G$ 是 G 中子树的有限集合。φ 的骨架 定义为所有子树的并集，即 $\bigcup_{T\in\varphi} T$。

集合中的每棵树都被赋予唯一的颜色，G 的源点也被赋予一种不同的颜色。随后，φ 骨架中的顶点会被染上所有与该顶点相交的树所对应的颜色。

子树嵌入 φ 诱导出的割集为

$$\partial(\varphi) = \cup_{T\in\varphi}\partial(T),$$

如果两个子树嵌入 φ，$\psi \subset \sigma_G$ 包含相同数量的树，且它们的树之间存在图同构，则称它们等价 $\varphi \sim \psi$。这种关系下的等价类 $[\psi]$ 称为子树集合。图 6 展示了子树及其等价类。

由于我们只关注边数至多为 $g(k-2)$ 的割集，因此对于 $\omega \le g(k-2)$，我们定义所有诱导出边数至多为 ω 的割集的子树嵌入所构成的集合，如下：

$$\mathcal{E}_G(\omega) = \{\varphi \subseteq \sigma_G \mid |\partial(\varphi)| \le \omega\}. \tag{14}$$

如果由相应割集诱导的子树中至少有两个发生重叠，则称子树嵌入是联合的。形式上，子树嵌入 $\varphi \in \mathcal{E}_G(\omega)$ 是不相交子树嵌入，当且仅当

$$\forall T_1 \neq T_2 \in \varphi: \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset \quad \text{and} \quad \partial(T_1) \cap \partial(T_2) = \emptyset$$

如果子 树嵌入不是不相交的，则称其为联合子树嵌入 $s.$

子树集合的不相交嵌入会使诱导割集的大小最大化。此外，根据命题 2.4，同一子树集合的所有不相交嵌入在诱导割集中都有相同数量的边。图 6 展示了不相交嵌入和联合嵌入的示例。

下面的引理将全局同构结果扩展为：在两个围长较大的图之间建立子树嵌入的同构。

引理 3.4（子树嵌入同构）。设 G_1 和 G_2 是 k-正则图，它们具有相同数量的顶点和边，且围长均至少为 ℓ，并设 $s_1 \in V(G_1)$ 和 $s_2 \in V(G_2)$ 分别是它们的源点。那么，存在一个根着色同构

$$h : \mathcal{E}_{G_1}(\ell(k-2)) \to \mathcal{E}_{G_2}(\ell(k-2)).$$

证明。根据全局同构，两个图具有相同的子树集合。设 $[\psi]$ 是 G_1中的一个子树集合。由于这些树独立地嵌入到图中，$[\psi]$在 G_1和 G_2中的嵌入数量相同。因此，我们通过在给定子树集合 $[\psi]$ 在 G_1 和 G_2中的嵌入之间构造一个着色同构来继续证明。对 $[\psi]$ 中的子树数量应用归纳法即可完成证明。

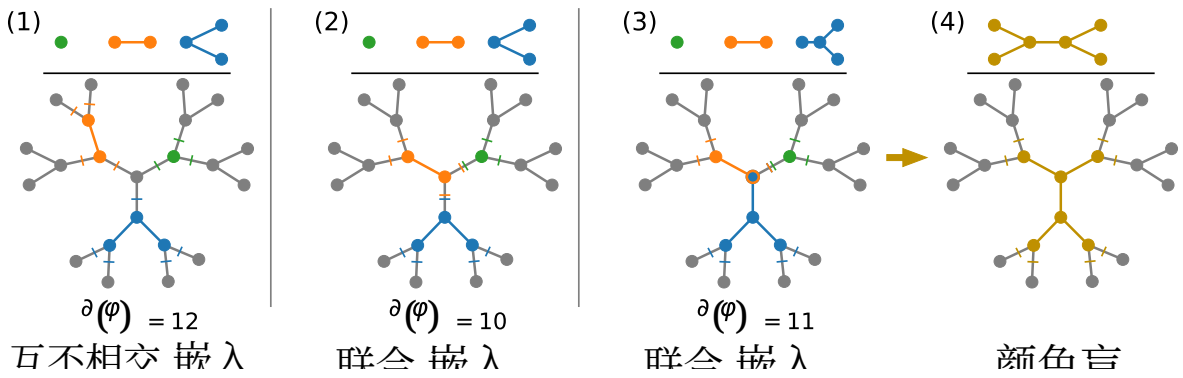


图 6：子树嵌入示意图。(1) 一个不相交子树嵌入。(2) 一个包含两条重叠边的联合嵌入。(3) 一个包含一条重叠边的联合嵌入。上方各行表示子树集合，δ 表示诱导割集的大小。(4) 演示如何将引理 3.4 中的颜色盲原理应用于 (3) 中的子树嵌入。

基本情形。 假设 $|\psi| = 1$，并设 $\varphi = \{T\}$ 是 $[\psi]$ 在 G_1中的一个嵌入。根据命题 2.4，子树 T的顶点数少于 $\lfloor \ell - \frac{2}{k-2} \rfloor \leq \ell - 1$。根据全局同构引理，存在一个有根同构，将 G_1 和 G_2 中至多有 $\ell - 1$ 个顶点的树对应起来。

归纳步骤。 假设对于至多含有$|\psi| - 1$ 个分量的所有子树集合，该命题均成立。考虑将子树集合 $[\psi]$ 嵌入到 G_1中的嵌入 φ。

情况1： φ **是一个联合嵌入。** 如果 φ是联合嵌入，我们就将其骨架中的所有相交子树重新着为同一种颜色，从而得到一个新的不相交嵌入 φ'；它具有相同的骨架，但诱导割集更小且树更少（见图 6）。根据归纳假设，G_2 中存在一个子树集合 $h(\varphi')$，它与 φ'颜色同构。于是，对于 $h(\varphi')$中的每棵不相交树 X，我们都可以利用 φ'中对应的同构树唯一地恢复其原有颜色，从而确保 $h(\varphi')$与 φ颜色同构。

情况2： φ **是一个不相交嵌入。** 由于 φ中的子树两两不相交，至多一个子树可以包含源点。因此，$[\psi]$的两个不相交嵌入颜色同构，当且仅当它们包含源点的子树（若存在）作为有根树同构。对于 G_1 中包含源点 s_1的每个子树 T，在 G_2 中都存在一个相对于源点 s_2的有根同构子树 $h(T)$。由于其余子树的嵌入独立于 T，G_1 中包含 T 的$[\psi]$ 的嵌入总数，等于 G_2 中包含 $h(T)$ 的嵌入总数。此外，由于联合嵌入之间也存在有根同构，包含 T 和 $h(T)$ 的联合嵌入数量在两个图中相同。因此，G_1 中包含 T 的 $[\psi]$ 的不相交嵌入数量，等于 G_2中包含 $h(T)$ 的不相交嵌入数量。

