arXiv:2603.01265v1 [math.RT] 1 Mar 2026

$\mathbb{P}^1$上相干层的KLR-舒尔代数：倾斜与PBW基

Olivier Schiffmann与Fang Yang

Abstract. 我们开始研究与光滑射影曲线上相干层的模叠相关联的Khovanov-Lauda-Rouquier型代数。我们考虑 $\mathbb{P}^1$ 的情形，并对任意一对秩与次数(r,d)，将KLR与舒尔代数$A_{r,d}$,$\mathcal{R}_{r,d}$定义为由栈$Coh_{r,d}(\mathbb{P}^1)$构造的Steinberg 叠之类似物的Borel-Moore同调中的适当卷积代数。我们利用倾斜等价与Bridgeland稳定条件，在 $\mathbb{P}^1$ 上相干层范畴的KLR或舒尔代数与克罗内克箭图表示范畴的KLR或舒尔代数之间构造一种插值。我们还引入将斯坦伯格叠分为上同调纯片的分层，并据此构造相应代数的PBW基。

Contents

引言2 0.1. 动机 2 0.2. 主要结果 3 0.3. 论文结构 5 1. 预备知识 5 1.1. 叠与 Borel-Moore同调 5 1.2. $\mathbb{P}^1$ 上的相干层叠及其上同调环 6 1.3. 克罗内克箭图表示叠 9 1.4. 倾斜等价 10 1.5. 稳定性条件与 BGP 反射 11 2. 斯坦伯格叠 14 2.1. 斯坦伯格叠的定义 14 2.2. 拟紧逼近定理 15 2.3. 斯坦伯格叠的分拆 18 2.4. 分层上的同构 22 2.5. 胞腔上的偏序 23 3. $\mathbb{P}^1$ 25上的相干层舒尔代数与 KLR代数 25 3.1. 舒尔代数与 KLR代数的定义 25 3.2. 极限构造 26 3.3. 多项式表示 27 4. 舒尔代数的 PBW基 A^{ν}_{α} 274.1. 拆分与合并 27 4.2. 矩阵序列的构造 28

Key words and phrases. 舒尔代数、射影直线、克罗内克箭图、PBW 基。

4.3. 投影映射 30 4.4. PBW基 32 4.5. 定理 4.4 的证明 34 附录 A. 引理 2.2 的证明 38 附录B. Borel-Moore同调中的卷积 39 附录 C. 微分的计算 40 参考文献 41

Introduction

0.1. 动机。 约15年前，Khovanov-Lauda [18, 19] 与Rouquier [22] 引入了如今所称的Khovanov-Lauda-Rouquier（KLR）代数；此后，KLR代数通过给出Kac-Moody代数最高权可积表示之范畴化的统一构造，在表示论中发挥了核心作用（见 [13]），并应用于链环同调（[28]）与丛代数（见 [14]）。KLR代数与箭图 $Q = (I, E)$ 及维数向量 $d \in \mathbb{N}^I$ 相关联，并具有图式表现。根据Rouquier与Varagnolo-Vasserot的定理（[27]），它们可实现为Steinberg簇之箭图类似物的Borel-Moore homology中的卷积代数。更精确地说，设 Rep_d 表示参数化 Q 的 d 维表示之滤过 $M_1 \subset \cdots \subset M_s$ 的叠，其因子的维数为 d，并设 $\widetilde{\pi}_d : \widetilde{Rep}_d \to Rep_d$ 为遗忘态射。则

$$A_{Q,\mathbf{d}} \simeq \bigoplus_{\underline{d},\underline{d}'} \mathrm{H}_* \left(\widetilde{Rep}_{\underline{d}} \underset{Rep_d}{\times} \widetilde{Rep}_{\underline{d}'}, \mathbb{Q} \right) \simeq \mathrm{H}^* \left(R\mathrm{Hom}(\pi_{\underline{d}!}\mathbb{Q}, \pi_{\underline{d}'!}\mathbb{Q}) \right)$$

其中 $\underline{d}$、$\underline{d}'$ 遍历 d 的离散合成集合，即满足 $\sum_i a_i = d$ 的元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_s) \in (\mathbb{N}^I)^s$，且每个 a_i 的维数均为 1。注意，对于 d 的离散合成 $\underline{d}$，出现在 $\pi_{\underline{d}!}\mathbb{Q}$ 中的单反常层构成与 Q 相关联的量子包络代数 $\mathbf{U}_v^-(\mathfrak{g})$ 的 Lusztig典范基。令 $\underline{d}$、$\underline{d}'$ 遍历 d 的所有合成，我们便得到一个更大的代数 $\mathcal{R}_{Q,d}$，称为与 Q 和 d 相关联的舒尔代数或箭图Schur代数。对于无圈箭图，$A_{Q,d}$ 与 $\mathcal{R}_{Q,d}$ 莫里田等价，但一般而言，$\mathcal{R}_{Q,d}$ 更难研究（例如，对于有限型箭图之外的情形，目前尚无 $\mathcal{R}_{Q,d}$ 的表示）。

本文是系列论文的第一篇，旨在定义并研究一种类比于箭图-舒尔代数和 KLR代数的代数，其中将箭图表示范畴替换为光滑射影曲线上的相干层范畴。对于零维层，这正是 [20], 的主题，那里给出了它与某些对称代数之间的明确关系。本文中，我们考虑与 $\mathbb{P}^1$ 相关的 KLR代数和舒尔代数 $A_{\mathbb{P}^1,\alpha}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}^1,\alpha}$。将舒尔代数和 KLR代数的理论拓展到这一情形有几个理由。首先，得益于箭图与曲线之间众所周知的类比，尤其是 [3, 15], ，自然可以预期，这种 KLR代数的类比对象将与量子 *loop* 代数 $\mathbf{U}_v^+(\widehat{sl}_2)$ 的范畴化相关（参见 [24], 其中有这方面的一些结果）。其次，对 $\mathbb{P}^1$ 上秩为 r 的向量丛进行分类的叠 Bun_r 同构于 GL_r 的 *thick* 仿射 Grassmannian，而 $\mathbb{P}^1$ 的 KLR代数构造，则是这一背景下 Soergel双模构造的直接类比。事实上，Bun_r 上的任意简单反常层都是某个 $\pi_{d!}\mathbb{Q}$ 的直和项，因此 $A_{\mathbb{P}^1,\alpha}$ 原则上

决定了所有[1] Bun_r上反常层范畴的结构。最后，尽管目前这仍很具猜测性，但我们可以期待，$A_{\mathbb{P}^1,\alpha}$ 的图式表现会带来新的纽结与链环不变量。在本系列的下一篇论文中，我们将考虑任意曲线 X 的情形，但研究与秩一丛相关的 KLR代数，并考察其与 Carlsson 和 Mellit 的$A_{q,t}$-代数 [5]之间的关系。

0.2. 主要结果。 现在我们将更详细地介绍主要构造与结果。

记 Coh_α 为 $\mathbb{P}^1$ 上类为 $\alpha=(r,d)\in(\mathbb{Z}^2)^+$ 的相干层所构成的叠。它是一个光滑的$\widetilde{\ }$叠，局部有限型。对于任意总类为 α 的序列 $\underline{\alpha}$，令 $Coh_{\underline{\alpha}}$ 为参数化相干层滤过的叠，其中相干层的类为 α，第 i 个因子的类为 α_i。Steinberg 叠定义为

$$Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}:=\widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}\underset{Coh_\alpha}{\times}\widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}\ .$$

它参数化三元组 $(F,F_\cdot,F'_\cdot)$，其中 $F_\cdot$ 和 $F'_\cdot$ 分别是类型为 $\underline{\alpha}$ 和 $\underline{\alpha}'$ 的相干层 $F_\cdot$ 的滤过。按照 [6], ，我们在直和上赋予结合的卷积积

$$A_\alpha:=\bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'\in\mathrm{Seq}(\alpha)}A_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}:=\bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'\in\mathrm{Seq}(\alpha)}\mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'},\mathbb{Q}),\qquad\mathcal{R}_\alpha:=\bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'\vDash\alpha}\mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'},\mathbb{Q})$$

并分别称 A_α 和 $\mathcal{R}_\alpha$ 为 $\mathbb{P}^1$ 的舒尔代数和 KLR代数。这里，$\mathrm{Seq}(\alpha)$ 是 α 的合成集合，其分量属于 $(\mathbb{Z}^2)^+$；记号 $\underline{\alpha}\vDash\alpha$ 表示 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in\mathrm{Seq}(\alpha)$，且对所有 i，$\mathrm{rank}(\alpha_i)\le 1$。与箭图的情形形成鲜明对比的是，只要 α 的秩为正，叠 $Z_{\alpha,\alpha'}$ 就是无限型的，并且一般包含无限多个维数相同的不可约分支；因此，A_α 和 $\mathcal{R}_\alpha$ 自然是 pro-向量空间（即使固定上同调度也是如此）。

相干层在 $\mathbb{P}^1$ 上的导出范畴与克罗内克箭图 Q的表示的导出范畴之间存在一个众所周知的等价。我们的第一个主要结果涉及相应舒尔代数之间的关系。基本想法已见于 [10], ，即利用仿射辫群在 $D^b(\mathrm{Rep}Q)$上的作用，用心$\mathrm{Rep}Q$的平移来逼近心$\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$。为此，我们考虑 $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$上的自然 Bridgeland稳定性条件，从而可将任意长度为1的区间 $I\subset\mathbb{R}$ 关联到一个阿贝尔心Coh^I，使得

$$\mathrm{Coh}^{]-\frac12,\frac12]}=\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1,\qquad\mathrm{Coh}^{]0,1]}=\mathrm{Rep}\mathbb{Q},$$

于是可以考虑对象的相应模叠 Coh^I_α 以及滤过的栈$\widetilde{Coh}^I_\alpha$。对于沿 $J=I\cap I'$ 重叠的长度为1的区间 $I,\ I'$，存在栈的典范开浸入

$$Coh^I_\alpha\hookleftarrow Coh^J_\alpha\hookrightarrow Coh^{I'}_\alpha\ .$$

$\widetilde{\ }^I\qquad\widetilde{\ }^{I'}$然而，对于 Coh_α 和 Coh_α，情况并非如此，因为给定相干层 $F\in Coh^J$ 的商概形的结构通常取决于定义该商概形时所依据的阿贝尔心的选择。尽管如此，我们证明，对于任意 α，α，α' 以及任意拟紧开子叠 $\mathcal{U}\subset Coh_\alpha$，都存在一个典范的叠同一

$$Z^I_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\underset{Coh_\alpha}{\times}\mathcal{U}\simeq Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\underset{Coh_\alpha}{\times}\mathcal{U}$$

[1]当然，当 $\mathbb{P}^1$ 被替换为亏格更高的曲线 X 时，这一点便不再成立；在这种情况下，$A_{X,\alpha}$ 仅捕捉到 Bun_r上反常层范畴中一个很小——但有趣！——的子范畴。

对于 $I =]\sigma - 1,\ \sigma]$ 以及 $0 < \sigma - \frac{1}{2} \ll 1$ （参见定理 2.1）。因此，我们能够将舒尔代数 A_α 实现为舒尔代数商的一个适当极限 A_α^I，这些商与区间 $I =] - \frac{1}{2} + \epsilon$ 相关联 $\frac{1}{2} + \epsilon]$，正如 $\epsilon \to 0^+$。我们得到以下比较结果（参见第 3.2 节）。令

$$A_\alpha^{\nu,\sigma} = \bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}' \in \mathrm{Seq}(\alpha)} \mathrm{H}_* \left(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{]\nu-1,\nu]} \underset{Coh_\alpha}{\times} Coh^{]\sigma-1,\frac{1}{2}]}, \mathbb{Q} \right).$$

定理 A (推论 3.5)。对于任意 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$，存在一个结合代数的典范同构

$$A_\alpha = \lim_{\sigma \to \frac{1}{2}^+} \operatorname*{colim}_{\nu \to \frac{1}{2}^+} A_\alpha^{\nu,\sigma} .$$

特别地，选择一个与 Rep$Q$ 等价的阿贝尔心序列 $\mathsf{Coh}^{]\nu_n - 1,\ \nu_n]}$，我们便得到了 A_α 的一种显式实现，它由克罗内克箭图的 KLR-舒尔代数的商构成。我们希望在未来的工作中利用这一点，得到 A_α的图式表现。我们的构造还自然地产生了 A_α 在 P_α 上的一个自然的“多项式”表示：$= \bigoplus_\alpha (\bigotimes_i \mathrm{H}_*(Coh_{\alpha_i},\ \mathbb{Q}))$. 这种表示已知在箭图的情形下是忠实的；证明无法直接移植到我们的设定中，但我们猜想此处也成立：

猜想 (猜想 3.6)。对于任意 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$，多项式表示 P_α 是忠实的。

我们的第二个主要结果为 A_α 和 $\mathcal{R}_\alpha$ 提供了PBW 型基以及一族生成元。为此，我们考虑一个局部有限分层

$$Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = \bigsqcup_w Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w), \qquad w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')$$

分解为光滑且上同调纯的局部闭分层。这里 $W(\alpha,\alpha')$是一个（通常为无限的）列联矩阵集合，其元素取值于$(\mathbb{Z}^2)^+$，其行和（相应地，列和）分别由 α（相应地，α'）的分量给出。此外，每个 $Z(w)$ 都是迭代向量丛叠$Z_{\alpha,\alpha'}(w) \to \prod_{ij} Coh_{w_{ij}}$，因此根据 Heinloth 将 Atiyah-Bott 定理推广到 Coh_α的结果，$Z(w)$的上同调由其携带的自然典范类自由生成。

一个主要困难——源于 Coh_α的非拟紧性——在于分层偏序集（由闭包关系诱导）的性质：它通常同时包含同构于 $(\mathbb{N}, \geq)$（例如仿射格拉斯曼流形）、同构于 $(-\mathbb{N}, \geq)$（例如厚仿射 Grassmann簇）以及同构于 $(\mathbb{Z}, \geq)$（例如 $\mathbb{P}^1$的双向无限链）的区间。这使得利用该分层来研究 $Z_{\alpha,\alpha'}$的上同调变得困难。我们通过构造拟紧开集的穷竭来绕过这一困难，这些开集与每个$Z_{\alpha,\alpha'}(w)$ 的交均为上同调纯，见命题2.10。

为了由此定义一个基，我们现在可以遵循经典方法（例如参见 [21], [27]）：引入一族 A_α 称为合并与分裂的“基本”元素，它们被定义为闭层$Z_{\alpha,\ \alpha'}(w)$的基本类，对应于关联簇（即对应于滤子的对 $(F.,\ G.)$，其中一个滤子细化另一个滤子）。对于每一对 $(w,\ c)$，其中包含一个分层 $w \in W(\alpha,\ \alpha')$以及一个上同调类 $c \in \mathrm{H}^*(Z_{\alpha,\ \alpha'}(w)\ \mathbb{Q})$，我们关联一个特定的有序积 $\mathfrak{b}_{c,\ w} \in \mathrm{H}_*(Z_{\alpha,\ \alpha'},\ \mathbb{Q})$，该有序积由分裂、合并以及乘以典范类的算子构成；其最佳表示方式是图示，参见第 4 节，尤其是图 4。元素 $\mathfrak{b}_{c,\ w}$ 被称为 PBW基元素，理由如下，这也是我们的第二个主要结果。对于每个$w = (w_{ij})_{ij} \in W(\alpha,\ \alpha')$，我们固定 $\mathrm{H}^*(Z_{\alpha,\ \alpha'}(w)\ \mathbb{Q}) = \bigotimes_{ij} \mathrm{H}^*(Coh_{w_{ij}},\ \mathbb{Q})$ 的一个基 $\mathbb{B}_w$。

定理 B （定理 4.4）。 集合 $\{(\mathbf{b}_{w,\ c} |\ \alpha、\ \alpha' \in$ 序列$(\alpha)\ \ w \in W\ (\alpha、\ \alpha')\ \ c \in \mathbb{B}_w\}$ 是 A_α 的拓扑基。限制到离散的 $(\alpha、\ \alpha')$ 则得到 $\mathcal{R}_\alpha$ 的拓扑基。

上文中，拓扑基指的是一个线性无关集，其张成空间是稠密子空间。

推论。 舒尔代数 A_α 作为结合代数，由初等拆分、合并以及典范类的乘法生成。

0.3. **论文结构**。 第 1节回顾相干层的叠 $\mathbb{P}^1$ 以及克罗内克箭图 Q的表示，并介绍由倾斜等价诱导的二者上同调环之间的关系。第 2 节中，我们引入相干层的斯坦伯格叠$Z_{\alpha,\alpha'}$ （定义在 $\mathbb{P}^1$上），并研究它的若干种分划（见第2节）；特别地，我们证明了这些分层及其交的一些关键纯性结果。此外，我们将$Z_{\alpha,\alpha'}$ 与 Q的表示的斯坦伯格簇进行比较。第3节中，我们定义舒尔代数和 KLR 代数A_α 以及 $\mathcal{R}_\alpha$ ，并证明定理 A ，将 A_α 识别为克罗内克箭图舒尔代数的商对象之极限。最后一节4.4中，我们构造 A_α的 PBW 基元素族，并证明定理 B。

1. Preliminaries

本节回顾叠的上同调和 Borel-Moore同调的一些基本性质，并介绍本文的主要研究对象： $\mathbb{P}^1$ 上的相干层叠，以及克罗内克箭图 Q的表示叠。我们还将回顾 Coh$\mathbb{P}^1$ 与 mod$\mathbb{C}Q$之间的导出等价，以及它们对相应叠的影响。

1.1. **叠与 Borel-Moore 同调**。 全文中，我们都在 $\mathbb{C}$上工作。这里的叠 指阿廷叠（取 fpqc 拓扑），且局部有限型。我们所考虑的叠实际上可能由整体商叠（有限型）覆盖。对于这样的叠$\mathcal{X}$，记 $D(\mathcal{X})$为 $\mathcal{X}$上具有可构造上同调的 $\mathbb{Q}$-向量空间复形所成的三角范畴，并将 $D^b(\mathcal{X})$定义为如下子范畴：其中的复形在每个拟紧开集上的限制都是有界的。对于上述 $\mathcal{X}$，范畴 $D^b(\mathcal{X})$配备通常的六函子形式体系（见 [17, 附录 A]）。特别地，我们用 $\omega_X = p^!(\mathbb{Q}) \in D^b(\mathcal{X})$表示对偶化复形，并将 $\mathrm{H}_i(X,\ \mathbb{Q}) := \mathrm{H}^{-i}(p_*\omega_X)$ 记为 $\mathcal{X}$ 的第 i 个 ***Borel-Moore*** 同调群 。这里 $p:\ \mathcal{X} \to pt$ 是到点的投影。或者，也可以将这些群计算为极限

$$\mathrm{H}_i(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) = \lim_{\mathcal{U}} \mathrm{H}_i(\mathcal{U}, \mathbb{Q}) \tag{1.1}$$

其中，极限是对所有拟紧开子栈 $\mathcal{U}$ 取的，且关于开浸入，参见 [16, Equation(3.3.5)]。我们称叠 $\mathcal{X}$ 可由拟紧子叠良好近似，若对于任意 $d \in \mathbb{Z}$，都存在一个拟紧开子叠 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$，使得 $\mathrm{codim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\backslash\mathcal{U}) > d$。对于良好近似的叠，极限 (1.1) 会稳定下来，即对每个 i，都存在 $\mathcal{U}$，使得对于任意 $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$，限制映射 $\mathrm{H}_i(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_i(\mathcal{U}', \mathbb{Q})$ 是一个同构。

若 $\mathcal{X}$不可约，则存在一个典范元 $[\mathcal{X}] \in \mathrm{H}_{2\dim(\mathcal{X})}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$。同样，对于叠 $\mathcal{X}$ 的每个不可约闭子栈 $i_{\mathcal{Z}}:\ \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ ，都关联着一个基本类$[\mathcal{Z}] \in \mathrm{H}^{2\dim(\mathcal{Z})}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$。

我们还将考虑上同调群 $\mathrm{H}^i(\mathcal{X},\mathbb{Q})$，其定义为 $\mathrm{H}^i(\mathcal{X},\mathbb{Q}) = H^i(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}})$，并且同样满足

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{X},\mathbb{Q}) = \lim_{\mathcal{U}} \mathrm{H}^i(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \tag{1.2}$$

其中，极限取遍所有拟紧开子叠 $\mathcal{U}$。通常，存在一个杯积

$$\cup : \mathrm{H}^i(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}^j(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^{i+j}(\mathcal{X},\mathbb{Q})$$

以及一个帽积

$$\cap : \mathrm{H}^i(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}_j(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_{j-i}(\mathcal{X},\mathbb{Q}).$$

最后，考虑以下概念会很方便：我们称如下的叠 $\mathcal{X}$（其局部有限型）是上同调纯的，如果存在一个开穷竭 $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得$\mathcal{X}$ 可由拟紧开子叠构成，并且对任意$j(\mathcal{U}_i,\ \mathbb{Q})$均为权 j 纯的，其中 i 且 j 的含义见 [8, 9, 1]。我们将经常不加引用地使用以下结果，其证明留给读者。

