Draft version March 3, 2026年使用 AASTeX61 的 LATEX 双栏样式排版

0.2 至 1 天文单位之间的湍流加热：一项数值研究

Victor Montagud-Camps,[1] Roland Grappin,[1] and Andrea Verdini[2]

[1] *LPP, Ecole Polytechnique, CNRS, France*[2] *LPP, Ecole Polytechnique, CNRS, France and Università di Firenze, Dipartimento di Fisica e Astronomia*

（收稿日期：2016年7月1日；修订日期：2016年9月27日；接受日期：2017年12月12日）

投稿至《天体物理学杂志》

摘要

太阳风的加热是理解其动力学和加速过程的关键。观测到的太阳风质子温度径向下降速度比绝热预测慢，人们认为这是由湍流耗散造成的。要产生观测到的 $1/R$ 下降，耗散率必须达到特定水平，而该水平又随温度、风速和日心距离变化。我们希望证明，磁流体力学湍流模拟能够产生 $1/R$ 剖面。本文研究以准二维谱各向异性为特征的慢太阳风。我们采用EBM（膨胀盒模型）方程，将平均径向太阳风造成的膨胀纳入三维磁流体力学方程，从而能够追踪0.2至1天文单位之间的等离子体演化。我们改变初始参数，包括马赫数、膨胀参数、等离子体贝塔，以及能谱的特性，如谱范围和斜率。假设湍流在0.2天文单位处以马赫数为1开始，且三维谱主要垂直于平均磁场，我们发现，平均而言，径向温度剖面接近 $1/R$ 。这是以限制初始谱范围为代价实现的；由于高马赫数下可达到的雷诺数有限，惯性区内可用的模态数量较少。

关键词：磁流体力学（MHD）方法：数值方法 - 太阳风 - 太阳：日球层 - 湍流 - 波

arXiv:2603.01276v1 [physics.space-ph] 1 Mar 2026

通讯作者：Roland GrappinRoland.Grappin@lpp.polytechnique.frVictor.Montagud-camps@lpp.polytechnique.frRoland.Grappin@lpp.polytechnique.frVerdini@arcetri.astro.it

1. 引言

太阳风中质子温度的径向演化尚未得到充分解释。从0.2天文单位到1天文单位，太阳风以变化很小的平均速度沿径向膨胀。观测表明，在这一区间内质子温度的下降速率并不符合球形膨胀流的绝热冷却：观测到的冷却速率比 $T \propto R^{-4/3}$ 所表示的温度演化更慢 $T \propto R^{-\xi}$，对于 $\xi \in [0.8, 1]$（Totten 等（1995））。这种额外加热的起因可能是太阳风中湍流状态的发展，它会产生显著的加热（例如，Matthaeus 和 Velli（2011年）；Carbone 等人（2009年）；Vasquez 等人（2007年）；Coburn 等人（2012））， 但另请参阅 Hellinger 等人（2013）以及Scudder （2017年）， 了解一种并非基于湍流级联起源的解释。

我们知道，在准定常不可压缩湍流中，湍流能量（即动能与磁能之和）会沿着惯性区级联，而不会耗散。当能量到达耗散尺度时，便会转化为热量。若这一过程是准定常的，则加热率可通过耗散率（若已知小尺度耗散过程）或能量级联率来获得。耗散机制发生在亚离子尺度，而当前测量手段尚无法探测这些尺度，因此我们对相关加热所知甚少。相比之下，级联率可在大得多的尺度（惯性区尺度）上计算，因此分析太阳风数据以获取湍流加热时，通常采用这一方法。

为了了解湍流加热是否是太阳风温度非绝热下降的原因，需要计算产生观测到的温度剖面所需的加热率。利用基于内能方程的论证即可得到这一加热率（例如，Vasquez 等人(2007年)，见下文第 2.3 节）。具体而言，该论证表明，径向幂律的存在意味着能量级联率 Q、太阳风速度 U、质子温度 T_p 与日心距离 R之间存在直接关系：

$$Q = (1/2)(k_B/m)UT_p/R \tag{1}$$

与该标度相关的系数为 1/2 $T_p \propto 1/R$，我们在此将其作为代表性标度采用。方程1 表达了两种衰减量之间的平衡：一方面是级联率，它是湍流量；另一方面是质子温度，它则不是。

通过计算磁场的三阶矩，可以获得最准确的级联率测量值分布（Politano 和 Pouquet（1998））。此类测量表明，上述关系式（1）在 1天文单位处成立（Coburn 等, 2012；Stawarz 等（2009）），在更远的距离处也成立（Marino 等（2008）），尽管级联率的精确值在一定程度上取决于对角谱三维几何所作的假设（Verdini 等（2015））。

在 0.3 至 1 天文单位之间存在 $1/R$ 这一剖面，表明方程（1）中的平衡在整个距离范围内也可能成立，但目前尚无级联率的测量结果，也没有证据（无论是理论还是数值方面）证明内日球层确实达到了这种平衡。事实上，先前验证方程（1）的尝试采用了非线性耦合经过简化的太阳风湍流模型（Tu 1988；Tu和 Marsch 1997；Smith等人 2001；Breech等人 2009）。这些模型确实成功再现了太阳风温度的下降趋势，但其结果与观测相符，依赖于对自由参数的选择。

我们在此旨在考察，在何种条件下，可以通过直接数值模拟得到湍流加热与温度之间的这种关系以及相应的温度剖面。事实上，极有可能并非所有靠近太阳的湍流条件都能在0.3–1天文单位的距离范围内，使湍流级联率与温度之间产生如此紧密的调节，因此该问题的数值解将为靠近太阳处的湍流性质提供约束。

我们直接计算温度与加热随距离的演化，依次采用等离子体在最小日心距离（此处为0.2天文单位）处的不同初始状态。为此，我们使用经膨胀修正的磁流体力学方程，即膨胀盒模型或EBM（Grappin 等人（1993））。我们在本工作中研究慢太阳风情形，其中湍流主要以二维几何存在（Dasso 等人（2005）；Verdini 和 Grappin（2016））。能够导致式1 在0.2天文单位与1天文单位之间成立的初始条件，将由以下方面表征：(i) 谱性质；(ii) 整体等离子体性质，如膨胀参数、马赫数、等离子体 β，以及平均磁场角度与径向的夹角。

2. 方程、控制参数、诊断工具、初始条件

2.1. EBM方程（理想情况）

这里简要介绍扩展计算盒模型（EBM）方程（Grappin 等人 1993；Grappin和Velli 1996；Dong等人 2014），该模型可用于追踪由日下

→ → 风输运的湍流演化。我们用 $U_0 = U_0\hat{e}_r$ 表示平均风速。

假设太阳风沿径向运动，且速度恒定（U_0=const）。计算盒所在的半径 R 随时间变化， τ 具体如下

$$R(\tau) = R_0 + U_0\tau \tag{2}$$

其中， R_0 为计算盒的初始位置。空间、时间、速度、温度和密度采用以下单位：

$$L_0/(2\pi) \tag{3}$$
$$t^0_{NL} = L_0/(2\pi u^0_{rms}) \tag{4}$$
$$u^0_{rms} \tag{5}$$
$$m_p(u^0_{rms})^2/(2k_B) \tag{6}$$
$$\rho^0 \tag{7}$$

其中， ρ^0 为等离子体的初始平均密度， u^0_{rms} 为涨落的初始均方根速度， t^0_{NL}为基于初始均方根速度定义的初始非线性时间， L_0 为垂直于径向的计算盒初始尺寸。