因此，我们通过按照有根对应关系（若存在） $T \mapsto h(T)$匹配嵌入，构造所需的保色同构。

□

在下一小节中，我们应用子树嵌入同构引理来证明：不含非平凡割集的图在接近零时最为可靠。

3.3 不含非平凡割集的正则图是可靠的 e

我们将不可靠度多项式分解为平凡部分与非平凡部分之和。设 G 是一个围长为 g 的 k-正则图，并令 $\omega = g(k-2)$。利用公式 13 中的表示，我们将平凡多项式 定义为：

$$U_G^{(t)} = \Pr\left(\bigcup_{X \in \mathcal{C}_G^t} F_X\right), \tag{15}$$

其中， F_X 表示 X 中所有边均失效这一事件。由于 $U_G^{(t)} \le U_G$，我们将非平凡多项式 定义为 $U_G^{(n)} = U_G - U_{(t)G}$。等价地，命题 2.4 表明，每个由至多 $a = \lfloor g - \frac{2}{k-2} \rfloor$的子树所诱导的平凡割集，因此， $U_{(t)G}$都可以用树表示为 —

$$U_G^{(t)} = \Pr\left(\bigcup_{T \in \sigma_G(a)} F_{\partial(T)}\right). \tag{16}$$

$U_G^{(t)}$ 也可以用子树嵌入来表示。对于每个由平凡割集构成的有限集合 $\{\partial(T_i)\}_{i\in I}$，其交集由相应的子树嵌入 $\varphi = \{T_i\}_{i\in I}$ 表示

$$\bigcap_{i\in I} F_{\partial(T_i)} = F_{\partial(\varphi)}. \tag{17}$$

因此，利用容斥原理，平凡不可靠度多项式的前 ω 项为

$$U_G^{(t)} \overset{\omega}{=} \sum_{\varphi \in \mathcal{E}_G(\omega)} (-1)^{|\varphi|-1} \cdot p^{|\partial(\varphi)|}, \tag{18}$$

其中， $f \overset{\omega}{=} g$ 表示两个多项式满足 $f - g = O(p^{\omega+1})$。

引理 3.5 （具有非平凡割集的图可靠性较低）。 设 G_1 和 G_2 是顶点数和边数相同、围长均至少为 g的两个图。假设 $\mathcal{C}_{G_1}^n$（g（$k-2$）） $= \emptyset$ 且 $\mathcal{C}_{G_2}^n$（g（$k-2$）） $\neq \emptyset$。那么， G_1 在接近零时比G_2 更可靠。

证明。 设 $\omega = g(k-2)$。平凡不可靠度多项式满足

$$U_{G_i}^{(t)} \overset{\omega}{=} \sum_{\varphi \in \mathcal{E}_{G_i}(\omega)} (-1)^{|\varphi|-1} \cdot p^{|\partial(\varphi)|}.$$

应用着色同构引理后，我们得到

$$U_{G_1}^{(t)} \overset{\omega}{=} U_{G_2}^{(t)}.$$

由于 $U_{G_1}^{(n)} = 0$和 $U_{(n)G_2} > 0$，因此在系数向量的字典序中， $U_{G_1} < U_{G_2}$。根据引理 2.3，这意味着 G_1 在接近零时比 G_2 更可靠。

□

3.4 主定理

定理 3.6 (不含非平凡割集的正则图)。 设 $n \geq 2$ 满足$m = kn/2 \in \mathbb{N}$，并定义 $\mathcal{D}_{n,\ m}(g)$ 为 $\mathcal{G}_{n,\ kn/2}$ 中所有不含边数不超过 $g(k-2)$ 的非平凡割集的正则图所构成的集合。假设存在 $g \geq 4$ 满足 $\mathcal{D}_{n,\ m}(g) \neq \emptyset$。那么，

$$\mathcal{A}_{g(k-2)} = \mathcal{D}_{n,m}(g).$$

证明。 设 $\omega = g(k-2)$，并假设 $G \in \mathcal{D}_{n,m}(g)$。另设 $G' \in \mathcal{G}_{n,m}$ 是另一个规模相同的图。如果 $g' < g$，则根据引理 3.5， $U_G \overset{\omega}{<} U_{G'}$。然而，如果 $g = g'$，它们的非平凡多项式保持 $U_G^{(n)} \overset{\omega}{=} U_{G'} \overset{\omega}{=} 0$，并且根据公式（18），它们的平凡多项式保持 $U_{(t}_{G} \overset{\omega}{=} U_{G'}^{(t)})$，从而得到 $U_G \overset{\omega}{=} U_{G'}$。 □

推论 3.7。 如果存在一个 k-正则图 $G \in \mathcal{G}_{n,m}$，使得 $\mathcal{C}_G^n(g(k-2)) = \emptyset$，那么 $\mathcal{G}_{n,m}$ 中零点附近最可靠的 k-正则图不包含大小至多为 $g(k-2)$ 的非平凡割集。

推论的一个直接结果是，通过识别至少一个不含非平凡割集的正则图，我们可以为零点附近最可靠图的围长建立一个下界，并由此缩小搜索空间。

引理 3.8。 顶点数至少为 *14* 的零点附近最可靠三次图，其围长至少为 *6*。

证明。 我们构造一个围长为 6 且不含至多有 6 条边的非平凡割集的三次图。具体做法是先画一个含有 n 个顶点的圈。然后，将每个偶数编号的顶点 i 与 $(i+5) \bmod n$ 相连。图 4 展示了此类图的示例，其中 r 为 8 或 9。 □

我们鼓励进一步探索围长较大且不含非平凡割集的正则图族，以提高零点附近最可靠图的围长下界。

下一节将使用定理 3.6 来寻找零点附近最可靠稀疏图的无限族。

4 可靠稀疏图

4.1 零点附近的可靠性

本节研究具有恒定冗余度 $r \leq 0.5n$、渐近地趋于无穷大的顶点数 n 以及较小失效概率 p 的稀疏图。如第 2.3.2 小节所示，使前两个可靠性系数 b_1 和b_2 达到最小的稀疏图，其结构图为 3-连通三正则结构图，且各链的长度相差至多为一。在这一范围内构造高可靠性的稀疏图，主要包括两个步骤：(1) 找出可靠的三次结构图；(2) 确定长链的放置方式。

回顾一下这一分解:

$$U_G = U_G^{(1)} + U_G^{(2)}$$

其中， $U_G^{(2)}$ 表示同一条链中发生两个或更多故障所导致的断连概率，仅取决于链的数量和长度。项 $U_G^{(1)}$ 则计入每条链中至多包含一条失效边的故障概率，因此体现了图的结构性贡献。

我们将 $U_G^{(1)}$ 表示为:

$$U_G^{(1)} = \sum_{k=0}^{3(r-1)} b_k^{(1)} p^k (1-p)^{m-k}, \tag{19}$$

并将 $b_k^{(1)}$ 表示为关于 c 的多项式,

$$b_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j}\, c^{k-j}, \tag{20}$$