引理 1.1。设 $\mathcal{X}$ 是一个局部有限型的叠，$\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ 是一个闭子叠，$\mathcal{U} = \mathcal{X}\backslash\mathcal{Z}$ 是其开补。假设 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{U}$ 均为上同调纯的。则 $\mathcal{X}$ 是上同调纯的，并且对任意 i，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow H_i(\mathcal{Z},\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(\mathcal{X},\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(\mathcal{U},\mathbb{Q}) \longrightarrow 0\ .$$

1.2. $\mathbb{P}^1$ 上相干层的叠及其上同调环。

1.2.1. 射影直线。 令 $\mathbb{P}^1$ 为 $\mathbb{C}$上的射影直线。其上同调环可识别为 $\mathbb{Q}[\omega]/\omega^2$，其中 $\omega \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{Q})$ 是点类。令 $\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上的相干层范畴。格罗滕迪克群 $K_0(\mathbb{P}^1)$ 通过映射可识别为 $\mathbb{Z}^2$

$$[\mathcal{F}] \mapsto \dim(\mathcal{F}) := (rank(\mathcal{F}), deg(\mathcal{F})).$$

相干层 $\mathcal{F}$ 的斜率通常定义为

$$\mu(\mathcal{F}) = \mu([\mathcal{F}]) := deg(\mathcal{F})/rank(\mathcal{F}) \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}.$$

我们也用

$$K_0^+(\mathbb{P}^1) = \{(r,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid r \geq 0,\ d > 0 \text{ if } r = 0\} =: (\mathbb{Z}^2)^+$$

表示相干层的类幺半群。

对于任意 $\alpha \in K_0(\mathbb{P}^1)^+$，令 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 表示 $\mathbb{P}^1$ 上类为 α的相干层所构成的叠。它是一个光滑不可约叠，局部有限型，维数为

$$\dim(Coh_{(r,d)}(\mathbb{P}^1)) = -r^2.$$

我们首先考虑挠层的情形。我们有 $Coh_{(0,1)}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^1 \times B\mathbb{G}_m$；对于任意 $d > 0$，叠 $Coh_{(0,d)}(\mathbb{P}^1)$ 都是有限型的，并配有支撑映射 $supp\colon Coh_{(0,d)}(\mathbb{P}^1) \to S^d\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^d$。它属于一个 Springer 型图示

$$Coh_{(0,1)}(\mathbb{P}^1)^d \xleftarrow{\ q\ } \widetilde{Coh}_{(0,1)^d} \xrightarrow{\ p\ } Coh_{(0,d)}(\mathbb{P}^1) \tag{1.3}$$

其中 $Coh_{(0,1)^d}$ 是参数化挠层完全旗 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_d$ 的叠，满足$length(\mathcal{F}_i) = i$，其中 $i = 1$、.....、d，且 $p(\mathcal{F}_\bullet) = \mathcal{F}_d$，$q(\mathcal{F}_\bullet) = (\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}, \cdots, \mathcal{F}_1)$。态射 q是一个代数栈向量丛，而 p 是适当的、小的，并且在一般情形下是一个伽罗瓦 $\mathfrak{S}_d$-覆盖。因此

$$\mathrm{H}^*(\widetilde{Coh}_{(0,1)^d}, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^*(Coh_{(0,1)}(\mathbb{P}^1)^d, \mathbb{Q}) = (\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})[t])^{\otimes d}$$

这给出了一个同一性

$$\mathrm{H}^*(Coh_{(0,d)}(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^*(\widetilde{Coh}_{(0,1)^d}, \mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_d} \simeq Sym^d(\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})[t]). \tag{1.4}$$

特别地，这表明 $Coh_{(0,d)}(\mathbb{P}^1)$ 是上同调纯的。

现在我们转向高秩 α的情形。参数化半稳定层的开子叠记为 $Coh^{ss}_{\alpha}(\mathbb{Q}^1)$。存在一个局部有限分层

$$Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) = \bigsqcup_{\underline{\alpha}} HN_{\underline{\alpha}}$$

分解为由权为 α 的 HN 型集合所标记的 Harder-Narasimhan 分层:

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = \alpha, \qquad \mu(\alpha_1) < \mu(\alpha_2) < \cdots .$$

每个 Harder-Narasimhan 分层 HN_α 都是 $\prod_i Coh^{ss}_{\alpha_i}(\mathbb{P}^1)$ 上的代数栈向量丛。当 $\alpha_i = (r, dr)$ 时，$Coh^{ss}_{\alpha_i}(\mathbb{P}^1)$ 至多相差同构只包含一个对象 $\mathcal{O}(d)^{\oplus r}$，因此它是 $GL(r)$ 的分类栈；特别地，它是上同调纯且拟紧的。当 $\alpha_i = (0, d)$ 时，$Coh^{ss}_{\alpha_i}(\mathbb{P}^1) = Coh_{\alpha_i}\mathbb{P}^1$。因此 HN_α 是上同调纯且拟紧的。对于任意 $n \geq 0$，我们定义

$$Coh^{I_n}_\alpha := \{\mathcal{F} \in Coh_\alpha \mathbb{P}^1 \mid \mathcal{F}(n-1) \text{ is generated by global sections}\}.$$

引理 1.2. 对于任意 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$，以下结论成立

(1) 对于任意 n，$Coh^{I_n}_\alpha$是 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 中的开子叠，且是有限个 *Harder-Narasimhan* 分层的并。特别地，$Coh^{I_n}_\alpha$是上同调纯的。(2) 对于任意 n，叠 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 可由开子叠族 $Coh^{I_n}_\alpha$（其中 $n \geq 0$）良好近似。

特别地，$Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 是上同调纯的。

证明。这是众所周知的，但为了方便读者，我们仍给出证明。张量积 $\mathcal{O}(n)$ 的运算诱导出叠之间的同构 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) \simeq Coh_{\alpha(n)}(\mathbb{P}^1)$，该同构将 $Coh^{I_n}_\alpha$ 映到 $\mathrm{Coh}^{I_1}_\alpha(n)$。因此，在证明 (1) 时，我们不妨假设 $n = 1$。注意到，$\mathbb{P}^1$ 上的相干层 $\mathcal{F}$ 由整体截面生成，当且仅当 $\mathcal{F}$ 的向量丛商同构于直和 $\bigoplus_i \mathcal{O}(n_i)$，其中对所有 i 都有 $n_i \geq 0$。这等价于条件 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}(-1)) = \{0\}$；根据半连续性定理 [11, 定理 12.8]，这是一个开条件。从上述描述容易看出，$Coh^{I_0}_\alpha$ 是有限个 Harder-Narasimhan 分层的并；事实上，分层 HN_α 包含于 $Coh^{I_0}_\alpha$ 当且仅当最小斜率满足 $\mu(\alpha_1) \geq 0$，而该条件在 Harder-Narasimhan 多面体中界定了一个有界区域。因此，$Coh^{I_n}_\alpha$ 是上同调纯的。

下面转向（2）。我们需要证明，对于任意 $d \in \mathbb{Z}$，存在 $n \geq 1$ 使得

$$\mathrm{codim}_{Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)}(Coh_\alpha \mathbb{P}^1 \setminus Coh^{I_n}_\alpha) > d.$$

由于将 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 划分为 Harder-Narasimhan 分层的分划是局部有限的，只需证明存在 n，使得对于任意满足 $\mu(\alpha_1) \leq -n$ 的 α，我们有

$$\mathrm{codim}_{Coh_\alpha \mathbb{P}^1}(HN_{\underline{\alpha}}) > d.$$

这可以通过显式计算完成，使用以下公式

$$\dim\ HN_{\underline{\alpha}} = -\sum_{i \leq j} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle,$$

$$\mathrm{codim}_{Coh_\alpha \mathbb{P}^1}(HN_{\underline{\alpha}}) = -\sum_{i > j} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

其中 $\langle (r,d),(s,l) \rangle = rs + rl - sd$ 是 $K_0(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 上的欧拉形式。细节留给读者。□

1.2.2. 上同调环与典范类。$\mathrm{Coh}_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 的上同调环，得益于 Atiyah-Bott 和 Heinloth 的工作，已得到充分理解。更确切地说，设 $\mathcal{E}_\alpha \in \mathrm{Coh}(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) \times \mathbb{P}^1)$ 为典范相干层。对于 $\mu \in \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$ 和 $i \geq 1$，我们定义

$$ch_i(\mu) = \int_{\mathbb{P}^1} ch_i(\mathcal{E}_\alpha) \cup \mu \in \mathrm{H}^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}).$$

为方便记号，我们在记号中省略了对 α 的依赖。注意

$$deg(ch_i(\mu)) = 2i + deg(\mu) - 2.$$

特别地，类 $ch_0(\omega)$ 和 $ch_1(1)$ 分别映为 $rank(\alpha)$ 和 $deg(\alpha)$，它们的次数均为 0（即标量）。引入一个典范类的泛环将很方便。令 $\mathbb{H}$ 为由元素 $ch_i(\mu)$ 生成的多项式代数，其中 $i \geq 1, \mu \in \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$ 或 $i = 0, \mu = \omega$，并对关系 $ch_i(\mu + \lambda) = ch_i(\mu) + ch_i(\lambda)$ 取商。我们通过令 $deg(ch_i(\mu)) = 2i - 2 + deg(\mu)$ 来定义 $\mathbb{H}$ 上的分次。对于任意 $\alpha \in K_0^+(\mathbb{P}^1)$，都有一个求值映射

$$\mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{H} \to \mathrm{H}^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}), \qquad \underline{ch}_i(\mu) \mapsto ch_i(\mu)$$

这是一个分次代数的态射。令 $\mathbb{H}^{red} \subset \mathbb{H}$ 为由 $ch_i(\mu)$ 生成的子代数，其中$i \geq 2$ 或 $i = 1, \mu = \omega$（即由正次数的生成元生成）。我们有

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{H}^{red} \otimes \mathbb{Q}[\underline{ch}_0(\omega), \underline{ch}_1(1)].$$

环 $\mathbb{H}$ 配备了一个余交换余乘法，定义如下：

$$\Delta(\underline{ch}_i(\mu)) = \underline{ch}_i(\mu) \otimes 1 + 1 \otimes \underline{ch}_i(\mu)$$

对任意 i 和 μ，皆如此。若将对跖映射定义为如下形式，则可将其提升为一个 Hopf代数：

$$S(\underline{ch}_i(\mu)) = -\underline{ch}_i(\mu).$$

现在我们给出 $\mathbb{H}^{red}$ 的一种“对称函数”实现。记一个向量空间为

$$\mathbb{V} = \mathrm{H}^*(Coh_{(0,1)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\omega, u]/\omega^2$$

其中 $u = c_1(\mathcal{O}(1)) \in \mathrm{H}^*(B\mathbb{G}_m)$（因此 $deg(u) = 2$）。存在一个增广映射

$$\epsilon : \mathbb{V} \to \mathrm{H}^0(Coh_{(0,1)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$$

这使我们能够构造这些环

$$\Lambda_n := (\mathbb{V}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}, \qquad \Lambda_\infty := \varprojlim_n \Lambda_n$$

其中过渡映射 $\Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$ 由 $\epsilon \otimes Id^{n-1}$ 诱导： $\mathbb{V}^{\otimes n+1} \to \mathbb{V}^{\otimes n}$。环 Λ_∞ 具有双代数结构，其余乘法由包含 $\Lambda_{n+m} \to \Lambda_n \otimes \Lambda_m$诱导。我们可以将 Λ_n的元素视为单项式 $\gamma_1 u^{d_1} \otimes \gamma_2 u^{d_2} \otimes \cdots \otimes \gamma_n u^{d_n}$ 的对称和，其中 $\gamma_i \in \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q})$且 $d_i \in \mathbb{N}$。同样，我们可以将 Λ_∞ 的元素视为单项式 $\gamma_1 u^{d_1} \otimes \gamma_2 u^{d_2} \otimes \cdots$的（无穷）对称和，其中张量积除有限多个分量外均等于1。我们常常将这样的单项式写成$(\gamma_1 u^{d_1})_1(\gamma_2 u^{d_2})_2 \cdots$。

以下是标准结论：

命题 1.3. 赋值 $ch_i(\mu) \mapsto \sum_l (\mu u^i)_l$ 可扩张为一个双代数同构 $\mathbb{H}^{red} \to \Lambda_\infty$。

现在我们可以陈述 Atiyah-Bott 和 Heinloth 对 [12] 中 $\mathrm{H}^*(Coh_\alpha, \mathbb{Q})$ 的描述：

定理 1.4 (Atiyah-Bott, Heinloth)。有以下结论：

- 对任意 $n > 0$，映射 $ev_{0,n}: \mathbb{H}^{red} \to H^*(Coh_{0,n}(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q})$ 可分解为一个同构 $\Lambda_n \xrightarrow{\sim} H^*(Coh_{0,n}(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q})$,
- 对任意 $r > 0$ 和任意 $d \in \mathbb{Z}$，映射 $ev_{r,d}: \mathbb{H}^{red} \to H^*(Coh_{(r,d)}(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q})$ 是一个同构，
- 记 $\bigoplus$： $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) \times Coh_\beta(\mathbb{P}^1) \to Coh_{\alpha+\beta}(\mathbb{P}^1)$，$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 为直和映射，则有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^{red} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{H}^{red} \otimes \mathbb{H}^{red} \\ \downarrow{\scriptstyle ev_{\alpha+\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle ev_\alpha \otimes ev_\beta} \\ H^*(Coh_{\alpha+\beta}(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\oplus^*} & H^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}) \times H^*(Coh_\beta(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}) \end{array} .$$

证明。陈述 i) 和 ii) 可见 [12]。最后一个陈述由等式$\bigoplus^*(\mathcal{E}_{\alpha+\beta}) = (\mathcal{E}_\alpha)_{13} \oplus (\mathcal{E}_\beta)_{23} \in \mathrm{Coh}(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) \times Coh_\beta(\mathbb{P}^1) \times \mathbb{P}^1)$ 得出。□

由于 $Coh_{(r,d)}(\mathbb{P}^1)$ 是光滑的，映射

$$\mathrm{H}^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}), \qquad c \mapsto c \cap [Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)]$$

是一个同构。

1.3. **克罗内克箭图表示的叠**。令 $Q = (Q_0, Q_1)$ 表示克罗内克箭图，即

$$Q: 1 \leftleftarrows 2$$

我们用 $\mathrm{mod}\mathbb{C}Q$ 表示有限维 $\mathbb{C}Q$-模的范畴。其格罗滕迪克群 $K_0(Q)$ 通过维数向量映射 $[M] \mapsto \mathrm{dim}M := (\mathrm{dim}(M_1), \mathrm{dim}(M_2))$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 等同。表示类幺半群为 $K_0^+(Q) = \mathbb{N}^2$。回想不可分解对象分裂为三个族：预内射、正则与预射影 模，分别记作 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{I}$。下文中，用 S_i、 P_i、 I_i 表示顶点 i 处的单模、不可分解射影模与不可分解内射模。

对 $d \in \mathbb{N}^2$，我们用 Rep_dQ 表示 Q 的 d 维表示的叠。它是一个有限型的光滑叠，同构于商栈 E_d/G_d，其中

$$E_{(d_1,d_2)} = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_2}, \mathbb{C}^{d_1}) \otimes \mathbb{C}^2, \qquad G_d = GL_{d_1} \times GL_{d_2}.$$

令 V_1, V_2 分别为 Rep_dQ 上秩为 d_1, d_2 的典范向量丛。记 $ch_i(V_j) \in \mathrm{H}^{2i}(Rep_dQ)$ 为 V_j 的陈特征的第 i 个分量。我们有

$$\mathrm{H}^*(Rep_dQ, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[ch_i(V_j) \,|\, i = 1, 2, j = 1, \ldots, d_i].$$

注意到我们有 $ch_0(V_i) = d_i$。

1.4. **倾斜等价**。

1.4.1. 倾斜函子回顾。 下面的定理概括了 $\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 与 $\mathrm{mod}\mathbb{C}Q$ 之间倾斜等价的一些众所周知的性质：

定理 1.5。 以下结论成立：

(1) 导出函子 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)\ -)$ 给出了三角范畴 $\Phi : D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1) \simeq D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)$之间的倾斜等价，并分别将 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}(1)$ 映到不可分解射影模 P_1 和 P_2。(2) 所诱导的格罗滕迪克群同构等于

$$\Phi : K_0(D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)) \simeq \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \simeq K_0(D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)),$$
$$(r, d) \mapsto (r + d, d)\ .$$

(3) 设 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 和 $M \in$ 模$\mathbb{C}Q$。则 $\Phi(\mathcal{F}) \in$ 模$\mathbb{C}Q$当且仅当 $\mathcal{F}$ 的典范向量丛商属于 $\{\mathcal{O}(n)$ 的加性包络； $n \geq 0\}$。同样，$\Phi^{-1}(M) \in \mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 当且仅当 $M \in \mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$。

出于下一节将会明了的原因，我们将 $Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]}$ 记作参数化相干层的叠 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}P^1$，其类为 α 且满足定理 1.5 (iii) 中的条件，并令 $j\colon Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]} \to Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)$ 表示嵌入。同样存在一个嵌入

$$\iota : Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]} \to Rep_{\Phi(\alpha)}Q.$$

我们将在更一般的背景下证明， j， ι 是开浸入。

1.4.2. 倾斜函子与上同调环。 接下来我们讨论典范类。回忆一下，对每个 $M = (\oplus_i M_i, \oplus_{h\in Q} M_h) \in$ 模$\mathbb{C}Q$，都有一个 Ringel典范射影分解

$$P_M^\bullet = (M_2 \otimes_{\mathbb{C}} P_1)^{\oplus 2} \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} (M_1 \otimes_{\mathbb{C}} P_1) \oplus (M_2 \otimes_{\mathbb{C}} P_2),$$

其中 $f_1 = \oplus_{h\in Q_1} M_h \otimes id$ 和 $f_2 = \oplus_{h\in Q_1} id \otimes h$。因此，我们可以考虑定义在 $Rep_d(Q) \times \mathbb{P}^1$ 上的向量丛复形，定义如下

$$V_d^\bullet : (V_2 \boxtimes \mathcal{O})^{\oplus 2} \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} (V_1 \boxtimes \mathcal{O}) \oplus (V_2 \boxtimes \mathcal{O}(1)).$$

根据定理 1.5，对于任意 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$，我们有典范复形之间的典范拟同构

$$(\iota^* \times Id_{\mathbb{P}^1})(V_{\Phi(\alpha)}^\bullet) \simeq (j^* \times Id_{\mathbb{P}^1})(\mathcal{E}_\alpha)$$

在 $Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]} \times \mathbb{P}^1$ 上。回想一下， $\mathcal{E}_\alpha$ 是 $Coh_\alpha(\mathbb{P}^1) \times \mathbb{P}^1$ 上的泛万有典范丛。

命题 1.6. 固定 $\alpha=(r,\ d)\in(\mathbb{Z}^2)^+$。

(1) 假设 $r>0$。则环同态

$$\begin{aligned}\psi_\alpha: H^*(Coh_\alpha\mathbb{P}^1)&\longrightarrow H^*(Rep_{\Phi(\alpha)}Q)\\ ch_i(1)&\mapsto ch_{i-1}(V_2),\quad i\geq 1;\\ ch_i(\omega)&\mapsto ch_i(V_1)-ch_i(V_2),\quad i\geq 0.\end{aligned}$$

使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} H^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & H^*(Rep_{\Phi(\alpha)}Q) \\ \downarrow{\scriptstyle j^*} & \swarrow{\scriptstyle \iota^*} & \\ H^*(Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]}) & & \end{array}.$$

此外，映射 j^* 和 ι^* 都是满射。

(2) 假设 $r=0$。则 j （因此 j^* 也）是同构，且 ι^* 是满射。

证明。我们先证明（1）。首先注意到，由于 $r>0$，环 $\mathrm{H}^*(Coh_\alpha\mathbb{P}^1)$ 由$\{ch_i(1)\ ch_j(\omega)\mid i\geq 2$自由生成；根据定理 1.4，$j\geq 1\}$，因此 ψ_α 是良定义的。注意，$ch_0(\mathcal{O}(l))=1$，$ch_1(\mathcal{O})=0$，且 $ch_1(\mathcal{O}(1))=\omega$。我们有

$$\begin{aligned}(j^*\times Id)ch_i(\mathcal{E}_\alpha)=&-2(\iota^*ch_i(V_2)\boxtimes 1)\\ &+\iota^*(ch_i(V_1)+ch_i(V_2))\boxtimes 1+\iota^*ch_{i-1}(V_2)\boxtimes\omega.\end{aligned}$$

于是 $j^*ch_i(\omega)=\iota^*(ch_i(V_1)-ch_i(V_2))$，并且 $j^*ch_i(1)=\iota^*(ch_{i-1}(V_2))$，正如所需。由 Harder-Narasimhan 分层的上同调纯性可得 j^* (以及 ι^*也）的满射性，见引理 1.1。（2）的证明同理，利用箭图模叠 $Rep_\alpha Q$中 Harder-Narasimhan 分层的纯性，如引理 1.2所示。□