区域初始时沿径向拉长了 $a_x = 5$ 倍，见图 1）。将垂直于径向的最长方向（除以 2π）作为单位长度是合理的，因为正如我们将看到的，谱级联优先发生在垂直于平均磁场的方向上，因此在距离较小时也垂直于径向（此处平均磁场几乎与径向平行；见图 8）。

EBM方法基于这样一个观点：仅仅改变伽利略参考系并不足以消除膨胀。即使改变了参考系，等离子体仍会膨胀：它会沿垂直于径向的方向被拉伸。换言之，垂直于平均径向方向的系统性速度场依然存在。为了恢复通常的理论框架，使等离子体体积中的涨落量均匀（即平均值为零），我们需要扣除这种横向膨胀。为此，我们使用与横向膨胀共动的坐标：

$$t = \tau \tag{8}$$
$$x = (X - U_0\tau)/a_x \tag{9}$$
$$y = Y/a(t) \tag{10}$$
$$z = Z/a(t) \tag{11}$$

参数 $a_x = L_x/L_y = L_x/L_z = 5$ 是区域的初始长宽比。参数 a 定义为归一化日球距离：

$$a = R(t)/R_0 = 1 + \epsilon t \tag{12}$$

其中， $\epsilon = da/dt$ 是膨胀参数，定义为横向（垂直于径向）特征膨胀时间与周转时间的初始比值：

$$\epsilon = \frac{\tau_{NL}}{\tau_{exp}} = \frac{U_0/R_0}{k_0 u_{rms}} \tag{13}$$

其中 k_0 为横向的最小波数。在距离 $R(t)$处，区域的长宽比因此为 $L_\perp/L_{radial} = a(t)/a_x$。

省略耗散项后的EBM方程（但见下文方程20-21）为

$$\partial_t\rho + \nabla(\rho\vec{u}) = -2\rho(\epsilon/a) \tag{14}$$
$$\partial_t P + (\vec{u}.\nabla)P + \gamma P\nabla.\vec{u} = -2\gamma P(\epsilon/a) \tag{15}$$
$$\partial_t\vec{u} + \vec{u}.\nabla\vec{u} + \nabla(P + B^2/2)/\rho - \vec{B}.\nabla\vec{B}/\rho = -\vec{\mathbb{U}}(\epsilon/a) \tag{16}$$
$$\partial_t\vec{B} + \vec{u}.\nabla\vec{B} - \vec{B}.\nabla\vec{u} + \vec{B}\nabla.\vec{u} = -\vec{\mathbb{B}}(\epsilon/a) \tag{17}$$
$$P = \rho T \tag{18}$$

在这些方程中， ρ 为密度， P为总压强，B为磁场，u为速度涨落$u = U - U_0\hat{e}_r$， U 为总速度。含有 $\gamma = 5/3$ 的压力方程就是理想气体方程。 $T = T_i = T_e$ 为质子（和电子）温度， m_p为质子质量。

上述方程是标准的磁流体力学方程，但有两处修改。首先，右侧增加了包含恒定平均速度 U_0 的线性项：$\mathbb{U} = (0, u_y, u_z)$ 和$\mathbb{B} = (2B_x, B_y, B_z)$。因此，众所周知，阻尼项会因分量不同而异。请注意，下文有时会使用这些阻尼项的有量纲形式，即 $\epsilon/a(t) \rightarrow U_0/R(t)$。其次，我们采用了梯度的新表达式，以考虑等离子体体积随时间/距离增加而不断增强的横向拉伸：

$$\nabla = ((1/a_x)\partial_x, (1/a(t))\partial_y, (1/a(t))\partial_z) \tag{19}$$

Ox 沿径向，因此膨胀只发生在另外两个方向上。

随后，所有场 $\rho(x, y, z)$、 $u(x, y, z)$ 等都被视为在与平均膨胀共同运动的区域的三个方向上均具有周期性。这使得空间离散可采用伪谱方法，与标准拉格朗日方法相同。时间离散采用三阶龙格-库塔方法。

2.2. 定义黏性-电阻项和耗散率

扩散项写作：

$$\partial_t \vec{u}|_{dis} = (\mu/\tilde{\rho})(\tilde{\nabla}^2\vec{u} + (1/3)\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\cdot\vec{u})) \quad (20)$$

$$\partial_t \vec{B}|_{dis} = \eta\tilde{\nabla}^2\vec{B} \quad (21)$$

$$\partial_t P|_{dis} = \bar{\rho}\kappa\tilde{\Delta}T \quad (22)$$

其中，$\tilde{\rho}$ 是以平均值归一化后的密度：

$$\tilde{\rho} = \rho/\bar{\rho} = a^2\rho \quad (23)$$

而 $\bar{\rho} = 1/a^2$ 是等离子体的平均密度。注意，归一化密度 $\tilde{\rho}$ 的平均值为 **1**。还要注意，密度以两种不同的方式出现在耗散项中：在动量方程中使用归一化密度 $\tilde{\rho}$，在压力方程中使用平均密度 $\bar{\rho}$。在均匀（不膨胀）情形下，方程 20-21给出的耗散项与磁流体力学中的标准形式相同。在膨胀情形下，这些耗散项有两个具体差异。首先，纳布拉算子的各分量是共动导数，不含各向异性前因子（$1/a_x$，$1/a$，$1/a$）：

$$\tilde{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (24)$$

这样一来，耗散在共动坐标中可以是各向同性的，也就是说，能够最有效地利用可用的傅里叶域。其次，我们设定黏度、电阻率和电导率 κ 随时间/距离增加而减小（见下文方程 12）：

$$\kappa = \mu = \eta = \mu_0/a \quad (25)$$

这种选择可以在一定程度上缓和湍流振幅快速阻尼所导致的雷诺数下降。

由方程 20-21 可得耗散项对湍流能量演化的贡献：

$$\frac{d}{dt}(\rho u^2/2 + B^2/2)|_{diss} = -\bar{\rho}Q_\nu + \tilde{\nabla}\cdot F \quad (26)$$

其中，**F** 是一个不会改变平均湍流能量的通量。湍流加热由黏性-电阻性阻尼项 Q_ν 给出，且始终为正：

$$Q_\nu = \mu(\tilde{\omega}^2 + 4/3\ (\tilde{\nabla}\cdot u)^2) + \eta\tilde{J}^2 \quad (27)$$

其中 $\tilde{\omega} = \nabla\times u$，且 $J = \nabla\times B$。

最后，湍流能量损失的部分会传递给内能；可表示为：

$$\partial_t P + (\vec{u}.\nabla)P + \gamma P\nabla.\vec{u} + 2\gamma P(\epsilon/a) = \bar{\rho}\kappa\tilde{\Delta}T + (\gamma-1)\bar{\rho}Q_\nu \quad (28)$$

其中 κ 为热导率。由于下文将更直接地关注温度 **T**，我们也写出它的方程：

$$\partial_t T + (\vec{u}.\nabla)T + (\gamma-1)T\nabla.\vec{u} + 2(\gamma-1)T(\epsilon/a) = (\kappa/\tilde{\rho})\tilde{\Delta}T + (\gamma-1)Q_\nu/\tilde{\rho} \quad (29)$$

2.3. 临界加热、级联率和参数 M^2/ϵ

我们在此重新推导公式 1，该公式将导致温度下降的临界加热表示为 $T_p \propto 1/R_\circ$ 为此，我们需要对公式 29作空间平均，从而消去热传导项。经检验，其他各项均可忽略不计，例如，使用量纲因子 U_0/R 代替 $\epsilon/a(t)$：

$$\overline{\vec{u}.\nabla T} = \overline{\vec{u}.\nabla\delta T} \ll 2\gamma\bar{T}U_0/R \quad (30)$$