我们得到

$$U_G^{(1)} = \sum_{k=0}^{3(r-1)} \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} \cdot c^{k-j} p^k (1-p)^{m-k}, \tag{21}$$

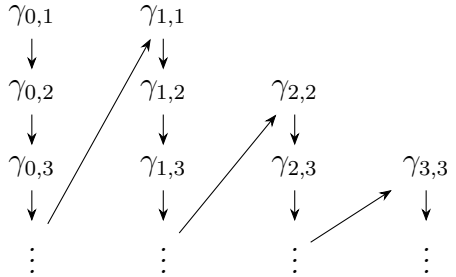
其中 $\gamma_{k,\,j}$ 的计算方式是：对 j 条长链的每个子集，求包含该长链子集且含有 k 条链的割集数量之和。这些系数仅取决于结构图以及长链的放置方式，而与其长度无关。

引理 2.6 推广了经典的系数压缩论证。它表明，对于任意 $r \geq 2$，存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，渐近最可靠稀疏图在接近零时会按指标数对 $(k,\ j)$ 的字典序最小化系数 $\gamma_{k,\,j}$。

由此得到一个关键的结构约化：在 n 足够大的渐近情形下，具有 r 条冗余边且有 $n = 2(r-1) + (c-1) \cdot 3(r-1) + \lambda$ 个顶点的最可靠稀疏图仅取决于其标记结构，也就是说，取决于一个三次结构图以及对 λ 条长链的选择。

接下来，我们考虑在一个远离零点的小区间内对 U_G 进行最小化。引理 4.1 表明，对于较大的 n，一致最可靠图必须按照转置字典序最小化 $(j,\ k)$ 上的系数 $\gamma_{k,\,j}$，才能在 p 的某个区间上最可靠。这里的关键在于：在通常的字典序中，我们设定一个较大的 c，并针对该 c 充分降低 p；而在这里，我们将 $s = c\frac{p}{1-p}$ 设为新的 p 变量。在这种情况下， cp 近似为常数，我们则增大 c，同时确保 $p \sim \frac{s}{c}$，从而实现逆字典序下的最小化。

引理 4.1（转置系数压缩）。对于每个 $r \geq 2$，都存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，具有 n 个顶点和 r条冗余边的一致最可靠稀疏图，其标记结构在 (j, k)上按转置字典序最小化系数 $\gamma_{k,\,j}$。



证明。我们进行变量替换。设 $s = \frac{p}{1-p}c$，并设 $c = s^{-t}$。那么多项式变为：

$$U_G^{(1)} = \left(\frac{s^{-t}}{s^{-t}+s}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{3(r-1)} \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} s^{k+jt} \tag{22}$$

此外，$k > r$ 链的每次失效都会导致任意图断开。因此，$\gamma_{k,\,j}$ 系数仅取决于 r，从而得到

$$U_G^{(1)} = \left(\frac{s^{-t}}{s^{-t}+s}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} s^{k+jt} + \mathrm{Const(r)} \tag{23}$$

由于这是关于 s的多项式，并且通过令 p 充分接近零可以使 s 任意小，因此，最小化 $U_G^{(1)}$ 对应于首先最小化最低 s度项的系数。也就是说，只要 $k+jt < k'+j't$，我们就更倾向于$\gamma_{k,\,j}$而不是$\gamma_{k',\,j'}$。对于 $k \le r$，并通过选择 t 使得 $t > r$，我们得到

$$k + jt < k' + j't \quad \Longleftrightarrow \quad \big(j < j'\big) \ \text{ or } \ \big(j = j' \text{ and } k < k'\big), \tag{24}$$

这正是逆字典序。

为找出引理成立的区间，假设 c 为常数，并将U_G 与 U_H进行比较，其中 G 是按转置后的逆字典序达到最优的标记结构，而 H 是另一个大小相同的标记图。根据公式（24），存在足够小的 s_0，使得当 $s < s_0$且 $t > t_0 = r$时，$U_G(s,\ t) < U_H(s,\ t)$。

我们接下来要检验，对于常数 c，是否存在一个 p 区间，使得 $t > t_0$，且 $s < s_0$。根据 s 的定义，

$$s = \frac{p}{1-p}c < s_0 \Rightarrow p < \frac{s_0}{s_0 + c}$$

并根据 t 方程

$$t = -\frac{\log(c)}{\log(\frac{p}{1-p}c)} > t_0 \Rightarrow p > \frac{1}{1 + c^{1+\frac{1}{t_0}}}$$

综上，我们得到引理在该区间内成立

$$\frac{1}{1 + c^{1+\frac{1}{t_0}}} < p < \frac{s_0}{s_0 + c} \tag{25}$$

这个不等式仅当

$$\frac{1}{1 + c^{1+\frac{1}{t_0}}} < \frac{s_0}{s_0 + c}$$

这意味着

$$c > s_0^{-t_0} \tag{26}$$

因此，令 $c_0 = s_0^{-t_0}$，引理在 $c > c_0$ 时成立。 □

因为$\gamma_{k,\,0} = b_k$，我们得出结论：在转置字典序下使序列（$\gamma_{k,\,j}$）最小的图结构，必须与接近零时最可靠的三正则图一致。

为了最小化 $\gamma_{k,\ 1}$ 和 $\gamma_{k,\ 2}$，我们分析割集与长链之间的相互作用。对于 $\gamma_{k,\ 1}$，我们关注包含某条特定长链的 k-边割集的数量。对于$\gamma_{k,\ 2}$，我们必须统计在此类割集中同时出现的长链数对的数量。

幸运的是，在仅有平凡小割集的三次结构图中，这类割集的数量是由链之间的距离决定的。以下引理将这一点形式化。

引理4.2 (包含两条边的割集**)**。 设 G 是一个三次图，其中所有大小不超过 g 的割集都是平凡的。设 $d \geq 0$ 和 k 满足 $d-2 \leq k \leq g$。那么，对于距离为 d的任意两条边，包含这两条边的 k边割集数量相同。

证明。 结论由引理 3.4 中的着色同构得出。给定距离为 d的两条边，任选其中一条，并令其距离另一条较近的端点作为同构的源顶点。设 G 和 H 是满足引理相同条件的两个三次图，且各自都包含一对距离为 d的长链。根据着色同构引理，以 G 的源点为根且导出一个 k边割集的任意连通子图集合，在 H中都有一个与之同构的集合。因此，两个图中包含这两条边的k边割集数量相同。

□

当 $k<g$ 时，这个引理推出两个推论：
1. $\gamma_{k,\ 1}$ 的值不随长链的放置而改变。
2. 最小化$\gamma_{k,\ 2}$ 等价于最小化距离为 $k-2$ 的长链对数。

