arXiv:2603.01279v1 [physics.flu-dyn] 1 Mar 2026

二维电热流体动力湍流对流的能量分析

Owen Hutchinson[a]，Katerina Kostova[a]，Jian Wu[b]，Yifei Guan[a,1]

[a]机械工程系，*Union College*，美国纽约州斯克内克塔迪，邮编 *12308*[b]能源科学与工程学院，哈尔滨工业大学，中国哈尔滨，邮编 *150001*

摘要 湍流对流在流体系统中无处不在。特别是，多物理场对流问题涉及质量、热量和颗粒传递。当颗粒带电并受高压电场驱动时，浮力和电场力都会对对流的驱动和维持产生作用。在这项工作中，我们使用高保真傅里叶–切比雪夫谱求解器进行数值分析。此外，我们还通过解析推导，得到控制动能、涡量平方、势能和电能的动力系统。利用模拟数据，我们采用长短期记忆循环神经网络预测域平均能量项的混沌时间序列。最后，我们进行数据驱动模态分解，以展示二维湍流对流中包含能量和涡量平方的相干结构。

1. 引言

电流体动力学（EHD）是一门多物理场学科，描述宏观尺度上带电粒子、中性分子与电场之间的三方相互作用，涉及流体力学和电动力学 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]。此外，电热流体动力学（ETHD）还多了一项复杂因素，即热传递或温度场 [10,11, 12]。自 ETHD 对流首次被用于模拟地幔地幔对流以来，它一直是研究焦点 [13, 14]。此后，研究人员在多种背景下对 ETHD 和 EHD 进行了分析，例如固液界面 [15], Taylor

[1]通讯作者：guany@union.edu

锥体 [16], 以及增强的热传递 [17]。近年来，许多研究聚焦于 ETHD 系统的线性稳定性分析 [18, 10] 以及向混沌转变的路径 [19, 20]。尽管层流或轻度混沌 ETHD 对流的稳定性分析广受关注，但只有少数研究尝试分析湍流和高度混沌状态（高瑞利数， Ra，以及高电瑞利数， T） [21, 22]。特别是，我们团队近期发表的论文揭示了势能和电能收支与动能耗散之间的关系 [22]。

ETHD对流流动的数值研究通常采用高保真数值模拟 [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 3, 22], ，从而产生大量高分辨率时空数据。尽管湍流（高度混沌）的 ETHD 对流具有高维特性，电热对流及其他类似系统中的许多现象仍可通过少数占主导地位的相干结构 [31, 32, 33, 34], 或模态来表征，如模态分析中所示。高保真模拟（例如直接数值模拟，或 DNS）往往掩盖了这种简洁性，使优化和控制任务的成本高得难以承受 [35]。因此，我们需要准确且高效的降阶模型来描述 ETHD 湍流，类似于描述瑞利-贝纳德对流（RBC）的洛伦兹模型 [36]。洛伦兹模型是通过将控制方程伽辽金投影到由 Saltzman 先前提出的一组三个傅里叶模态上得到的 [37]。除了手动（解析地）提取这些模态外，也可以从数据中自动提取, 例如采用本征正交分解（POD） [38, 39, 40, 31, 34]或动态模态分解（DMD） [34, 41]。模态分析还可促进其他实践，例如流动控制 [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48] 和流固耦合分析 [49, 33]。

为了预测混沌动力系统的时间演化，近期研究侧重于数据驱动预测, 例如人工神经网络 [50],储备池计算 [51, 52, 53, 54], 和循环神经网络（RNN） [55,56]。具体而言，长短期记忆（LSTM）网络是一种循环神经网络架构，旨在对序列数据中的时间依赖关系进行建模。与传统循环神经网络不同，后者在学习长程相关性时常遭遇梯度消失或梯度爆炸问题；长短期记忆网络引入了由输入门、输出门和遗忘门组成的门控结构，从而能够在较长时间范围内有选择地保留和更新信息。这一能力使长短期记忆网络尤其擅长捕捉时间序列中的非线性动态模式，因此广泛应用于语音识别、自然语言处理以及复杂动力系统的科学建模等领域

系统 [57, 58, 59]。

本研究在我们近期工作的基础上 [22] ，进一步开展了以下工作：(1) 推导动能、涡量平方、势能和电能的控制方程；(2) 训练长短期记忆网络，预测域平均动能、势能和电能的时间序列；(3) 使用本征正交分解（POD）进行数据驱动的模态分解；(4) 对比模态分析结果，并识别与能量集中相关的相干结构。

本文其余部分安排如下。第2节介绍原始二维ETHD系统的无量纲控制方程，以及能量项动力系统的推导，并进一步介绍本研究采用的长短期记忆网络、二维小波分析和POD分析。第3节展示数值结果。第4节总结全文并讨论未来工作。

2. 方法

2.1. ETHD系统的控制方程

ETHD对流系统的控制方程包括质量守恒方程和动量守恒方程（含电场力和浮力项的Navier-Stokes方程）、电流守恒方程（电荷密度输运）、考虑空间电荷效应的电势泊松方程，以及势能守恒方程（热输运）。为简化处理，忽略黏性耗散和焦耳热对热能的影响。根据Boussinesq近似，无量纲控制方程可写为： [例如， 21, 19, 60, 22]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + F_E q \mathbf{E} + F_\theta \theta \mathbf{e}_y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot [q(\mathbf{u} + \mathbf{E})] = \nu_E \nabla^2 q, \tag{3}$$

$$\nabla^2 \phi = -Cq/4, \tag{4}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - u_y = \nu_\theta \nabla^2 \theta. \tag{6}$$

这里，$\mathbf{e}_y = (0, 1)$是指向 y 方向（与重力方向相反）的单位向量；$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$是二维速度向量；p 是压力标量；$\mathbf{E} = (E_x, E_y)$是二维电场向量；θ 是温度异常，定义为温度与导热温度廓线（$T_{\text{conduction}} = -y$）之差；$q$ 是净电荷密度；ϕ 是电势。注意，所有参数均为无量纲 [22]。

系统由初始条件、边界条件以及六个无量纲参数控制：ν 为分子黏度；F_E 为电驱动力大小；F_θ 为浮力驱动力大小；ν_E 为带电粒子黏度；C 为电荷注入强度；ν_θ 为热扩散率。

2.2. 边界条件

流体流动在上（$y = h$）下（$y = -h$）两个平面采用无滑移边界条件（$\mathbf{u}_{y=\pm h} = 0$）。横向（x）方向采用周期性边界条件。其他变量的边界条件如下所列。

$$\phi_{y=-h} = 1,\ \phi_{y=h} = 0, \tag{7}$$

$$q_{y=-h} = 1,\ (\partial q/\partial y)_{y=h} = 0, \tag{8}$$

$$\theta_{y=\pm h} = 0. \tag{9}$$

本文研究了 8 种情形，其无量纲参数如表 1 所示。

除了这四个参数外，另外两个无量纲控制参数保持不变：$F_E = 250$ 和 $\nu_E = 2.00 \times 10^{-4}$。对于 $C = 0$ 的情况 1 和情况 5，ETHD 系统简化为经典的瑞利-贝纳德对流（RBC）。此处选取的无量纲参数涵盖了较广的范围：$Pr \in [7, 100]$、$Ra \in [5 \times 10^7, 10^9]$ 和 $T \in [10^3, 4 \times 10^3]$，其中 Pr 为普朗特数，Ra 为瑞利数，T 为泰勒数或电瑞利数 [22]。