注 1.7. 为了在命题 1.6中得到统一的表述，我们可以按上述相同公式定义一个态射 $\underline{\psi}_\alpha:\ \underline{\mathbb{H}}\to\mathrm{H}^*(Rep_{\Phi(\alpha)}\mathbb{C}Q)$，并得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\underline{\psi}_\alpha} & \mathrm{H}^*(Rep_{\Phi(\alpha)}Q) \\ \downarrow{\scriptstyle ev_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \iota^*} \\ \mathrm{H}^*(Coh_\alpha(\mathbb{P}^1)) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{H}^*(Coh_\alpha^{[0,\frac{1}{2}]}) \end{array}.$$

1.5. 稳定性条件与 BGP 反射。

1.5.1. 记号。 我们将使用 Bridgeland 稳定性条件这一概念，相关内容请参见 [4]。考虑如下荷函数:

$$Z: K_0(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)\longrightarrow\mathbb{C},\quad [\mathcal{F}]\mapsto \mathrm{rank}(\mathcal{F})+\sqrt{-1}\deg(\mathcal{F}).$$

记 ϕ 为 Z 的相位函数。那么，任意非零相干层 $\mathcal{F}$ 的相位都属于 $]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$，且任意挠层的相位为 1 2。设 $\mathcal{P}$ 为 $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 的切片，使得 $\mathcal{P}(\phi)$ 由相位为 ϕ 的半稳定相干层组成。根据 [4, Example 5.6]，$\sigma=(Z,\ \mathcal{P})$ 是 $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 上的 Bridgeland 稳定性条件。下文中，我们将用 $\mathrm{Coh}^\nu\subset D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 表示相位为 $]\nu-1,\ \nu]$ 的阿贝尔心。注意

$$\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1=\mathrm{Coh}^{\frac{1}{2}},\qquad \Phi^{-1}(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)=\mathrm{Coh}^\nu,\quad \forall\,\nu=1-\epsilon,\ 0<\epsilon\ll 1.$$

对于任意长度至多为 1 的区间 I，记 Coh^I 为 $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 中由 Harder–Narasimhan 因子的相位均属于 I 的对象构成的子范畴。因此，对于任意长度为 1 的区间 $J \supseteq I$，Coh^I 是阿贝尔范畴 Coh^J 的子范畴。对于 Coh^J、Coh^ν 中类为 α 的对象所成的栈，我们使用相同的记号 Coh^J_α，Coh^ν_α。

注记 1.8. 由于 $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$ 中不可分解对象的相位属于可数集 $\Sigma = \mathbb{Z} + \{\frac{1}{\pi} arctan(n);\ \ n \in \mathbb{Z}\}$，范畴 Coh^J 只取决于 $\mathbb{R}$ 中由 Σ 的端点 J 所划分出的区间。另请注意，Σ 的聚点集为 $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$。

引理 1.9. 设 J 是一个长度为一的区间，且设 $I \subseteq J$。那么子层叠 Coh^I_α 在 Coh^J_α 中是开集。此外，若 I 的长度为 < 1，则 Coh^I_α 是拟紧的。

证明。我们可以写成 $J =]\nu - 1, \nu]$（另一种情形 $J = [\nu - 1, \nu[$ 是对偶的，且可用同样的方法处理）。为证明引理的第一个结论，只需检验对于形如 $]\nu - 1, a]$, $]b, \nu]$, $]\nu - 1, a[$ 或 $[b, \nu]$ 的 I，Coh^I_α 在 Coh^J_α 中是开集。我们将处理前两种情形，其余情形类似。根据注记 1.8，Coh^ν 或等价于 $\mathrm{mod}\,\mathbb{C}Q$（若 $\nu \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$），或等价于 $\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$（若 $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$）。注意，$\mathrm{Coh}^\nu$ 中任意不可分解对象都是半稳定的。若对象 $M \in \mathrm{Coh}^\nu$ 的类为 α，则它属于 $\mathrm{Coh}^{]\varphi,\nu]}$，当且仅当对所有相位为 $\phi(N) \leq \varphi$ 且满足 $[N] <_\nu [\alpha]$ 的不可分解对象 N，都有 $\mathrm{Hom}(M, N) = \{0\}$。这里 $[N] <_\nu \alpha$ 表示 $\alpha - [N] \in K_0(\mathrm{Coh}^\nu)^+$。同理，若对象 $M \in \mathrm{Coh}^\nu$ 的类为 α，则它属于 $\mathrm{Coh}^{]\nu-1,\varphi]}$，当且仅当

$$\mathrm{Hom}(N, M) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)}(M, N \otimes \mathcal{O}(-2)[1])^\vee = \{0\}$$

对于所有相位为 ϕ（N）的不可分解对象 $N > \varphi$ 满足 $[N] <_\nu \alpha$ 的情形。根据半连续性定理（见[7, 引理 4.2]的箭图情形），这些条件中的每一个都是开的。当 $\mathrm{Coh}^\nu \simeq \mathrm{mod}\mathbb{C}Q$ 时，这样的条件只有有限个，因此得到所需结果。当 $\mathrm{Coh}^\nu \simeq \mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 时，我们注意到或者 $\varphi = \frac{1}{2}$，或者 $\varphi \neq \frac{1}{2}$，于是可以用有限个条件（事实上是一个条件）替代这些无限多个条件，只需取 $N = \mathcal{O}(l)$，其中 $l = \min\{l |\ \phi(\mathcal{O}(l)) > \varphi\}$，或 $l = \max\{l |\ \phi(\mathcal{O}(l)) \leq \varphi\}$即可。这证明了 Coh^I_α 在 Coh^ν_α 中是开的。为证明当 I 的长度严格小于 1 时，Coh^I_α 是拟紧的，注意在这种情况下，我们可以将 I 包含在区间 $]\nu', \nu' + 1]$ 中；对于该区间，$\mathrm{Coh}^{\nu'}$ 等价于 $\mathrm{mod}\mathbb{C}Q$，因此 $\mathrm{Coh}^{\nu'}_\alpha$ 本身是拟紧的。

□

1.5.2. 辫群作用。现在我们回顾由 BGP反射函子给出的辫群在 $B_2 \simeq \mathbb{Z}$ 上的作用：$D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1) \simeq D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)$。令 τ 为 $D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)$ 上的 Auslander-Reiten平移函子。对象 $T = \tau^{-1}P_1 \oplus P_2$ 是倾斜对象，并且存在一个自然同构 $\mathrm{End}(T) \simeq \mathbb{C}Q'$，其中 Q' 是定向相反的克罗内克箭图，即顶点 2 为汇点。我们用 P'_i 表示 Q' 的不可分解射影模。记 $\Phi' = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)\ -) : D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1) \simeq D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q')$ 为定理 1.5 (1) 中的倾斜等价函子 [2]。

定理 1.10。以下结论成立：

(1) 函子 $S^+ = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, -)$ 和 $S^- = - \otimes^{\mathbb{L}} T$ 构成一对伴随函子

$$S^- :\ D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q') \rightleftarrows D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q)\ : S^+$$

它们互为拟逆。

(2) 我们有 $S^+(P_2) = P'_2$，$S^+(\tau^{-1}(P_1)) = P'_1$ 以及 $S^+(P_1[1])$ 是顶点 *1* 处的不可分解内射$\mathbb{C}Q'$-模。

[2]它只是 Φ 与显然的等价 $D^b(\text{模}\mathbb{C}Q) \simeq D^b(\text{模}\mathbb{C}Q')$的复合。

(3) 定义 $\tau^{\pm\frac{1}{2}} \in \mathit{Aut}(D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1))$，使得下图示交换：

$$\begin{array}{ccc} D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1) & \overset{\tau^{-\frac{1}{2}}}{\underset{\tau^{\frac{1}{2}}}{\rightleftarrows}} & D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi'} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q') & \overset{S^-}{\underset{S^+}{\rightleftarrows}} & D^b(\mathrm{mod}\mathbb{C}Q) \end{array} .$$

那么， $\tau^{\pm\frac{1}{2}}$等价于沿线丛 $\mathcal{O}(\mp 1)$张量积的函子。

(4) 令

$$\nu_n = \phi(\mathcal{O}(-n)) + 1 = 1 - \frac{1}{\pi} arctan(n), \qquad (\forall\, n \geq 1)$$

使得 $\mathrm{Coh}^{\nu_1} = \Phi^{-1}$(模$\mathbb{C}Q$)。函子 $\tau^{\pm\frac{1}{2}}$限制为阿贝尔等价

$$\tau^{\frac{1}{2}} : \mathrm{Coh}^{\nu_n} \longrightarrow \mathrm{Coh}^{\nu_{n+1}}, \qquad \tau^{-\frac{1}{2}} : \mathrm{Coh}^{\nu_n} \longrightarrow \mathrm{Coh}^{\nu_{n-1}}.$$

特别地，对于任意 $n \geq 1$，有$\mathrm{Coh}^{\nu_n} = \tau^{\frac{n-1}{2}}(\mathrm{Coh}^{\nu_1}) = \tau^{\frac{n-1}{2}}(\Phi^{-1}$(模$\mathbb{C}Q$)) 。

证明。 陈述 (1) 和 (2) 是经典结果，参见例如 [2, 第 VII 节5]。陈述 (3) 和 (4) 也是经典结果；对不可分解对象直接计算即可验证。 □

注 1.11。 根据注 1.8，每个相位为 $]\nu-1,\ \nu]$ 且 $\nu \in]\frac{1}{2},\ 1]$ 的阿贝尔心都等于 Coh^{ν_n}，其中 n，并且特别地，作为阿贝尔范畴，它等价于模$\mathbb{C}Q$。

注意，Coh^{ν_n} 中的单对象为 $\mathcal{O}(-n+1)$和 $\mathcal{O}(-n)[1]$。从 $K_0(\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1)$的标准基 $\{[\mathcal{O}], [\mathcal{O}(1)] - [\mathcal{O}]\}$ 到基 $\{[\mathcal{O}(-n+1)],\ -[\mathcal{O}(-n)]\}$的变换矩阵$B_n$ 等于：

$$B_n = \begin{bmatrix} n & 1 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于任意 $\alpha = (r,\ d) \in \mathbb{Z}^2$，设

$$d(n,\alpha) := B_n \cdot \alpha = B_n \cdot \binom{r}{d} = (nr + d, (n-1)r + d).$$

记 Coh^{ν}_{α} （分别为 Coh^{I}_{α}）为参数化 $\mathrm{Coh}^{\nu}_{\alpha}$ （分别为 $\mathrm{Coh}^{I}_{\alpha}$）中类$\alpha \in K_0(\mathrm{Coh}^{\nu})^+$的对象的叠。定理 1.10 蕴含如下结论。

引理 1.12。 对于任意 $n \geq 1$，函子 $\Phi \circ \tau^{\frac{1-n}{2}}$ 导出叠 $Coh^{\nu_n}_{\alpha} \cong Rep_{d(n,\alpha)}Q$之间的等价。

从现在起，我们将利用上述等价把这两个叠视为相同。接下来，我们通过开嵌入将 $\mathrm{H}^*(Coh_{\alpha}\mathbb{P}^1)$ $=\mathrm{H}^*(Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha})$ 与 $\mathrm{H}^*(Coh^{\bar{\nu}_n}_{\alpha}) \simeq \mathrm{H}^*(Rep_{d(n,\alpha)}Q)$ 联系起来

$$j_n : Coh^{]\nu_n-1,\frac{1}{2}]}_{\alpha} \to Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha}, \qquad \iota_n : Coh^{]\nu_n-1,\frac{1}{2}]}_{\alpha} \to Rep_{d(n,\alpha)}Q.$$

推论 1.13. 固定 $\alpha = (r,d) \in (\mathbb{Z}^2)^+$ 和 $n \geq 1$。

(1) 假设 $r > 0$，并令 $V_{i,n}$ 为 $Coh^{\nu_n}_{\alpha} = Rep_{d(n,\alpha)}Q$ 上秩为 $d(n,\alpha)_i$ 的典范向量丛。那么存在一个满射环同态

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,n} : H^*(Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha}) &\longrightarrow H^*(Coh^{\nu_n}_{\alpha}) \\ ch_i(1) &\mapsto (1-n)ch_{i-1}(V_1) + nch_{i-1}(V_{2,n}),\ i \geq 1 \\ ch_i(\omega) &\mapsto ch_i(V_{1,n}) - ch_i(V_{2,n}),\ i \geq 0. \end{aligned}$$

使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} H^*(Coh_\alpha^{\frac{1}{2}}) & \xrightarrow{\psi_{\alpha,n}} & H^*(Coh_\alpha^{\nu_n}) \\ {\scriptstyle j_n^*}\downarrow & \swarrow_{\iota_n^*} & \\ H^*(Coh_\alpha^{]\nu_n-1,\frac{1}{2}]}). & & \end{array}$$

(2) 假设 $r=0$。那么 j_n （因此 j_n^* 也）是一个同构，并且 ι_n^* 是满射。

证明。 证明与命题 1.6类似。 □

1.5.3. $H^*(Coh_\alpha\mathbb{P}^1)$ 的极限构造。 当 $r>0$ 时，我们可以通过构造与过渡态射相关联的射影系统 $\lim\leftarrow \mathrm{H}^*(Coh_\alpha^{\nu_n}) = \lim\leftarrow \mathrm{H}^*(Rep_{d(n,\alpha)}Q)$，恢复上同调环 $\mathrm{H}^*(Coh_\alpha^{\frac{1}{2}})$

$$\begin{aligned} \phi_{n,n-1} : \mathrm{H}^*(Rep_{d(n,\alpha)}Q) &\to \mathrm{H}^*(Rep_{d(n-1,\alpha)}Q) \\ ch_i(V_{2,n}) &\mapsto ch_i(V_{1,n-1}), \\ ch_i(V_{1,n}) &\mapsto 2ch_i(V_{1,n-1}) - ch_i(V_{2,n-1}) \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

注意， 对于任意固定的上同调度，当 $n \gg$ 时，映射 $\phi_{n,n-1}$ 成为同构 0.

命题 1.14。 设 $\alpha=(r,d)\in(\mathbb{Z}^2)^+$，并假设 $r>0$。存在唯一的环同构

$$\Psi_\alpha : H^*(Coh_\alpha\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\sim} \varprojlim H^*(Rep_{d(n,\alpha)}Q)$$

使得对任意 $n\geq 1$，下列典范映射的图示交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(Coh_\alpha^{\frac{1}{2}}) & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & \varprojlim H^*(Rep_{d(n,\alpha)}Q) \\ {\scriptstyle j_n^*}\downarrow & \swarrow_{\iota_n^*} & \\ H^*(Coh_\alpha^{]\nu_n-1,\frac{1}{2}]}). & & \end{array} \ .$$

证明。 限制映射图示的交换性是推论1.13的直接结果。 Ψ 的唯一性现在由 $\prod_n j_n^*$的单射性这一事实推出，而这本身由引理1.2（2）推出。 □

2. Steinberg stacks

本节的目的是在范畴 $\mathrm{Coh}\mathbb{P}^1$ 与 Coh^ν 的背景下，引入并比较斯坦伯格叠的类似物。

2.1. **斯坦伯格叠的定义**。 对任意 $\alpha\in\mathbb{Z}^2$，用序列(α) 表示所有序列$\alpha=(\alpha_s,\ \cdots,\ \alpha_2,\ \alpha_1)$，即 $\mathbb{Z}^2$ 中满足 $|\alpha|:=\sum_i\alpha_i=\alpha$ 的元素所成的序列。对任意 ν，令序列$^\nu(\alpha)\subset$序列(α) 为由条件 $\alpha_i\in K_0(\mathrm{Coh}^\nu)^+$ 对任意 i 成立所确定的子集。对每个

$$\underline{\alpha}=(\alpha_s,\cdots,\alpha_1)\in \mathrm{Seq}^\nu(\alpha),$$

令 Coh_α 为参数化滤过的叠

$$F_\cdot : 0=F_0\subseteq F_1\subseteq\cdots\subseteq F_s,$$

Coh^ν 中对象的滤过，使得商 F_i/F_{i-1} 的维数向量为 α_i。存在一个自然态射

$$q_{\underline{\alpha}} : \widetilde{Coh}^{\nu}_{\underline{\alpha}} \to Coh^{\nu}_{\alpha_s} \times \cdots \times Coh^{\nu}_{\alpha_1}, \qquad F_\cdot \mapsto (F_s/F_{s-1}, \cdots, F_1/F_0)\ .$$

这是一个代数栈向量丛（因为 Coh^I 的同调维数为一，参见例如 [23]）。特别地，$\widetilde{Coh}^{\nu}_{\alpha}$ 是光滑的。存在一个（可表的）适当映射

$$\pi^{\nu}_{\underline{\alpha}} : \widetilde{Coh}^{\nu}_{\underline{\alpha}} \longrightarrow Coh^{\nu}_{\alpha},\ F_\cdot \mapsto F_s.$$

注意，$\mathsf{Seq}^\nu(\alpha)$ 和 $\widetilde{Coh}^{\nu}_{\alpha}$ 都严重依赖于 ν。对于 $\mathsf{Seq}(\alpha)$ 中任意两个序列 α', α''，与 ν 相关联的 ***Steinberg*** 叠定义为纤维积

$$Z^{\nu}_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}''} := \widetilde{Coh}^{\nu}_{\underline{\alpha}'} \underset{Coh^{\nu}_{\alpha}}{\times} \widetilde{Coh}^{\nu}_{\underline{\alpha}''}$$

当 $\alpha, \underline{\alpha}' \in \mathsf{Seq}^\nu(\alpha)$ 时成立，否则为空。由于 π^{ν}_{α}，$\pi^{\nu}_{\alpha'}$ 是适当的，自然态射 $\widetilde{\ }^{\nu} \widetilde{\ }^{\nu} Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'} \to Coh_\alpha \times Coh_{\alpha'}$ 也是适当的。

2.2. **拟紧逼近定理**。

我们计算与 $\mathsf{Coh}^{\mathbb{P}^1}$ 相关联的舒尔代数的方法，依赖于以下简单但关键的结果。该结果给出了判据，以确定一个旗、子对象和商对象何时同时属于 $\mathsf{Coh}^{\frac{1}{2}}$ 和 Coh^{ν}。这将有助于我们在 ν 充分接近 $\frac{1}{2}$ 时，建立 $Z^{\frac{1}{2}}_{\alpha,\alpha'}$ 与 $Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 之间的联系。对于任意 ν 以及任意区间 $I \subset]\nu-1, -\nu]$，我们考虑纤维积

$$\widetilde{Coh}^{\nu,I}_{\underline{\alpha}} = \widetilde{Coh}^{\nu}_{\underline{\alpha}} \underset{Coh^{\nu}_{\alpha}}{\times} Coh^{I}_{\alpha}\ , \qquad Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}''} = Z^{\nu}_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}''} \underset{Coh^{\nu}_{\alpha}}{\times} Coh^{I}_{\alpha}\ ,$$

它们分别是 $\widetilde{Coh}^{\nu}_{\alpha}$ 与 $Z^{\nu}_{\alpha'\text{的开子栈},\,\alpha''}$ 根据引理1.9。对任意 $\gamma \in]\frac{1}{2},\ 1]$ 我们令

$$I_\gamma =]\gamma - 1, \frac{1}{2}].$$

定理 2.1（拟紧逼近定理）。固定 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in (\mathbb{Z}^2)^+,\ \alpha := \alpha_1 + \alpha_2$ 与 $\sigma \in]\frac{1}{2},\ 1[$。

(i) 存在 $\nu_0 \in]\frac{1}{2}, \sigma]$，使得对任意 $\frac{1}{2} < \nu < \nu_0$，我们有一个分解

$$\begin{array}{ccccc}
Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2} \times Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_1} & \xleftarrow{q} & \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2,\alpha_1} & \xrightarrow{p} & Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Coh^{I_\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1} & \xleftarrow{\quad} & \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} & \longrightarrow & Coh^{I_\sigma}_{\alpha},
\end{array}$$

其中右方块是笛卡尔的，且竖直映射是开浸入。

(ii) 存在 $\nu_0' \in]\frac{1}{2}, \sigma]$，使得对任意 $\frac{1}{2} < \nu < \nu_0'$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
Coh^{\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{\nu}_{\alpha_1} & \xleftarrow{q} & \widetilde{Coh}^{\nu}_{\alpha_2,\alpha_1} & \xrightarrow{p} & Coh^{\nu}_{\alpha} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Coh^{I_\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1} & \xleftarrow{\quad} & \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} & \longrightarrow & Coh^{I_\sigma}_{\alpha},
\end{array}$$

其中右侧的方块是笛卡尔的，竖直映射是开浸入。

因此，存在一个典范叠同构

$$\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} \simeq \widetilde{Coh}^{\nu,I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1}.$$

我们将用到以下引理，其证明见附录 A。

引理 2.2. 设 Y 是 $\mathbb{C}$ 上的经典栈，$Y = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$ 是由（非空的）不可约局部闭子栈组成的分划。设 $X \subset Y$ 是一个拟紧可构造子集。则存在一个有限集 $J \subset \mathbb{N}$，使得 $X \subset \bigsqcup_{i\in J} Z_i$。