由此得到平均温度（空间平均值用上划线或尖括号表示）：

$$\partial_t\overline{T} + 2(\gamma-1)\overline{T}(\epsilon/a) = (\gamma-1)\langle Q_\nu/\tilde{\rho}\rangle \simeq (\gamma-1)\overline{Q_\nu} \quad (31)$$

其中，最后一个等式是在假设 $\delta\rho/\rho \ll 1$的条件下得到的。现在，我们用径向导数 $\partial_l \to U_0\partial_R$代替时间导数，并将阻尼项 ϵ/a 替换为其量纲表达式 U_0/R（t）：

$$U_0\partial_R\overline{T} + 2(\gamma-1)\overline{T}(U_0/R) \simeq (\gamma-1)\overline{Q_\nu} \quad (32)$$

现在，我们将 Q_α 定义为获得形式为 $T = 1/R^\alpha$的温度剖面所需的加热。因此，我们将 $\bar{}$ $\bar{}$代入方程 32 $U_0 dT/dR = -\alpha U_0 T/R$；得到：

$$Q_\alpha = \tfrac{4-3\alpha}{2}\overline{T}U_0/R \quad (33)$$

在下文中，我们将着重讨论特殊值 $\alpha = 1$，它对应于我们称为临界加热的情形 Q_c：

$$Q_c = Q_1 = (1/2)\overline{T}U_0/R \quad (34)$$

利用简单的现象学方法，我们现在推导出这种临界加热的简洁公式，其中涉及湍流风的基本参数：马赫数和膨胀参数 $\epsilon_\circ$ 我们首先以两种方式定义推广到磁流体力学的 Kolmogorov 级联率。第一种定义（Vasquez 等人（2007年））为

$$Q_{K41} \simeq k(u^2 + \delta B^2/\rho)^{3/2} \simeq 3ku^3 \quad (35)$$

其中 $\delta B = B - \langle B\rangle$ 为磁场涨落，而 u 和 δB 均在泰勒尺度处计算，因此处于惯性区内。在式 35中，u^2 和 $\delta B^2/\rho$ 分别表示波数范围 $[k/\sqrt{2}, k\sqrt{2}]$内的动能和磁能含量，其中 **k** 位于惯性区内。需要注意的是，为了推导出最后一个近似等式，我们假设了动能与磁能之间存在能量均分。

在分析模拟结果时，我们将采用以下等价但更精确的定义：

$$Q_{K41} = E(k_\lambda)^{3/2}k_\lambda^{5/2} \quad (36)$$

其中 $E(k_\lambda)$ 是一维总（动能+磁能）能谱的两倍，该能谱在垂直于径向的方向上积分，并取决于径向波数

，在泰勒波数 k_λ 处求得：泰勒波数定义为：

$$k_\lambda = \frac{(\int_0^\infty k_x^2 E(k_x) dk_x)^{1/2}}{\int_0^\infty E(k_x) dk_x} \tag{37}$$

更准确地说， k_λ 标记了径向约化谱中惯性区的中点。

现在，我们从 Vasquez 等人 (2007年得知，在冷风中，Kolmogorov级联率 Q_{K41} 对真实平均耗散率 $\overline{Q_\nu}$的估计高出 10 倍：

$$Q_{K41} \simeq 10\overline{Q_\nu} \tag{38}$$

根据后一个方程，我们利用方程 33 和 35，改写临界条件 $Q_\nu = Q_\alpha$ ，以得到 $1/R^\alpha$ 温度剖面：

$$3ku^3 \simeq 10\ \tfrac{4-3\alpha}{2}\overline{T}U_0/R \tag{39}$$

我们希望用湍流均方根马赫数来表示这一条件：

$$M = u_{rms}/c_s \tag{40}$$

其中 $c_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$ 为声速，而膨胀参数 ϵ (方程 13) 的定义中也包含均方根速度。假设惯性区始于最大尺度处，我们分别通过在区间 $[k_0, 2k_0]$ 和 $[k_0, \infty]$上对 Kolmogorov谱 $\propto k^{-5/3}$ 积分，计算最大尺度处的动能含量 $u_0^2/2$ 和总能量含量 $u^2/2$ 。由此得到比值 $(u_{rms}/u_0)^3 = 4.4$，从而可以用基于均方根速度振幅的量，即马赫数 M 和膨胀参数ϵ，来表示方程 39。结果为：

$$M^2/\epsilon \simeq 4.4(4-3\alpha) \tag{41}$$

并且对于特定值 $\alpha = 1$

$$M^2/\epsilon \simeq 4.4 \tag{42}$$

式42 将指导我们在模拟中选取“临界”的初始马赫数与膨胀参数组合。

2.4. 湍流能量、膨胀与黏性阻尼

我们定义单位质量的平均湍流能量：

$$e = \frac{1}{2}\langle \tilde{\rho} u^2 + \delta B^2/\bar{\rho} \rangle \tag{43}$$

由式（16-17）可得膨胀导致的能量阻尼率表达式

$$Q_{exp} = \frac{1}{2}\langle \tilde{\rho}(u_y^2 + u_z^2) + \delta B_x^2/\bar{\rho} \rangle (2\epsilon/a) \tag{44}$$



图1. 黄道面上的模拟初始区域和最终区域（以及等离子体体积）。细线：平均磁场方向。对于所有模拟运行，区域的长宽比从 1/5 变化到 1。在图中，平均磁场与径向方向的夹角从 $\tan^{-1}(1/5) \simeq 11.3^0$ 变化到 $\tan^{-1}(1) = \pi/4$。

或者，也可以用有量纲的形式表示

$$Q_{exp} = \frac{1}{2}\langle \tilde{\rho}(u_y^2 + u_z^2) + \delta B_x^2/\bar{\rho} \rangle (2U_0/R) \tag{45}$$

导致湍流能量阻尼的两个主要项是：(i) 小尺度扩散（黏性和电阻）阻尼项 Q_ν，其能量来源于非线性湍动能级联；(ii) 膨胀阻尼项 Q_{exp}。然而，在此处，湍流能量守恒还受到其他效应的影响：(i) 可压缩性破坏了湍流能量不变量，剩余的不变量是湍流能量与内能之和；(ii) 膨胀也会改变非线性项，从而破坏均匀磁流体力学的所有无黏不变量。这两种额外效应汇总为一个记作 Q_{NL} 的单项。该项通过从湍流能量的时间导数中减去湍流耗散和线性膨胀衰减得到：

$$de/dt = -Q_\nu - Q_{exp} - Q_{NL} \tag{46}$$

在前一个方程中以及从现在起， Q_ν （不取平均）表示空间平均 $\langle Q_\nu \rangle$。注意，类科尔莫哥洛夫谱标度$k^{-5/3}$ 的存在本身意味着，项 Q_{NL} 相较于 Q_ν应当是次要的。

2.5. 数值方法、初始条件和参数

所有模拟均在分辨率为 $N_x = N_y = N_z = 512$的数值计算盒中进行。我们从0.2天文单位处开始，使用沿径向拉长、长宽比为$a_x = 5$ 的数值计算盒，其尺寸为 $L_x = 5 \times L_y = 5 \times L_z = 5 \times 2\pi$。随后，计算区域在垂直于径向的方向上因膨胀而拉伸，因此在1天文单位处，区域变为立方体，平均磁场也相应旋转（图1）。