表 1：控制湍流电热流体动力（ETHD）对流动力学的无量纲参数

Case	ν	F_θ	ν_θ	C	$\langle E_u\rangle_{V,t}$	$\langle\Omega\rangle_{V,\ t}$
1	0.050	1.12×10^{3}	7.14×10^{-3}	0	50.68	1792.90
2	0.050	1.12×10^{3}	7.14×10^{-3}	10	52.78	1891.20
3	0.033	4.96×10^{2}	4.76×10^{-3}	10	27.88	978.97
4	0.025	2.79×10^{2}	3.57×10^{-3}	10	21.85	722.85
5	0.10	6.25×10^{3}	1.00×10^{-3}	0	49.98	1558.30
6	0.10	6.25×10^{3}	1.00×10^{-3}	10	51.74	1598.10
7	0.050	1.56×10^{3}	5.00×10^{-4}	10	16.90	489.90
8	0.033	6.94×10^{2}	3.33×10^{-4}	10	12.34	340.15

2.3. 动能、势能、电能与涡量平方方程

动能 $E_u = \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$，可通过将动量方程乘以速度矢量 $\mathbf{u}$ 并进行区域平均 $\langle\cdot\rangle_V$ 得到：

$$\frac{\partial\langle E_u\rangle_V}{\partial t} = -\langle\epsilon_K\rangle_V + F_E\langle q\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}\rangle_V + F_\theta\langle\theta u_y\rangle_V. \tag{10}$$

涡量平方 $\Omega = \frac{1}{2}\omega^2$，其中 $\omega = \nabla\times\mathbf{u}$，可用类似的方法求得：

$$\frac{\partial\langle\Omega\rangle_V}{\partial t} = -\langle\epsilon_\omega\rangle_V + F_E\langle\omega\nabla\times(q\mathbf{E})\rangle_V + F_\theta\langle\omega\frac{\partial\theta}{\partial x}\rangle_V. \tag{11}$$

这里，$\langle\epsilon_K\rangle_V = \nu\langle\omega^2\rangle_V$ 和 $\langle\epsilon_\omega\rangle_V = \nu\langle|\nabla\omega|^2\rangle_V$ 是能量耗散项和涡量平方耗散项。

通过将关于 θ 的方程乘以 y，然后进行区域平均，可以得到势能 $E_p = -F_\theta y(\theta - y)$：

$$\frac{\partial\langle E_p\rangle_V}{\partial t} = F_\theta\nu_\theta(N_u - 1) - F_\theta\langle\theta u_y\rangle_V \tag{12}$$

这里，N_u 是随时间变化的努塞尔数。势能方程与先前关于瑞利-贝纳德对流的研究一致 [61,62]。

类似地，电能 $E_e = F_E q\phi$ 可通过将关于 q 的方程乘以 ϕ，然后进行区域平均得到：

$$\frac{\partial \langle E_e \rangle_V}{\partial t} = F_E \langle p_E \rangle_V - F_E \langle q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} \rangle_V \tag{13}$$

$$- F_E q \langle \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} \rangle_V \tag{14}$$

$$- F_E \nu_E \langle \nabla\phi \cdot \nabla q \rangle_V . \tag{15}$$

这里，$\langle p_e \rangle_V = \Delta\phi I_0 N_e / H$ 是通过边界注入 ETHD 系统的总电能，其中 $\Delta\phi$ 是下平面与上平面之间的电势差，H 是高度。$I_e = \langle \mathbf{i} \rangle_{A,\ y=-1}$，且 $N_e = I_e / I_0$是电努塞尔数。在静水状态 [63, 22]下，I_0 等于 I_e。

动能、势能和电能之间的关系可概括如下。

$$\frac{\partial \langle E_u \rangle_V}{\partial t} = -D_u + \Phi_E + \Phi_\theta \tag{16}$$

$$\frac{\partial \langle E_p \rangle_V}{\partial t} = N_\theta - \Phi_\theta \tag{17}$$

$$\frac{\partial \langle E_e \rangle_V}{\partial t} = N_E - \Phi_E - D_{elec} \tag{18}$$

这里，$D_u = \langle \epsilon_K \rangle_V$是黏性耗散；$\Phi_E = F_E \langle q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} \rangle_V$是转化为动能的电能；$\Phi_\theta = F_\theta \langle \theta u_y \rangle_V$ 是转化为动能的势能；$N_\theta = F_\theta \nu_\theta$（$N_u - 1$）是通过热通量跨边界注入的净势能；$N_E = F_E \Delta\phi I_0 N_e / H$ 是通过电流通量跨边界注入的净电能；$D_{elec} = F_E q \langle \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} \rangle_V + F_E \nu_E \langle \nabla\phi \cdot \nabla q \rangle_V$是电耗散 [21, 22]。域平均动能 $\langle E_u \rangle_V$和涡量平方 $\langle \Omega \rangle_V$见表 1。

2.4. 数值分析：基于二维小波分解和本征正交分解的能量与涡量平方的数值模拟、数据驱动预测及相干结构

直接数值模拟（DNS）采用傅里叶–切比雪夫谱求解器，以高时空分辨率求解方程 (1)–(6)，如我们近期论文 [22] 所述。具体而言，计算域为 $[x, y] \in [0:\ 4, -1:\ 1]$。流动在水平（$x$-）方向上具有周期性，并在

竖直（y-）方向上为有壁边界（无滑移）。周期性水平方向上的空间导数采用傅里叶伪谱法求解，壁面法向的空间导数则利用切比雪夫微分矩阵求解 [例如，64]。时间推进中，对流/平流项采用 2^{nd}阶亚当斯–巴什福思法，扩散项采用半隐式克兰克–尼科尔森法 [65, 60]。所有模拟的直接数值模拟时间步长均取为$\Delta t = 10^{-5}$。采用涡量（ω）–流函数（ψ）公式来表示流场，多物理对流由热输运、电荷输运和电势方程驱动。

2.4.1. 使用长短期记忆网络预测域平均能量方程的时间序列

式（16）—（18）所描述的动力系统表示了$\langle E_u \rangle_V$、$\langle E_p \rangle_V$和$\langle E_e \rangle_V$的时间演化。然而，由于右侧项（例如，D_u、N_θ等）与三个左侧变量（即$\langle E_u \rangle_V$、$\langle E_p \rangle_V$和$\langle E_e \rangle_V$）之间的关系复杂，因此难以推导出该系统的算法形式。本文旨在测试长短期记忆网络循环神经网络的预测性能，即仅根据$\langle E_u \rangle_V$、$\langle E_p \rangle_V$和$\langle E_e \rangle_V$此前时间步的数据，预测$\langle E_u \rangle_V$、$\langle E_p \rangle_V$和$\langle E_e \rangle_V$的时间演化。本研究采用单层长短期记忆网络，并在隐藏层（LSTM层）中设置不同数量的神经元（n_{neuron}）。我们考察了不同回溯时间步 Δ_{back}（用于预测的时间步数）、预测时域 Δ_{forward}（由LSTM向前预测的时间步数）以及批量大小和 n_{neuron}等其他超参数下的预测精度。此处，数据分离时间步 $\Delta = 0.01 = 10^3 \Delta t$。

