《天文学与天体物理学》最终稿件编号
2026年3月3日
©ESO 2026

arXiv:2603.01300v1 [physics.plasm-ph] 1 Mar 2026

弱碰撞等离子体湍流中的鲁棒磁流体力学不变量：二维混合模拟结果

Petr Hellinger[1,2] 和 Victor Montagud-Camps[3]

[1] 捷克科学院天文研究所，布拉格，捷克[2] 捷克科学院大气物理研究所，布拉格，
捷克[3] 穆尔西亚大学电磁学与电子学系，穆尔西亚，西班牙

2024年8月14日

摘要

研究目标。我们在太阳风背景下研究了等离子体湍流，重点关注理想二阶磁流体力学（MHD）和霍尔磁流体力学不变量的性质。

研究方法。我们研究了初始交叉螺度较大、磁螺度可忽略的衰减等离子体湍流二维混合模拟结果，并考察了总能量以及交叉螺度、动能螺度、混合螺度和磁螺度的演化。对于总能量（动能加磁能）以及交叉螺度、动能螺度和混合螺度，我们在混合近似（动理学质子和流体电子）下分析了相应的卡门-霍瓦斯-莫宁（KHM）方程。
研究结果。KHM分析表明，总能量在大尺度上衰减。在中间尺度，总能量通过磁流体力学非线性从大尺度向小尺度级联，这种级联又部分通过霍尔耦合延续至亚离子尺度。级联的总能量通过电阻耗散和压力-应变效应，在小尺度上转化（耗散）为内能。霍尔项将交叉螺度与动能螺度耦合，表明这种耦合不变量（本文称为混合螺度）是一个重要的湍流量。然而，利用KHM 方程分析时，动能螺度和混合螺度的行为与总能量的行为极为不同。另一方面，与能量类似，交叉螺度在大尺度上衰减，通过磁流体力学+霍尔非线性从大尺度向小尺度级联，并通过电阻耗散和压力-应变效应的交叉螺度对应项在小尺度上耗散。与总能量不同，霍尔项在很宽的尺度范围内（甚至远高于离子尺度）对交叉螺度都很重要。相比之下，磁螺度仅通过电阻项少量产生，且不表现出任何级联。

关键词。 湍流 – 太阳风 – 粗糙不变量

1。引言

F处于湍流状态的流体传递涨落的能量
a由于非线性相互作用而跨越尺度，这一过程
k被称为能量级联。非线性不仅作用于
e涨落的能量，也作用于其他湍流特性，例如
w。这使系统中能够形成多个级联，
te其中一个级联的发展会影响另一个级联的发展（Alexakis & Biferale2018）。不可压缩磁流体力学
h（MHD）流体的性质主要由三个
s二阶（鲁棒）不变量决定：总能量（动能与磁
n能）、交叉螺度和磁螺度。尽管磁
n性螺旋度在可压缩
ib霍尔磁流体力学中，霍尔项的存在使交叉
a　动螺度；二者的组合，即混合螺度（也称为 X螺旋度；参见 Pouquet & Yokoi 2022），是适用于不可压缩霍尔磁流体力学的理想不变量。这些理想不变量与湍流尤其相关。总能量的级联与耗散是（霍尔）磁流体湍流的核心问题之一，而这些过程会受到不同螺度的影响；反过来，不同螺度也可能表现出与能量类似的级联和耗散现象。所有这些过程都会制约并改变湍流系统的动力学。例如，交叉螺度可能会降低能量级联（Dobrowolny et al. 1980），并在通过湍流产生磁场的过程中发挥重要作用发电机过程（Yokoi 1999年）；它还可能影响离子和电子之间的加热分配（Squireetal.2023）。