定理 *2.1* 的证明。 (i) 由于 p 是适当的，且 $Coh^{I_\sigma}_{\alpha}$ 是拟紧的，$S^{\frac{1}{2},\alpha_2,\alpha_1}$ 也是拟紧的，见 [25, 标签 04XU]。因此 $q(\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},\alpha_2,\alpha_1}_{I_\sigma})$ 是拟紧的，并且存在一个拟紧子栈 $U \subset Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2} \times Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_1}$，使得我们有如下分解：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2,\alpha_1} & \xrightarrow{q} & Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2} \times Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} & \dashrightarrow & U. \end{array}$$

现在，$(Coh^{I_\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1})_\nu$ 构成了 $Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_2} \times Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_1}$ 的一个开穷竭。由引理 2.2，存在 $\nu_0 \in]\frac{1}{2}, 1)$，使得对任意 $\nu \le \nu_0$，都有 $U \subset Coh^{I_\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1}$。

(ii) 对任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}^{I_\sigma}_{\alpha}$ 和 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ 在 $\mathrm{Coh}^{\nu}_{\alpha_1}$ 中的子对象，我们有 $\mathcal{F}' \in \mathrm{Coh}^{I_\nu}_{\alpha_1}$ 和 $\mathcal{F}/\mathcal{F}' \in \mathrm{Coh}^{I_\nu}_{\alpha_2}$。事实上，对于 Coh^{ν} 中的一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}' \longrightarrow 0,$$

我们有 $\phi^+(\mathcal{F}') \le \phi^+(\mathcal{F}) \le \frac{1}{2}$，且 $\sigma - 1 \le \phi^-(\mathcal{F}) \le \phi^-(\mathcal{F}/\mathcal{F}')$，其中 $\phi^+(\mathcal{F})$（分别为 $\phi^-(\mathcal{F})$）是 $\mathcal{F}$ 的 Harder–Narasimhan 因子的相位中的最大值（分别为最小值）。因此，我们有一个分解

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Coh}^{\nu,I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} & \xrightarrow{q} & Coh^{\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{\nu}_{\alpha_1} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Coh^{]\sigma-1,\nu]}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1}. \end{array}$$

证明 (ii) 等价于说明，当 ν 足够接近 $\frac{1}{2}$ 时，确实存在一个分解

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Coh}^{\nu,I_\sigma}_{\alpha_2,\alpha_1} & \xrightarrow{q} & Coh^{\nu}_{\alpha_2} \times Coh^{\nu}_{\alpha_1} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Coh^{I_\sigma}_{\alpha_2} \times Coh^{I_\nu}_{\alpha_1}. \end{array}$$

注意，$Coh^{]\sigma-1,\alpha_2,\nu]} \subseteq Coh^{\sigma}_{\alpha_2}$ 的 Harder–Narasimhan 分层 $Coh^{\sigma}_{\alpha_2} = \bigsqcup_{\alpha_2} HN^{\sigma}_{\alpha_2}$ 是有限的。记这些 Harder–Narasimhan 因子中严格大于 $\frac{1}{2}$ 的相位的最小值为 ν'_0，并且 $\Sigma := \{\alpha_2 \in \mathrm{Seq}(\alpha_2) \mid \phi((\alpha_2)_i) \ge \nu'_0$ 对于某个 $i\}$，则有

$$Coh^{\sigma}_{\alpha_2} = Coh^{I_\sigma}_{\alpha_2} \sqcup \bigsqcup_{\underline{\alpha_2}\in\Sigma} HN^{\sigma}_{\underline{\alpha_2}}$$

由此可得

$$Coh_{\alpha_2}^{]\sigma-1,\nu]} = Coh_{\alpha_2}^{\nu} \cap Coh_{\alpha_2}^{\sigma} \subseteq Coh_{\alpha_2}^{I_\nu}$$

对任意 $\frac{1}{2}-<\nu<\nu'_0$。 □

回想一下，我们已设定 $\nu_n := \phi(\mathcal{O}(-n)) + 1$ 并令 $I_n :=]\nu_n - 1, \frac{1}{2}]_{\circ-}$ 由定理 2.1可得以下推论。

推论 2.3。固定 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$ 和 $m \in \mathbb{Z}$。

(i) 对于任意 $\underline{\alpha} \in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \geq n_0$，都有一个典范同构

$$\Psi_{\underline{\alpha}}^{\nu_n, I_m} : \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\frac{1}{2}, I_m} \cong \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\nu_n, I_m}.$$

(ii) 对于任意 $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}' \in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$，存在 n_0，使得对于任意 $n > n_0$，都有一个典范同构

$$\Psi_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_m} : Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{\frac{1}{2}, I_m} \simeq Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_m} .$$

证明。我们通过对 α 的长度作归纳法来证明第一个结论。对于任意 $\alpha = (\alpha_2, \alpha_1) \in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$，该结论由定理 2.1 得出。对于满足 $s \geq 3$ 的 $\alpha = (\alpha_s, \cdots, \alpha_1)$，考虑 $\alpha' = (\alpha_{s-1}, \cdots, \alpha_1)$ 中的 $\alpha = (\alpha_s, |\alpha'|)_-$。于是存在 $n_0 \geq m$，使得对于任意 $n \geq n_0$，都有一个同构

$$\Psi_{\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_m} : \widetilde{Coh}_{(\alpha_s, |\underline{\alpha}'|)}^{\frac{1}{2}, I_m} \cong \widetilde{Coh}_{(\alpha_s, |\underline{\alpha}'|)}^{\nu_n, I_m}.$$

因此，对于任意 $(F_{s-1} \subseteq F_s) \in \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}, I_m}_{-,(\alpha_s, |\alpha'|)}$，我们有 $F_{s-1} \in \widetilde{Coh}^{\nu_{n_0}}_{-,|\alpha'|}{}^{I_{n_0}}$。存在典范同构

$$\widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\frac{1}{2}, I_m} \cong \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}^{\frac{1}{2}, I_{n_0}} \times_{Coh_{|\underline{\alpha}'|}^{I_{n_0}}} \widetilde{Coh}_{(\alpha_s, |\underline{\alpha}'|)}^{\frac{1}{2}, I_m},$$

$$F. \mapsto ((0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{s-1}), (F_{s-1} \subseteq F_s)),$$

and

$$\widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\nu_n, I_m} \cong \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_{n_0}} \times_{Coh_{|\underline{\alpha}'|}^{I_{n_0}}} \widetilde{Coh}_{(\alpha_s, |\underline{\alpha}'|)}^{\nu_n, I_m},$$

$$F. \mapsto ((0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{s-1}), (F_{s-1} \subseteq F_s))$$

其中 $n \geq n_0$。由关于 α' 的归纳假设，存在 $n_1 \geq n_0$，使得对于任意 $n \geq n_1$，我们有一个同构

$$\Psi_{\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_{n_0}} : \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}^{\frac{1}{2}, I_{n_0}} \cong \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}^{\nu_n, I_{n_0}},$$

这就得到了所需的同构

$$\Psi_{\underline{\alpha}}^{\nu_n, I_m} : \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\nu_n, I_m} \cong \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\frac{1}{2}, I_m}.$$

断言 (ii) 可由 (i) 以及如下事实推出：对于任意 I

$$Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{\nu, I} = \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}^{\nu, I} \times_{Coh_{\alpha}^{\nu, I}} \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}^{\nu, I}.$$

□

2.3. **斯坦伯格叠的分拆**。 本节将介绍斯坦伯格叠的几种分拆和开穷竭，以及它们之间的交。后文将利用这些内容研究它们的 Borel-Moore 同调，以及定义在这些 Borel-Moore 同调空间的直和上的卷积代数结构。

2.3.1. 胞腔分划。 这是标准分划；对于通常的完全旗斯普林格解消，其各部分由魏尔群参数化。

设 $\underline{\alpha},\underline{\alpha}' \in \mathsf{Seq}^\nu(\alpha)$ 的长度为 l, s。对 $(F_\cdot, F'_\cdot) \in Z^\nu_{\alpha,\alpha'}$，我们关联矩阵 $w(F_\cdot, F'_\cdot)$，其 (i,j) 项是 $\mathbb{Z}^2$ 中子商的类

$$(F_\cdot, F'_\cdot)_{i,j} := F_i \cap F'_j \big/ (F_{i-1} \cap F'_j + F_i \cap F'_{j-1}) \tag{2.1}$$

其中交与商是在阿贝尔范畴 Coh^ν 中取的。我们将 $W(\alpha,\alpha')$ 记为满足下列条件的 $(s \times l)$-矩阵 $\underline{w}$ 的集合：其元素为 $w_{ij} \in \mathbb{Z}^2$

$$\sum_{i=1}^{s} w_{ij} = \alpha'_j \text{ and } \sum_{j=1}^{l} w_{ij} = \alpha_i \ ,$$

并将 $W^\nu(\alpha,\underline{\alpha}') \subset W(\alpha,\underline{\alpha}')$ 记为上述矩阵 w 的子集，其元素属于 $K_0(\mathsf{Coh}^\nu)^+$。注意，同样地，$W^\nu(\alpha,\alpha')$ 依赖于 ν。我们称一对 $(F_\cdot, F'_\cdot) \in Z^\nu_{\alpha,\alpha'}$ 为 w 型，如果 $(F_\cdot, F'_\cdot) \in Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)$。

对于 $w \in W^\nu(\underline{\alpha},\alpha')$，令 $Z^\nu_{\underline{\alpha},\alpha'}(w)$ 为 $Z^\nu_{\alpha,\alpha'}$ 中由类型为 w 的对 $(F_\cdot, F'_\cdot)$ 组成的可构造子集。存在一个典范态射

$$\pi_w : Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \to \prod_{i,j} Coh^\nu_{w_{i,j}}, \qquad (F_\cdot, F'_\cdot) \mapsto ((F_\cdot, F'_\cdot)_{i,j}) \, .$$

以下结论是经典结果（对于任意光滑射影曲线也原样成立）。

引理 2.4. 态射 π_w 是一个迭代的代数栈向量丛，其秩为

$$r(w) := - \sum_{(i,j)<(i',j')} \langle w_{i'j'}, w_{ij} \rangle \ ,$$

其中 $(i,j) \le (i',j')$ 当且仅当 $i \le i'$ 和 $j \le j'$。特别地，$Z^\nu_{\alpha,\alpha'}(w)$ 是光滑不可约的，由拟紧开集良好逼近、上同调纯，且维数为

$$\dim(Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)) = - \sum_{(i,j)\le(i',j')} \langle w_{i'j'}, w_{i,j} \rangle \ .$$

根据构造，$Z^\nu_{\alpha,\alpha'}$ 有一个由可构造子集组成的分划

$$Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = \bigsqcup_{w \in W^\nu(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')} Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w). \tag{2.2}$$

对于 $\nu \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，我们有 $\mathsf{Coh}^\nu \simeq \mathsf{mod}\mathbb{C}Q$，因此集合 $W^\nu(\underline{\alpha}, \alpha')$ 是有限的，因为固定维数的表示的箭图子表示的维数向量构成有界集。容易看出，一般而言，当 $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 时，$W^\nu(\alpha, \alpha')$ 是无限的。

2.3.2. 全局开耗尽。 对于任意 严格的 子区间 $I \subset]\nu-1,\ \nu]$ （即长度为 <1的），叠 $Z^{\nu}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}$ 由引理 1.9 和 [25, 标签 04XU]可知是拟紧的。特别地，我们推得 Steinberg 叠 $Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 存在拟紧开穷竭

$$Z^{\nu}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = \bigcup_{I} Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}. \tag{2.3}$$

我们设

$$W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\nu,I} := \{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\nu} \mid Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \neq \varnothing\}.$$

分划（2.2）对$Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 诱导出一个类似的分划 $Z^{\nu,I}_{\alpha,\alpha'}$，将其分成可构造子集

$$Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = \bigsqcup_{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\nu,I}} Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)\ .$$

引理 2.5. 对任意 ν 以及任意严格子区间 $I \subset]\nu-1,\ \nu]$，集合 $W(\alpha,\ \alpha')^{\nu,I}$ 是有限的。

证明。 这由如下事实推出： $Z^{\nu,I}_{\alpha,\alpha'}$ 是拟紧的，以及引理2.2。注意，对于 $\nu \notin \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，这是显然的，因为 $W(\alpha,\ \alpha')^{\nu,I} \subset W(\alpha,\ \alpha')^{\nu}$ 已经是有限的。□

回想，对于$\sigma \in]\frac{1}{2},\ 1]$我们已设 $I_\sigma =]\sigma-1,\ \frac{1}{2}]$。以下是一个关键的技术结果

命题 2.6. 对任意 $\sigma \in]\frac{1}{2},\ 1]$ 以及任意 $\alpha,\ \alpha' \in$序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$，叠 $Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha,\alpha'}$ 是上同调纯的。

证明。 由注记 1.8 可知，只需考虑 $I_\sigma = I_m$ 对于 $m \geq 0$ 的情形。若 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的向量丛，且 $d \geq 0$，我们记 $i_{\mathcal{V},d} : X_{\mathcal{V},d} \to Coh_\alpha$ 为参数化与 $\mathcal{V} \oplus \mathcal{T}$ 同构的相干层的局部闭子叠，其中 $\mathcal{T} \in Coh_{d\delta}$。注意， $Coh^{I_m}_\alpha$ 有一个分划

$$Coh^{I_m}_\alpha = \bigsqcup_{\mathcal{V},d} X_{\mathcal{V},d}$$

其中并集遍历满足以下条件的 有限 对 $(\mathcal{V},\ d)$： $\mathcal{V}$ 是类为 $\alpha - d\delta$ 且由 $\mathcal{O}(m)$ 生成的向量丛。我们将通过证明对于任意 $(\mathcal{V},\ d)$，叠

$$Z^{\frac{1}{2},I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \underset{Coh_\alpha}{\times} X_{\mathcal{V},d}$$

是上同调纯的。

我们首先将问题约化到 $d=0$ 的情形。对于任意 $\sigma = (\sigma_s,\ \ldots,\ \sigma_1) \in$Seq$^{\frac{1}{2}}_\alpha$，存在一个分划

$$\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\sigma}} \underset{Coh_\alpha}{\times} X_{\mathcal{V},d} = \bigsqcup_{\underline{c}} K^{\underline{c}}_{\underline{\sigma},\mathcal{V}}$$

其中 $\underline{c}$ 遍历长度为 s 的 d 的合成所成的集合，并且

$$K^{\underline{c}}_{\underline{\sigma},\mathcal{V}} = \{\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s = \mathcal{V} \oplus \mathcal{T} \mid \deg(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{T}/\mathcal{F}_{i-1} \cap \mathcal{T}) = c_i\ \forall\ i\}.$$

令 $\sigma - \underline{c} = (\sigma_i - c_i\delta)_i \in$Seq$^{\frac{1}{2}}(\alpha - d\delta)$ 且 $c\delta = (c_i\delta)_i \in$Seq$^{\frac{1}{2}}(d\delta)$，则映射

$$(\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s) \mapsto ((\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{T} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s/\mathcal{F}_s \cap \mathcal{T}), (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{T} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s \cap \mathcal{T}))$$

诱导一个态射

$$K^{\underline{c}}_{\underline{\sigma},\mathcal{V}} \longrightarrow \left(\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\sigma}-\underline{c}} \underset{Coh_{\alpha-d\delta}}{\times} X_{\mathcal{V},0}\right) \times \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{c}\delta}$$

很容易看出它是一个向量丛栈。出于类似原因，诱导的映射

$$K^{\underline{c}}_{\underline{\sigma},\mathcal{V}} \underset{X_{\mathcal{V},d}}{\times} K^{\underline{c}'}_{\underline{\sigma}',\mathcal{V}} \longrightarrow \left(Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\sigma}-\underline{c},\underline{\sigma}'-\underline{c}'} \underset{Coh_{\alpha-d\delta}}{\times} X_{\mathcal{V},0} \right) \times Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{c}\delta,\underline{c}'\delta}$$

是一个向量丛栈。

注意，$X_{\mathcal{V},\,0} = B\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$，且 $\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\gamma} \times_{Coh_{\alpha-d\delta}} X_{\mathcal{V},\,0}$ 同构于迭代商概形的栈商

$$\mathrm{Quot}(\underline{\gamma},\mathcal{V}) := \{\mathcal{H}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{H}_s = \mathcal{V} \mid [\mathcal{H}_i/\mathcal{H}_{i-1}] = \gamma_i \ \forall i\}$$

$\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$。因此，只需证明

引理 2. **7.** 对于任意 $\underline{\gamma} \in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha - d\delta)$，射影概形 $Quot(\underline{\gamma},\mathcal{V})$ 是上同调纯的.

证明。固定一个直和分解 $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(d_i)$，其中 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r$。考虑余特征

$$\chi : \mathbb{C}^* \to \prod_i \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(d_i)) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{V}), \qquad t \mapsto (t^{-d_1}, t^{-d_2}, \ldots, t^{-d_r}) \ .$$

它定义了 $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathrm{Quot}(\underline{\gamma},\ \mathcal{V})$ 上的作用，其不动点概形参数化了满足 $\mathcal{H}_j = \bigoplus_{i=1}^{r}(\mathcal{H}_j \cap \mathcal{O}(d_i))$ 的那些滤过 $\mathcal{H}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{H}_s = \mathcal{V}$。我们有 $\mathrm{Quot}(\underline{\gamma},\ \mathcal{V})^{\chi} = \bigsqcup_{\mathbf{b}} Q_{\mathbf{b}}$，其中 $\mathbf{b}$ 遍历满足以下条件的元组集合：$\mathbf{b} = (\beta_i^j)^{j=1,\ \ldots,\ i=1\ \ldots\ ,\ ,\ r} \in ((\mathbb{Z}^2)^+)^{rs}$

$$\sum_i \beta_i^j = \gamma_j \qquad \text{and} \qquad \sum_j \beta_i^j = [\mathcal{O}(d_i)] = (1, d_i)$$

对任意 $i,\ j$，且

$$Q_{\mathbf{b}} = \{(\mathcal{H}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{H}_s) \in \mathrm{Quot}(\underline{\gamma},\mathcal{V})^{\chi} \mid [\mathcal{H}_j \cap \mathcal{O}(d_i)/\mathcal{H}_{j-1} \cap \mathcal{O}(d_i)] = \beta_i^j \ \ \forall\, i,j\} \ .$$

注意到 $Q_{\mathbf{b}}$ 是因子 $S^k\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$ 的乘积，因为 $\mathrm{Quot}((1,\ d-k)\ \mathcal{O}(d)) \simeq S^k\mathbb{P}^1$。由于 $\mathrm{Quot}(\gamma,\ \mathcal{V})$ 是射影的，因此存在一个由吸引子簇构成的分解

$$\mathrm{Quot}(\underline{\gamma},\mathcal{V}) = \bigsqcup_{\mathbf{b}} Q^+_{\mathbf{b}}, \qquad Q^+_{\mathbf{b}} := \{\mathcal{H}_\bullet \mid \lim_{t\to 0}\chi(t)\cdot\mathcal{H}_\bullet \in Q_{\mathbf{b}}\} \ .$$

我们断言，对每个 $\mathbf{b}$，典范态射 $\pi_{\mathbf{b}}:\ Q^{+}{}_{\mathbf{b}} \to Q_{\mathbf{b}}$ 是一个仿射纤维化。这将证明引理 2.7，进而证明命题2.6。根据 Białynicki-Birula 定理，只需证明 $Q^{+}{}_{\mathbf{b}}$ 是光滑的。我们将通过把 $Q^{+}{}_{\mathbf{b}}$ 与一个适当的（光滑）胞腔 $Z^{\frac{1}{2}}_{\gamma}{}_{,\ \sigma}(w)$ 相关联来证明这一点。令 $\mathcal{V}_l := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}(d_i)$，从而得到一个滤过 $\mathcal{V}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_r = \mathcal{V}$。态射 $\pi_{\mathbf{b}}$ 将滤过 $\mathcal{G}_\bullet \in \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\gamma}$ 映射到

$$\pi_{\mathbf{b}}(\mathcal{G}_\bullet)_j = \left(\bigoplus_l \mathcal{G}_j \cap \mathcal{V}_l/\mathcal{G}_j \cap \mathcal{V}_{l-1} \right)_j \ .$$

因为只要 $d_i \leq d_j$，就有 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(d_i)\ \mathcal{O}(d_j)) = \{0\}$，任何配备滤过$\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_r$且满足 $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq \mathcal{O}(d_i)$ 的相干层 $\mathcal{F}$ 必定同构于 $\mathcal{V}$。等价地，映射

$$\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\sigma} \underset{\prod_i Coh_{(1,d_i)}}{\times} (\mathrm{Pic}^{d_1} \times \cdots \mathrm{Pic}^{d_r}) \to Coh_{\alpha-d\delta}$$