2.4.2. 二维小波分解

为准备数据驱动模型分解（即本征正交分解，POD）所需的数据，我们首先将能量数据（即 E_u, E_p, E_e）和涡量平方数据（Ω）从切比雪夫网格投影到壁面法向（y）方向上的均匀网格 [66]。接下来，我们进行二维小波分解，在第二层获得 E_u, E_p, E_e 和 Ω 的滤波快照（近似），使得空间分辨率在 x 和 y 方向上均降低为原来的四分之一 [67], ，这可以通过 MATLAB 中的 *wavedec2* 函数实现 [68]。概念算法如下所示，以 $E_u(x, y)$ 为例。

$$E_u(x, y) \;\; = \;\; A_1 + H_1 + V_1 + D_1, \tag{19}$$

其中， A_1 是第一层的< styling id='2'>近似矩阵， H_1 是第一层的水平细节项矩阵， V_1 是第一层的垂直细节项矩阵， D_1 是第一层的对角细节项 矩阵。分解通过低通滤波器和高通滤波器完成；在本研究中，我们使用基本的 Haar小波（Haar滤波器）。为了进一步进行多尺度分析，近似 A_1 还可以用类似方式进一步分解:

$$A_1 \quad = \quad A_2 + H_2 + V_2 + D_2, \tag{20}$$

其中， A_2、 H_2、 V_2和 D_2 是第二层 [67]对应的矩阵。

2.4.3. 本征正交分解（POD）

为对能量和涡量平方数据进行POD，我们首先将 E_u、 E_p、 E_e和Ω各自的所有快照拼接成矩阵**X**，例如，对于 E_u:

$$\mathbf{X} = \left[E_u(0), \quad E_u(\Delta t), \quad E_u(2\Delta t), \quad \cdots \quad E_u(n_t\Delta t)\right], \tag{21}$$

其中， E_u（$j\Delta t$） $j = 0$，1，.....， n_t 是一个列向量，其维度由 $[n_x, n_y]$ 重塑为 $[n_x \times n_y, 1]$， n_t 是快照数量， n_x 和 n_y 是原始两个方向 x 和 y上的网格维度， Δt 是每两个连续快照之间的时间间隔。通过对**X**进行简化奇异值分解（reduced SVD），可得到 E_u 的POD： $[U, S, V^T] = svd$（**X**, "$econ$"） [69, 41, 34]。此处，矩阵 U 包含具有空间信息的POD模态（ U 的每一列都是重塑后的POD模态），对角矩阵 S 包含各模态的幅值，矩阵 V 则包含对应的时间演化动力学（ V的每一列都是一种时间演化动力学）。

3. 结果

表 1 给出了 8 个算例的区域与时间平均动能和涡量平方。可以看出，在参数保持不变时，通过比较算例 1 与算例 2 或算例 5 与算例 6，电场对动能和涡量平方均具有正向影响。然而，当 F_θ 减小时，动能和涡量平方均减小。

接下来，我们研究能量项E_u、 E_p和 E_e的空间与时间分布。图1展示了 E_u、 E_p和 E_e 的快照，以及其对应的第二层二维小波近似（A_2 ，如式（20）所示）。它

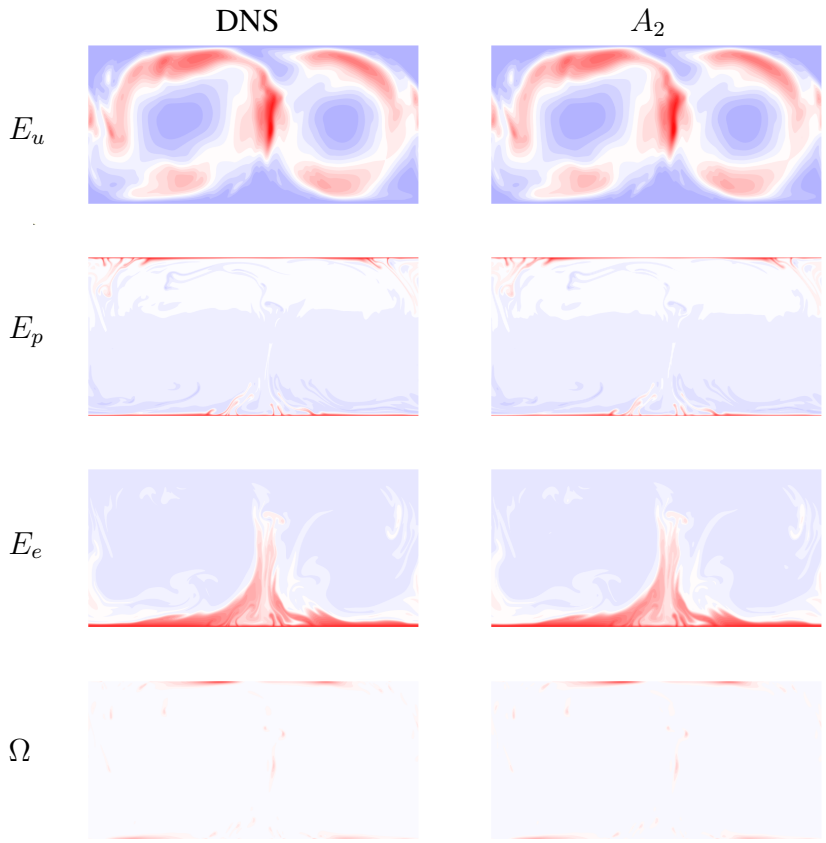

图1：案例 8 中 E_u、 E_p、 E_e 和 Ω 的直接数值模拟快照及其在第二层（A_2）的二维小波近似。

可以观察到， A_2 在结构上与直接数值模拟（DNS）的快照相吻合，尽管其分辨率较 16×低。事实上，如图2所示，通过近似 A_2 得到的域平均值 $\langle E_u\rangle_V$、$\langle E_p\rangle_V$和 $\langle E_e\rangle_V$ 也与DNS结果吻合良好，这意味着能量主要集中在大尺度上。这进一步证明了我们选择使用二维小波分解来近似二维ETHD系统中的能量分布是合理的。

由于我们已经得到了在数学上表示公式（16）、（17）和（18）所描述动力系统的 $\langle E_u\rangle_V$、 $\langle E_p\rangle_V$ 和 $\langle E_e\rangle_V$ 的时间演化，我们研究单层长短期记忆网络的预测性能。此处，我们将图2所示、并按其相应时间平均值归一化的时间序列（即 $\langle E_u\rangle_V/\langle E_u\rangle_{V,t}$、 $\langle E_p\rangle_V/\langle E_p\rangle_{V,t}$ 以及 $\langle E_e\rangle_V/\langle E_e\rangle_{V,t}$）用作训练数据和验证数据。此处，我们使用 $t \in [0, 80]$ 中的时间序列作为训练数据集，