太阳风在很宽的尺度范围内表现出磁场、等离子体整体速度及其他物理量的重要涨落（Kiyani 等，2015年；Alexandrova 等，2021年）。这些涨落通常具有幂律型谱特性，且彼此存在非线性耦合；太阳风系统是弱碰撞等离子体中湍流系统的一个例子（Bruno & Carbone，2013年）。慢太阳风流的平均交叉螺度较弱（不过，参见例如 D'Amicis & Bruno，2015年；Shi 等，2021年），而快太阳风流通常具有相对较强的平均交叉螺度。这些高交叉螺度太阳风流也称为阿尔芬流，因为它们表现出磁场与等离子体整体速度之间显著的相关或反相关关系，这是阿尔芬波的特征（Belcher & Davis，1971年；Grappin 等，1991年）。高交叉螺度太阳风流中的等离子体湍流，以及总能量和交叉螺度的行为，通常在不可压缩磁流体力学近似下进行研究，并以埃尔萨瑟变量中的伪能量取代能量和螺度（埃尔萨瑟变量是磁场的阿尔芬单位表示与等离子体整体速度的组合；参见 Tu 等，1989年）。太阳风原位观测以及数值模拟表明，两种伪能量平行级串，这意味着总能量和交叉螺度平行级串。然而，与不可压缩磁流体力学的预言不同（Dobrowolny

等，1980年），太阳风中的总能量随径向距离的衰减慢于交叉螺度，因此相对交叉螺度会降低。因此，确定压缩效应和非理想效应（霍尔效应和动力学效应）的影响十分重要。

压缩效应破坏了总能量和混合螺度的不变性，但太阳风仅表现出微弱的密度涨落（Shi 等，2021年），这意味着可压缩性效应在太阳风湍流中很可能并不占主导；Montagud-Camps 等（2022）的可压缩磁流体力学湍流模拟在定性上与不可压缩模拟表现相似，这同样与观测结果形成对比。对于弱碰撞太阳风等离子体，还有必要研究非麦克斯韦粒子分布函数形成所带来的后果，而这需要对粒子压强作张量描述（Del Sarto 等，2016）。这些后果之一是压力-应变耦合，它似乎极为重要，因为它可能充当总能量的有效耗散率（Yang 等，2017年；Matthaeus 等，2020年）。在本文中，我们探讨压力-应变效应如何影响不同螺度，以完善我们对弱碰撞等离子体湍流中粗糙不变量的理解。我们分析了衰减的高交叉螺度等离子体湍流的二维伪谱混合模拟结果。我们在混合近似下使用 Kármán-Howarth-Monin（KHM）方程（de Kármán 和 Howarth，1938；Politano 和 Pouquet，1998年a,b）处理能量（Hellinger 等（2024）），并推导了各螺度的等效方程。本文结构如下：第2节描述伪谱混合代码，第3节总结控制方程及其守恒性质。第4节给出总体模拟结果，第5节分析能量（第5.1小节）以及交叉螺度、动能螺度和混合螺度（第5.2小节）的 KHM 性质。最后，第6节总结并讨论模拟结果。在附录中，我们用空间滤波和谱滤波技术补充了我们的 KHM 结果。

2. 数值代码

在数值模拟中，我们采用了基于Matthews（1994年）模型的混合代码的二维伪谱版本。在该代码中，电子被视为具有恒定温度的无质量电中和流体，而离子则作为粒子处理。离子的位置与速度相隔半个时间步长，并采用Boris格式推进；该格式要求场在粒子速度之前半个时间步长处已知。这通过将电流密度推进到该时刻来实现（每个时间步长仅对粒子数据做一次计算遍历）。所有场及其时间推进所需的空间导数使用同一网格（参见Valentini等人2007年），并利用快速傅里叶变换计算（Frigo与Johnson 2005年）。相关节点处粒子对电流密度的贡献通过双线性加权进行计算，随后在三个点上平滑。不对电磁场进行平滑。欧姆定律中采用较小的电阻率，以避免能量在小尺度上积聚。磁场利用修正中点法随时间推进，该方法允许借助时间子步进来推进场。