我们设定能量均分： $u_{rms} = b_{rms} = 1$ 并使磁场涨落与速度涨落之间的相关性约为零（交叉螺度为零）。能量等值线呈空间各向异性，其长宽比与数值计算盒相同。由于平均磁场与

表 1. 初始条件参数列表。R：模拟运行名称； $M = u_{rms}/c_s$，其中 c_s 为声速； ϵ 为初始膨胀参数； M^2/ϵ：参见第2.3节； B_0为初始磁场振幅（以及阿尔芬 速度）； β 为热压与磁压之比； k_{max} 为垂直于径向方向的最大波数（注意，最大的垂直尺度对应单位波数）； m 为一维谱斜率； μ_0 为扩散参数（黏度、电阻率和热传导）的初始值。

R	M	ϵ	$\frac{M^2}{\epsilon}$	B_0	β	k_{max}	m	μ_0
A	1	0.2	5	2.04	0.29	64	5/3	$2.4\ 10^{-3}$
B	1	0.2	5	2.04	0.29	64	3	$1.7\ 10^{-3}$
C	1	0.2	5	2.04	0.29	4	5/3	$2.1\ 10^{-3}$
D	0.77	0.2	3	2.04	0.49	4	5/3	$1.8\ 10^{-3}$
E	1	0.2	5	2.04	0.29	4	2.2	$1.7\ 10^{-3}$
F	0.77	0.12	5	2.04	0.49	4	2.2	$1.8\ 10^{-3}$
G	0.6	0.14	2.6	2.04	0.8	4	2.2	$1.5\ 10^{-3}$
H	1	0.4	2.5	2.04	0.29	4	2.2	$1.3\ 10^{-3}$
K	0.77	0.2	3	2.04	0.49	4	2.2	$1.8\ 10^{-3}$
M	0.77	0.2	3	0.86	2.75	4	2.2	$1.8\ 10^{-3}$
N	0.77	0.2	3	1.17	1.48	4	2.2	$1.8\ 10^{-3}$
Z	0.3	0.2	0.45	2.04	0.29	64	5/3	$1.5\ 10^{-4}$

在所有模拟运行中呈小角度 θ 与径向方向（介于 11^0 和 20^0）之间，初始谱的等值线大致垂直于径向方向，长宽比为 5（见图 9a）。这对应于慢太阳风的所谓“二维”构型（Dasso 等人（2005）；Verdini 和 Grappin（2016））。

模拟参数列于表1，其中列出了本文描述的所有模拟运行。主要参数是马赫数和膨胀参数 ϵ。在表1中，ϵ 从 0.12 变化到 0.4， M 从 0.3 变化到 1，M^2/ϵ 从 0.45 变化到 5。像本文这样将 ϵ 改变 2 倍，相当于将最大尺度的初始周转时间改变相同倍数，因此波数也改变 $2^{2/3}$倍，并采用 $k^{-5/3}$ 标度关系来设定初始谱。此外，当 ϵ 较小时，模拟时长更长，因为输运距离（从 0.2 到 1 天文单位）是固定的。

每次模拟都在远为宽广的太阳风惯性区上提供一个波数测试窗口（缩减至略多于两个数量级）。在为给定模拟运行选择参数对（M， ϵ）时，我们选择一种太阳风状态，同时将模拟范围置于太阳风波数范围上。A、B、C、E 组模拟所取的典型值为 M=1 和$\epsilon = 0.2$。这些值与在 Helios 数据中数小时尺度上的冷风（Grappin 等人1991）。

如前文第2.3节所示，表达式 M^2/ϵ在1天文单位处的惯性区中被发现约为4.4，由Vasquez 等人（2007年）针对冷/慢速太阳风得到。这处于表1所列数值范围的中间。

表1 中出现的其他参数为：等离子体贝塔 $\beta = P_{th}/P_B = (2/\gamma)\ (c_s/v_a)^{\ 2}$，其值从0.29变化至1.48；平均磁场 B_0 在0.86至2.04之间变化，这意味着，由于 $b_{rms} = 1$， b_{rms}/B_0 从1.2变化至0.5。初始黏滞系数 μ_0 在除模拟运行 Z之外的所有计算中大致相同：这一例外的起因将在第4.2节讨论。参数 k_{max} 与 m 分别是初始谱的范围及其一维谱斜率。

3. 结果

3.1. 运行A：扩展初始谱

我们先研究运行A的情况，其中 $M = 1$、 $\epsilon = 0.2$，因此 $M^2/\epsilon = 5$。垂直于径向方向的初始谱范围为 $k_{max} = 64$，谱斜率为 $m = 5/3$。

图 2 展示了若干物理量随日心距离的演化。图版（a）展示了均方根湍流量的演化： u_{rms}、$\delta B_{rms}/\bar{\rho}^{1/2}$ 和 u^c_{rms}，其中 u^c 是速度场中的可压缩部分。图中所示物理量均乘以 $(R/R_0)^{0.6}$。可以看出，速度和磁场（以速度为单位）的补偿剖面接近平台，表明其衰减接近 $1/R^{0.6}$，比 WKB 预测 $u_{rms} \simeq b_{rms}/\bar{\rho}^{1/2} \simeq 1/R^{1/2}$稍快。压缩性均方根速度振幅最初为零，很快达到总均方根速度的一半左右，随后接近其三分之一。图版（b）展示了总能量的平均湍流耗散（实线）、无散动能（$\mu\tilde{\omega}^2$，点线）、磁能（$\eta\tilde{J}^2$，虚线）和可压缩能量（$4/3\mu(\tilde{\nabla}\cdot u)^2$，，点划线）。如预期，动能和磁能耗散相当；可压缩耗散则迅速下降，到末期仅为总耗散的十分之一。

图 2 的图面 (c) 展示了总能量（公式 43）的衰减率 $|de/dt|$ （实线）及其组成部分：膨胀衰减率 Q_{exp}（点线）、湍流衰减率（同样地） Q_ν （虚线），以及最后的残差项 Q_{NL}（点划线）。可以区分出两个阶段：(a) 一个短暂的初始瞬态，在此期间湍流耗散占主导，超过膨胀衰减，这与膨胀参数 $\epsilon = 0.2$值较小相符；同时残差项非常大，与湍

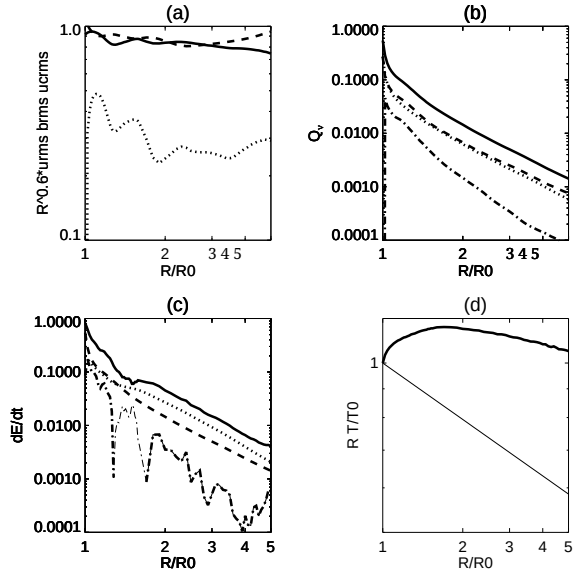

图2。运行A。基本量随日心距离 R/R_0的演化。(a) 速度振幅 u_{rms}（实线）、可压缩速度 u^c_{rms}（点线）和磁场涨落 $b_{rms}/\bar{\rho}^{1/2}$（虚线）。(b) 黏性电阻耗散Q_ν（实线）分解为 $\mu|\tilde{\nabla}\times u|^2$（点线）、 $\eta\tilde{j}^2$（虚线）与$\frac{4}{3}\nu|\tilde{\nabla}.u|^2$（点划线）之和。(c) 单位质量耗散率： dE/dt （实线）、膨胀驱动阻尼 Q_{exp} （点线）、黏性电阻耗散 Q_ν（虚线）、级联过程中的非线性损失 Q_{NL} （点划线；增大衰减率时为粗线，减小衰减率时为细线）。(d) 经 $1/R$ 下降补偿后的温度。距离以初始距离 $R_0 =$ 0 2 归一化。天文单位。