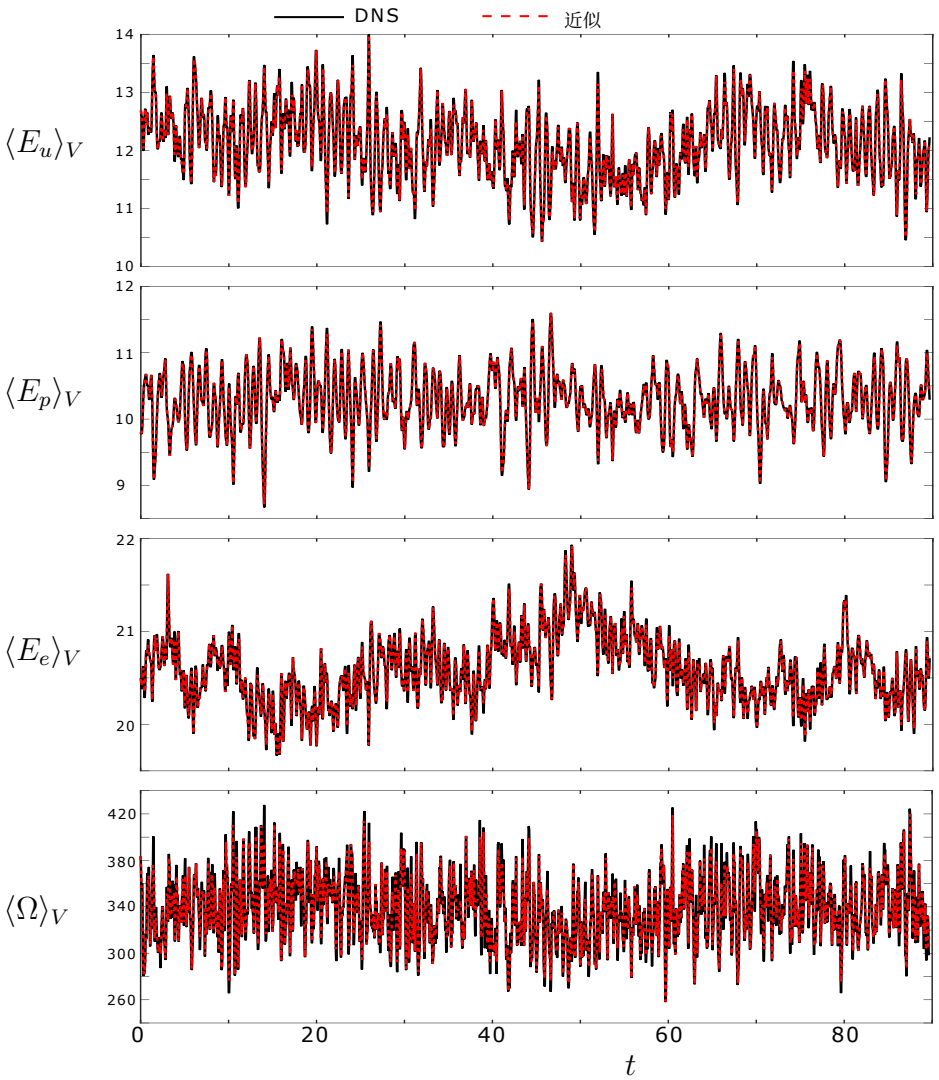

图 2：案例 8 中，域平均直接数值模拟能量和涡量平方及其在第二层的二维小波近似，分别对应 E_u、 E_p、 E_e 和 Ω。域平均值随时间变化， t。

$t \in (80, 85]$ 作为验证数据集， $t \in (85, 89.4]$ 作为测试数据集。图3展示了采用不同超参数 Δ_{forward}、 Δ_{back}、 n_{neuron}和批量大小的多种单层长短期记忆网络的训练过程。图3（a）展示了训练损失和验证损失随训练轮次（训练迭代）的变化。在大多数情况下，训练在60个训练轮次内收敛。图3（b）展示了预测时域 Δ_{forward} 和回溯时间步数量Δ_{back}的影响。可以观察到，较小的 Δ_{forward} 会带来更高的预测准确率（更低的 $\mathcal{L}$），这是直观的，因为未来越近，就越容易预测。然而， Δ_{back} 并不遵循“越多越好”的规则。在此，我们使用 $\Delta_{\text{back}} = m\Delta_{\text{forward}}$，并发现，就降低验证损失而言， $m = 5$ 的实际表现优于 $m = 3$ 或 $m = 10$ 。图3（c）展示了 n_{neuron}的影响，我们发现 $n_{neuron} = 512$ 在所有情况下都表现良好。较小的 n_{neuron} 可能导致欠拟合，而较大的 n_{neuron} 可能导致过拟合，这两种情况都会使验证损失恶化。图3（d）展示了批量大小的影响，我们发现批量大小为 $= 16$ 或32时在所有情况下都表现良好。总体而言，为了平衡预测时域和准确率，在接下来的分析中，我们采用 $\Delta_{\text{forward}} = 10$、$\Delta_{\text{back}} = 10\Delta_{\text{forward}}$、 $n_{neuron} = 512$和批量大小 $= 32$ ，相关结果如图4所示。

长短期记忆网络的测试结果如图 4 所示。测试数据集在训练过程中从未被使用过，因为长短期记忆网络是在训练数据上训练的，而停止准则和优化则基于验证数据。测试数据集仅用于测试预测性能。从图 4 可以看出，在预测时域 (10Δ) 内，使用长短期记忆网络得到的预测值（预测未来）与真实值（未来实际值）非常吻合，其中 $\Delta = 10^3\Delta t$ 是数据分离时间步。需要指出的是，图 4 所示的预测时域包含一个极值（ $\langle E_u \rangle$ 中的局部最小值，或 $\langle E_p \rangle$ 和 $\langle E_e \rangle$中的最大值），这表明长短期记忆网络不仅能够预测单调变化，还能够在混沌时间序列中正确预测极值。尽管与完整时间序列相比，预测时域似乎较短，但需要指出的是，此处的预测时域相当于 $10^4\Delta t$，其中 Δt 是直接数值模拟时间步长。

区域平均值的时间演化展示了能量如何随时间变化。然而，应用域平均后，空间分布信息便会丢失。接下来，我们通过展示案例 8 中 E_u、Ω、E_p 和 E_E 的本征正交分解模态分析结果，研究能量项和涡量平方项的空间分布，如图 5 所示。可以观察到，对于所有与能量相关的属性，第一个POD模态都捕捉到了相应能量的大尺度动力学（相干结构）。对于动能 E_u，