模拟所用的单位和参数如下：空间和时间单位分别为离子惯性长度$d_i = c/\omega_{pi}$和离子回旋频率 Ω_i的倒数，其中 $\omega_{pi} = (n_p e^2/m_p\epsilon_0)^{1/2}$ 为质子等离子体频率。在这些表达式中，n_p 和 B_0 分别表示等离子体质子的密度和初始磁场的大小，而 e 和 m_p 分别表示质子电荷和质量；最后，c、 ϵ_0和 μ_0 分别表示光速以及真空的介电常数和磁导率。空间分辨率为 $\Delta x = \Delta y = d_i/8$。质子的每单元粒子数为 16,384；$\beta_i = \beta_e = 0.5$。模拟区域位于 x-y平面，并假设两个维度均为周期性边界。场和矩定义在维度为 2048×2048 的二维网格上。粒子推进的时间步长为 $dt = 0.01\Omega_i^{-1}$，而磁场 B 以更小的时间步长 $dt_B = dt/20$ 推进。（矢势 A 根据磁场并假设采用库仑规范进行初始化，随后在代码中随时间演化。）背景磁场 B_0 垂直于模拟平面。按照 Franci 等（2015）的方法，我们以具有随机相位、线性阿尔芬偏振（$\delta B \perp B_0$）的各向同性二维谱模初始化系统，这些模式分布在大尺度 $k \leq 0.1 d_i^{-1}$上，且具有平坦的一维谱。系统初始磁场涨落的（均方根）振幅为 $\delta B/B_0 = 0.3$，相对交叉螺度为 $\sigma_c = 0.6$。磁螺度和动螺度的初始值几乎为零。

3. 控制方程

我们研究了一个由以下方程支配的系统，这些方程描述等离子体密度 ρ、等离子体平均速度 $\boldsymbol{u}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\rho = -\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{\rho} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}{\rho} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{B}] + \eta\nabla^2\boldsymbol{B}. \tag{3}$$

其中$\mathbf{P}$ 为等离子体压力张量， η 为电阻率，$\boldsymbol{J}$ 为电流密度，$\boldsymbol{j}$ 为以速度单位表示的电流密度，$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{J}/\rho_c = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_e$ (ρ_c 分别为 $\boldsymbol{u}_e$ 电荷密度和电子速度）。除磁导率μ_0,设为 1 外，我们均采用国际单位制（通过重新缩放$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}\mu_0^{-1/2}$ 即可得到国际单位制结果）。方程（3）（电阻项除外）可通过对质子和电子的 Vlasov 方程取矩并假设电子无质量推导得到。我们加入了电阻耗散项，如混合代码中所用（参见Hellinger 等（2024））。

我们研究了混合近似下电子-质子等离子体中不同能量和螺度的性质。对于在闭合体积上取平均的（质子）动能（$E_{\rm kin} = \langle\rho|\boldsymbol{u}|^2\rangle/2$）与磁能（$E_{\rm mag} = \langle|\boldsymbol{B}|^2\rangle/2$）之和（用尖括号 $\langle\bullet\rangle$表示），我们得到了以下预算方程:

$$\partial_t\left(E_{\rm kin} + E_{\rm mag}\right) = -Q, \tag{4}$$

其中 $Q = Q_\eta + \psi$ 表示总（有效）耗散率，由压力-应变率 $\psi = -\langle\mathbf{P}:\boldsymbol{\nabla u}\rangle$和电阻耗散率 $Q_\eta = \eta\langle|\boldsymbol{J}|^2\rangle$组成。遵循 Kida 和 Orszag（1990年），我们定义了密度加权速度场 $\boldsymbol{w} = \rho^{1/2}\boldsymbol{u}$，并将动能表示为二阶正定量，$E_{\rm kin} = \langle|\boldsymbol{w}|^2\rangle/2$。

对于平均交叉螺度（$H_c = \langle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\rangle$），我们得到以下方程:

$$\partial_t H_c = -\langle\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\rangle - \psi_{Hc} - \epsilon_{\eta Hc}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$ 是涡度场，$\psi_{Hc} = -\langle \mathbf{P} : \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{B}/\rho) \rangle$ 是压力-应变率的交叉螺度对应量（压力膨胀耦合的推广；参见 Montagud-Camps 等（2022））， 而 $\epsilon_{\eta Hc} = \eta \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J} \rangle$ 是交叉螺旋度电阻耗散率。方程（5）右端的第一项将交叉螺度与动螺度耦合起来。

对于（重标度后的）动螺度（$H_k = m\langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle/(2e)$),我们推导出了动力学方程

$$\partial_t H_k = \langle \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \rangle - \psi_{Hk}, \tag{6}$$