经由 $X_{\mathcal{V},0}$ 分解，并且在其像上是一个旗簇丛，纤维同构于 G/B，其中$G=\mathrm{Aut}(\mathcal{V})/\mathrm{rad}(\mathrm{Aut}(\mathcal{V}))$。注意，由构造可知，$\mathbf{b}$ 决定了 $W(\gamma,\sigma)$ 中的一个元素，其中$\sigma=((1,d_i))_i$。考虑

$$Z^{\frac{1}{2},\circ}_{\underline{\gamma},\underline{\sigma}}(\mathbf{b}):=Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\gamma},\underline{\sigma}}(\mathbf{b})\underset{\prod_i Coh_{(1,d_i)}}{\times}(\mathrm{Pic}^{d_1}\times\cdots\mathrm{Pic}^{d_r}),$$

$Z^{2}_{\gamma,\sigma}(\mathbf{b})$的一个开子叠。由上述内容，我们推出存在一个典范的光滑 G/B 纤维化 $Z^{\frac{1}{2},\circ}_{\gamma,\sigma}(\mathbf{b})\to Q^+_{\mathbf{b}}$，这表明 $Q^+_{\mathbf{b}}$ 如所期望的那样是光滑的。 □

□

由上述证明，我们还得到

推论 2.8. 对任意一对$(\mathcal{V},d)$，其中 $\mathcal{V}\in Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha-d\delta}$ 是$\mathbb{P}^1$ 上的向量丛，且 $d\geq 0$，以及对任意满足 $\sum_i\sigma_i=\alpha$ 的σ，该叠

$$\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\sigma}}\underset{Coh_\alpha}{\times}X_{\mathcal{V},d}$$

是上同调纯的。

命题 2.9. 下列结论成立：

(i) 假设 $\nu\notin\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$。则对任意 α、α'，$Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 是上同调纯的。(ii) 假设$\nu\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$。则对任意 α、$\alpha'\in$ 序列$^{\nu}(\alpha)$，叠$Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 允许由上同调纯的拟紧开子叠 $Z^{\frac{1}{2},I_m}_{\alpha,\alpha'}$ 穷竭。特别地，它是上同调纯的。

证明。第一个陈述由如下事实得出：分划（2.2）由有限多个分层组成，其中每一个都是上同调纯的，并结合引理 2.13。第二个陈述由定义以及命题 2.6 推出。 □

2.3.3. 局部开穷竭。尽管它非常适合 Coh$\mathbb{P}^1$与 Rep$Q$之间的倾斜等价，但我们不知道如何证明 $Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha,\alpha'}(w)$ 是上同调纯的。我们现在引入另一个确实满足该条件的开穷竭。对任意 $\sigma\in]\frac{1}{2},1]$ 以及任意 α，$\alpha'\in$序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$，我们令

$$Y^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}:=Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\underset{\prod_i Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_i}}{\times}\prod_i Coh^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha_i}$$

其中态射 $Z^{2}_{\alpha,\alpha'}\to\prod_i Coh^{2}_{\alpha_i}$ 是映射的复合

$$Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\longrightarrow\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha}}\xrightarrow{\pi_{\underline{\alpha}}}\prod_i Coh^{\frac{1}{2}}_{\alpha_i}\ .$$

存在开嵌入

$$Y^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\subset Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\subset Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}$$

且 $Y^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\alpha,\alpha'}$ 是拟紧的。与分划（2.2）相交后，得到一个由局部闭子叠构成的（有限）分划

$$Y^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}=\bigsqcup_w Y^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)\ . \tag{2.4}$$

命题 2.10. 固定 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$, $I = I_\sigma$ 以及 $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}' \in$ 序列$^{\frac{1}{2}-}(\alpha)$。则

(i) 对于任意 $w \in W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')^{\frac{1}{2}}$，叠 $Y^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)$ 是上同调纯的；(ii) 叠 $Y^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}$ 是上同调纯的。

证明。 断言 (ii) 是 (i) 的推论，因为分划 (2.4) 是局部闭且有限的。下面证明 (i)。首先注意到存在一个分解

$$\pi_w : Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \xrightarrow{f} \prod_i \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\gamma}^{(i)}} \xrightarrow{\left(q_{\underline{\gamma}^{(i)}}\right)_i} \prod_{i,j} \mathrm{Coh}^{\frac{1}{2}}_{w_{ij}}$$

其中 $\gamma^{(i)} = (w_{i1}, w_{i2}, \cdots, w_{i,s})$，并且 f 是这样一个态射：它将一对 $(F_\cdot, G_\cdot)$ 映射为 $F_1, F_2/F_1, \ldots, F_r/F_{r-1}$ 上的滤过元组，这些滤过由 $G_\cdot$ 诱导。根据引理 2.4证明中的同样论证，态射 f 是一个迭代向量丛叠。接下来，由构造可知，

$$Y^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) = Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \underset{\prod_i \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2}}_{\underline{\gamma}^{(i)}}}{\times} \prod_i \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\gamma}^{(i)}}$$

因此，只需证明对于任意 γ，叠 $\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I}_{\gamma}$ 是上同调纯的。这由推论 2.8 以及存在有限局部闭分划 $Coh^{\frac{1}{2},I}_{\alpha} = \bigsqcup_{\nu,d} X_{\nu,d}$ 这一事实即可得出。□

2.4. **分层上的同构**。 回顾推论 2.3中的叠同构

$$\bigsqcup_{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\nu_n,I}} Z^{\nu_n,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) = Z^{\nu_n,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \cong Z^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = \bigsqcup_{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\frac{1}{2},I}} Z^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)$$

当 n 足够大时。接下来我们证明，该同构与 $Z^{\nu_n,I}_{\alpha,\alpha'}$ 和 $Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha,\alpha'}$ 各自的胞腔分划相容。

命题 2.11。 固定 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$、一个区间 $I =]\sigma - 1, \frac{1}{2}]$，以及 $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}' \in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)$。存在$n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \geq n_0$，我们有

$$Z^{\frac{1}{2},I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \cong Z^{\nu_n,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w).$$

对于任意 $w \in W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')^{\frac{1}{2},I}$。

证明。 设 s 和 l 分别为 α 和 α' 的长度。由引理 2.5，集合 $W(\alpha, \alpha')^{\frac{1}{2},I}$ 是有限的，因此

$$\underline{\alpha}_i = (w(i,1), w(i,2), \cdots, w(i,l)) \text{ and } \underline{\alpha}'_j = (w(j,1), w(j,2), \cdots, w(j,s))$$

各种 $w \in W(\alpha, \alpha')^{\frac{1}{2},I}$ 的取值，对每个 $1 \leq i \leq s$ 和 $1 \leq j \leq l$ 而言都只有有限种。注意，对于任意 $(F_\cdot, F'_\cdot) \in Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha,\alpha'}$，$F_i/F_{i-1}$ 和 F'_j/F'_{j-1}，由引理 2.2，它们属于某个 n_0 对应的 $\mathrm{Coh}^{\frac{1}{2}}_{(\nu_{n_0}-1,\frac{1}{2}]}$。将推论 2.3 应用于 $I' = (\nu_{n_0} - 1, \frac{1}{2}]$，对于 $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq l$，所有 $\alpha_i \in \mathrm{Seq}(\alpha_i)$、$\alpha'_j \in \mathrm{Seq}(\alpha'_j)$，以及 $w \in W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')^{\frac{1}{2},I}$，于是存在 $n_1 \geq n_0$，使得对于任意 $n \geq n_1$，我们有

$$\widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I'}_{\underline{\alpha}_i} \cong \widetilde{Coh}^{\nu_{n_1},I'}_{\underline{\alpha}_i} \quad \text{and} \quad \widetilde{Coh}^{\frac{1}{2},I'}_{\underline{\alpha}'_j} \cong \widetilde{Coh}^{\nu_{n_1},I'}_{\underline{\alpha}'_j},$$

对于所有 α_i 和 α'_j，这意味着 $(F_\cdot, F'_\cdot)_{i,j}$ 是 $(F_\cdot, F'_\cdot) \in Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha,\alpha'}$ 的所有因子，它们都属于 $\mathrm{Coh}^{\frac{1}{2}}_{(\nu_{n_1}-1,\frac{1}{2}]}$。

对于任意 $(F_\bullet, F'_\bullet) \in Z^{\frac{1}{2}, I}_{\alpha, \alpha'} \cong Z^{\nu, I}_{\alpha, \alpha'}$，记 $F_i \cap^\nu F'_j$ 为 Coh^ν 中的子对象 $F_i \cap F'_j$。我们断言，对于任意 $\nu \leq \nu_{n_1}$，$F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j = F_i \cap^\nu F'_j$ 是 $F_s = F'_l$ 的子对象。因此，我们有

$$\frac{F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j}{F_{i-1} \cap^{\frac{1}{2}} F'_j + ^{\frac{1}{2}} F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_{j-1}} = \frac{F_i \cap^\nu F'_j}{F_{i-1} \cap^\nu F'_j + ^\nu F_i \cap^\nu F'_{j-1}}.$$

等价地，我们得到 $(F_\bullet, F'_\bullet) \in Z^{\frac{1}{2}, I}_{\alpha, \alpha'}(w)$ 当且仅当 $(F_\bullet, F'_\bullet) \in Z^{\nu, I}_{\alpha, \alpha'}(w)$。

现在我们开始证明该断言。首先，注意到 $\mathsf{Coh}^{\frac{1}{2}}$ 中的任意短正合列，只要其三项都属于 $\mathsf{Coh}^{]\nu-1, \frac{1}{2}]}$，也都是 Coh^ν 中的短正合列，因为 $D^b(\mathsf{Coh}^\nu)$ 中任意三项都属于 Coh^ν 的三角，都是由 Coh^ν 中的短正合列诱导的。于是，我们有 $F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j \subseteq F_i$ 和 $F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j \subseteq F'_j$ 属于 Coh^ν。特别地，$F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j \subseteq F_i \cap^\nu F'_j$。

另一方面，注意到 $F_i/(F_i \cap^\nu F'_j) \cong (F_i +^\nu F'_j)/F'_j$ 在 Coh^ν 中是 Coh $F'_l/F'_j \in \mathsf{Coh}^{\nu,]\nu-1, \frac{1}{2}]}$ 的一个子对象，由此可知 $F_i/(F_i \cap^\nu F'_j)$ 属于 $\mathsf{Coh}^{\nu,]\nu-1, \frac{1}{2}]}$。因此，$\mathsf{Coh}^\nu$ 中的以下短正合列

$$0 \longrightarrow F_i \cap^\nu F'_j \longrightarrow F_i \longrightarrow F_i/(F_i \cap^\nu F'_j) \longrightarrow 0 \text{ in } \mathsf{Coh}^\nu$$

在 $\mathsf{Coh}^{\nu,]\nu-1, \frac{1}{2}]}$ 中有三个项，这意味着它也是 $\mathsf{Coh}^{\frac{1}{2}}$ 中的一个短正合列。特别地，$F_i \cap^\nu F'_j \subseteq F_i$ 属于 $\mathsf{Coh}^{\frac{1}{2}}$。类似地，我们有 $F_i \cap^\nu F'_j \subseteq F'_j$ 属于 $\mathsf{Coh}^{\frac{1}{2}}$，由此可得 $F_i \cap^\nu F'_j \subseteq F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j$。最后我们得到 $F_i \cap^\nu F'_j = F_i \cap^{\frac{1}{2}} F'_j$。□

命题 2.11 还在集合 $W(\alpha, \alpha')^{\frac{1}{2}, I}$ 与 $W(\alpha, \alpha')^{\nu, I}$ 之间建立了一个双射，其中 ν 充分接近 $\frac{1}{2}$。

推论 2.12. 沿用上述记号。则存在 $\nu_0 \in (\frac{1}{2}, \sigma]$，使得对于任意 $\frac{1}{2} < \nu \leq \nu_0$，我们有

$$W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')^{\frac{1}{2}, I} = W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')^{\nu, I}$$

2.5. 胞腔上的偏序。 接下来我们在 $W^\nu(\alpha, \alpha')$ 上引入一个偏序 $\leq_\nu$。令

$$w([1:i], [1:j]) := \sum_{\substack{1 \leq i' \leq i \\ 1 \leq j' \leq j}} w_{i'j'}.$$

对于 $w, w' \in W^\nu(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')$，当且仅当 $w \leq_\nu w'$

$$w([1:i], [1:j]) \geq_\nu w'([1:i], [1:j]) \qquad (\forall\ 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq s)\ ,$$

其中 $\alpha_1 \geq_\nu \alpha_2$ 表示 $\alpha_1 - \alpha_2 \in K_0(\mathsf{Coh}^\nu)^+$。接着我们定义

$$Z^\nu_{\underline{\alpha}, \underline{\alpha}'}(\leq w) = \bigsqcup_{w' \leq_\nu w} Z^\nu_{\underline{\alpha}, \underline{\alpha}'}(w').$$

若不存在混淆风险，我们就简单地用 $\geq$ 代替 $\geq_\nu$。

引理 2.13. 对于任意 ν 以及任意 α, α'，$Z^\nu_{\alpha, \alpha'}(\leq w)$ 在 $Z^\nu_{\alpha, \alpha'}$ 中是闭的，而 $Z^\nu_{\alpha, \alpha'}(w)$ 在 $Z^\nu_{\alpha, \alpha'}(\leq w)$ 中是开的。

证明. 对于 $\nu \notin \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，例如可由 [21, 引理 2.8] 得出。对于 $\nu=\frac{1}{2}$ 的情形，可以给出类似的证明。我们将改为利用上一节的比较结果，从 $\nu \notin \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ 的情形推导出该结论。令 $w \in W(\alpha,\ \alpha')^{\frac{1}{2}}$。只需证明，对于任意区间 $I_\sigma=]\sigma-1,\ \frac{1}{2}]$ 且满足 $\sigma>\frac{1}{2}$ 可构造子栈

$$Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w):=\bigsqcup_{w'\leq_{\frac{1}{2}} w} Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w')$$

在 $Z^{\frac{1}{2}}$ 中是闭的，$\underline{\alpha}^{I_\sigma}\underline{\alpha}'$。根据命题 2.11 和推论 2.12，我们有

$$W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\frac{1}{2},I_\sigma}=W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{\nu,I_\sigma},\qquad Z^{\frac{1}{2},I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)=Z^{\nu,I_\sigma}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)$$

当 ν 足够接近 $\frac{1}{2}$ 时，因此只需验证偏序 $\leq_{\frac{1}{2}}$ 和 $\leq_\nu$ 在 $W(\alpha,\ \alpha')^{\frac{1}{2},I_\sigma}$ 上的限制在 ν 足够接近 $\frac{1}{2}$ 时一致。这是因为区间 $I_\nu,\ I_{\frac{1}{2}}$ 左开，而且 $W(\alpha,\ \alpha')^{\frac{1}{2},I_\sigma}$ 是有限的，所以 $\min\{\mu(w_{ij})\}>-\frac{1}{2}$，其中最小值取遍元素 w_{ij} 属于 $W(\alpha,\ \alpha')^{\frac{1}{2},I_\sigma}$ 的所有条目。□

当 $\nu \notin \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ 时，偏序集 $W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^\nu$ 是有限的，并且可以细化为全序。当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时，情况要复杂得多，下面的例子说明了这一点。

例 2.14。取 $\alpha=(4,\ 0)$ 和 $\alpha=\alpha'=((2,\ 0),\ (2,\ 0))\in$ 序列$^{\frac{1}{2}}(\alpha)_\circ$ 那么 $W^{\frac{1}{2}}(\alpha,\underline{\alpha}')$ 由以下矩阵组成：

$$u_n=\begin{bmatrix}(2,-n) & (0,n)\\ (0,n) & (2,-n)\end{bmatrix},\ w_m=\begin{bmatrix}(1,m) & (1,-m)\\ (1,-m) & (1,m)\end{bmatrix},\ v_d=\begin{bmatrix}(0,d) & (2,-d)\\ (2,-d) & (0,d)\end{bmatrix},$$

其中 $n,\ d\geq 0$ 且 $m\in\mathbb{Z}$。根据引理 2.4，$Z(w)=Z^2_{\alpha,\ \alpha'}(w)$ 的维数等于 $-12,\ -9$ 或 -8，具体取决于 w 属于哪个群。偏序（在这个特殊情形下）是线性的，具体如下：

$$u_0<\cdots<u_n<\cdots<w_m<\cdots<w_0<\cdots<w_{-m}<\cdots<v_d<\cdots<v_0.$$

注意，形如 $[u_n,w_m]$，$[u_n,v_m]$ 或 $[w_n,v_m]$ 的偏序区间都是无限的。$\geq$ 在三个块上的限制分别同构于 $(\mathbb{N},\ \geq)$、$(\mathbb{Z},\ \geq)$ 和 $(-\mathbb{N},\ \geq)$。注意，$Z^{\mathrm{rk}=0}:=\bigcup_{d\geq 0}Z(\geq v_d)$ 是由良好近似、上同调纯的栈构成的开穷竭。因此

$$\mathrm{H}_*(Z^{\mathrm{rk}=0})=\varprojlim \mathrm{H}_*\big(Z(\geq v_d)\big)$$

带有一个滤过，其伴随分次为 $\bigoplus_{d\geq 0}\mathrm{H}_*(Z(v_d))$。然而，开滤过 $Z(\geq w_l)$ 或 $Z(\geq u_n)$ 并非如此。相反，滤过 $Z^{\mathrm{rk}=2}:=\bigcup_{n\geq 0}Z(\leq u_n)$ 自然地将 $Z^{\mathrm{rk}=2}$ 表示为关于闭浸入的良好近似、上同调纯栈的余极限。闭嵌入的推前映射

$$(i_n)_*:\mathrm{H}_*(Z(\leq u_n))\to\mathrm{H}_*(Z(\leq u_{n+1}))$$

因此是单射。然而，先验上没有理由认为诱导映射

$$\varinjlim_n \mathrm{H}_*(Z(\leq u_n))\to\mathrm{H}_*(Z^{\mathrm{rk}=2}).$$

一般而言，它是一个稠密嵌入。

3. Schur and KLR algebras of coherent sheaves on $\mathbb{P}^1$

3.1. Schur代数与KLR代数的定义。 回顾一下，我们将 $\mathrm{H}_*(-)$ 记作 Borel-Moore同调。对于任意 ν、任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ 以及序列 α_1、α_2、$\alpha_3 \in \mathrm{Seq}^\nu(\alpha)$，存在一个卷积积

$$* : \mathrm{H}_i(Z^\nu_{\underline{\alpha_1},\underline{\alpha_2}}) \otimes \mathrm{H}_j(Z^\nu_{\underline{\alpha_2},\underline{\alpha_3}}) \longrightarrow \mathrm{H}_{i+j-2\dim(\widetilde{Coh}^\nu_{\underline{\alpha_2}})}(Z^\nu_{\underline{\alpha_1},\underline{\alpha_3}}), \tag{3.1}$$

定义如下。考虑三重积 $X = \widetilde{Coh}^\nu_{\alpha_1} \times \widetilde{Coh}^\nu_{\alpha_2} \times \widetilde{Coh}^\nu_{\alpha_3}$ 以及（光滑）$\widetilde{\ }^\nu$ $\widetilde{\ }^\nu$投影 p_{ij}：$X \to Coh_{\alpha_i} \times Coh_{\alpha_j}$。于是 p_{13} 限制为一个适当态射

$$p_{13} : p_{12}^{-1}(Z^\nu_{\underline{\alpha_1},\underline{\alpha_2}}) \underset{X}{\times} p_{23}^{-1}(Z^\nu_{\underline{\alpha_3},\underline{\alpha_3}}) \to Z^\nu_{\underline{\alpha_1},\underline{\alpha_3}}$$

对于 $c_{ij} \in \mathrm{H}_*(Z^\nu_{\alpha_i,\ \alpha_j})$，我们定义

$$c_{12} * c_{23} = p_{13!}\left(p_{12}^*(c_{12}) \cap p_{23}^*(c_{23})\right)$$

其中，上文中的 $\cap$ 表示与光滑环境栈中支撑集的交X。注意，当 $\nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 时，栈$Z^\nu_{\gamma,\ \gamma'}$ 仅为局部有限型，但卷积积是良定义的。事实上，由于卷积积是底空间上的局部构造 Coh^ν_α，我们可以利用 [6, 第 2 节6]的形式体系，在每个拟紧开子叠（可选择为整体商栈）上定义并计算它。为方便读者，附录B中给出了这一卷积积的直接层论构造。

特别地，存在一个受限卷积积

$$* : \mathrm{H}_*(Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2}) \otimes \mathrm{H}_*(Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha}_2,\underline{\alpha}_3}) \longrightarrow \mathrm{H}_*(Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_3})$$

适用于任意区间 $I \subset]\nu - 1,\ \nu]$。对 $\mathrm{Seq}^\nu(\alpha)$ 中的所有序列对求和，我们得到结合代数

$$A^\nu_\alpha := \bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}' \in \mathrm{Seq}^\nu(\boldsymbol{\alpha})} \mathrm{H}_*(Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}), \qquad A^{\nu,I}_\alpha := \bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}' \in \mathrm{Seq}^\nu(\alpha)} \mathrm{H}_*(Z^{\nu,I}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}).$$

我们令 $A^\nu_{\alpha,\ \alpha'} = \mathrm{H}_*(Z^\nu_{\alpha,\ \alpha'})$，使得 $A^\nu_\alpha = \bigoplus_{\alpha,\ \alpha'} A^\nu_{\alpha,\ \alpha'}$。

定义 3.1 定义。 我们称 A^ν_α（分别称 $A^{\nu,\ I}_{\ \alpha}$）为与 $(\nu,\ \alpha)$（分别与 $(\nu,\ I,\ \alpha)$ 相关联的舒尔代数 ）.