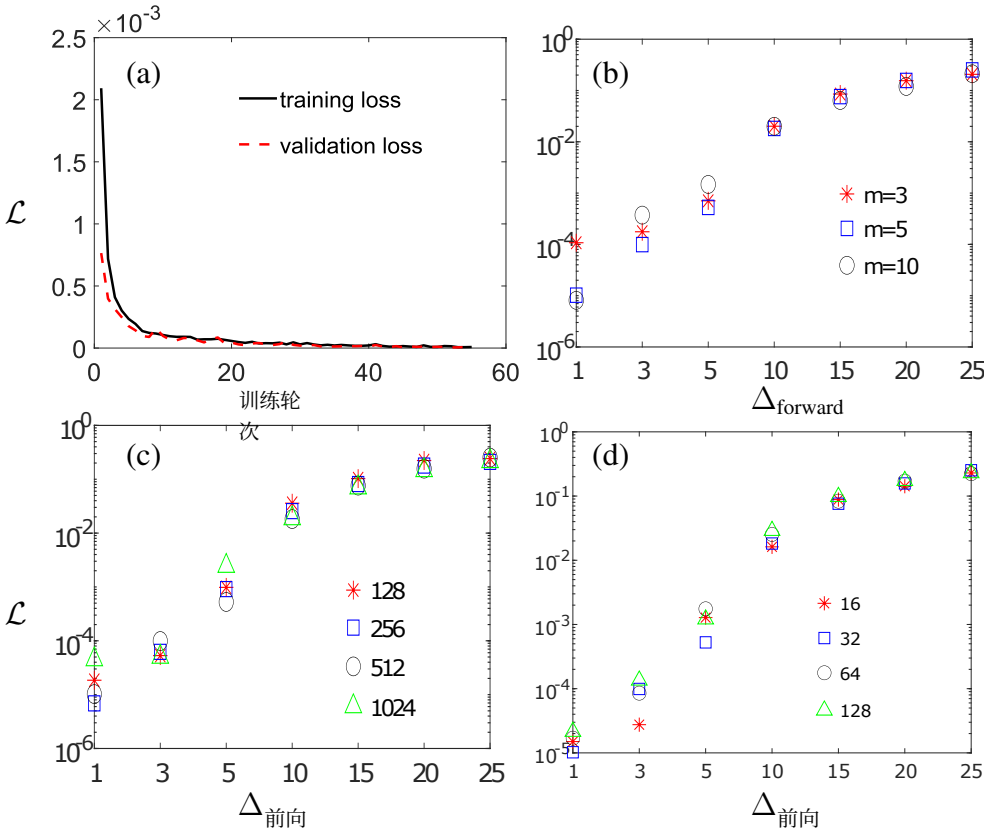

图3： (a) 案例 8 在 $\Delta_{\text{forward}} = \Delta$, Δ_{back} =10Δ_{forward}, $n_{neuron} = 256$ 和批量大小 $= 32$ 条件下的训练损失和验证损失 $\mathcal{L}$；(b) 在 $n_{neuron} = 512$ 和批量大小 $= 16$ 条件下，最小验证损失（$min(\mathcal{L})$）随 Δ_{forward} 和 $\Delta_{\text{back}} = m\Delta_{\text{forward}}$ 的变化；(c) 在 $\Delta_{\text{back}} = 5\Delta_{\text{forward}}$ 和批量大小 $= 16$ 条件下，$min(\mathcal{L})$ 随 Δ_{forward} 和 $n_{neuron} = [128, 256, 512, 1024]$ 的变化；(d) 在 $\Delta_{\text{back}} = 5\Delta_{\text{forward}}$ 和 $n_{neuron} = 512$ 条件下，$min(\mathcal{L})$ 随 Δ_{forward} 和批量大小 $= [16, 32, 64, 128]$ 的变化。

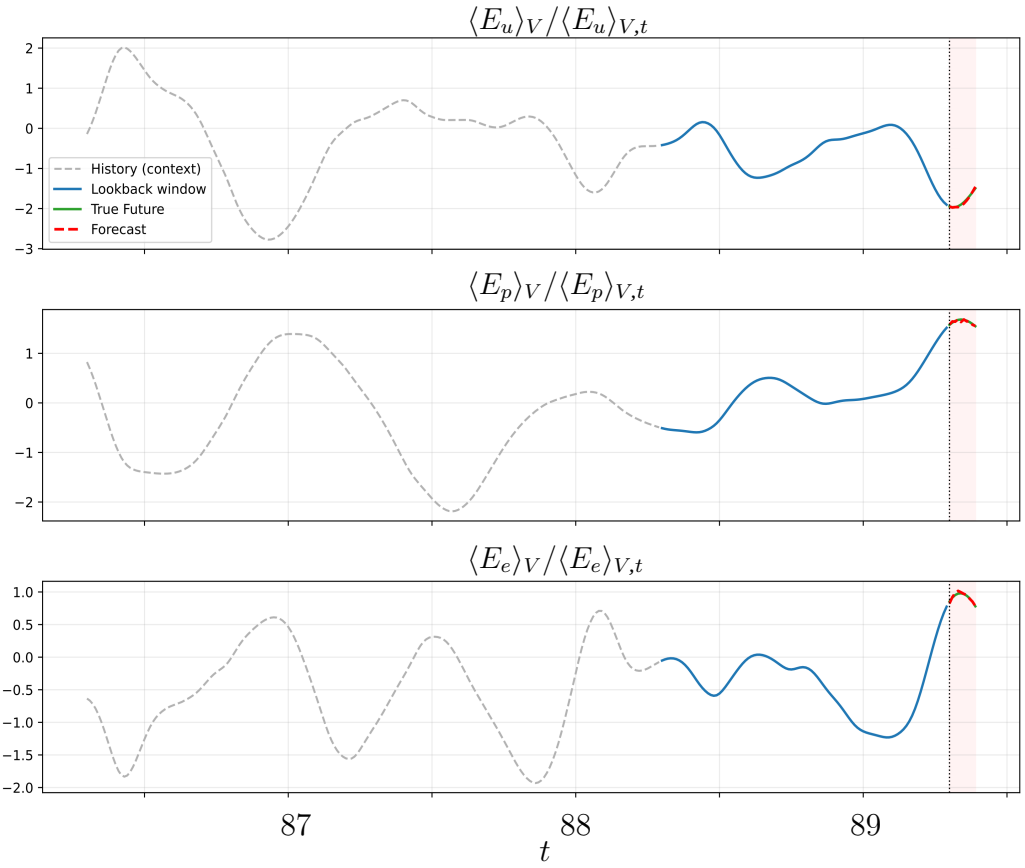

图4：归一化时间序列 $\langle E_u \rangle_V$, $\langle E_p \rangle_V$ 和 $\langle E_e \rangle_V$ 的预测。长短期记忆网络具有 $\Delta_{\text{forward}} = 10\Delta$, $\Delta_{\text{back}} = 10\Delta_{\text{forward}}$, $n_{neuron} = 512$, 批量大小为 $= 32$。