流耗散相当： $Q_{exp} < Q_\nu \simeq Q_{NL}$；(b) 演化的其余阶段，在此期间湍流衰减小于膨胀衰减，残差衰减则最小: $Q_{NL} < Q_\nu < Q_{exp}$。这两点将在讨论中阐明。另请注意，Q_{NL} 的符号会变化：它表示能量损失（因此使 $|de/dt|$增大），以粗线表示；但在初始阶段（ $1 \le R/R_0 \le 2$，细线）则表示能量增益，因此使 $|de/dt|$减小。

最后，图面 (d) 给出了经 $1/R$ 律补偿后的温度曲线。可以看到，当 $R \ge 0.5$ 天文单位时出现了幂律区间，其指数介于 $4/3$ 和 1 之间。湍动能储备显然分两个阶段被消耗：(i) 早期阶段，耗散迅速且强烈，几乎阻止了等离子体冷却；(ii) 持续时间较长的阶段，耗散减弱，仅轻微延缓等离子体冷却。

3.2. 改变谱范围

为运行A设定的初始条件在所得温度曲线方面是否最有效，还是我们可以得到更接近观测到的 $1/R$下降趋势的曲线?

正如我们将在讨论部分看到的，运行A的一个重要特征是小尺度的重要性被夸大了，相较于准稳态湍流状态中发现的情况尤为如此。这正是运行早期阶段出现过度加热的原因。为了减少小尺度的能量，我们现在改变以下一个或两个参数：(i) 初始谱斜率 m；(ii) 初始幂律范围，以 k_{max} 衡量。

我们在图3 中比较了四次模拟运行：A（实线）、B（点线）、C（虚线）和 E（点划线），其参数值如下：m 和 k_{max}： $m = 5/3$ 和 $k_{max} = 64$对应运行 A，$m = 3$，以及 $k_{max} = 64$ 对应运行 B， $m = 5/3$ 和 $k_{max} = 4$ 对应运行 C，以及 $m = 2.2$ 和 $k_{max} = 4$ 对应运行 E。图版（a）显示临界加热比 Q_ν/Q_c，原则上可揭示我们距离临界加热还有多近；图版（b）显示补偿了 $1/R$ 下降的温度曲线。

运行 A 开始时经历了明显的过热阶段，初始时 $Q_\nu/Q_c \simeq 10$，随后对 $R > 0.3AU$ 的加热不足 $Q_\nu/Q_c < 1$ （图面 a，实线）。这解释了前文已讨论过的温度演化的不同阶段：第一阶段损失了大量湍流能量，因此第二阶段剩余的湍流能量过少，无法充分加热等离子体，导致温度降至绝热温度与 $1/R$ 之间（图面 b，实线）。

由于小尺度的重要性降低，运行 B、C 和 E 表现出不同的行为。最初，对于$R \lesssim 1.2$，它们的临界加热比（图面 a）都相近，但过小，无法产生可观测的加热。这一阶段对应于温度准绝热下降（图面 b）。随后进入准稳态区间（$R \gtrsim 1.2$），此时加热接近临界值，并导致温度共同下降；三条温度曲线均呈现准平台，因此温度接近 $1/R$ 下降（图面 b）。

因此，降低初始谱中小尺度的重要性，成功抑制了第一阶段过大的能量损失。请注意，在整个非绝热阶段，运行 E 的曲线最接近 $1/R$ 。因此，在接下来的模拟运行中，我们将固定与运行 E 相同的谱参数：谱斜率为 2.2，谱范围较短，且 $k_{max} = 4$。

3.3. 马赫数、 ϵ和 M^2/ϵ

降低初始马赫数，直观上会使湍动能储备相对于内能减少，因此也应降低加热比

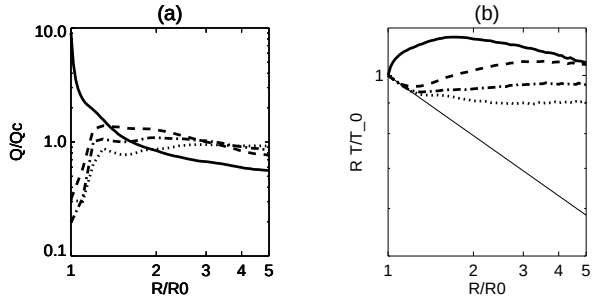

图3. 加热比 Q_ν/Q_c 和温度剖面，均取 $M=1$、$\epsilon=0.2$，但小尺度初始激发有所不同。运行A（粗实线）、B（点线）、C（虚线）和E（点划线）。(a) 加热比 Q_ν/Q_c 随日球距离 R 的变化。(b) 平均温度（以其初始值归一化）乘以补偿因子 R_0/R。距离以初始距离 $R_0=0.2$ 天文单位归一化。图面（b）中的细实直线对应于 $T/T_0=(R/R_0)^{-4/3}$。

比 Q_ν/Q_c。为了检验这一猜想，我们比较了两次模拟运行 C 和 D，两者均采用 $k_{max}=4$，$\epsilon=0.2$，分别为 $M=1$ 和 $M=0.77$。图4a 表明，我们关于加热比的猜想是正确的。因此，温度剖面的平均径向斜率发生了显著变化（图4b）。不过请注意，温度曲线出现了一个折点，并且在末段下降得更快。

膨胀参数 ϵ 衡量相对于非线性剪切率归一化后的膨胀率。直观而言，较低的膨胀参数应有利于加热而抑制冷却。为检验这一猜想，我们比较两种膨胀参数取值：$\epsilon=0.12$（运行 F）和 $\epsilon=0.2$（运行 K），两种情况下均取 $M=0.77$。结果符合预期（图5）：在输运的前半段，膨胀参数较低的运行加热更强 ϵ，对应 $R<0.6$天文单位（$R/R_0<3$）。然而，在行程的后半段，情况正好相反。这是因为当 ϵ 取值较小时（运行 F，实线），相同的行进距离对应更多的非线性时间（即“年龄”更大，见Grappin 等人（1991）），这可能导致能量储库过快衰减，从而使加热率也过快降低。

最后，我们检验参数 M^2/ϵ 是否可作为加热和温度剖面的控制参数（见第 2.3 节）。我们选择两对模拟运行：E 和 F 具有最大的参数值 $M^2/\epsilon=5$，而运行 G 和 H 具有最低的参数值：$M^2/\epsilon\simeq 2.5$（见表 1）。