下面转而讨论与 $\mathbb{P}^1$ 相关联的 KLR代数。我们可以预期，它比舒尔代数 A^2_α 更容易理解[1]。令

$$(\mathbb{Z}^2)^+_\circ = \{(1,l), l \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,1)\} \subseteq (\mathbb{Z}^2)^+ .$$

定义

$$\mathrm{Seq}^{\frac{1}{2}}_\circ(\alpha) := \{\underline{\alpha} \in \mathrm{Seq}^{\frac{1}{2}}(\alpha) |\ \forall\ i,\ \alpha_i \in (\mathbb{Z}^2)^+_\circ\}.$$

我们用记号 $\alpha \vDash \alpha$ 表示 $\alpha \in \mathrm{Seq}^2_\circ(\alpha)$。

定义 3.2. 设 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$。我们将与 α 相关联的*KLR*代数定义为以下分次子代数

$$\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}_\alpha := \bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}' \vDash \alpha} \mathrm{H}_*(Z^{\frac{1}{2}}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})$$

[1]的舒尔代数 $A^2_{\alpha\circ}$

注 3.3。 当 $\nu \notin \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 时，文献中通常将该舒尔代数称为 箭图*Schur*代数 。例如，参见 [26]。对于 Q 有限型箭图，其箭图Schur代数与 箭图-赫克代数莫里田等价，也称为 *Khovanov-Lauda-Rouquier*代数，后者有一种广为人知的图示代数表示。在有限型以外（如本文所述的情形），目前尚无箭图Schur代数的显式表示。

注意，典范限制映射 $\iota_{\nu,I}: A^{\nu}_{\alpha} \to A^{\nu,I}_{\alpha}$ 对任意 ν 和任意 $I \subset]\nu-1,\ \nu]$ 都是代数同态。此外，存在一个代数同构

$$A^{\nu}_{\alpha} \simeq \varprojlim_{I} A^{\nu,I}_{\alpha}$$

其中，极限是在 Seq(α)-分次向量空间范畴中，对所有严格开区间 $I \subset]\nu-1,\ \nu]$ 按包含关系取的。事实上，子代数栈 $Coh^{\nu,I}_{\alpha}$ 构成 Coh^{ν}_{α} 的拟紧开穷竭，因此它们在 $\pi_{\alpha}\times\pi_{\alpha'}$ 下的原像构成 $Z^{\nu}_{\alpha,\alpha'}$ 的拟紧开穷竭。

3.2. **极限构造**。 本节使用拟紧逼近定理来联系代数 A^{2}_{α}，其结构在几何朗兰兹纲领的背景下颇受关注（对于 $\mathbb{P}^1$），与研究得更为深入的克罗内克箭图舒尔代数 A^{ν}_{α}（对于 $\nu \notin \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$）。我们从定理 2.1 的以下推论开始。

命题3.4。 固定 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$, $\sigma \in]\frac{1}{2}, 1]$ 并令 $I_{\sigma} =]\sigma-1, \frac{1}{2}]$。设 $\alpha, \alpha', \alpha'' \in$ 序列 $^{\frac{1}{2}}(\alpha)$。那么存在 n_0，使得对任意 $n > n_0$，下述卷积积图示可交换。

$$\begin{array}{ccc} H_*(Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha,\alpha'}) \otimes H_*(Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha',\alpha''}) & \xrightarrow{*} & H_*(Z^{\frac{1}{2},I}_{\alpha,\alpha''}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi\otimes\Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ H_*(Z^{\nu_n,I}_{\alpha,\alpha'}) \otimes H_*(Z^{\nu_n,I}_{\alpha',\alpha''}) & \xrightarrow{*} & H_*(Z^{\nu_n,I}_{\alpha,\alpha''}) \ . \end{array}$$

证明。 该结论的证明方式与推论 2.3相同。 □

作为上述命题的直接推论，我们看到，对于任意固定的 $I =]\sigma-1, \frac{1}{2}]$，满足 $\sigma \in]\frac{1}{2}, 1]$，存在典范同构 $H_*(Z^{\nu_n,I}_{\alpha,\alpha'}) \simeq H_*(Z^{\nu_m,I}_{\alpha,\alpha'})$，对 $n, m \gg 0$ 成立，并且与卷积积相容。因此我们可以毫无歧义地写作

$$\lim_{n} A^{\nu_n,I}_{\alpha} \simeq A^{\frac{1}{2},I}_{\alpha} \ ,$$

不过，应注意不要将这个“朴素”极限与射影极限混淆。

此外，根据命题 2.6，限制映射 $A^{2}_{\alpha} \to A^{2,I}_{\alpha}$ 是满射；当 n 足够大时，限制映射 $A^{\nu}_{\alpha} \to A^{\nu_n,I}_{\alpha}$ 变为满射。

推论 3.5. 存在一个代数的典范同构

$$A^{\frac{1}{2}}_{\alpha} = \varprojlim_{I} \lim_{n} A^{\nu_n,I}_{\alpha}.$$

3.3. **多项式表示**。 固定 $\alpha_3=(\alpha)$ 于 (3.1)，注意到 $Z^\nu_{\alpha,\ \alpha}=\widetilde{Coh}^\nu_\alpha$ 并允许$\alpha_1,\ \alpha_2$ 变化，便给出一个连续表示

$$*:\ \bigoplus_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\mathrm{H}_*(Z^\nu_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})\otimes\bigoplus_{\underline{\alpha}}\mathrm{H}_*(\widetilde{Coh}^\nu_{\underline{\alpha}})\longrightarrow\bigoplus_{\underline{\alpha}}\mathrm{H}_*(\widetilde{Coh}^\nu_{\underline{\alpha}})$$

的 A^ν_α 在 $P^\nu_\alpha:=\bigoplus_\alpha\mathrm{H}_*(\widetilde{Coh}^\nu_\alpha)$ 。利用引理2.4，我们得到一个识别

$$\bigotimes_i\mathrm{H}^*(Coh^\nu_{\alpha_i})\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_*(\widetilde{Coh}^\nu_{\underline{\alpha}}),\qquad c\mapsto\pi^*_{\underline{\alpha}}(c)\cap[\widetilde{Coh}^\nu_{\underline{\alpha}}]$$

从而得到一个典范同构

$$P^\nu_\alpha=\bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathrm{Seq}^\nu(\alpha)}\bigotimes_i\mathrm{H}^*(Coh^\nu_{\alpha_i}).$$

当 $\nu=\frac{1}{2}$时，定理1.4使我们能够进一步将 P^ν_α识别为多项式代数的一个显式直和。

若 $\nu\neq\frac{1}{2}$，由 [21, 命题 4.4] 可知，多项式表示 P^ν_α是忠实的。我们猜想，对 $\nu=\frac{1}{2}$ 也同样成立。

猜想 3.6。对于任意 $\alpha\in(\mathbb{Z}^2)^+$，$A^{\frac{1}{2}}_\alpha$ 的多项式表示 $P^{\frac{1}{2}}_\alpha$ 是忠实的。

4. PBW bases of Schur algebras A^ν_α

与箭图相关的舒尔代数的 PBW 型基已有研究，例如 [21]。本节旨在构造 A^2_α 和 $\mathcal{R}_\alpha$的显式拓扑基。第 4.1-4.5 节中的所有构造都适用于任意 ν（而且对于$\nu\notin\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$通常要简单得多）；为简化记号，我们省略上标 ν。

4.1. 拆分与合并。 本段中我们令 $\nu=\frac{1}{2}$，并省略上标 ν。对于 $\alpha\in(\mathbb{Z}^2)^+$和 $\alpha,\ \alpha'\in\mathrm{Seq}(\alpha)$，若将 α 中的每个 α_i 替换为$\alpha_i^{(1)},\ \cdots,\ \alpha^{(k_i)}{}_i$即可得到 α'，则称 α' 细分了 α。对于这样一对序列，我们按如下方式关联两个矩阵（其中 s 是 α的长度）：

$$w_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}=\begin{bmatrix}\alpha_1^{(1)}&\cdots&\alpha_1^{(k_1)}&&&&&&\\&&&\alpha_2^{(1)}&\cdots&\alpha_2^{(k_2)}&&&\\&&&&&&\ddots&&\\&&&&&&&\alpha_s^{(1)}&\cdots&\alpha_s^{(k_s)}\end{bmatrix},\qquad w_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}=(w_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})^T$$

存在闭嵌入：

$$i_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}:\ \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}=Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})\hookrightarrow Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}$$
$$i_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}:\ \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}=Z_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}(w_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}})\hookrightarrow Z_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}.$$

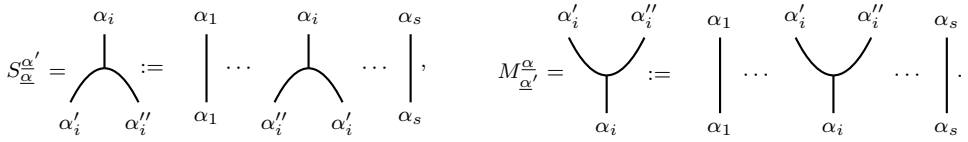
特别地，我们定义

$$S^{\underline{\alpha}}_{\underline{\alpha}'}:=(i_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})_*[Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'})]\in A_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'},\qquad M^{\underline{\alpha}'}_{\underline{\alpha}}:=(i_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}})_*[Z_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}(w_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}})]\in A_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}},$$

并分别称它们为分裂和合并。

通常用图示来表示这些元素（例如参见 [21]）。取 $\alpha=(\alpha_s,\ \cdots,\ \alpha_1)$，以及$\alpha'=(\underline{\alpha_s},\ \cdots,\ \alpha_{i+1},\ \alpha_i',\ \underline{\alpha_i''},\ \alpha_{i-1},\ \cdots,\ \alpha_1)$，其中 $\alpha_i'+\alpha_i''=\alpha_i$属于某个集合。对于这样一对序列，我们按如下方式绘制相应的分裂与合并：

(4.1)

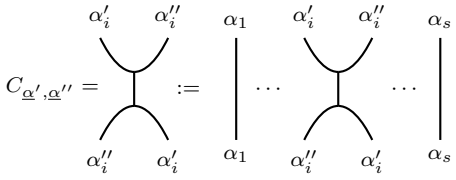


我们将这类分裂和合并称为 *elementary*。图示总是从上往下阅读。利用卷积积的结合律，很容易看出，每个分裂（分别地，每个合并）都可以写成初等拆分（分别地，初等合并）的乘积。

现在令 $\underline{\alpha},\ \underline{\alpha}'$ 如上所述，并设 $\alpha''=(\alpha_s,\ \cdots,\ \alpha_{i+1},\ \alpha_i'',\ \alpha_i',\ \alpha_{-1},\ \cdots,\ \alpha_1)$。考虑元素

$$C_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}''}:=S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}'}*M_{\underline{\alpha}''}^{\underline{\alpha}}\in A_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}''}\ ,$$

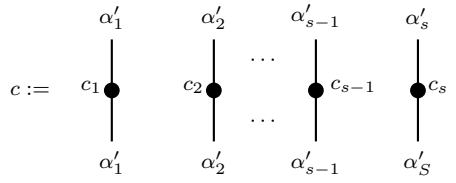
wh这称为一个初等交叉。在图示中，我们可以将其画成如下形式：



将对角线记为 $\Delta_{\alpha'}\subset Coh_{\alpha'}\times_{Coh_a}Coh_{\alpha'}$。对于任意

$$c=c_1\otimes\cdots\otimes c_s\in\bigotimes_i \mathrm{H}^*(Coh_{\alpha_i'})$$

元素 $c\cap[\Delta_{\alpha'}]\in \mathrm{H}_*(Z_{\alpha',\ \alpha'})$ 通过乘以 c 的方式作用于 $\bigotimes_i \mathrm{H}^*(Coh_{\alpha_i'})\ \subset P_\alpha$。在图示中，这由下图表示



正如我们将在第 4.4 节中所展示的，KLR 和舒尔代数 $\mathcal{R}_\alpha$，A_α 作为结合代数，由初等交叉算子、分裂和合并算子，以及典范类的乘法算子生成。

4.2. 构造　矩阵序列的构造。对每个 $w\in W(\alpha,\ \alpha')$，我们将关联一个序列

$$\underline{w}:=(w_1,w_2,\ldots,w_t)$$

“初等”（特别是相对于偏序而言极小的）矩阵。在描述这一方法之前，我们先给出一个例子。

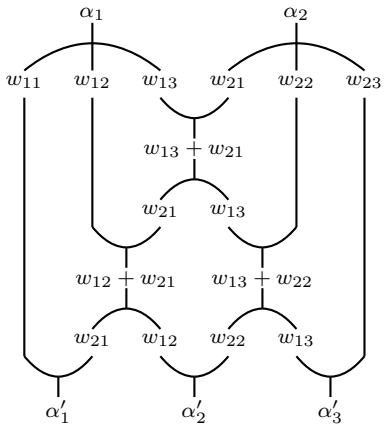


FIGURE 1. 分裂、交叉与合并序列

例 4.1. 我们来考虑 2×3 矩阵 $w \in W(\alpha,\alpha')$ 的情形。用图示来描述这一过程最为直观，见图 1 ，与之对应的是下面这个矩阵序列。对于第一个分裂，我们赋予矩阵

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & & & \\ & & & w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix},$$

我们将这对矩阵关联到第一个交叉

$$\begin{bmatrix} w_{11} & & & & & \\ & w_{12} & & & & \\ & & w_{13} & & & \\ & & w_{21} & & & \\ & & & w_{22} & & \\ & & & & w_{23} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w_{11} & & & & & \\ & w_{12} & & & & \\ & & w_{21} & w_{13} & & \\ & & & & w_{22} & \\ & & & & & w_{23} \end{bmatrix},$$

and；接下来的两个交叉也同样处理；最后，我们将该矩阵关联到最后一次合并

$$\begin{bmatrix} w_{11} & & \\ w_{21} & & \\ & w_{12} & \\ & w_{22} & \\ & & w_{13} \\ & & w_{23} \end{bmatrix}.$$

□

一般情况下，记作 $\alpha=(\alpha_s,\ \alpha_{s-1},\ \ldots,\ \alpha_1)$ $\alpha'=(\alpha'_l,\ \alpha'_{l-1},\ \ldots,\ \alpha'_1)$。我们首先对 α 应用分裂运算，将每个 α_i 分解为一个 r-元组

$$(w_{il},\ldots,w_{i2},w_{i1}),$$

以得到第一行。接下来，我们依次进行单独的交叉，每次交叉对应一个先合并后分裂的序列，从而使第一行 $(w_{s,\ l},\ w_{s,\ l-1},\ \ldots,\ w_{12},\ w_{11})$

into

$$(w_{s,l}, w_{s-1,l}, \dots, w_{1,l}, \dots, w_{s,2}, \dots, w_{12}, \dots, w_{s,1}, \dots, w_{21}, w_{11}) \ .$$

我们选择的交叉序列由下图所示置换的一个约化分解给出（约化分解的选择无关紧要）

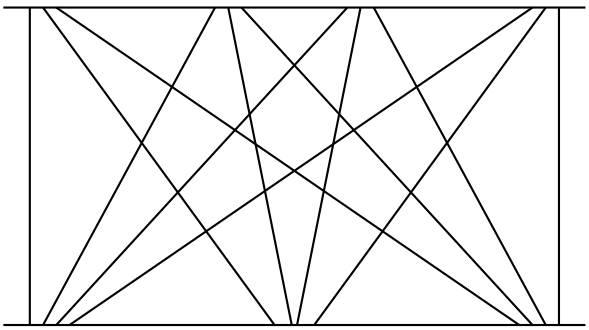


FIGURE 2. 与 $s = 4, l = 3$相关联的置换。

最后，我们进行 l 次合并，每次长度为 s，从而到达元组α'。该过程中交叉的总数很容易算出等于 $\frac{1}{4}ls(l-1)(s-1)$，我们再把第一次分裂和最后一次合并加上。如上所述，每一步都典范地关联一个关于偏序极小的矩阵。我们记

$$\underline{w} := (w_1, \dots, w_t)$$

附于我们初始矩阵 $w \in W(\alpha, \alpha')$的极小矩阵序列。我们还令

$$\underline{\beta}_0 = \underline{\alpha},\ \underline{\beta}_1,\ \dots,\ \underline{\beta}_{t-1},\ \underline{\beta}_t = \underline{\alpha}'$$

为序列(α)中满足 $w_i \in W(\beta_{i-1}, \beta_i)$的元素序列。整数 $t = 2 + \frac{1}{2}ls(l-1)(s-1)$可视为 $W(\alpha, \alpha')$上某种形式的长度函数。

4.3. 投影映射。 对任意带有关联序列$w = (w_1, w_2, \cdots, w_t)$的 $w \in W(\alpha, \alpha')$，令 $S(w) := \prod_i Coh_{\beta_i}$ 并考虑叠

$$S(w) := Z_1 \underset{\widetilde{S}(w)}{\times} Z_2 \underset{\widetilde{S}(w)}{\times} \cdots \underset{\widetilde{S}(w)}{\times} Z_t \ ,$$

其中

$$Z_i = \widetilde{S}(w) \underset{\widetilde{Coh}_{\beta_{i-1}} \times \widetilde{Coh}_{\beta_i}}{\times} Z_{\beta_{i-1}, \beta_i}(w_i) \ .$$

换言之，$S(w)$ 参数化了元组 $(F, F^{(0)}_{\cdot}, \dots, F(t)_{\cdot})$，其中 $F \in Coh_\alpha$, $F(i)_{\cdot}$ 是 F 的一个 β_i 型滤过，对任意 i 都成立，并且旗标 $F^{(i-1)}_{\cdot}, F(i)_{\cdot}$ 的相对位置为 w_i。注意，$\widetilde{\ }$ 态射 $Z_{\beta_{i-1}, \beta_i}(w_i) \to Coh_{\beta_{i-1}} \times Coh_{\beta_i}$ 对所有 i 都是适当的，这是由 w_i 的极小性所致。因此，$\widetilde{\ }$ 典范态射 $S(w) \to S(w)$ 也是适当的。存在自然的投影态射

$$\Pi_{i,j} : S(w) \longrightarrow \widetilde{Coh}_{\beta_i} \times \widetilde{Coh}_{\beta_j}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，特别是映射 $\Pi_{0,\,t}$：$S(w) \longrightarrow Coh_{\alpha} \times Coh_{\alpha'}$。我们令

$$U(w) := \Pi_{0,t}^{-1}(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)) \ .$$

命题 4.2。对于任意 α、$\alpha' \in$ 序列(α) 以及任意 $w \in W(\alpha、\alpha')$，有

$$\Pi_{0,t}(S(w)) \subseteq Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w) \ , \tag{4.2}$$

$$(\Pi_{0,t})_{|U(w)} : U(w) \xrightarrow{\sim} Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w) \ . \tag{4.3}$$

特别地，$U(w)$ 是 $S(w)$的一个开子叠。

证明。固定长度分别为 α、$\alpha' \in$序列(α) s和 l，并令 $w \in W(\alpha、\alpha')$。令 $(F.、G.) \in \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}} \times \widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}'}$，并假设存在一个旗标序列 $H.^{(i)} \in \widetilde{Coh}_{\beta_i}$，对应于 $i = 0、\ldots\ldots、t$，使得 $H.^{(0)} = F.$、$H.^{(t)} = G.$，且

$$(H.^{(i-1)}, H.^{(i)}) \in Z_{\underline{\beta}_{i-1},\underline{\beta}_i}(w_i), \qquad (i = 1, \ldots, t) \ . \tag{4.4}$$

该命题可由以下两个陈述推出：

(a) $[F_i \cap G_j] \geq \sum_{k\leq i、\ h\leq j} w_{hk}$,

(b) 若 $(F.、G.) \in Z_{\alpha、\alpha'}(w)$ 则存在唯一的旗标集合 $(H.^{(i)})_{i=0,\ \ldots\ldots,\ t}$，满足条件 (4.4)。

通过构造，旗标的各个因子

$$H.^{(1)} = (H_1^{(1)} \subseteq H_2^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq H_{sl}^{(1)})$$

属于以下各类：w_{11}，w_{12}、……、$w_{s,\ l-1}$，w_{sl}，并且对于 $i = 1$、……、s，$F_i = H_{il}^{(1)}$。同样，旗标的各个因子

$$H.^{(t-1)} = H_1^{(t-1)} \subseteq H_2^{(t-1)} \subseteq \cdots \subseteq H_{ls}^{(t-1)}$$