其中，$\psi_{Hk} = -m\langle \mathbf{P} : \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\omega}/\rho) \rangle/e$ 是压力-应变率对应的动螺度形式。在上述公式中，我们选择用重整化因子m/e表示动螺度，也就是质子质荷比，以使交叉螺度和动螺度具有相同的单位。混合螺度，即交叉螺度与（重整化后的）动螺度之和，$H_x = H_c + H_k$，因此是混合系统的理想不变量，其变化规律为

$$\partial_t H_x = -\psi_{Hc} - \epsilon_{\eta Hc} - \psi_{Hk}. \tag{7}$$

磁螺度也是霍尔磁流体力学和混合系统各自独立的理想不变量。本文研究了具有周期边界条件和背景均匀磁场 $B_0 = \langle B \rangle$的模拟系统的性质。在这种情况下，产生 $B_0 = \boldsymbol{\nabla} \times$ 的矢势 A_0 并非周期性函数，因此会影响磁螺旋度守恒（Matthaeus与Goldstein 1982）；我们研究了修正磁螺旋度 $H_m = \langle A_1 \cdot (B_1 + 2B_0) \rangle$的性质，其中 B_1和 A_1 分别是磁场和矢势场的涨落分量，$B_1 = B - B_0$ 和 $A_1 = A - A_0$,。对于平均修正磁螺旋度，我们得到了以下守恒性质：

$$\partial_t H_m = -\epsilon_{Hm}, \tag{8}$$

其中 $\epsilon_{Hm} = 2\eta \langle \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{J} \rangle$ 是电阻耗散率。

4. 模拟结果

图 1 展示了不同物理量随时间的演变。在模拟中，质子动能 $E_{\rm kin}$ 与磁能 $E^{\rm mag}$ 以相反的相位振荡，表明二者之间存在能量交换，但总体而言，这两个物理量均在下降。另一方面，质子内能 $E_{\rm int} = 3\langle p \rangle/2$，则有所增加（这里 p 是标量压力，$p = \mathrm{tr}(\mathbf{P})$，tr 表示迹）。这种加热（增能）在初期较弱（$t\Omega_i \lesssim 200$），随着湍流发展而逐渐增强。总能量 $E_{\rm tot} = E_{\rm kin} + E_{\rm int} + E^{\rm mag}$ 由于假设电子质量为零，因此因电阻耗散而缓慢下降

且为等温。这种行为见图 1a，其中展示了动能（$\Delta E_{\rm kin}$）、磁能（$\Delta E^{\rm mag}$）、内能（$\Delta E_{\rm int}$）和总能量（$\Delta E_{\rm tot}$）的相对变化。质子能量增益由压力-应变耦合驱动，该耦合发挥着有效耗散通道的作用。图 1b 展示了压力-应变有效耗散率 ψ 以及电阻耗散率 Q_η （虚线）。压力-应变率 ψ 起初因初始条件的弛豫而大幅激增，随后缓慢上升并趋于饱和；ψ 随时间振荡，主要是由压缩效应所致。电阻耗散率 Q_η 缓慢上升，并在 $t\Omega_i \simeq 240$ 附近出现局部最大值（这是磁重联开始所致）。电阻耗散率在 $t\Omega_i \simeq 550$ 达到最大值，此后缓慢下降。