确立这些结构观察之后，我们现在可以考察这两种最小化框架。我们先分析按 (k, j) 字典序最小化系数，然后再转向转置后的 (j, k) 字典序。

4.1.1 $(k,\ j)$ 最小化

定义 4.3 （分离向量）。 设 G 是一个标记结构图，其最小非平凡割集的大小为 g。分离向量 定义为

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{g-3}),$$

其中 μ_d 表示 G中距离为 d 的长链对数量。

现在我们证明，对于较小的 k ，最小化 $\gamma_{k,\ 2}$ 等价于最小化距离为 $k-2$的长链对数量。

引理 4.4 （最小化$\gamma_{k,\ 2}$）。 设 G 为一个三次图， g 为最小非平凡割集的大小。令$[G]_{k,\ j}$ 表示 $\mathcal{A}_{k,\ j}$ 中结构图为G的标记图集合。那么

$$H \in [G]_{k,2} \iff H \in [G]_{k,0} \text{ and } \mu_{k-2} \text{ is minimized over all graphs in } [G]_{k,0}.$$

证明。 我们知道，对于 $k<g$ ，系数 $\gamma_{k,\ 1}$ 与长链的放置无关。因此，$\mathcal{A}_{k,\ 0} = \mathcal{A}_{k,\ 1}$。

接下来，将$\gamma_{k,2} = \sum_{i=1}^{k-2} \gamma_{k\ 2}^{(i)}$,分解，其中每个 $\gamma_{k\ 2}^{(i)}$,对距离为 i 的长链对求和，计算包含它们的 k-割集的数量。引理4.2表明， $\gamma_{k\ 2}^{(i)}$,仅取决于 μ_i ， 当 $k<g$时。

对于基本情形 $k=3$，我们有$\gamma_{3,2}=\gamma_{3\,2}^{(1)}$.，因此只需最小化 μ_1。假设该引理对 $k=a-1$成立，我们来考察 $k=a$。根据归纳假设，$[G]_{a,0}$ 中的所有图在 $i<a-2$ 时，其 μ_i 的值都相同，因此这些项的 $\gamma_{a\,2}^{(i)}$,也相等。剩下唯一需要最小化的项是 $\gamma_{a\,2}^{(a-2)}$.，它仅取决于 μ_{a-2}。 □

为了对 $j\geq 3$最小化$\gamma_{k,j}$，必须考虑涉及三元组、四元组等的更复杂构型。我们将讨论限制在情形 $k\leq 4$。

最小化前三个系数 $b_1^{(1)}$,$b_2^{(1)}$,$b_3^{(1)}$ 已是成熟结果（见 [22, 13]），但我们在此用自己的术语重新加以表述。如前所示，链长至多相差一的三次结构图可得到 $b_1^{(1)}=b_2^{(1)}=0$。为最小化$\gamma_{3,0}=b_3^{(1)}$，该结构必须只含平凡的3-边割集（即一个节点的关联边）。

在此情形下，每条长链恰好属于两个割集，故$\gamma_{3,1}=2\lambda$与其放置方式无关。一对长链仅当与同一节点相邻时才处于同一割集中。设 α_i 为与 $i\in\{0,1,2,3\}$条长链相邻的结构顶点数。则

$$b_3^{(1)}=nc^3+2\lambda c^2+(\alpha_2+3\alpha_3)c+\alpha_3. \tag{27}$$

引理 4.5 ([22, 13]). 设 G 是一个具有 r 条冗余边和 λ 条长链的稀疏图。$G\in\mathcal{A}_3$ 当且仅当它具有一个标记结构图，该图是*3*-连通且三正则的，并且仅有平凡的*3*-边割集，同时与每个顶点相邻的长链数目至多相差*1*。更精确地说:

1. 若 $\lambda\leq r-1$，则长链构成一个匹配（任意两条长链都不与同一顶点相邻）。*2.* 若 $r-1<\lambda\leq 2(r-1)$，则恰好有$2(\lambda-(r-1))$ 个顶点与两条长链相邻，其余顶点与一条长链相邻。*3.* 若 $\lambda>2(r-1)$，则短链构成一个匹配。

证明。 由方程(27)可知，满足该引理条件的图位于 $\mathcal{A}_3$中。根据彼得森定理 [18], ，任一无桥三次图都具有完美匹配。

由于结构图有 2(r − 1) 个顶点，因此当 $\lambda\leq r-1$ 时，我们可以将 $r-1$ 条长链放在匹配上；同理，当 $\lambda>2(r-1)$ 时，可以将短链放在匹配上。对于中间值 $r-1<\lambda\leq 2(r-1)$，我们可以先为 $r-1$ 条长链选取一个完美匹配。移除这些边后，剩余图是 2-正则的。如果它分解为偶长度圈，我们就能找到第二个匹配来容纳额外的 λ –(r − 1) 条长链，从而确保每个顶点关联的长链不超过两条。

虽然并非所有三次图都能保证满足这一条件，但我们总能找到至少一个符合所需性质的图。例如，取一个有 2(r − 1) 个顶点的圈，并将弦 $i\leftrightarrow i+r-1 \bmod 2(r-1)$ 作为第一个完美匹配。这既能确保围长符合要求，也能提供支持二边匹配的结构。 □

请注意，上述引理不仅适用于渐近情形，因为最小化 $b_3^{(1)}$ 完全取决于最小化 α_2。

现在考虑将 $b_4^{(1)}$ 最小化。为了将 $\gamma_{4,\,0}$ 最小化，结构图的围长必须至少为 5（如果可能），且只包含平凡割集。引理 3.8 保证了 $r\geq 8$ 时此类图的存在；对于 $r=6$, 7，图 4 所示的最可靠图证实了这一点。

将 $\gamma_{4,\ 2}$ 最小化，等价于将 μ_2 最小化，即将距离为 2 的长链对数量最小化。为了将 $\gamma_{4,\ 3}$最小化，我们必须减少参与四边割集的长链三元组数量。每个含四条边的平凡极小割集，都由与某条给定链相邻的四条链构成。如果其中三条是长链，则它们对 $\gamma_{4,\ 3}$ 的贡献为 1；如果四条都是长链，则贡献为 4。

令 β_i 表示恰好与 $i \in \{0,1,2,3,4\}$ 条长链相邻的链的数量。那么，要使 $\gamma_{4,\ 3}$ 最小，就必须使 $\beta_3 + 4\beta_4$ 最小；要使 $\gamma_{4,\ 4}$ 最小，就必须使 β_4 最小。

根据上述分析，我们可以总结零点附近渐近最可靠的标记结构的结构条件。

引理 4.6 (零点附近渐近最可靠的标记结构的性质)。假设 $r \geq 2$。存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，任何具有 n 个顶点和 r 条冗余边的零点附近最可靠图，其标记结构图均满足：

1. 该结构是三正则且 *3*-连通的，只有平凡的 *3*-边割集，且链长之差至多为 *1*。

2. 当 $r \geq 4$ 时，围长至少为 4；当 $r \geq 6$ 时，围长至少为 5。

3. 以下参数按顺序依次最小化：

$$\xrightarrow{r\geq 4} \mu_1 \xrightarrow{r\geq 5} \mu_2 \to \beta_3 + 4\beta_4 \to \beta_4 \xrightarrow{g\geq 6} \mu_3.$$