属于以下各类：w_{11}、w_{21}、……、$w_{s-1、\ l}$、w_{sl}和 $G_i = H_{si}^{(t-1)}$，其中 $i = 1$、……、l。接下来，考虑图 2。我们将附着在线股上的类 w_{ij} 称为该线股的权。我们可以将图 2 切分为 t 个水平切片，除第一个和最后一个切片外，每个切片都对应于一次交叉以及一对旗标的相对位置（$H.^{(i)}$，$H.^{(i+1)}$）。特别地，在第 ℓ 条和第 $\ell+1$ 条线股之间发生交叉的切片，对应于一对旗标（$K.$，$L.$），满足对所有 $j \neq \ell$都有 $K_j = L_j$。在这种情况下，我们得到 $K_\ell \cap L_\ell$的类的如下界：

$$[K_\ell \cap L_\ell] \geq [K_\ell] + [L_\ell] - [L_{\ell+1}] = [K_\ell] - w \tag{4.5}$$

其中 w 是从右向左延伸的线股的权。

接下来我们作如下组合观察：表示交叉序列的图示2 中的连通区域集合，与大小为（s，l）的矩形框内的分拆集合之间存在一个典范双射。沿每条水平线，考虑从左向右穿过的弦的权，直至到达给定区域R，并将其与矩阵 $w = (w_{ij})_{i,\ j}$（按构造，这构成一个分拆λ）的相应子集对应，即可得到这一双射。下方的图 3 给出了一个例子。对于任意一个（$H.^{(0)}$，……，$H.^{(t)}$）$\in S(w)$，都可以将相应的子对象旗标填入交叉图示的各个区域，使得沿着一条从左向右、位于 $1 \leq \ell \leq t-1$ 层的水平线读取，即可得到第 ℓ步的滤过。

为证明 (a)，我们将给出一个显式的子对象 $U \subseteq F_i \cap G_j$，其类至少为 $\sum_{k\leq i, h\leq j} w_{hk}$，由旗标 $H.^{(1)}$与 $H.^{(t-1)}$构成。我们断言，$F_i \cap G_j$ 具有一个子对象，其类至少

为所有满足以下条件的弦的权之和：其（顶部）起点位于位置 $\le il$，且其（底部）终点位于位置 $\le sj$，即所有从顶部前 i 个簇出发、并终止于底部前 j 个簇的弦。该总权容易验证等于 $\sum_{h\le i,\,k\le j} w_{hk}$。现在我们证明该断言。考虑权为 w_{ij}、连接顶部位置 $(i-1)l+j$ 与底部位置 $(j-1)s+i$ 的线股。该线股与来自左侧的 $(i-1)(l-j)$ 条弦以及来自右侧的 $(j-1)(s-i)$ 条弦交叉。从上到下，该线股对应于一列对象的序列，记作 $L_1,\dots,L_t$，始于顶层切片上的 $L_1 = H^{(1)}{}_{(i-1)l+j} \subseteq F_i$，终于底层切片上的 $L_t = H^{(t-1)}{}_{(j-1)s+i} \subseteq G_j$。注意 $L_i \subset L_{i+1}$，若第 i 个切片对应于来自右侧的交叉。每当遇到来自左侧的交叉时应用下界 (4.5)，我们便推出

$$\left[\bigcap_{u=1}^{t} L_u\right] \ge \sum_{\substack{h<i\\ k\le l}} w_{hk} + \sum_{k\le j} w_{ik} - \sum_{\substack{h<i\\ k>j}} w_{hk} = \sum_{\substack{h\le i\\ k\le j}} w_{hk}\ .$$

这就证明了 (a)，因为根据构造，$\left[\bigcap_{u=1}^{t} L_u\right] \subseteq F_i \cap G_j$。

现在我们转向 (b)。若 $(F_\cdot, G_\cdot) \in Z(w)$，那么在上文 (a) 的论证中，对于任意一对 (i,j)，我们必然有 $\bigcap_{u=1}^{t} L_u = F_i \cap G_j$。这意味着，对于每一对旗 $(K_\cdot, L_\cdot)$ 所对应的交叉，只要对所有 $i \ne \ell$ 都有 $K_i = L_i$，我们便有

$$K_\ell \cap L_\ell = K_{\ell-1} = L_{\ell-1}, \qquad (K_\ell/K_{\ell-1}) \oplus (L_\ell/K_{\ell-1}) = K_{\ell+1}/K_{\ell-1}\ . \tag{4.6}$$

我们推得，与给定区域 R 相关联的子对象 H_R，其类恰好由相关联的分划 λ_R的权之和给出。此外，在每个交叉处，已知上方和下方区域对应的子对象，就足以确定左侧和右侧区域对应的子对象（分别为交和和）。从图形上看，这表示若 $\lambda_R, \lambda_{R'}$ 是大小相同的 n 的分拆，且包含一个大小为 $n-1$ 的公共子分拆，并且若 $\lambda_{R''} = \lambda_R \cup \lambda_{R'}$，则 $H_{R''} = H_R + H_{R'}$。如同上文 (a) 中那样，沿着交叉过程利用子对象之间的包含关系进行论证，可见，与矩形分拆 $\lambda = (i^j)$ 对应区域相对应的子对象 H_R 包含 $F_i \cap G_j$。因此，等式 $[F_i \cap G_j] = \sum_{h\le i,k\le j} w_{ij}$ 意味着 $H_R = F_i \cap G_j$。这又完全确定了任意区域对应的子对象；事实上，任意分拆都可以从矩形分拆构成的集合出发，通过逐次合并少一个方框的分拆得到。□

例4.3. 让我们再次考虑情形 $s=2,\ r=3$。交叉图中区域与适合放入 2×3 矩形的分划之间的对应关系如下：

与这些分划相关联的子对象为

$$R_\emptyset = \{0\}, \qquad R_{(1)} = F_1 \cap G_1, \qquad R_{(2)} = F_1 \cap G_2, \qquad R_{(3)} = F_1,$$

$$R_{(31)} = F_1 + G_1, \qquad R_{(32)} = F_1 + G_2, \qquad R_{(1^2)} = G_1, \qquad R_{(2^2)} = G_2, \qquad R_{(3^2)} = F_2 = G_3\ .$$

□

4.4. **PBW基。** 最后，我们引入 PBW 基的概念。

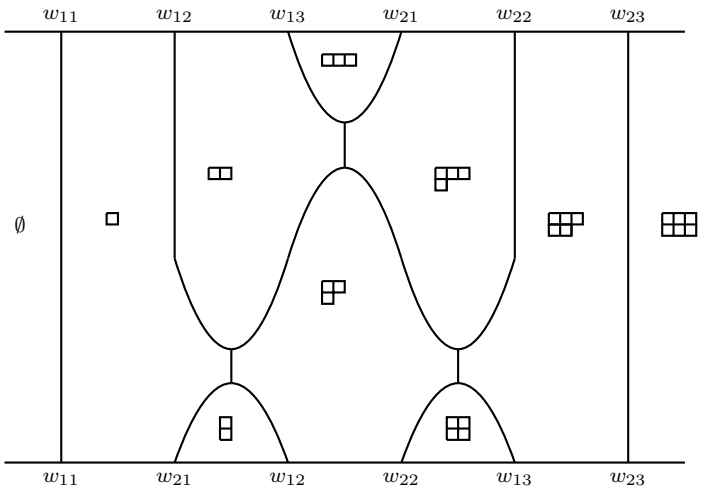


FIGURE 3. 区域与分拆

4.4.1. **定义。** 固定 $\alpha, \underline{\alpha'} \in \mathrm{Seq}(\alpha)$ 和 $w \in W(\alpha, \underline{\alpha'})$ 并将 $w = (w_1, \cdots, w_t)$ 记为相应的序列，如第 4.2 节所述。由命题 4.2 可知，我们可以定义 $\mathrm{H}_*(Z_{\alpha,\,\alpha'}(\leq w))$ 中的如下元素：

$$b_w := [Z_{\underline{\alpha},\underline{\beta}_1}(w_1)] * [Z_{\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2}(w_2)] * \cdots * [Z_{\underline{\beta}_{t-1},\underline{\alpha}'}(w_t)] \in \mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w)) \ .$$

更一般地，对于任意

$$c \in \Lambda_w := \mathrm{H}^*(\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_1}) \cong \bigotimes_{i,j} \mathrm{H}^*(Coh_{w_{i,j}})$$

定义

$$b_{c,w} := [Z_{\underline{\alpha},\underline{\beta}_1}(w_1)] * c * [Z_{\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2}(w_2)] * \cdots * [Z_{\underline{\beta}_{t-1},\underline{\alpha}'}(w_t)] \in \mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w)).$$

因此，对于 $c = \bigotimes c_{ij}$，元素 $b_{c,\,w}$ 对应于图示 4中的图示。

令

$$\mathbf{b}_{c,w} = (i_{\leq w})_*(b_{c,w}) \in \mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}),$$

其中 $i_{\leq w} : Z_{\underline{\alpha},\,\underline{\alpha}'}(\leq w) \to Z_{\underline{\alpha},\,\underline{\alpha}'}$ 是闭嵌入。

4.4.2. **主定理。** 以下结果的证明将在下一节展开。

定理 4.4。 固定 $\alpha \in (\mathbb{Z}^2)^+$。对于每个 $\alpha, \underline{\alpha'} \in$ 序列(α) 和 $w \in W(\alpha, \underline{\alpha'})$，选取一个 $\mathbb{B}_w$ 的Λ_w基。集合

$$\left\{ \mathbf{b}_{c,w} \;\middle|\; \underline{\alpha}, \underline{\alpha}' \in \mathrm{Seq}^{\frac{1}{2}}(\alpha), \quad w \in W(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}'), \ c \in \mathbb{B}_w \right\}$$

构成 A^2_α的一个拓扑基。

这一结果在 $\nu \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 情形下的类似结果见 [21, 定理 3。25]）的（任意）箭图背景下。由于偏序集$W(\alpha, \alpha')$的性质，以及 $Z^{\frac{1}{2}}_{\beta',\,\beta'}(w)$ 仅为局部拟紧，(ii) 的证明必然更复杂，参见第 2.3.1节。

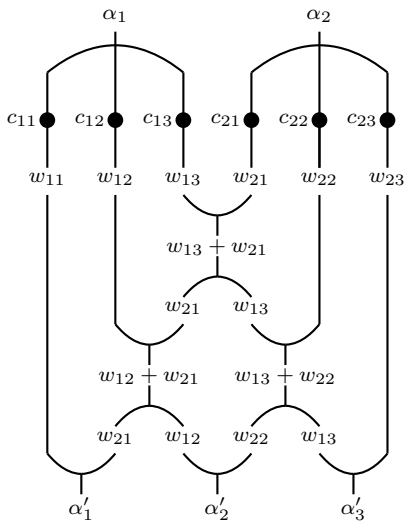


FIGURE 4. 一个PBW基元素

4.5. **定理 4.4的证明**。 从现在起，我们将简写 $Z(\sigma)$，而不写$Z_{\beta,\ \beta'}(\sigma)$——注意，$\sigma$ 决定了 β, β'。记 j_w： $Z(w) \to Z(\leq w)$为开嵌入（见引理 2.13）。

4.5.1. 我们先给出以下预备结果:

命题 4.5. 设 $\mathbb{B}_w$ 是 Λ_w的一组基，则 $\{j_w^*(b_{c,w}) |\ c \in \mathbb{B}_w\}$ 是 $H_*(Z_{\alpha,\alpha'}(w)\ \mathbb{Q})$ 的一组基 .

证明。 由引理 2.4，叠 $Z(w)$ 上有典范丛 E_{ij}，它们从到 $Coh_{w_{ij}}$ 的态射¨拉回而来，其陈类的 Künneth 分量（自由地）生成 $\mathrm{H}^*(Z(w)\ \mathbb{Q})$。注意，由命题4.2的证明可知，图示

$$\begin{array}{ccc} U(w) & \xrightarrow{pr_1} & \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{-1}} \\ \simeq\downarrow \Pi_{0,t} & & \downarrow q \\ Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha'}}(w) & \xrightarrow{\pi_w} & \prod_{i,j} Coh_{w_{ij}} \end{array}$$

是交换的。由于这些映射

$$q^* : \bigotimes_{i,j} \mathrm{H}^*(Coh_{w_{ij}}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^*(\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{-1}}, \mathbb{Q}),$$

$$\pi_w^* : \bigotimes_{i,j} \mathrm{H}^*(Coh_{w_{ij}}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^*(Z(w), \mathbb{Q})$$

是同构且 $Z(w)$ 光滑，因此只需证明

$$j_w^*(b_{1,w}) = [Z(w)] \in \mathrm{H}_*(Z(w), \mathbb{Q}). \tag{4.7}$$

当 $1 < i < t$ 和 i 为奇数（分别地，偶数）时，矩阵 w_i 表示基本合并（分别地，分裂）。因此，对任意 j，都有典范投影 $Coh_{\underline{\beta}_{2j\pm1}} \to Coh_{\underline{\beta}_{2j}}$，并且我们有

$$Z(w_{2j}) = \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j-1}} \underset{\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}}}{\times} \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}} \simeq \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j-1}},$$

$$Z(w_{2j+1}) = \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}} \underset{\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}}}{\times} \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j+1}} \simeq \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j+1}}.$$

我们将其记为

$$\kappa_j : U_j \to \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j-1}} \underset{\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}}}{\times} \widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j+1}}$$

参数化由单个指标处不同的滤子的对 $(F_\cdot,\ G_\cdot)$ 的开子叠的包含映射，设该指标为

$$F_k = G_k \subset F_{k+1}, G_{k+1} \subset F_{k+2} = G_{k+2}$$

并且 F_{k+1}/F_k 和 G_{k+1}/F_k 是 F_{k+2}/F_k中的互补子空间。注意，$U_j = Z(w^{(j)})$，其中 $w^{(j)}$ 是 $W(\beta_{2j-1},\ \beta_{2j+1})$中的一个适当矩阵，其形式为

$$w^{(j)} = \begin{bmatrix} w_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & w_{ab} & & & \\ & & w_{cd} & & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & w_{sr} \end{bmatrix}.$$

特别地，U_j 是不可约的。

引理 4.6。我们有 $\kappa_j^*\left([Z(w_{2j})] \star [Z(w_{2j+1})]\right) = [U_j]$。

证明。记

$$\underline{\beta}_{2j-1} = (a_1, a_2, \ldots, \delta, \beta, \ldots, a_N),$$
$$\underline{\beta}_{2j} = (a_1, a_2, \ldots, \delta+\beta, \ldots, a_N),$$
$$\underline{\beta}_{2j+1} = (a_1, a_2, \ldots, \beta, \delta, \ldots, a_N),$$

利用光滑态射

$$\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j-1}} \to Coh_{a_1} \times Coh_{a_2} \times \cdots \times \widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \times \cdots Coh_{a_N},$$

$$\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j}} \to Coh_{a_1} \times Coh_{a_2} \times \cdots \times Coh_{\delta+\beta} \times \cdots Coh_{a_N},$$

$$\widetilde{Coh}_{\underline{\beta}_{2j+1}} \to Coh_{a_1} \times Coh_{a_2} \times \cdots \times \widetilde{Coh}_{\beta,\delta} \times \cdots Coh_{a_N},$$

我们很容易将问题归结为卷积积的情形

$$\mathrm{H}_*\left(\widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \underset{Coh_{\delta+\beta}}{\times} Coh_{\delta+\beta}, \mathbb{Q}\right) \otimes \mathrm{H}_*\left(Coh_{\delta+\beta} \underset{Coh_{\delta+\beta}}{\times} \widetilde{Coh}_{\beta,\delta}, \mathbb{Q}\right) \to \mathrm{H}_*\left(\widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \underset{Coh_{\delta+\beta}}{\times} \widetilde{Coh}_{\beta,\delta}, \mathbb{Q}\right)$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$限制在开子集$U \subset Coh_{\delta,\ \beta} \underset{Coh_{\delta+\beta}}{\times} Coh_{\beta,\ \delta}$上，该开子集参数化满足$F_1 \oplus G_1 = F_2$的对$(F_1,\ G_1 \subset F_2 = G_2)$。注意，$U \simeq Coh_\delta \times Coh_\beta$。记$\gamma = \delta + \beta$,

$$Z_1 := \widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \underset{Coh_\gamma}{\times} Coh_\gamma \times \widetilde{Coh}_{\beta,\delta} \qquad Z_2 := \widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \times_{Coh_\gamma} \underset{Coh_\gamma}{\times} \widetilde{Coh}_{\beta,\delta}\ ,$$

$$X := \widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \times_{Coh_\gamma} \times \widetilde{Coh}_{\beta,\delta}\ .$$

注意到

$$Z_1 \underset{X}{\times} Z_2 = \widetilde{Coh}_{\delta,\beta} \underset{Coh_\gamma}{\times} \widetilde{Coh}_{\beta,\delta}$$

并将$p_i\colon Z_i \to X, i = 1,\ 2$和$p\colon Z_1 \underset{X}{\times} Z_2 \to X$记为自然态射。叠$X \times \mathbb{P}^1$带有典范丛$E_\delta^{(1)}$, $E_\beta^{(1)}$, E_γ, $E_\beta^{(2)}$, $E_\delta^{(2)}$。为简便起见，我们用相同的符号表示它们沿映射p_i, p的拉回。在$Z_1 \times Z_2$上，我们有典范短正合列x

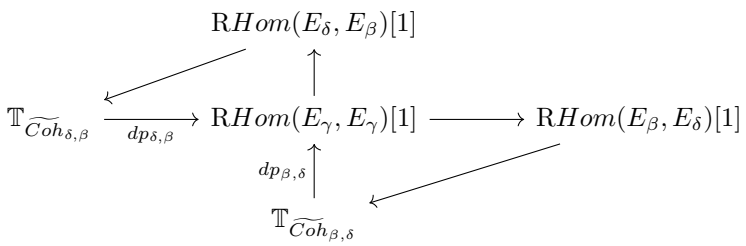
$$0 \to E_\beta^{(1)} \to E_\gamma \to E_\delta^{(1)} \to 0, \qquad 0 \to E_\delta^{(2)} \to E_\gamma \to E_\beta^{(2)} \to 0\ .$$

回顾一下，对于任意σ, $\mathbb{T}_{Coh_\sigma} = \mathrm{R}Hom(E_\sigma,\ E_\sigma)[1]$。由引理 C.1 可知，存在好三角

$$\mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\delta,\beta}} \xrightarrow{dp_{\delta,\beta}} \mathrm{R}Hom(E_\gamma, E_\gamma)[1] \longrightarrow \mathrm{R}Hom(E_\beta^{(1)}, E_\delta^{(1)})[1] \xrightarrow{+1}$$

$$\mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\beta,\delta}} \xrightarrow{dp_{\beta,\delta}} \mathrm{R}Hom(E_\gamma, E_\gamma)[1] \longrightarrow \mathrm{R}Hom(E_\delta^{(2)}, E_\beta^{(2)})[1] \xrightarrow{+1}\ .$$

在开子叠$U \subset Z_1 \underset{X}{\times} Z_2$上，我们有如下同一关系$E_\delta^{(1)} \simeq E_\delta^{(2)}$, $E_\beta^{(1)} \simeq E_\beta^{(2)}$；省略（多余的）上标后，得到$E_\gamma \simeq E_\delta \oplus E_\beta$。由此得到一个交换图



以及一个相容分裂

$$\mathrm{R}Hom(E_\gamma, E_\gamma)[1] \simeq \mathrm{R}Hom(E_\delta, E_\beta)[1] \oplus \mathrm{R}Hom(E_\beta, E_\delta)[1] \oplus \mathbb{T}_{Coh_\delta \times Coh_\beta}\ .$$

由此我们推出关于U的一个分解：

$$\mathbb{T}_{Z_1} \oplus \mathbb{T}_{Z_2} = p^*(\mathbb{T}_X) \oplus \mathbb{T}_{Coh_\delta \times Coh_\beta}\ ,$$

这意味着U没有导出结构，也就是说，复形$\mathbb{T}_{Z_1} \oplus \mathbb{T}_{Z_2} \to p^*(\mathbb{T}_X)$的 Tor 振幅位于$[0, 1]$。因此，我们处于[6,Sec.2.6.]所称的“干净相交”情形。由[6, Prop. 2.6.47]，我们得到$([Z_1] * [Z_2])_{|U} = [U]$，正如所需。□

现在我们可以完成命题 4.5 的证明。根据引理 4.6，只需验证以下等式

$$j_w^*\left([Z(w_1)] * [\overline{Z(w^{(1)})}] * \cdots * [\overline{Z(w^{(n)})}] * [Z(w_t)]\right) = [Z(w)] \tag{4.8}$$

其中$n = \frac{t-2}{2}$。这完全按照上述相同的方式完成。

□

4.5.2. 接下来我们证明这些元素 $\{\mathbf{b}_{c,\ w} \mid w \in W(\alpha,\ \alpha')\ c \in \mathbb{B}_w\}$ 张成了$A_{\alpha,\ \alpha'}$的一个稠密子空间。回忆一下，根据命题 2.10叠

$$Y^I_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} = Z^I_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \times_{\widetilde{Coh}_{\underline{\alpha}}} \widetilde{Coh}^I_{\underline{\alpha}} = \bigsqcup_{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^I} Y^I_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w),$$