图 6a 表明，按临界加热量排序M^2/ϵ 对于 $R<0.5$ 天文单位的距离大致成立，但在更远处则不成立。尽管如此，温度

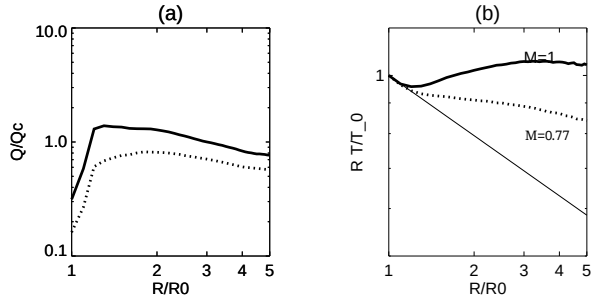

图 4。加热比 Q_ν/Q_c 和温度剖面，其中 $\epsilon=0.2$ 相同但初始马赫数不同。运行C（M=1，实心粗线）和 D（M=0.77，点线）。图注与图 3 相同。

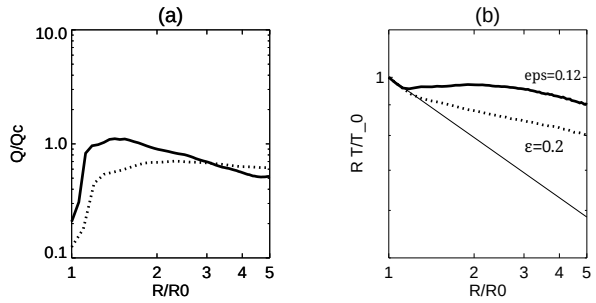

图5. 加热比 Q_ν/Q_c 和温度剖面，相同 $M=0.77$ 但膨胀参数不同。F组运行 ($\epsilon=0.12$，粗实线) 和 K组运行 ($\epsilon=0.2$，点线)；图注同图 3。

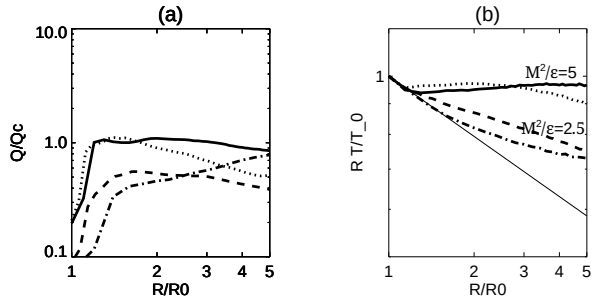

图6. 加热比 Q_ν/Q_c 和温度剖面，变化的 M^2/ϵ。E组运行（粗实线）、F组运行（点线）、G组运行（虚线）、H组运行（点划线）。图注同图 3。

曲线（图 6b）似乎根据参数值分为两组。

3.4. 改变等离子体 β 和角度 θ_{VB}

由于初始温度有所变化，而平均初始磁场保持不变，迄今为止所考虑的不同模拟运行（A至K组运行）的 β

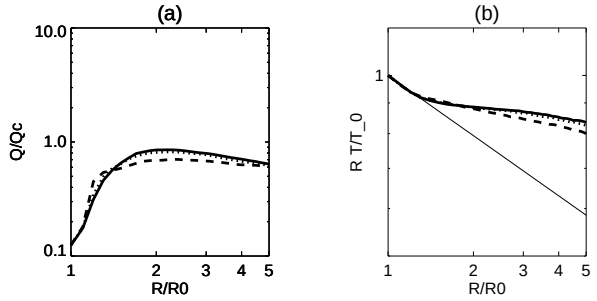

图7。 加热比 Q_ν/Q_c 和温度剖面，其中 $M=0.77$、 $\epsilon=0.2$, 但改变 β。模拟运行 M（粗实线， β =2.75）、N（点线， β =1.48）和 K（虚线， β =0.49）。图注同图 3。

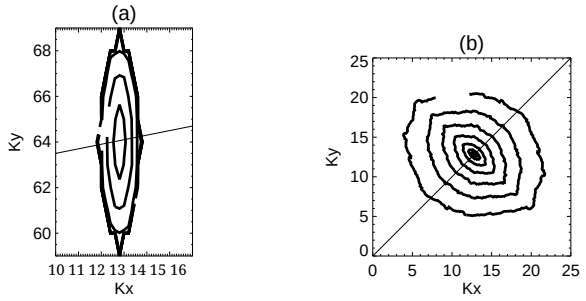

图 8. 运行 E：能谱（动能 + 磁能）随平均磁场的旋转。平面 k_z=0 内的角能谱 E(k_x,k_y)。(a) 在 R=0.2 天文单位处；(b) 在 R = 1 天文单位处。每个图面中均以一条直线表示平均磁场方向。

迄今已在以下区间内变化： $0.3 \le \beta \le 0.8$（表1）。由于慢太阳风中的等离子体 β 可能大于 1，因此现在我们考虑取值较大的模拟运行： $\beta = 2.75$，1。48（运行 M、N），并与运行 K 进行比较，其 $\beta = 0.49$。三组运行的马赫数均为 0.77。的变化似乎总体影响不大（图 7），不过取值较大的两组运行略占优势（加热更强） β （运行 M 和 N，分别以粗线和点线表示，曲线几乎重合）。

最后一个值得关注的参数是：众所周知，尽管 θ_{VB} 磁场与径向方向之间的夹角在1天文单位处平均为 45^0 （这对应于0.2天文单位处的 $\theta = 11^0$ ），但其分布实际上会在平均值附近大幅变化。为检验小幅角度变化的影响，我们考虑将初始角度 θ^0_{VB}加倍。我们发现，当从 $\theta^0_{VB} = 11^0$ 增至 $\theta^0_{VB} = 20^0$时，临界加热比和温度剖面均完全没有变化（未显示）。

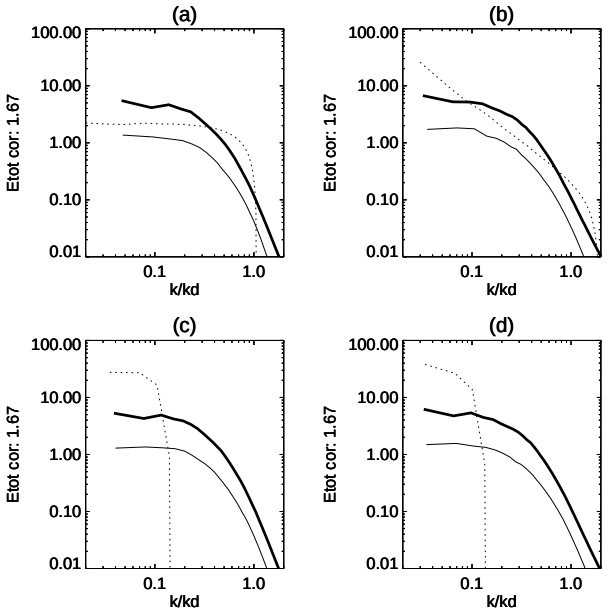

图9。A、B、C、E 组模拟：一维能谱（动能 + 磁能）的演化，并按 Kol- mogorov 标度 $k^{-5/3}$ 补偿。横坐标：以 Kolmogorov波数 $k_d = (Q_\nu/\mu^3)^{1/4}$ 归一化的波数。点线： $R = R_0 = 0.2AU$；实线： $R = 1AU$；粗实线：径向一维谱；细实线：垂直于径向的方向（$\hat{z}$ 方向）上的一维谱。

4. 讨论

4.1. 总结

我们的数值结果支持这样一种可能性：在距离范围 $0.2 < R < 1$ 天文单位内，磁流体力学湍流可以使质子温度剖面的下降速度显著慢于绝热预测。我们从一个初始具有二维构型的谱开始，原则上这对应于 Dasso 等人 (2005年)观测到的慢风状态。由此，在均方根马赫数接近 1、膨胀参数为 $\epsilon = 0.2$的情况下，得到的温度剖面比观测结果陡得多。不过，若考虑到初始谱惯性区大幅缩短，则得到的温度剖面平均而言接近 $1/R$ 定律，因此与 $1/R^{0.9}$ 剖面的平均值相差不远；该剖面由 Totten 等人 (1995年)测得。