交叉螺度H_c 随时间降低，起初较慢，之后（$t\Omega_i \gtrsim 200$）降低得更快，且近似

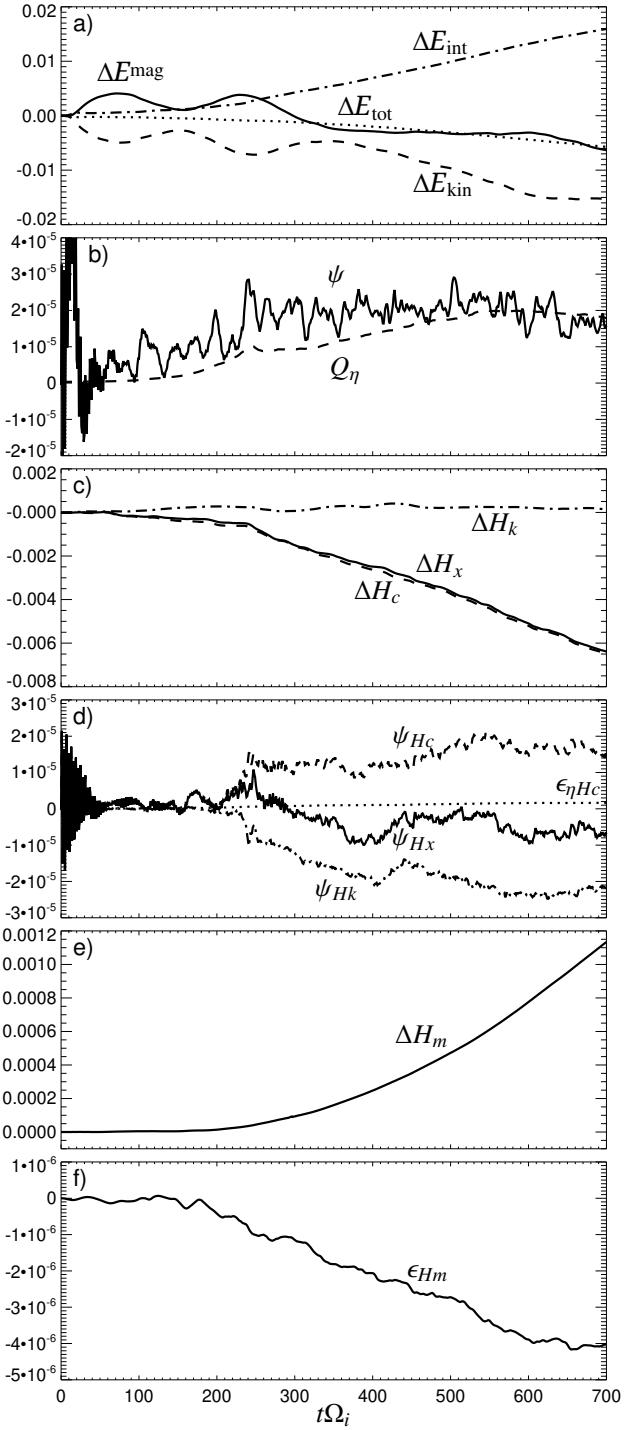

图 1. 不同物理量随时间的演化：(a) 动能 $\Delta E_{\rm kin}$ （虚线）、磁能 $\Delta E^{\rm mag}$ （实线）、内能 $\Delta E_{\rm int}$ （点划线）和总能量 $\Delta E_{\rm tot}$ （点线）的相对变化；(b) 电阻耗散率 Q_η （虚线）和压力-应变有效耗散率 ψ （实线）；(c) 动能螺度 ΔH_k （点划线）、混合螺度 ΔH_x （实线）和交叉螺度 ΔH_c （虚线）的相对变化；(d) 电阻交叉螺度耗散率 $\epsilon_{\eta Hc}$ （点线）、压力-应变有效交叉螺度耗散率 ψ_{Hc} （虚线）、压力-应变有效混合螺度耗散率 ψ_{Hx} （实线）和压力-应变有效动能螺度耗散率 ψ_{Hk} （点划线）；(e) 磁螺度 ΔH_m的相对变化；(f) 电阻磁螺度耗散率 ϵ_{Hm}。

随时间线性变化；动螺度 H_k 在初期（从几乎为零的初始值）略有增加，之后（$t\Omega_i \gtrsim 200$）大致保持不变；因此，混合螺度 $H_x = H_c + H_k$ 的演化紧随交叉螺度 H_c。图 1c 展示了这一点，其中显示了交叉（ΔH_c）、混合（ΔH_x）和动（ΔH_k）螺度相对变化的演化。我们预期，不同螺度的这种演化由各自的（有效）耗散率驱动。图 1d 显示了电阻交叉螺度耗散率$\epsilon_{\eta Hc}$，以及压力-应变有效耗散的对应量：交叉螺旋度率 ψ_{Hc}、动能螺旋度率 ψ_{Hk}和混合螺旋度率 ψ_{Hx}。电阻交叉螺度耗散率可以忽略不计，但交叉螺旋度压强-应变率ψ_{Hc} 很强，并在 $t\Omega_i \gtrsim 240$时达到大致恒定的值，这与交叉螺度的降低速率相符。我们将 ψ_{Hc} 解释为交叉螺度的有效耗散率。另一方面，动能螺旋度 ψ_{Hk} 率和混合螺旋度 ψ_{Hx} 率在较晚时期（$t\Omega_i \gtrsim 300$）变为负值，这与 H_k 和 H_x的时间演化不一致；项 ψ_{Hk} 和 ψ_{Hx} 的含义尚不明确。压力-应变项 ψ_{Hc} 和 ψ_{Hk} 由不可压缩涨落主导，其可压缩分量$\langle p(\mathbf{B}\cdot\nabla)\rho^{-1}\rangle$ 和 $\langle p(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\rho^{-1}\rangle$ 因密度变化很小而可以忽略（此处 p 为标量压力，$p = \mathrm{tr}(\mathsf{P})$，其中 tr 表示迹）。总能量和交叉螺度均随时间降低，但后者降低得较慢；因此，相对交叉螺度随时间增加。