箭头表示只有在箭头上方的条件成立时，才最小化相应参数。例如，当 $r \geq 4$ 时，μ_1 被最小化；只有当满足所有先前条件的图存在且围长至少为 *6* 时，才最小化 μ_3。

引理 4.6 中最小化的参数指的是可靠性障碍参数。第5.5小节给出了一个应用该引理来寻找最优长链配置的示例。

4.1.2 $(j,\ k)$ 最小化

与 $(k,\ j)$ 序不同，按转置序 $(j,\ k)$ 按字典序最小化系数 $\gamma_{k,\ j}$ 可简化分析，因为这样我们主要只需关注 $j \leq 2$ 的情况。

如前几节所述，按顺序依次最小化所有 $\gamma_{k,\ 0} = b_k$ 项的结构，是在接近零时具有 $2(r-1)$ 个顶点的最可靠三次图。此外，当结构图中大小至多为 k 的割集全都是平凡割集时，系数$\gamma_{k,\ 1}$ 不受长链布置的影响。因此，对链布置的首次非平凡依赖出现在 $\gamma_{g,\ 1}$ 中，其中 g 是结构图中最小非平凡割集的大小。

为了依次最小化 $\gamma_{k,\ 1}$ k 中的系数，我们为每条链指定一个等级，并选择等级最低的 λ 条链。对于每条链 e，将其可靠性向量定义为

$$\rho^{(e)} := (\rho_3^{(e)}, \rho_4^{(e)}, \ldots, \rho_{3(r-1)}^{(e)}),$$

其中， $\rho_k^{(e)}$ 表示结构图中包含链 e 的 k 边割集的数量。然后，所有链对标记结构图 G 中 $\gamma_{k,\,1}$ 的总贡献为

$$\gamma_{k,1} = \sum_{e \in E(G)} \rho_k^{(e)}.$$

令 rank(e) 表示结构图中所有链里 $\rho^{(e)}$ 的字典序秩。接下来，应将 λ 长链分配给秩最小的 λ 链。例如，如果 $\lambda = 7$，且秩为 1 的链有 4 条、秩为 2 的链有 5 条，那么必须选中 4 条秩为 1 的链，以及 5 条秩为 2 的链中的 3 条。

如上所述，对于 $k < g$ ，最小化$\gamma_{k,\,2}$ 等价于最小化 μ_{k-2}，即分离向量中（$k-2$）项。因此我们得出结论，在（$j,\ k$）最小化条件下，长链的最优排列必须满足：

1. 将长链分配给 rank(e) 最低的 λ 链；
2. 在所有此类分配中，按字典序最小化分离向量 μ 。

我们将这些观察总结为以下引理：

引理4.7 ((j, k) 最小化准则)。 设 $r \geq 2$ 和 $0 \leq \lambda < 3(r-1)$。那么，任何按转置字典序 (j, k) 最小化系数 $\gamma_{k,\ j}$ 的标记结构图都必须满足：

1. 结构图是在接近零时具有$2(r-1)$ 个顶点的最可靠三次图。*2.* 长链被分配给可靠性负载秩$\mathrm{rank}(e)$最低的 λ条边。*3.* 在所有此类长链分配方案中，分离向量 μ按字典序最小。

在接下来的第 4.2 小节中，我们将说明，渐近情形下一致最可靠图的结构图通常具有对称性。在这种情况下，所有链的 rank(e) 值往往相等，因此优化问题就简化为仅需最小化分离向量。

4.2 最大化树数

现在，我们将注意力转向寻找树数最大的稀疏图，即在1附近最可靠的图。这一结果可以证明一致最可靠图不存在。为此，我们构造一个链长相差超过1的图，该图具有更多生成树。设每条链中的边数为 $c + r_i$，其中 r_i 可以取包括负值在内的任意整数。

与扩展系数比较法类似，树数可以表示为变量 c的多项式。图的每棵生成树都由其结构图的一棵生成树诱导而来。此外，每棵生成树至多包含来自同一条链的一条失效边。因此，结构图的每棵生成树 T 都会为整个图的生成树总数贡献 $\prod_{e_i \notin E(T)}(c + r_i)$ 棵生成树。

由于每个这样的乘积都恰好包含 $r = m - (n-1)$ 项，对结构图的所有生成树求和并展开乘积项后，可得生成树总数的以下公式:

$$T(G) = \sum_{X \subseteq E(S(G))} \left(T(S(G) - X) \prod_{e_i \in X} r_i \right) \cdot c^{r-|X|} \tag{28}$$

其中， $T(S(G) - X)$ 表示结构图中不包含 X 中链的生成树数量。

如果 $\{r_i\}$ 是常数且 c 很大，那么 c 的高次幂的系数占主导地位。c^r 的系数为 $T(S(G))$，表示结构图中的生成树数量。因此，如果接近零时最可靠的三次图并未使生成树数量最大化，那么当 c 足够大时，一致最可靠图便不可能存在。

引理 4.8 （ t-最优图的结构）。 设 $r > 1$，并假设接近零时具有$2(r-1)$ 个顶点的最可靠三次图，在顶点数和边数相同的图中并未使生成树数量最大化。那么，存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，均不存在具有 n 个顶点且冗余度为 r 的一致最可靠图。

生成树数量中的第二大主导因子为 :

$$(c+1)^{r-1} \cdot \sum_{e_i \in E(S(G))} T(S(G) - e_i) r_i.$$

由于 $\{r_i\}$ 之和是常数，要使这一数量最大化，就需要增加具有大量生成树 $T(S(G) - e_i)$ 的链的 r_i 。

考虑两条链 e_1 和 e_2，满足 $T(S(G) - e_1) > T(S(G) - e_2)$。在这种情况下，我们称结构图 $S(G)$不是树平衡的。如果一个图在接近零时最可靠，那么 $r_i \in \{0, 1\}$。然而，如果结构图不是树平衡的，我们可以增加 r_1 并减少 r_2，从而增大 $(c+1)^{r-1}$ 的系数。当 c 较大时，这一调整会得到一张具有更多生成树的图。因此，如果接近零时最可靠的结构图不是树平衡的，那么当 c 足够大时，一致最可靠图不存在。

引理 4.9 (非树平衡图)。 设 $r > 1$，并假设具有$2(r-1)$ 个顶点的、接近零时最可靠的三次图不是树平衡的。那么，存在 n_0，使得对于所有 $n > n_0$，都不存在具有 n 个顶点和 r条冗余边的一致最可靠图。

在图 4 中，我们分析每个图在接近零时的可靠性，以确定其是否为树平衡图。分析发现，对于某些冗余度相同且顶点数较多的无穷族图，一致最可靠图并不存在。通过应用基尔霍夫定理，我们可以高效地计算树数。结果证实，冗余边较少的图往往是平衡的，而冗余边较多的图通常不是。这凸显了对称性在一致最可靠图存在性方面的关键作用。