我们发现，调节加热率的参数是均方根马赫数和膨胀参数 ϵ，二者组合为 M^2/ϵ；而其他参数，例如等离子体参数 β、平均磁场与径向之间的夹角 θ_{VB}，影响较小（对于较小的初始值）。

4.2. 谱性质与马赫数的关系

为理解为何需要降低初始小尺度能量含量，我们在此考察其谱演化。

我们首先考察谱各向异性。图8展示了运行 E 的情况；它可代表其他模拟运行，因为它们的演化都相近。所示的二维谱是三维总能量谱 $k_z = 0$ 的切面 $u^2 + \delta B^2/\rho$。如第 2 节所述，初始能量等值线（图面 a，R=0.2 天文单位）与平均场方向（细线）近乎垂直，而平均场方向接近径向。在 1 天文单位处（图面 b），平均磁场与径向的夹角为 $\pi/4$，此时等值线的主要对称轴与该平均磁场近乎垂直。换言之，级联起初不仅垂直于平均磁场，在输运过程中也始终如此，并随平均磁场的旋转而转动。这与慢太阳风中所谓的二维谱占主导的情况十分吻合（Dasso 等人（2005））；数值研究（Verdini 和 Grappin（2016））首次发现，这种谱是太阳风中的两个稳健吸引子之一。

现在我们考察运行 A、B、C 和 E 在 0.2 和 1 天文单位处的一维约化总能量谱，如图所示。9。初始谱以点线表示，最终谱以实线表示（1 天文单位处）。最终谱分别对应径向（粗实线）或垂直波矢（细实线）。波数以 Kolmogorov 耗散波数 $k_d = (Q_\nu/\mu^3)^{1/4}$ 为归一化基准，其中耗散率 Q_ν 定义见方程 27。随后，对距离区间$0.6 \le R \le 1$ 内归一化后的谱取平均，得到各个最终谱。

四个最终谱都大致相当（无论沿径向还是横向），其谱范围都很窄，约为半个数量级，斜率为 $m \gtrsim 5/3$。

最终谱中惯性区范围较小，实际上源于这些模拟所采用的高马赫数（M=1）。高马赫数会导致与激波相关的大幅密度间歇性变化，因此需要较大的黏度，以避免高密度区域中出现未解析梯度。作为比较，在处理模拟运行 Z（M=0.33）时，我们可以采用比运行 A 所用黏度小 $M = 1$ 倍的黏度（见表 1）。由于黏度低得多，模拟运行 Z 呈现出跨越一个数量级以上的 $k^{-5/3}$ 标度关系，因而明显大于运行 A（图 10）。

因此，对于具有$M = 1$ 的模拟运行，此前观察到的较短谱范围，是由于在马赫数如此之大时，必须提高黏度，才能避免模拟运行在给定数值分辨率下发生灾难性（非物理）的演化。这也解释了为什么有必须从较小的谱范围开始：否则，在瞬态阶段，人为初始能量过剩会在黏性-电阻尺度上产生过多热量（参见图 Q_ν/Q_c 中运行A的演化，图3a）。

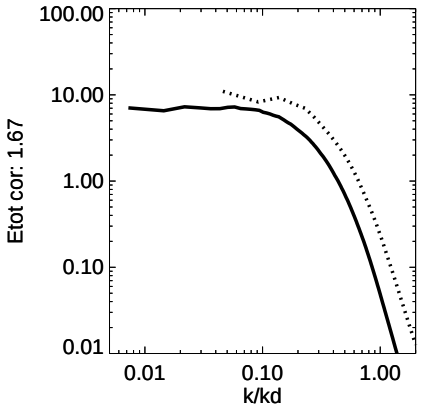

图10。Z组运行（粗实线） $M = 0.3$、A组运行（点线） $M = 1$：输运最后阶段的平均总一维能谱，按$k^{-5/3}$ 标度补偿；横坐标：以Kolmogorov波数归一化的径向波数。

4.3. 耗散率和科尔莫戈洛夫率

参数 M^2/ϵ （方程42），在第2.3节中推导得出，已用于指定能够接近临界加热的条件。特别是，在B、C、E组运行中，取值$M^2/\epsilon = 5$（与方程.42中推导出的名义值442相差不远），使我们得以获得温度幂律接近 $1/R$的剖面。

第2.3 节中用于推导这一设定的方法，依赖于比值 $R_V = Q_\nu/Q_{K41}$ 为 $\simeq 0.1$这一假设。冷风中已发现 R_V 这一极低值（对应于有效科尔莫戈洛夫常数极高），相关结果见Vasquez 等人（2007年）。若能检验本文研究的模拟运行是否也呈现相同的 R_V低值，将会很有意义。

图11a给出 R_V 随距离的变化，对应A、B、C、E组模拟。曲线在运行A中变化剧烈， R_V 从大于1降至低于0.1，而B、C、E组运行在整个距离范围内的比值均聚集在0.1附近。图版（b）显示泰勒波数（式37）在四组模拟运行中的演化，概括了不同模拟运行的谱宽演化。通过比较图面（b）与（a），再次可见运行A初始过大的谱宽导致 R_V出现异常大的数值。相比之下，模拟运行

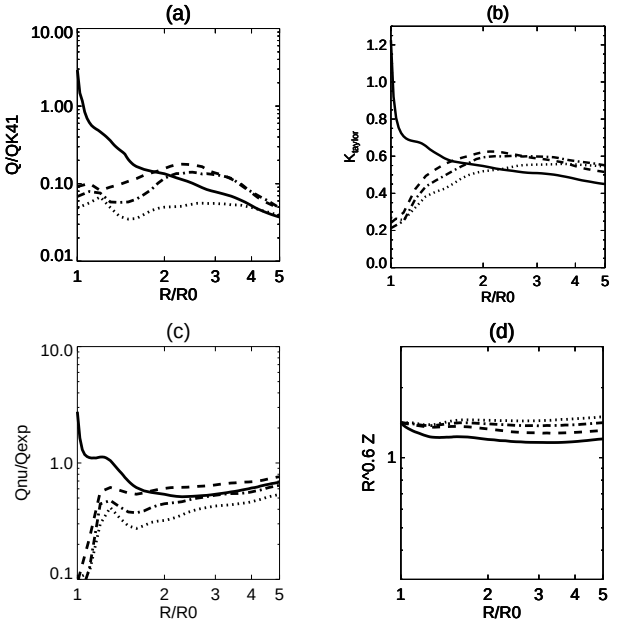

图11. 检验 Vasquez 定律及其影响。(a) 比值 Q_ν/Q_{K41} 黏性电阻耗散与 Kolmogorov 能量级联率（式 36）之间的比值。(b) 径向泰勒波数；(c) 比值 Q_ν/Q_{exp} 黏性电阻耗散与膨胀衰减率之间的比值；(d) 湍流均方根振幅 $Z=(u^2+\delta B^2/\overline{\rho})^{1/2}$ 经 $1/R^{0.6}$补偿后的演化。运行 A （实线）、 B （点线）、 C （虚线）、E（点划线）。

B、C、E具有与其黏度相适应的谱宽，其 R_V值聚集在0.1附近。

我们的模拟运行B、C、E会导致临界加热；我们发现 Q_ν/Q_{K41} 的数值接近观测值。这表明，尽管此前提到谱范围有限，但我们的数值设置仍能产生与实际太阳风湍流相近的湍流特性。