最后，（修正的）磁螺度随时间以二次方式增长，如图1e所示，该图给出了该量的相对变化（ΔH_m）。这一演化由电阻磁螺度耗散率 ϵ_{Hm}驱动，该耗散率变为负值，并在$t\Omega_i \gtrsim 200$时近似线性下降（见图1f）。总之，图1 表明，对于$t\Omega_i \gtrsim 550$，不同的耗散率相对恒定，这是充分发展的湍流系统中预期的性质。一旦在自由衰减模拟中达到该状态，涨落量的时间变化可视为可忽略（我们使用KHM

第5节中的方程）。

在演化过程中，动能和磁能分布在很宽的尺度范围内，交叉螺度也呈现出类似的演化。图2显示了它们在$t\Omega_i = 700$时的全向谱性质：图2a分别给出B场和w场的功率谱密度P_B 与P_w。这些功率谱密度在大尺度上表现出类幂律行为（斜率略缓于–5/3），并在小尺度上变陡，P_w 约在$kd_i \simeq 1$附近，P_B 约在$kd_i \simeq 3$附近。动能谱密度P_w 在大约$kd_i \gtrsim 6$处开始由噪声主导，而磁谱密度P_B 似乎在$kd_i \gtrsim 20$处受到噪声影响。

图2b 展示了交叉螺度 P_{Hc} 以及动螺度绝对值的共谱。P_{Hk}。P_{Hc} 在大尺度上呈现类似幂律的行为，其斜率与能量功率谱密度的斜率相近；在$kd_i \simeq 1$与$kd_i \simeq 3$之间的某处变陡，这两个波数分别是P_w 和P_B的谱转折点。动能螺旋度共谱P_{Hk} 在正值与负值之间振荡；在大尺度上，它只占P_{Hc} 的一小部分，而在小尺度上，P_{Hk} 变得与P_{Hc}相当；当$kd_i \gtrsim 6$时，两者都由噪声主导。由于整个模拟过程中磁螺度始终很小，我们没有研究其谱或空间分解特性。

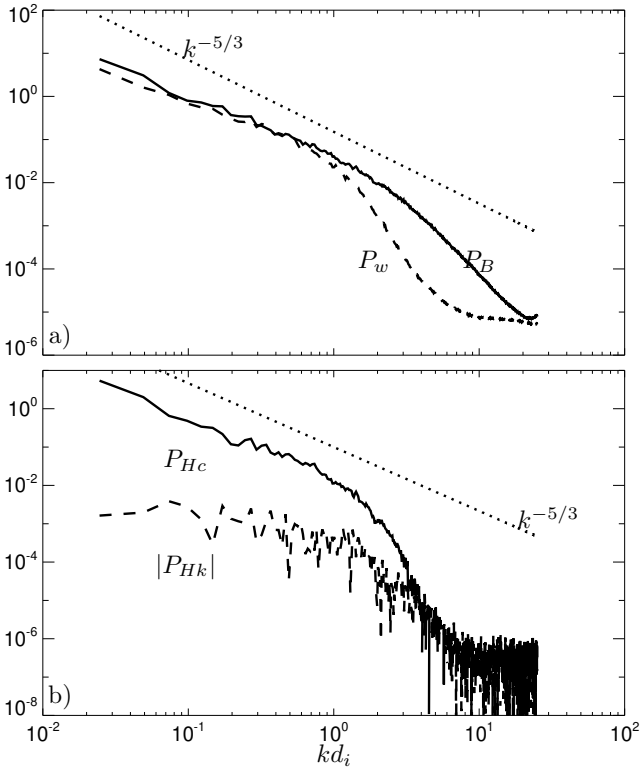

图 2.不同物理量在$t\Omega_i = 700$处的全向谱特性：(a)（实线）磁场 $\boldsymbol{B}$的功率谱密度，P_B（实线），以及补偿后的质子速度场 w，P_w（虚线），作为归一化至d_i的k 的函数。(b) 交叉螺度共谱 P_{Hc}（实线）以及（绝对值）动螺度共谱 P_{Hk}（虚线），作为 k 的函数。点线所示为谱 $\propto k^{-5/3}$，以供比较。