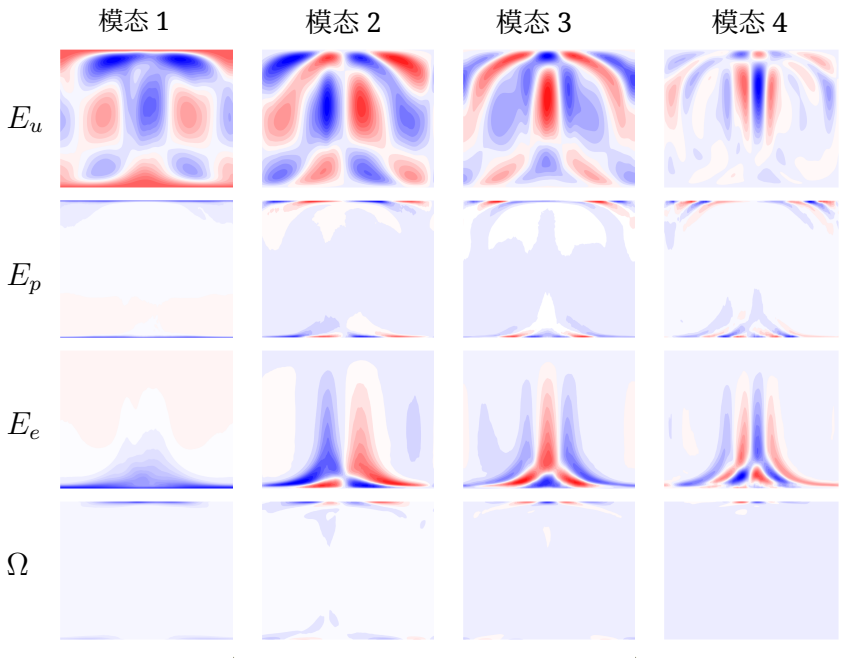

图 5：案例 8 中 E_u、 E_p、 E_e 和 Ω 的前 4 个 POD模态。

前三个模态包含大尺度上的能量。对于 E_p、 E_e 和 Ω，从模态 2 开始，小尺度结构（在 x 中表现为更短的波长）开始显现。此外，势能在整个区域内分布得更为均匀，而电能则更集中于羽流中。这里的发现与我们此前关于 Φ_θ 和 Φ_E [22] 的结果一致。还应注意，Ω 大量分布在靠近上下壁面的边界层内。这是因为在二维流场中，涡量平方 Ω 与黏性耗散直接相关；由于速度梯度较高，黏性耗散在壁面附近达到最大值 [70, 71, 22]。

除了能量和涡量平方的空间分布外，POD分析还展示了不同物理量所得到的模态之间的相关性。图 6 显示了 E_p、 E_e 和 Ω 的模态系数与 E_u 的相关性。可以观察到，这些模态系数高度相关（相关系数高于 0。9），呈现出近乎线性的关系。这一点尤其值得关注，因为这表明，只要给出少数几个主导模态，仅通过了解或正确预测 E_u 个模态的系数，就能重构 E_p、E_e 和 Ω。

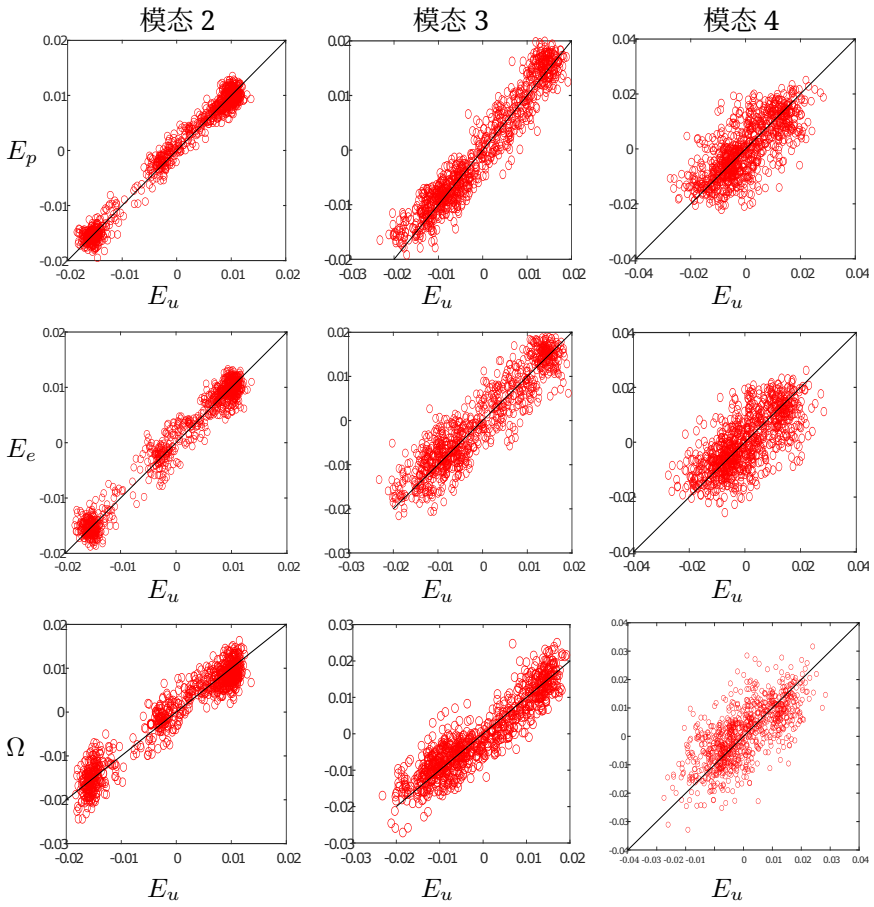

图 6：案例 8 中， 2nd、 3^{rd}和 4th 的POD模态系数（矩阵 V的列）与 E_p、 E_e和 Ω之间在 E_u 下的相关性。黑线表示线性拟合。

4. 结论

本文分析了二维电热流体动力学湍流对流系统中的能量项。首先，我们推导了动能、势能和电能的控制方程（将其视为一个动力系统）。随后，我们阐述了过渡项（Φ_θ 和 Φ_E），它们代表势能和电能对动能的不同贡献。这一分析补全了我们此前工作 [22], 中所描述的能量传递图景，并首次在本文中进行了报告。

接下来，我们研究了多种单层长短期记忆网络对域平均动能、势能和电能时间序列的预测效果。我们展示了长短期记忆网络能够准确预测最长达 $10^4\Delta t$ 的时间范围，并准确预测局部极值。

此外，我们对能量项和涡量平方项进行了POD分析，并表明，包含能量的相干结构可由第一个POD模态充分描述。我们还研究了不同能量项和涡量平方项之间模态系数的相关性，发现它们呈线性关系。然而，正是由于这一特点，POD分析无法揭示小尺度结构中所包含的信息，而这些信息对于采用大涡模拟等方法进行湍流建模可能十分重要。

在未来的工作中，我们计划采用不同的数据驱动模态分析方法来拓展我们的模态分析，例如动态模态分解（DMD）、经验模态分解（EMD）和变分模态分解（VMD），并比较这些方法在分析二维电热流体动力学湍流系统能量方面的性能。