这个较小的 R_V 意味着特征湍流衰减时间约为普通非线性时间的十倍 $t_{NL}=1/ku$。这使我们能够判断膨胀衰减率和湍流衰减率在各组模拟中的相对重要性。事实上，对于 A、B、C、E 组模拟中的膨胀参数 $\epsilon=0.2$ ，先验预期膨胀衰减率 Q_{exp}小于湍流耗散率，因为 ϵ 是以大尺度周转时间倒数归一化的膨胀率（式13）。然而，由于 R_V 为 0.1，有效湍流衰减时间尺度是非线性周转时间的 10 倍。因此，尽管$\epsilon=0.2$，有效膨胀衰减率最终并非较小，反而大于湍流耗散率。这在整个距离范围 [0内均成立。2,1]

天文单位，适用于 B、C、E 组运行；运行A也同样如此，但早期瞬态阶段除外，此时 R_V 接近于 1。

作为运行 A、B、C、E 中膨胀阻尼总体占主导地位的推论，湍流涨落振幅应当以接近 WKB 预测的方式衰减；该预测适用于阿尔芬波

$$Z=(u^2+\delta B^2/\overline{\rho})^{1/2}\simeq 1/R^{1/2} \tag{47}$$

事实确实如此：图 11d 显示，运行 A、B、C、E 中的湍流振幅按 $Z\simeq 1/R^{0.6}$ 衰减，因此接近 WKB 预测。

4.4. 级联过程中的能量守恒损失

通过残差项Q_{NL} 测量级联过程中偏离湍流能量守恒的程度。该残差项定义为湍流总能量衰减与湍流耗散 Q_ν 和线性膨胀衰减 Q_{exp} （式46，运行 A，图2c）之和之间的差值。其他模拟运行表明，在马赫数固定时，残差项 Q_{NL} 与膨胀参数 ϵ成正比。为消除可压缩性的影响，从而明确确定单独由膨胀造成的影响，我们考察总能量守恒的偏差，而不只是湍流能量守恒的偏差。我们将新的残差项记为 $Q_{NL'}$:

$$d/dt(e+\langle\tilde{\rho}T\rangle/(\gamma-1))=-Q_{exp}-2\gamma\langle\tilde{\rho}T\rangle\epsilon/a-Q_{NL'} \tag{48}$$

图 12 展示了运行A中总能量（湍流 + 内能）的时间导数及相应的残差项 $Q_{NL'}$。残余耗散仅占总变化量的1%或2%。这远小于 Q_{NL} （见图 11c）。这表明，湍流能与内能之间的可压缩交换，是级联过程中湍流能量守恒偏差的主要来源，尤其是在演化初期。表1中的其他模拟运行也有相同结论。不过，在膨胀参数较大的运行 H（$\epsilon=0.4$）中，我们发现压缩和膨胀的贡献更加均衡（未显示）。

4.5. 结论

总之，利用磁流体力学方程的完整非线性耦合，我们表明，径向温度剖面as $1/R$ 仅仅是绝热下降与湍流耗散共同作用的结果。这一结果是从0.2天文单位出发、均方根马赫数为1、膨胀参数为 $\epsilon=0.2$的条件下得到的。在这些参数下，均方根湍流振幅的下降并不比Alfv´en WKB预测快很多，实际上为 $1/R^{0.6}$。这一论证是通过

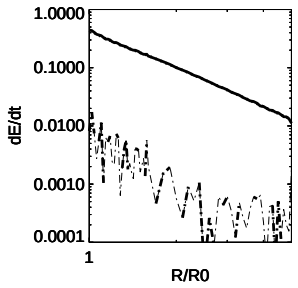

图12。 运行A。级联过程中总能量（湍流能量 + 内能）守恒的偏差。实线：总能量的时间导数（湍流能量 + 内能，方程 48；点划线（衰减率增加时为粗线，衰减率减小时为细线）：残差项 $Q_{NL'}$用于衡量级联过程中除线性效应外偏离总能量守恒的程度。

从慢太阳风所特有的谱各向异性出发，即主要垂直于平均磁场。这包括表明，在我们的模拟中， Q_ν/Q_{K41}比值接近0.1，与太阳风中的情况相同。最后，我们测量了级联过程中湍流能量守恒的偏差（残余能量损失 Q_{NL}）。我们发现，膨胀只是造成偏差的次要原因，主要原因是湍流能量与内能之间的可压缩交换。

未来的工作包括：(i) 通过降低马赫数和膨胀参数，更清晰地呈现慢太阳风特有的 $5/3$ 幂律指数特征（即提高雷诺数）；(ii) 考察快太阳风的情况。尽管其谱各向异性不同，但其温度的径向依赖关系相似。

本研究使用了 GENCI-IDRIS 的高性能计算资源（资助编号 2017-040219）。本研究获得了 Programme National Soleil-Terre（PNST/INSU/CNRS）的支持。

参考文献

Breech, B., Matthaeus, W. H., Cranmer, S., Kasper, J. C., & Oughton, S. 2009 年，《地球物理研究杂志：空间物理》，114, A09103 Carbone, V., Marino, R., Sorriso-Valvo, L., Noullez, A., & Bruno, R. 2009年，Phys. Rev. Lett., 103, 61102 Coburn,J. T., Smith, C. W., Vasquez, B. J., Sta warz, J. E., & Forman, M. 2012,《天体物理学杂志》，754, 93 Dasso, Milano, L. J., Matthaeus, W. H., & Smith, C. W. 2005年，《天体物理学杂志》，635, L181 Dong, Y., Verdini, A., & Grappin, R. 2014,《天体物理学杂志》，793, 118 Grappin, R., & Velli, M. 1996,《地球物理研究杂志》，101, 425 Grappin, R., Velli, M., & Mangeney, A. 1991,《地球物理年鉴》，9, 416 —. 1993,《物理评论快报》，70, 2190 Hellinger, P., Travnicek, P., ˇStver´ak, ˇS., Matteini, L., & Velli, M. 2013,《地球物理研究杂志：空间物理》，118, 1351 Marino, R., Sorriso-Valvo, L., Carbone, V., et al. 2008,《天体物理学杂志快报》，677, L71 Matthaeus, W. H., & Velli, M. 2011年，《空间科学评论》，160，145 Politano, H., & Pouquet, A. G. 1998年，《物理评论E》（统计物理），57，21 Scudder, J. D. 2017年，《天体物理学杂志》，809，1 Smith, C. W., Matthaeus, W. H., Zank, G. P., et al. 2001年，《地球物理研究杂志》，106，8253 Stawarz, J. E., Smith, C. W., Vasquez, B. J., Forman, M., & MacBride, B. T. 2009年，《天体物理学杂志》，697，1119 Totten, T. L., Freeman, J. W., & Arya,S. 1995年，《地球物理研究杂志》，100，13 Tu, C.-Y. 1988年，《地球物理研究杂志》，93，7 Tu, C.-Y., & Marsch, E. 1997年，《太阳物理学》，171，363 Vasquez, B. J., Smith, C. W., Hamilton, K., MacBride, B. T., & Leamon, R. J. 2007年，《地球物理研究杂志》，112，A07101 Verdini, A., & Grappin, R. 2016年，《天体物理学杂志》，831，179 Verdini, A., Grappin, R., Hellinger, P., Landi, S., & M¨uller, W. C. 2015年，《天体物理学杂志》，804，119