5 识别一致最可靠图

5.1 框架概述

我们的目标是确定，对于给定的冗余度 r 和长链数$0 \leq \lambda < 3(r-1)$，在渐近情形下（即节点数 n 足够大时）是否存在一致最可靠图；如果存在，则确定其标记结构。

该方法分为三个阶段：

1. 识别具有 $2(r-1)$ 个顶点、在接近零时最可靠的候选三次图。 2. 对每个候选图，确定 λ 长链的放置方式，使可靠性等级 ρ、分离向量 μ 以及引理 4.6 中的可靠性障碍参数分别达到最小值。能同时达到这两个最小值的放置方式称为最优长链配置。 3. 验证所得结构图是否为树平衡结构，以及是否存在最优长链配置。若这两个条件均成立，则该图是一个一致最可靠图的候选。否则，这将与在给定的 r 和 λ 值以及足够大的节点数 n下存在一致最可靠图相矛盾。

5.2 算法流程

以下算法将识别最可靠标记结构图的过程形式化。

算法 1 一致最可靠标记结构的识别 要求：冗余度 r 以及长链数量 λ1：选择一个在 $2(r-1)$ 个顶点上、接近零时最可靠的三次图 G，该图通过对最大围长三次图的枚举得到。2：如果 G 不是树平衡的，或者不能使生成树的数量最大化，则 3：返回不存在一致最可靠的标记结构。4：结束如果 5：令 $E_{\text{opt}} \subseteq E(G)$ 为取得 $\rho^{(e)}$ 最小值的边的集合。6：在 $E(G)$ 的所有 λ-边子集中计算最小分离向量 μ。7：在 $E(G)$ 的所有 λ-边子集中计算最小可靠性障碍参数（引理 4.6）。8：尝试寻找一个同时达到这两个最小值的 λ-边子集 $S \subseteq E_{\text{opt}}$。9：如果不存在这样的子集，则 10：返回不存在一致最可靠的标记结构。11：结束如果 12：令 $\gamma_{k,j}$ 表示由标记结构 (G, S) 诱导的系数向量。13：如果存在一个在 $2(r-1)$ 个顶点上的三次图 G'，其最优标记结构产生的系数向量在字典序下严格小于 $\gamma_{k,j}$，则 14：返回不存在一致最可靠的标记结构。15：否则 16：返回 (G, S) 是一个候选的一致最可靠标记结构。17：结束如果

5.3 计算复杂度与图枚举

该方法的计算复杂度主要取决于冗余度参数 r。稀疏情形中使用的结构图具有 $n_s = 2(r-1)$ 个顶点。该算法关于原图的顶点数量是线性的，关于冗余边的数量是指数的。

主要的计算瓶颈在于生成所有具有指定围长 g 的 3-正则图。对于固定的 g，具有 n_s 个顶点且围长至少为 g 的此类图，其数量随之增长为 $\Theta(e^{\alpha_g n_s})$，其中 $\alpha_g > 0$ [15] 是某个常数。对于较小的 n_s，可以使用无同构生成工具（如 `genreg` [16] 和 `snarkhunter` [5]）进行显式枚举；这些工具对每个生成的图，其运行时间均为多项式，因此总耗时由输出总数决定。

由于我们的算法只考虑具有最大围长的图，待枚举图的数量实际上可能会随着冗余参数的增加而减少。例如，有 385 个顶点数为 22、围长为 6（即最大围长）的三次图，但顶点数为 24、围长为 7 的图只有一个，即唯一的 (3，7)-笼。通过这些枚举算法得到的部分结果可在 House of Graphs 数据库 [10] 中查阅。

一旦枚举出所有具有最大围长的三次图，算法便验证其中哪些包含非平凡割集。这涉及检查所有规模至多为 $n_s/2$的连通子图，其复杂度关于 n_s呈指数级。

结构图的不可靠度多项式可在 $O(2^{3r})$ 时间内精确计算。若仅需前 $t < 3(r-1)$ 项，则该时间降至 $O(2^t)$。此外，对于具有小树宽的图，可应用基于树分解的算法更高效地计算不可靠度多项式，如下一小节所述。

为了识别同时最小化分离向量和引理 4.6 中所定义参数的长链构型，我们将该问题表述为线性规划优化。线性规划的构造及其实现细节在第 5.5 节中描述。

总之，该算法的复杂度主要由 r 和 λ决定，并且仅弱依赖于 n。事实上，由于具有最大围长的图较为稀少，随着r 增大，需要考虑的图的总数可能会减少。对于较小的 r 值，该算法在实践中表现良好。确定任意顶点数下具有最大围长的三次图的数量，仍然是一个有趣的开放问题。

5.4 三正则图数据库

我们研究的另一项重要贡献是建立了一个可靠性数据库。该数据库包含 5,535 个三次图，以及它们的性质和不可靠度多项式。它是检验假设和应用本研究中开发的算法的宝贵工具，例如计算接近零处的最可靠图，以及评估一致最可靠图的不存在性。

该数据库向公众开放，使其他研究人员能够探索不可靠度多项式并研究其他问题，例如识别一致最优图，以及检测可靠性曲线的根和拐点；这本身就是一个重要的研究主题 [1, 7]。最初收集的三次图取自 House of Graphs 数据库 [10]。

构建这样的数据库颇具挑战，因为计算单个图的可靠性具有指数级复杂度。为此，我们采用了一种算法

该算法基于树分解 [11], ，计算图可靠性的复杂度为$O(n\cdot\omega^3\cdot 2^{(\omega+2)(\omega+1)})$，其中 ω 是图的树宽。对于稀疏图，树宽通常较小，因此计算性能可得到显著提升。

我们使用数据库的主要目的是找出接近零时最可靠的三次图（结果汇总于图 4），并识别出那些标记结构图；在渐近情形下，它们是成为一致最可靠图的唯一候选，或者可用于证明此类图不存在。在下一小节中，我们将展示如何使用数据库识别一致最可靠图的唯一候选。

5.5 最可靠标记结构的结果

我们应用算法 1 来识别渐近意义下最可靠的图。如图 4 所示，接近零时最可靠的树平衡三次图仅在$r \in \{2,3,4,6,8,9,16\}$的情况下出现。 $r \le 4$ 这些情形已在先前的研究中得到解决 [2, 21, 20,19, 9]。因此，尚待进一步研究的是稀疏的渐近情形 $r \in \{6,8,9,16\}$ 。

对于 $r \le 9$，我们的数据库包含所有冗余边少于 9 条的三次图。这使我们能够穷尽地考察最可靠的结构图，并确定接近零时最优的三次图是否也使树数最大，以及其长链构型是否使引理 4.6 中的各项最小。我们最初的假设是，在渐近情形下，围长较小的图可能更可靠，因为较短的圈可能改善长链之间的分离向量，从而可能在 $p=0$ 附近带来更高的可靠性。