5. 致谢

作者感谢 Mengqi Zhang 博士、Qi Wang 博士和 Yu Zhang 博士就混沌电热流体动力学系统开展的讨论。

参考文献

[1] N Felici 与 JC Lacroix。绝缘液体中的电对流，特别是关于单极性和双极性注入：对.....研究工作的综述，在

法国国家科学研究中心格勒诺布尔静电学实验室，1969–1976。《静电学杂志》，5:135–144，1978。[2] Antonio Castellanos。电流体动力学，第380卷。施普林格，2014年。[3] Lei Wang、Zhouchao Wei、Tianfu Li、Zhenhua Chai 与 Baochang Shi。介电液体中电流体动力学传导现象的格子玻尔兹曼建模。《应用数学建模》，95:361–378，2021年。[4] Jian Wu、Philippe Traoré、Alberto T Pérez 与 Pédro A Vázquez。强单极性注入诱导的介电液体中二维有限振幅电对流。《静电学杂志》，74:85–95，2015年。[5] Yu Zhang、Lijuan Liu、Yang Chen 与 Jiting Ouyang。针环电晕放电中离子风的特性。《静电学杂志》，74:15–20，2015年。[6] Mengqi Zhang、Fulvio Martinelli、Jian Wu、Peter J Schmid 与 Maurizio Quadrio。有无横向流条件下电流体动力学流动的模态与非模态稳定性分析。《流体力学杂志》，770:319–349，2015年。[7] Xuerao He、Zhihao Sun 与 Mengqi Zhang。电流体动力学流动中的莫法特涡：数值模拟与分析。《流体力学杂志》，953:A14，2022年。[8] Wei Liu、Yueting Zhou 与 Pengpeng Shi。选择性渗透膜附近有限涡高电对流流动的标度律。《物理评论*E*》，102(3):033102，2020。[9] Wei Liu、Yueting Zhou 与 Pengpeng Shi。电对流流动从混沌到稳态过程中剪切遮蔽的临界选择。《流体力学杂志》，946:A3，2022年。[10] Xuerao He 与 Mengqi Zhang。热场与电场作用下的流动失稳：线性分析。《欧洲力学杂志*B*辑：流体》，88:34–46，2021年。[11] Ben Ma、Lei Wang、Kun He 与 Dinggen Li。含内圆柱的方形腔体内幂律流体中的电热对流。《流体物理学》，33(8)，2021年。

[12] Guangze Liu、Yu Zhang、Dian Li、Yuxing Peng 和 Jian Wu。不同几何模型中介电液体电对流与电热对流的综述。《静电学杂志》，第 104089 页，2025年。[13] MJ Gross 和 JE Porter。介电液体中的电致对流。《自然》，212(5068):1343–1345，1966年。[14] F Pontiga、A Castellanos 和 AT Richardson。介电液层同时受到弱单极性电荷注入和温度梯度作用时过稳定运动的起始。《力学与应用数学季刊》，45(1):25–46，1992年。[15] Kun He、Zhenhua Chai、Lei Wang、Ben Ma 和 Baochang Shi。利用格子玻尔兹曼方法对具有固液界面的电热对流进行数值研究。《流体物理学》，33(3)，2021年。[16] Z Wang、Y Tian、C Zhang、Y Wang 和 W Deng。薄圆盘产生的大规模并行电流体动力学尖端射流。《物理评论快报》，126(6):064502，2021年。[17] Shiyuan Ma、Yifei Guan 和 Jian Wu。针环电晕放电强化传热的实验研究。《国际传热与传质杂志》，184:122273，2022年。[18] Yifei Guan、Xuerao He、Qi Wang、Zhiwei Song、Mengqi Zhang 和 Jian Wu。二维电热流动中的单调失稳与过稳定性。《物理评论：流体》，6(1):013702，2021年。[19] Tian-Fu Li、Zheng-Gang Su、Kang Luo 和 Hong-Liang Yi。方腔内介电液体电热对流向混沌转变。《流体物理学》，32(1)，2020年。[20] Qi Wang、Yifei Guan、Tao Wei 和 Jian Wu。两个平行电极之间介电液体电热对流的转变序列与传热强化。《国际热科学杂志》，179:107705，2022年。[21] A Kourmatzis 和 JS Shrimpton。两块平板之间的湍流三维介电电流体动力学对流。《流体力学杂志》，696:228–262，2012年。

[22] Yifei Guan、Qi Wang、Mengqi Zhang、Yu Zhang 和 Jian Wu。二维电-热-流体动力学湍流的数值研究：能量收支与标度律分析。《国际传热与传质杂志》，247:127094，2025年。[23] Antonio Castellanos 和 Pierre Atten。单极性注入作用下液体有限振幅对流的数值建模。《*IEEE*工业应用汇刊》，IA-23:825–830，1987年。[24] R Chicón、A Castellanos 和 E Martin。绝缘液体中库仑力驱动对流的数值模拟。《流体力学杂志》，344:43–66，1997年。[25] Ph. Traoré 和 A.T. Pérez。强单极性注入作用下介电液体电对流的二维数值分析。《流体物理学》，24(3)，2012年。[26] Jian Wu、Philippe Traoré、Pedro A Vázquez 和 Alberto T Pérez。有限二维容器中由离子单极性注入引起的对流起始。《物理评论*E*》，88(5):053018，2013年。[27] Kang Luo、Jian Wu、Hong-Liang Yi 和 He-Ping Tan。介电液体中库仑力驱动流动的格子玻尔兹曼模型。《物理评论*E*》，93(2):023309，2016年。[28] Kang Luo、Jian Wu、Hong-Liang Yi、Lin-Hua Liu 和 He-Ping Tan。强单极性注入所诱导电对流中的六边形对流图样及其演化情景。《物理评论：流体》，3(5):053702，2018年。[29] Yifei Guan 和 Igor Novosselov。耦合快速傅里叶变换泊松求解器的双松弛时间格子玻尔兹曼方法：在电对流流动中的应用。《计算物理学杂志》，397:108830，2019。[30] Yifei Guan 和 Igor Novosselov。单极性电荷注入下横向流中电对流的数值分析。《物理评论：流体》，4(10):103701，2019。[31] Philip Holmes、John L Lumley、Gahl Berkooz 和 Clarence W Rowley。湍流、相干结构、动力系统与对称性。剑桥大学出版社，2012年。