5. Kármán-Howarth-Monin 方程 ns

为了理解能量与螺度的跨尺度传递（级串）、交换和耗散，我们利用相应的 KHM 方程分析了混合模拟结果。我们从总能量入手。

5.1. 能量

我们利用二阶结构函数刻画了动能与磁能（及其总和）的空间尺度分解：

$$S_w = \frac{1}{4}\left\langle|\delta\boldsymbol{w}|^2\right\rangle,\quad S_B = \frac{1}{4}\left\langle|\delta\boldsymbol{B}|^2\right\rangle,\quad \text{and}\quad S = S_w + S_B,$$

其中 delta 表示相应量的增量；例如，$\delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{x}$ 为位置，$\boldsymbol{l}$ 为分离（滞后）矢量。对于二阶结构函数 S，我们得到（Hellinger 等（2024））

$$\partial_t S = K_{\mathrm{MHD}} + K_{\mathrm{Hall}} - \Psi - D, \tag{9}$$

其中，K_{MHD} 和 K_{Hall} 分别表示磁流体力学和霍尔非线性跨尺度能量传递（级串）率，Ψ 表示压力-应变效应，而D 表示电阻耗散的影响。我们将级联率K_{MHD} 和K_{Hall}（以及 Ψ 和D）表示为以下形式：

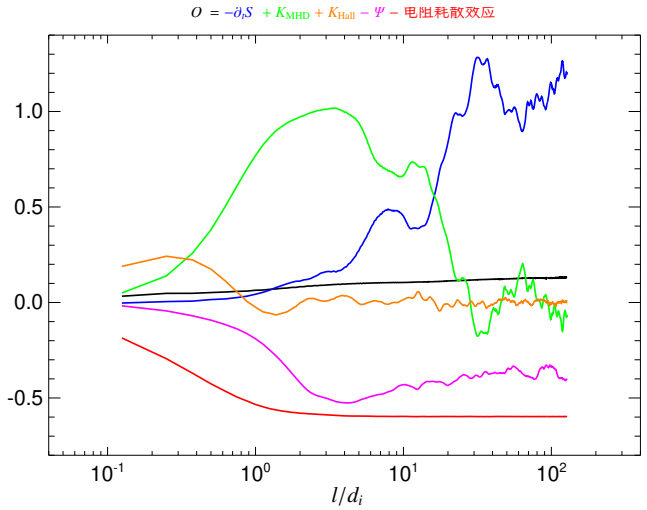

图 3. 在$t\Omega_i = 700$时的各向同性化能量 KHM分析：有效性检验O（黑线）随l 的变化，以及不同的贡献项：衰减率 $-\partial_t S$ （蓝色）、MHD级联率 $K_{\rm MHD}$ （绿色）、霍尔级联率 $K_{\rm Hall}$ （橙色）、电阻耗散率 $-D$（红色）和压力-应变率 $-\Psi$（洋红色）。所有量均以有效总耗散率 Q归一化。

$$K_{\rm MHD} = -\frac{1}{2}\left\langle \delta\boldsymbol{w}\cdot\delta\left[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\right]\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \delta\boldsymbol{w}\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{\sqrt{\rho}}\right)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \delta\boldsymbol{J}\cdot\delta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\right\rangle \tag{10}$$

$$K_{\rm Hall} = -\frac{1}{2}\left\langle \delta\boldsymbol{J}\cdot\delta(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\right\rangle \tag{11}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}\left\langle \delta\boldsymbol{w}\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}{\sqrt{\rho}}\right)\right\rangle \tag{12}$$

$$D = \frac{1}{2}\eta\left\langle|\delta\boldsymbol{J}|^2\right\rangle = Q_\eta - \frac{1}{2}\eta\nabla^2 S_B. \tag{13}$$