是上同调纯的（参见第 2.3.3 节）。此外，利用栈$Y^I_{\alpha,\ \alpha'}$ 对 $Z_{\alpha,\ \alpha'}$ 的开穷竭可得一个同构

$$\mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}) = \varprojlim_m \mathrm{H}_*(Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}).$$

我们将证明，对于任意 $m \geq 1$，这些元素

$$\{\iota_m^*(\mathbf{b}_{c,w}) |\ w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{I_m},\ c \in \mathbb{B}_w\}$$

线性张成 $\mathbf{H}_*(Y^{I_m}_{\alpha,\ \alpha'})$，其中 $\iota_m : Y^{I_m}_{\alpha,\ \alpha'} \to Z_{\alpha,\ \alpha'}$ 是开嵌入。

固定 $m \geq 1$。由于根据引理 2.5，$W(\alpha,\ \alpha')^{I_m}$ 是有限的，我们可以将 $\leq$ 在 $W(\alpha,\ \alpha')^{I_m}$ 上的偏序细化为全序 $\trianglelefteq$。由各分层 $Y^{I_m}_{\alpha,\ \alpha'}(w)$ 的纯性，这定义了 $\mathrm{H}_*(Y^{I_m}_{\alpha,\ \alpha'})$ 上的一个有限滤过，其伴随分次为

$$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\trianglelefteq}\mathrm{H}_*(Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}) = \bigoplus_{w \in W(\underline{\alpha},\underline{\alpha}')^{I_m}} \mathrm{H}_*(Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w)). \tag{4.9}$$

固定某个 $w_0 \in W(\underline{\alpha},\ \alpha')^{I_m}$，并考虑下列具有笛卡尔方块的交换图

$$\begin{array}{ccccc} Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0) & \xrightarrow{j_{w_0}} & Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w_0) & \xrightarrow{i_{\leq w_0}} & Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_{m,w_0}} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_{m,\leq w_0}} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_m} \\ Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0) & \xrightarrow{j_{Y,w_0}} & Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w_0) & \xrightarrow{i_{Y,\leq w_0}} & Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}, \end{array}$$

其中垂直态射是开嵌入。由基变换可得

$$\iota_m^*(\mathbf{b}_{c,w_0}) = \iota_m^*(i_{\leq w_0})_*(b_{c,w_0}) = (i_{Y,\leq w_0})_*\iota^*_{m,\leq w_0}(b_{c,w_0}).$$

此外，

$$\iota^*_{m,w_0}(j_{w_0})^*(b_{c,w_0}) = (j_{Y,w_0})^*\iota^*_{m,\leq w_0}(b_{c,w_0}).$$

再次利用 $Y^{I_m}_{\alpha,\alpha'}(w_0)$ 的纯性，限制态射

$$\iota^*_{m,w_0} : \mathrm{H}_*(Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0)) \to \mathrm{H}_*(Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0))$$

是满射。由上述可知，元素 $\{\iota^*_{m,\leq w_0}(b_{c,w_0}) \mid c \in \mathbb{B}_{w_0}\}$ 张成 $\mathbf{H}_*(Y^{I_m}_{\alpha,\alpha'}(\leq w_0))$ 的一个子空间，该子空间满射映到 $\mathbf{H}_*(Y^{I_m}_{\alpha,\alpha'}(w_0))$。由此结合（4.9）即可得到所需断言。

4.5.3. 为完成定理 4.4 的证明，尚需证明集合$\{\mathbf{b}_{c,w} \mid w \in W(\alpha,\alpha')\ c \in \mathbb{B}_w\}$的线性无关。设 $\mathbf{b} = \sum_{c,\ w} a_{c,w}\mathbf{b}_{c,w} \in \mathbf{H}_*(Z_{\alpha,\alpha'})$ 为一个非平凡的（有限）线性组合。设 w_0为偏序 $\leq$在 $W(\alpha,\alpha')$ 上的一个极大元，使得存在 $c \in \mathbb{B}_{w_0}$ 满足 $a_{c,w_0} \neq 0$。由于 $\{Y^{I_m}_{\alpha,\alpha'}(w_0)\}_m$ 是 $Z_{\alpha,\alpha'}(w_0)$ 由纯开子栈构成的穷竭，故存在 m 使得 $\iota^*_{m,w_0}(\sum_c a_{c,w_0}c) \neq 0 \in \mathbf{H}_*(Y^{I_m}_{\alpha,\alpha'}(w_0))$。令

$$X = \bigcup_w Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(\leq w) \subset Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}$$

其中并集取遍有限多个元素 w，对这些元素存在 $c \in \mathbb{B}_w$ 使得$a_{c,w} \neq 0$。注意，由 w_0的极大性，$Z_{\alpha,\alpha'}(w_0)$ 在 X 中是开的。用 $f: X \to Z_{\alpha,\alpha'}$表示闭嵌入，用 h:$Z_{\alpha,\alpha'}(w_0) \to X$ 表示开嵌入。由构造，存在$b' = \sum_{c,w} a_{c,w} b_{c,w} \in$H$_*(X)$ 使得 $f_*(b') = \mathbf{b}$ 且 $h^*(b') = \sum_c a_{c,w_0} h^*(b_{c,w_0}) = \sum_c a_{c,w_0} c$。考虑具有笛卡尔方块的图示

$$\begin{array}{ccccc} Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0) & \xhookrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & Z_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_{m,w_0}} & & \uparrow{\scriptstyle \iota'_m} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_m} \\ Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}(w_0) & \xhookrightarrow{h'} & Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \cap X & \xrightarrow{f'} & Y^{I_m}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}, \end{array}$$

注意到 X 是胞腔的并集 $Z_{\alpha,\ \alpha'}(w)$，交$X \cap Y^{I_m}_{\alpha,\ \alpha'}$ 仍然是上同调纯的。由基变换可得

$$\iota_m^* f_*(b') = f'_*(\iota'_m)^*(b') \tag{4.10}$$

根据关于 m的假设，

$$(h')^*(\iota'_m)^*(b') = \iota^*_{m,w_0} h^*(b') = \iota^*_{m,w_0}\left(\sum_c a_{c,w_0} c\right) \neq 0.$$

特别地，$(\iota'_m)^*(b') \neq 0$。由$X \cap Y^{I_m}_{\alpha}$的纯性，$_{\alpha'}$，映射 f'_* 是单射。由(4.10)可推出 $\iota_m^*(\mathbf{b}) = \iota_m^* f_*(b')$，$\neq 0$ 因此$\mathbf{b} \neq 0$，正如所需。

致谢

我们衷心感谢 Benjamin Hennion、Ruslan Maksimau、Sasha Minets 和 Eric Vasserot 与我们进行了多次讨论。本工作的部分内容是在第二作者数次访问奥赛数学实验室（Laboratoire de Math´ematiques d'Orsay）以及 Simion Stoilow 数学研究所（IMAR）期间完成的，相关访问部分由奖学金资助。第二作者谨向这些机构致谢，感谢它们提供的支持与热情款待。第二作者还衷心感谢清华大学通过短期海外学习项目提供的支持。本工作部分获得 PNRR 项目 CF 44/14.11.2022“光滑曲面的 COHA 及其应用”的资助。

Appendix A. Proof of Lemma 2.2

只需考虑 X 不可约且既约的情形。我们只需证明，对于几乎所有 $i \in \mathbb{N}$，$X \cap Z_i = \varnothing$。令 $Z_{\leq i} := \bigcup_{j \leq i} Z_j$。于是，$(X_i := X \cap Z_{\leq i})_i$ 是 X 的一个递增闭子栈序列，满足 $X = \bigcup_i X_i$。由于 X 拟紧，存在一个有限图册 $\bigsqcup_k U_k/G_k \to X$，其中每个 U_k 都是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形，且 G_k 是作用于 U_k 的代数群。拉回到 U_k 后，我们得到一个递增闭子概形序列 $(X_i^k)_i$，满足 $\bigcup_i X_i^k = U_k$。只需证明，对于每个 k，$(X_i^k)_i$ 会稳定。

断言：设 U 是 $\mathbb{C}$ 上的不可约有限型概形，且 $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个真闭子概形的可数族。那么我们有 $U \neq \bigcup_i V_i$。

证明。由诺特正规化引理 [25, 引理 10.115.5], ，存在一个有限满射映射f: $U \to \mathbb{A}^d_{\mathbb{C}}$，其中 d =维数为 U。于是每个 $f(V_i)$ 都是 $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}}$中的真闭子集。将其解析化后，我们看到 $\mathbb{A}^{d,\ \mathrm{an}}_{\mathbb{C}} \setminus f(V_i)^{\mathrm{an}}$ 是一个稠密开子集。根据贝尔纲定理，它是

一个贝尔空间，因为它是局部紧的。因此 $\bigcap_i(\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}}{}^{\mathrm{an}} \setminus f(V_i)^{\mathrm{an}})$ 非空，进而 $U \setminus \bigcup_i V_i$非空。□

根据上述断言，序列 $(X_i^k)_i$ 会稳定。事实上，包含关系 $X_i^k \subsetneq U_k$ 不可能全都严格，因此对于某个 k，有 $\dim X_i^k = \dim U_k$。由于 U_k 不可约，我们必有$X_i^k = X_i^{k+1} = \cdots$。注意到 X 的图册是有限的，因此存在 n 使得 $X = Z_{\leq n}$。由于 X 不可约，存在 $j \leq n$ 使得 Z_j 在 X中稠密。令 X' 为X中 $X \setminus Z_j$ 的扎里斯基闭包。因此， X' 是 X 中的一个闭子叠，且 $\dim X' < \dim X$ 并且 $X = Z_j \cup X'$。对 X' 的每个不可约分支（有限个）重复先前的论证，并注意到维数每次都严格下降，该过程会在有限次迭代后停止，因为 X 是拟紧的，因而具有有限的克鲁尔维数。

Appendix B. Convolution in Borel-Moore homology

这里我们给出一种层论描述，说明如何通过卷积积来定义舒尔代数 A_α^ν。这对专家而言想必是众所周知的，但我们未能找到确切的参考文献。

设 Y_i 和 X 是 $i = 1,2,3$ 上的阿廷叠，且叠之间存在适当态射 $q_i\colon Y_i \to X$。假设 X 光滑，并定义 $Z_{ij} := Y_i \underset{X}{\times} Y_j$。由于存在笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} Z_{12} \underset{Y_2}{\times} Z_{23} & \longrightarrow & Y_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_{13}} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ Z_{13} & \longrightarrow & X \end{array}$$

投影 $p_{13}\colon Z_{12} \times Z_{23} \to Z_{13}$ 是适当的。我们有如下交换图，其中包含笛卡尔^{Y_2}方块

$$\begin{array}{ccccc} Z_{12} \underset{Y_2}{\times} Z_{23} & \xrightarrow{a} & Z_{12} \times Z_{23} & & \\ \downarrow{\scriptstyle q_{123}} & & \downarrow{\scriptstyle q_{12}\times q_{23}} & \searrow^{\pi} & \\ X & \xrightarrow{\Delta_X} & X \times X & \xrightarrow{\pi'} & pt \end{array},$$

其中 Δ_X 是对角嵌入。由于叠 X 光滑， Δ_X 是光滑叠之间的态射。因此， Δ_X 是导出局部完全交，并存在纯性变换:

$$\Delta_X^* \to \Delta_X^![-2\dim(X)],$$

见 [17, 注 3。8]。这引出一串态射

$$\begin{aligned} \pi'_*(q_{12}\times q_{23})_*(\omega_{Z_{12}} \boxtimes \omega_{Z_{23}}) &\to \pi'_*(\Delta_X)_*\Delta_X^*(q_{12}\times q_{23})_*(\omega_{Z_{12}} \boxtimes \omega_{Z_{23}}) \\ &\to \pi'_*(\Delta_X)_*\Delta_X^!(q_{12}\times q_{23})_*(\omega_{Z_{12}} \boxtimes \omega_{Z_{23}})[-2\dim(X)] \\ &\xrightarrow{\sim} \pi'_*(\Delta_X)_*(q_{123})_*a^!(\omega_{Z_{12}} \boxtimes \omega_{Z_{23}})[-2\dim(X)] \\ &= \pi_*a_*\omega_{Z_{12}\underset{Y_2}{\times} Z_{23}}[-2\dim(X)]\ . \end{aligned} \tag{B.1}$$

取整体截面后，我们得到一个态射（带支撑的交）：

$$\cap : \mathrm{H}_*(Z_{12},\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}_*(Z_{23},\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(Z_{12} \underset{Y_2}{\times} Z_{23},\mathbb{Q})$$

其同调次数为 $-2\dim(X)$。卷积积现在定义如下:

$$\mathrm{H}_*(Z_{12},\mathbb{Q}) \otimes \mathrm{H}_*(Z_{23},\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_*(Z_{13},\mathbb{Q}), \qquad c \otimes c' \mapsto (p_{13})_*(c \cap c')\ .$$

Appendix C. Computation of a differential

令 $\sigma,\lambda\in(\mathbb{Z}^2)^+,\gamma=\sigma+\lambda$ 并令

$$Coh_\sigma\times Coh_\lambda \xleftarrow{q_{\sigma,\lambda}} \widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda} \xrightarrow{p_{\sigma,\lambda}} Coh_\gamma$$

是第 1.2.1 节中定义的对应。令 E_σ，E_λ，E_γ 表示 $Coh_{\sigma,\lambda}\times\mathbb{P}^1$ 上的重言层$\widetilde{\ }$，它们是从 Coh_σ，Coh_λ 和 Coh_γ 拉回的。由短正合列

$$0\to E_\lambda\to E_\gamma\to E_\sigma\to 0$$

$\widetilde{\ }$的相干层在 $Coh_{\sigma,\lambda}\times\mathbb{P}^1$ 上给出典范态射

$$f:\mathrm{R}Hom(E_\gamma,E_\gamma)\to\mathrm{R}Hom(E_\lambda,E_\sigma),\qquad g:\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)\to\mathrm{R}Hom(E_\gamma,E_\gamma)\ .$$

最后，回顾一下，对于任意 ν，都有 $\mathbb{T}_{Coh_\nu}=\mathrm{R}Hom(E_\nu,E_\nu)[1]$。

本附录旨在证明以下结论

引理 C.1. 微分 $dp_{\sigma,\lambda}$ 在 $D^b_{coh}(\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda})$ 中构成一个特异三角

$$\mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda}}\xrightarrow{dp_{\sigma,\lambda}}RHom(E_\gamma,E_\gamma)[1]\longrightarrow RHom(E_\lambda,E_\sigma)[1]\xrightarrow{+1}\ .$$

证明。我们有

$$\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda}=\mathrm{Tot}\left(\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1]\right)=\mathrm{SpecSym}_{Coh_\sigma\times Coh_\lambda}\left(\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1]\right)^\vee$$

因此也得到一个特异三角

$$\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1]\to\mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda}}\to\mathbb{T}_{Coh_\sigma\times Coh_\lambda}\xrightarrow{+1}\ .$$

这个交换方块

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda}} & \xrightarrow{dp_{\sigma,\lambda}} & \mathrm{R}Hom(E_\gamma,E_\gamma)[1]\\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g}\\ \mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1] & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1]\end{array}$$

通过三角范畴的八面体公理，导出一个由特异三角组成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & +1\uparrow & & +1\uparrow & & \\
 & & \begin{array}{c}\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\sigma)[1]\\ \oplus\mathrm{R}Hom(E_\lambda,E_\lambda)[1]\end{array} & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N\xrightarrow{+1}\\
 & & dq_{\sigma,\lambda}\uparrow & & \uparrow & & \mathrm{Id}\uparrow\\
 & & \mathbb{T}_{\widetilde{Coh}_{\sigma,\lambda}} & \xrightarrow{dp_{\sigma,\lambda}} & \mathrm{R}Hom(E_\gamma,E_\gamma)[1] & \xrightarrow{f'} & N\xrightarrow{+1}\\
 & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\
\mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1] & & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & & \mathrm{R}Hom(E_\sigma,E_\lambda)[1] & &
\end{array}$$

由中间列和顶行，我们推出 $N\simeq\mathrm{R}Hom(E_\lambda,E_\sigma)[1],$，其中 $f'=f$ 为典范映射。□

References

[1] Pramod N. Achar。 *Perverse sheaves and applications to representation theory*，第258卷，属于 *Math. Surv. Monogr.*罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2021年。[2] Ibrahim Assem、Andrzej Skowronski与Daniel Simson。 *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of Representation Theory*。伦敦数学学会学生教材。剑桥大学出版社，2006年。[3] Pierre Baumann与Christian Kassel。射影直线上相干层范畴的Hall代数。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*，2001(533):207–233，2001年。[4] Tom Bridgeland。三角范畴上的稳定性条件。 *Ann. of Math. (2)*，166(2):317–345，2007年。[5] Erik Carlsson与Anton Mellit。洗牌猜想的一个证明。 *Journal of the American Mathematical Society*，31(3):661–697，2018年。[6]N. Chriss与V. Ginzburg。 *Representation Theory and Complex Geometry*。现代Birkh¨auser经典丛书。Birkh¨auser波士顿，2010年。[7] William Crawley-Boevey与Jan Schr¨oer。模空间簇的不可约分支。 *Journal für die reineund angewandte Mathematik*，2002(553):201–220，2002年。[8] Pierre Deligne。霍奇´理论：II。 *Publications Mathématiques de l'IHÉS*，40:5–57，1971年。[9] Pierre Deligne。霍奇´理论：III。 *Publications Mathématiques de l'IHÉS*，44:5–77，1974年。[10] Duiliu-Emanuel Diaconescu、Mauro Porta、Francesco Sala、Olivier Schiffmann与Eric Vasserot。曲面上一维层的上同调Hall代数与杨氏量子群。 *arXiv preprint arXiv:2502.19445*，2025年。[11] Robin Hartshorne。 *Algebraic Geometry*，第52卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。Springer，1977年。[12] Jochen Heinloth。曲线上相干层模叠的上同调。载于 *Geometry and arithmetic*，EMS大会报告丛书，第165–171页。欧洲数学会，苏¨黎世，2012年。[13] Seok-Jin Kang、Masaki Kashiwara与Myungho Kim。对称箭图Hecke代数与量子仿射代数的R矩阵。 *Inventiones mathematicae*，211(2):591–685，2018年。[14] Seok-Jin Kang、Masaki Kashiwara、Myungho Kim与Se-jin Oh。丛代数的幺半范畴化。 *J. Amer. Math. Soc.*，31(2):349–426，2018年。[15] M. M. Kapranov。艾森斯坦级数与量子仿射代数。 *Journal of Mathematical Sciences*，84(5):1311– 1360，1997年。[16] Mikhail Kapranov与 ´Eric Vasserot。曲面的上同调Hall代数与因子化上同调。*Journal of the European Mathematical Society*，25(11):4221–4289，2023年。[17] Adeel A Khan。导出叠的虚基本类i。 *arXiv preprint arXiv:1909.01332*，2019年。[18] Mikhail Khovanov与Aaron D. Lauda。量子群范畴化的图示方法，I。
Representation Theory. An Electronic Journal of the American Mathematical Society，13:309–347，2009年。[19] Mikhail Khovanov与Aaron D. Lauda。量子群范畴化的图示方法II。
Transactions of the American Mathematical Society，363(5):2685–2700，2011年。[20] Ruslan Maksimau与Alexandre Minets。曲线的KLR代数与舒尔代数及半尖点表示。*International Mathematics Research Notices*，2023(8):6976–7052，03 2022。[21] Tomasz Przezdziecki。箭图Schur代数与上同调Hall代数。预印本。arXiv: 1907.0367.，2019年。[22] Raphael Rouquier。2-Kac-Moody代数。预印本。arXiv: 0812.5023，2008年。[23]Olivier Schiffmann。典范基与曲线上层的模空间。 *Inventiones Mathematicae*，165(3):453–524，2006年。[24] Peng Shan、Michela Varagnolo与Eric Vasserot。量子环代数的相干范畴化：SL(2)情形。
Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)，2022(792):1–59，2022年。[25] Stacks Project作者。 *Stacks Project*。 https://stacks.math.columbia.edu，2018年。[26] Catharina Stroppel与Ben Webster。2-块Springer纤维：卷积代数与相干层。 *Com-ment. Math. Helv.*，87(2):477–520，2012年。[27] M. Varagnolo与E. Vasserot。典范基与KLR代数。 *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]*，659:67–100，2011年。[28] Ben Webster。纽结不变量与高阶表示论。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，250(1191):v+141，2017年。

(Olivier Schiffmann) Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université de Paris-Saclay, Bât.425, 91405Orsay Cedex, France, UMR8628 (CNRS), And Simion Stoilow Institute of Mathematics, Bucharest, Ro-maniaEmail address: olivier.schiffmann@universite-paris-saclay.fr(Fang Yang)
Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, GermanyEmail address: f.yang@mpim-bonn.mpg.de