[32] Kunihiko Taira、Steven L Brunton、Scott Dawson、Clarence W Rowley、Tim Colonius、Beverley J McKeon、Oliver T Schmidt、Stanislav Gordeyev、Vassilios Theofilis 和 Lawrence S Ukeiley。《流体流动的模态分析：综述》。*AIAA*期刊，55(12):4013–4041，2017。[33] Kunihiko Taira、Maziar S Hemati、Steven L Brunton、Yiyang Sun、Karthik Duraisamy、Shervin Bagheri、Scott Dawson 和 Chi-An Yeh。《流体流动的模态分析：应用与展望》。*AIAA*期刊，58(3):998–1022，2020。[34] Steven L Brunton 和 J Nathan Kutz。《数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制》。剑桥大学出版社，2019。[35] Steven L. Brunton、Bernd R. Noack 和 Petros Koumoutsakos。流体力学中的机器学习。流体力学年评，52:477–508，2020。[36] Edward N Lorenz。确定性非周期流动。大气科学学报，20(2):130–141，1963。[37] Barry Saltzman。作为初值问题的有限振幅自由对流。大气科学学报，19(4):329–341，1962。[38] JL Lumley。非均匀湍流的结构。大气湍流与波传播。*AM Yaglom*、*VI Tatarski*，第166–178页，1967。[39] Gal Berkooz、Philip Holmes 和 John L Lumley。湍流流动分析中的本征正交分解。流体力学年评，25(1):539–575，1993。[40] John L Lumley。《湍流中的随机工具》。Courier Corporation，2007。[41] J Nathan Kutz、Steven L Brunton、Bingni W Brunton 和 Joshua L Proctor。《动态模态分解：复杂系统的数据驱动建模》。SIAM，2016。[42] Kazufumi Ito 和 Sivaguru S Ravindran。用于流体流动仿真与控制的降阶方法。《计算物理学杂志》，143(2):403–425，1998。

[43] Bernd R Noack、Marek Morzynski 和 Gilead Tadmor。《用于流动控制的降阶建模》，第528卷。施普林格科学与商业媒体，2011年。[44] Arvind T Mohan 和 Datta V Gaitonde。利用长短期记忆网络对湍流控制进行降阶建模的深度学习方法。*arXiv*预印本 *arXiv:1804.09269*，2018年。[45] Qun Chao、Zi Xu、Yuechen Shao、Jianfeng Tao、Chengliang Liu 和 Shuo Ding。用于轴向柱塞泵健康评估的模型驱动与数据驱动混合方法。《国际水力机电学报》，6(1):76–92，2023年。[46] Changsheng Xi、Jie Yang、Xiaoxia Liang、Rahizar Bin Ramli、Shaoning Tian、Guojin Feng 和 Dong Zhen。针对不平衡数据改进的门控卷积神经网络滚动轴承故障诊断方法。《国际水力机电学报》，6(2):108–132，2023年。[47] Omer A Alawi、Haslinda Mohamed Kamar、Mustafa Mudhafar Shawkat、Mohammed M Al-Ani、Hussein A Mohammed、Raad Z Homod 和 Mazlan A Wahid。基于人工智能的聚α烯烃-氮化硼纳米流体黏度预测。《国际水力机电学报》，7(2):89–112，2024年。[48] Eduardo Henrique Taube Cunegatto、Flávia Schwarz Franceschini Zinani 和 Sandro José Rigo。利用遗传算法和多准则决策算法进行微混合器设计的多目标优化。《国际水力机电学报》，7(3):224–249，2024年。[49] Kunihiko Taira、Steven L Brunton、Scott TM Dawson、Clarence W Rowley、Tim Colonius、Beverley J McKeon、Oliver T Schmidt、Stanislav Gordeyev、Vassilios Theofilis 和 Lawrence S Ukeiley。《流体流动的模态分析：综述》。*AIAA*期刊，55(12):4013–4041，2017。[50] Dulakshi SK Karunasinghe 和 Shie-Yui Liong。利用全局模型进行混沌时间序列预测：人工神经网络。《水文学杂志》，323(1-4):92–105，2006年。[51] Ashesh Chattopadhyay、Pedram Hassanzadeh 和 Devika Subramanian。利用深度

学习方法：储备池计算、人工神经网络和循环神经网络长短期记忆。地球物理学中的非线性过程讨论，2020：1–26，2020。[52] Zhixin Lu、Jaideep Pathak、Brian Hunt、Michelle Girvan、Roger Brockett 和 Edward Ott。储备池观测器：混沌系统中未测变量的无模型推断。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，27(4)，2017。[53] Thomas L Carroll。使用储备池计算机区分混沌信号。《物理评论*E*》，98(5)：052209，2018。[54] Chad Nathe、Chandra Pappu、Nicholas A Mecholsky、Joe Hart、Thomas Carroll 和 Francesco Sorrentino。带噪声的储备池计算。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，33(4)，2023。[55] Jia-Shu Zhang 和 Xian-Ci Xiao。使用循环神经网络预测混沌时间序列。《中国物理快报》，17(2)：88，2000年。[56] Qinghai Li 和 Rui-Chang Lin。使用循环神经网络预测混沌时间序列的新方法。《工程数学问题》，2016(1)：3542898，2016年。[57] Alex Graves。长短期记忆。使用循环神经网络进行监督式序列标注，第37–45页，2012年。[58] Pantelis R Vlachas、Wonmin Byeon、Zhong Y Wan、Themistoklis P Sapsis 和 Petros Koumoutsakos。使用长短期记忆网络对高维混沌系统进行数据驱动预测。《英国皇家学会会刊*A*辑：数学、物理与工程科学》，474(2213)：20170844，2018。[59] Milad Keshtkar Langeroudi、Mohammad Reza Yamaghani 和 Siavash Khodaparast。模糊长短期记忆模型：用于混沌时间序列预测的模糊长短期记忆模型。《*IEEE*智能系统》，37(4)：70–78，2022。[60] Yifei Guan、Ashesh Chattopadhyay、Adam Subel 和 Pedram Hassanzadeh。使用卷积神经网络进行二维湍流的稳定后验大涡模拟：反散射分析及通过迁移学习推广至更高Re。《计算物理学杂志》，458：111090，2022。

[61] Kraig B Winters、Peter N Lombard、James J Riley 和 Eric A D’ Asaro。密度分层流体中的可用势能与混合。《流体力学杂志》，289：115–128，1995年。[62] Graham O Hughes、Bishakhdatta Gayen 和 Ross W Griffiths。瑞利–贝纳德对流中的可用势能。《流体力学杂志》，729：R3，2013年。[63] Yu Zhang、Di-Lin Chen、Xiao-Ping Luo、Kang Luo、Jian Wu 和 Hong-Liang Yi。二维腔体中的库仑力驱动的电对流湍流。《流体力学杂志》，980：A22，2024年。[64] Lloyd N. Trefethen。*MATLAB* 中的谱方法。工业与应用数学学会，美国，2000年。[65] Randall J LeVeque。常微分方程与偏微分方程的有限差分方法：稳态及时变问题。SIAM，2007。[66] Tobin A Driscoll、Nicholas Hale 和 Lloyd N Trefethen。Chebfun 指南，2014年。[67] Stephane Mallat。信号处理小波之旅。学术出版社，1999年。[68] Desmond J Higham 和 Nicholas J Higham。*MATLAB* 指南。SIAM，2016年。[69] Yifei Guan、Steven L Brunton 和 Igor Novosselov。混沌电对流的稀疏非线性模型。英国皇家学会开放科学，8(8)：202367，2021年。[70] Siegfried Grossmann 和 Detlef Lohse。热对流中的标度律：统一理论。《流体力学杂志》，407：27–56，2000年。[71] Peter Alan Davidson。湍流：科学家与工程师导论。牛津大学出版社，2015年。