与这一假设一致，我们在 $r=8$ 的情形中找到了一个例子：围长较小的标记结构图，其表现优于接近零时最可靠的结构。具体而言，对于 $\lambda \in \{4,17\}$，图7展示了两个候选图：图 (1) 的围长为 5，分离系数为 $\mu_2=0$；图 (2) 的围长为 6，但分离系数为$\mu_2=1$。尽管第二个图具有更可靠的结构图，第一个图由于分离性更优，在接近零时渐近地更加可靠。

这一优势源于：图 (1) 中长链 (0,4) 和 (4, 12) 周围的 2-球仅包含 17 条链，而图 (2) 中 (4, 9) 和 (6,7) 周围的 2-球包含 19 条链。造成这一差异的关键拓扑特征，是图 (1) 中存在两个相互连接的五环，以黑色标出。这种融合的圈结构形成了更紧密的 2-邻域，并使链之间具有更好的分离性。我们推测，这类交织的 5-圈模体有助于设计出具有最优分离向量的 5-围长结构图。

整数线性规划。 为了系统地识别最优长链配置，我们将问题建模为整数线性规划（整数线性规划）。对于结构图 G 中的每条链 e_i，我们引入一个二元变量 $x_i \in \{0,1\}$ ，表示是否将 e_i 选为长链。借助这种表示法，算法 1 中需要最小化的所有结构量都可以用线性约束和目标函数表示。

例如，分离系数 μ_d 统计图距离为 d 的长链数对的数量，可通过为距离为 d 的每对边（e_i， e_j）引入辅助二元变量 x_{ij} 来建模。变量 x_{ij} 表示 e_i 和 e_j 是否均为长链，并通过以下线性约束来强制实现

$$x_{ij} \ge x_i + x_j - 1.$$

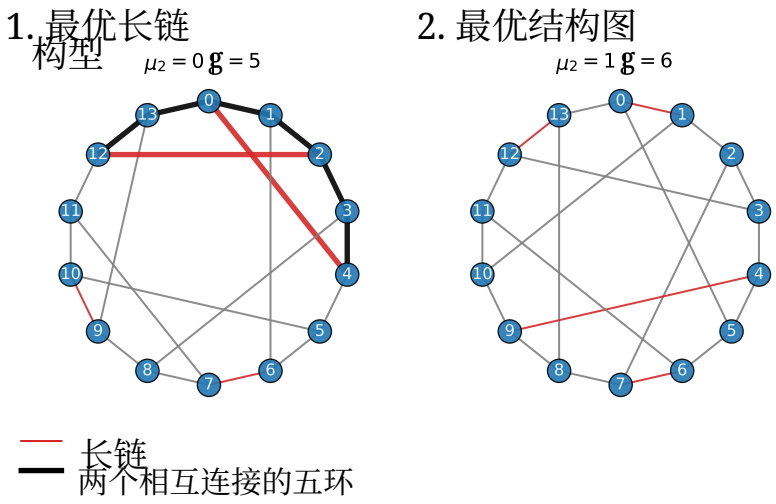


图7： $r = 8, \lambda = 4$的两种候选标记结构：尽管右侧的图围长更大，左侧的图在接近零时可靠性更高，这是因为长链之间的分离更好，且存在两个相互连接的五环。

因此，分离系数 μ_d 定义为

$$\mu_d = \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}_d} x_{ij},$$

其中， $\mathcal{P}_d$ 表示一组链的无序对，这些链在 G 中的距离恰好为 d。由此得到的整数线性规划形式如下

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu_d = \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}_d} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i x_i = \lambda, \\ & x_{ij} \geq x_i + x_j - 1 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P}_d, \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad x_{ij} \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{29}$$

同样的构造也适用于引理 4.6中的可靠性障碍参数，因此可以使用整数线性规划依次求解相应的优化问题，或按字典序求解。

完整的 最优长链配置列表见三正则数据库 [2]。

5.6 实证分析与数值结果

可靠性百分位图。 为了进一步研究当 p 取较大值时围长与可靠性之间的关系，我们引入可靠性百分位图，其中每条线对应一个三正则图。对于每个 p ，我们根据图的可靠性对其排序。排名缩放至范围 $[0,1]$, ，其中 0 表示在每个 p 取值下最可靠的图，1 表示最不可靠的图。根据底层结构图的围长为图着色。

[2]https://github.com/RotemBrand/三正则_数据库

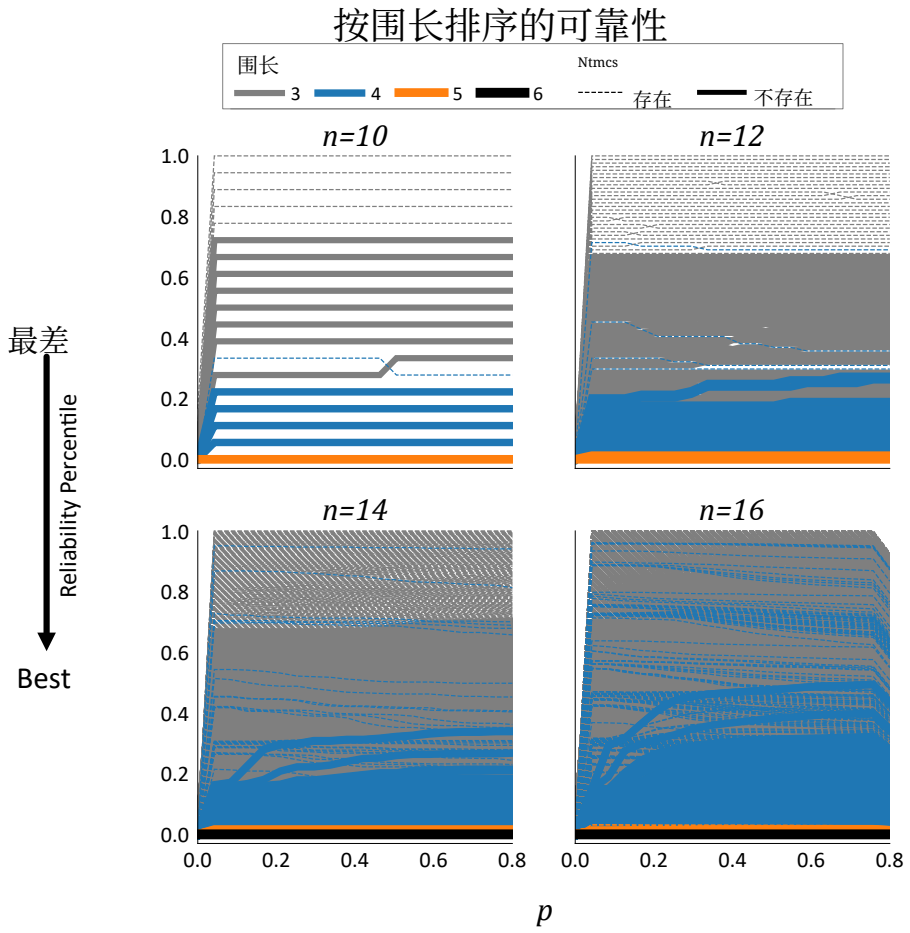


图 8：围长较大的三次图在各种边失效概率下始终表现出更高的可靠性。 y 轴表示可靠性函数 $U_G(p)$ 的归一化排名，数值越低表示可靠性越高。每个子图展示了所有固定规模的三次图，并按围长着色。

这些图的主要目的是评估围长较大的图是否往往具有更高的可靠性，这不仅适用于理论分析所指出的较小 p 值，也适用于 p 的整个取值范围。结果为这一假设提供了有力的实证证据：在广泛的 p 取值范围内，围长较大的图始终具有更高的可靠性排名。

为确保排名在数值上仍有意义，我们将 p 的上界限制为 0.8。这是因为所有图的不可靠度多项式最后 $n-2$ 个系数都相同，导致它们的可靠性值在 p 较大时趋于一致。因此，在这种情况下，区分不同的图在数值上会变得不稳定。

6 讨论

本文提供了一个组合框架，用于在独立边失效条件下识别具有固定顶点数和边数的最可靠图。我们的主要贡献是，在较小边失效概率 p的情形下，将高围长正则图刻画为最可靠图。该结果在若干冗余级别上为一致最可靠图确定了唯一候选，这与

以往通常仅关注单一冗余度的研究。

此外，我们的结果表明，每个在 $p = 0$附近最可靠的三次图，都是具有相同冗余度且顶点数足够多的最可靠图的结构核心。通过适当的链式构造，高可靠性三次图由此产生无穷族高度可靠的稀疏图。同时，我们的框架提供了一项系统性判据，用于排除一致最优性：当所得标记结构不是树平衡时，相应冗余度下不存在一致最可靠图。这些观察凸显了高可靠性三次图的核心作用：它们既能生成可靠的网络族，也能为系统排除一致最优性提供依据。

应用这一框架，我们构建了一个三次图数据库，其中包含几乎所有冗余度不超过 $r = 20$、在 $p = 0$ 附近最可靠的三次图，以及相应的长链配置。对于这一范围内的每个冗余度，该数据库都列出了在顶点数足够多时可能产生一致最可靠图的全部结构候选。

我们方法的主要局限在于依赖计算枚举，而随着冗余边数量增加，这种方法会变得愈发难以处理。此外，我们的一些结果具有渐近性质。例如，尽管我们确定了顶点数量足够大时一致最可靠图的结构性质，却没有给出这些性质成立所需的最小图规模的明确界限。未来工作可着重于进一步缩小枚举搜索空间，并改进本研究得到的渐近界。

仍有若干开放问题有待解决。其中最重要的是，我们数据库中确定的三次图是否确实是一致最可靠图，抑或在本文考察范围之外还存在反例。一个具体的问题是，最大围长的正则图是否也能使生成树数量达到最大值。另一个自然的研究方向是，估算最大围长三次图的数量如何随顶点数量变化，从而为基于枚举的方法的复杂度提供明确界限。此外，构造高围长三次图的显式族，并证明其中不存在非平凡极小割集，或可进一步收紧现有的最可靠图围长下界。最后，开发用于生成最优长链配置的解析方法仍是一项重要的开放问题，因为这将使我们能够在不依赖穷举计算的情况下，完成高可靠性稀疏网络的构造。

参考文献

[1] Avinash Agrawal与Richard E. Barlow。网络可靠性与支配理论综述。《运筹学》，32：478–492，1984。[2] Francis T Boesch、Xiaoming Li与C Suffel。论一致最优可靠网络的存在性。*Networks*，21(2)：181–194，1991。[3] Mathias Bourel、Eduardo Canale、Franco Robledo、Pablo Romero与Luis St´abile。利用GRASP/VND启发式构建高可靠性网络。载于*2019*年第*15*届可靠通信网络设计国际会议（*DRCN*），第91–98页。IEEE，2019。

[4] Mathias Bourel、Eduardo Canale、Franco Robledo、Pablo Romero与Luis St´abile。利用GRASP/VND启发式构建高可靠性网络。载于*2019*年第*15*届可靠通信网络设计国际会议（*DRCN*），第91–98页，2019。[5] Gunnar Brinkmann与Jan Goedgebeur。大围长三次图与Snark图的生成。《图论杂志》，86，2015。[6] Gunnar Brinkmann、Brendan D McKay与Carsten Saager。九围长的最小三次图。《组合学、概率与计算》，4(4)：317–329，1995。[7] Jason I. Brown与Charles J. Colbourn。可靠性多项式的根。《*SIAM*离散数学杂志》，5(4)：571–585，1992。[8] Jason I Brown与Danielle Cox。全端点可靠性最优图的不存在性。*Networks*，63(2)：146–153，2014。[9]Eduardo Canale、Franco Robledo、Pablo Romero与Juli´an Viera。构建可提升可靠性的网络变换。载于*2019*年第*15*届可靠通信网络设计国际会议（*DRCN*），第107–113页。IEEE，2019。[10] Kris Coolsaet、Sven D'hondt与Jan Goedgebeur。House of Graphs 2.0：有趣图数据库及其他。《离散应用数学》，325：97–107，2023。[11] Amir Kafshdar Goharshady与Fatemeh Mohammadi。一种在小树宽情形下计算网络可靠性的高效算法。《可靠性工程与系统安全》，193：106665，2020。[12] Frank Harary。图的最大连通度。《美国国家科学院院刊》，48(7)：1142，1962。[13] Lorents F. Landgren与Jeffrey E. Steif。一种识别最可靠图的新框架，以及对$k_{3,3}$-定理的修正，2024。[14] Brendan D McKay、Wendy Myrvold与Jacqueline Nadon。应用于寻找新笼图的快速回溯原理。载于*SODA*，第188–191页，1998。[15] Brendan D McKay与Nicholas C Wormald。高度数图按度序列的渐近计数。《欧洲组合学杂志》，11(6)：565–580，1990。[16] Markus Meringer。正则图的快速生成与笼图的构造。《图论杂志》，30(2)：137–146，1999。[17] Wendy Myrvold、Kim H Cheung、Lavon B Page与Jo Ellen Perry。一致最可靠网络并非总是存在。*Networks*，21(4)：417–419，1991。[18] Julius Petersen。regul¨aren图理论。《*Acta Mathematica*》，15，1891。[19] Guillermo Rela、Franco Robledo与Pablo Romero。Petersen图是一致最可靠的。载于*Modernism*与……，2017。

[20] Pablo Romero. 通过迭代增广构建一致最可靠网络。载于*2017* 第九届弹性网络设计与建模国际研讨会（*RNDM*），第 1–7 页。IEEE，2017。[21] Guifang Wang. Boesch猜想的一个证明。*Networks*，24(5):277–284，1994。[22] Guifang Wang 和 Lianzhu Zhang. 用于设计可靠网络的 max λ-min m$\lambda+1$ 图的结构。*Networks: An International Journal*，30(4):231–242，1997。