KHM方程构成一个跨尺度能量守恒方程；我们将有效性检验O定义为

$$O = -\partial_t S + K_{\rm MHD} + K_{\rm Hall} - \Psi - D, \tag{14}$$

它衡量代码因数值问题而产生的误差。图 3 展示了模拟结束时（$t\Omega_i = 700$）模拟结果的各向同性化能量 KHM分析。图 3 显示了有效性检验 O 及各贡献项，$-\partial_t$S、$K_{\rm MHD}$、$K_{\rm Hall}$、$-\Psi$和 −D（以有效总耗散率 Q 归一化）随尺度分离 $l = l|$（以 d_i归一化）的变化。KHM方程 (9) 得到了较好的满足（|O|/Q $\lesssim$ 10 %）；这一误差与粒子网格方法带来的噪声水平有关。在大尺度 $l \gtrsim 10d_i$上，能量衰减 ∂_tS 很强，但随后逐渐减弱，并在略小于 $l = d_i$时变得可以忽略。大尺度上的MHD级联率接近于零，在中间尺度（$6d_i \gtrsim l \gtrsim 1d_i$）上则变得显著，此时其最大值约为耗散率 Q。在小尺度上，部分级联通过霍尔项继续进行，$K_{\rm Hall}$ 达到约为 Q 的 20% 的最大值；在这些尺度上，电阻耗散和压力-应变相互作用也很活跃。

图3 展示了充分发展的衰减湍流的特性（见Hellinger 等（2024）的图 3）。总能量在大尺度上衰减，在中间尺度上级联，并在小尺度上耗散。由于KHM方程在整个模拟过程中（包括湍流起始阶段）始终相对良好地成立，我们可以分析各个 KHM 项在所有时刻的时间演化。我们可以确定在湍流起始阶段以及级联充分发展后，哪个项或过程在（给定尺度上）占主导。图 4 展示了各向同性化 KHM 结果、各个贡献项随时间的变化，以及以总有效耗散率 Q 归一化的分离尺度 l（在时间区间 $600 \le t\Omega_i \le 700$ 上取平均）。图 4 表明，图 3 中所见的充分发展湍流特征只在较晚时刻才出现。在初始阶段（$0 \le t\Omega_i \le 200$），系统由 ∂_tS $\simeq K_{\rm MHD}$ 主导；由于中间尺度上的 ∂_tS 为正，非线性耦合（磁流体力学）不断产生越来越小的尺度。之后（约在 $t\Omega_i \lesssim 550$），∂_tS 变为负值，并随 l 单调减小，符合预期。随着能量持续向更小尺度传递，电阻耗散效应和有效压力-应变耗散效应逐渐显现（其行为对应于图 1b 中电阻 Q_η 和压力-应变率 ψ 的演化）。霍尔项约在 $180 \lesssim t\Omega_i \lesssim 230$ 开始逐渐显现。

5.2. 交叉螺度与动螺度

接下来，我们继续讨论交叉螺度、动螺度和混合螺度。首先，我们使用二阶结构函数来表征交叉螺度（参见Banerjee &Galtier 2016, 2017年），即

$$S_{Hc} = \frac{1}{2}\langle\delta\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{B}\rangle. \tag{15}$$

对于S_{Hc}，我们得到如下动力学KHM方程：

$$\partial_t S_{Hc} = K_{{\rm MHD}Hc} + K_{{\rm Hall}Hc} - \Psi_{Hc} - D_{Hc}, \tag{16}$$

其中

$$K_{{\rm MHD}Hc} = -\frac{1}{2}\langle\delta\boldsymbol{B}\cdot\delta[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}]\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\delta\boldsymbol{B}\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{\rho}\right)\right\rangle + \frac{1}{2}\langle\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\rangle \tag{17}$$

$$K_{{\rm Hall}Hc} = -\frac{1}{2}\langle\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\rangle \tag{18}$$

$$D_{Hc} = \frac{\eta}{2}\langle\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\boldsymbol{J}\rangle \tag{19}$$

$$\Psi_{Hc} = \frac{1}{2}\left\langle\delta\boldsymbol{B}\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}{\rho}\right)\right\rangle. \tag{20}$$

这里，$K_{{\rm MHD}Hc}$ 和$K_{{\rm Hall}Hc}$ 分别表示磁流体力学和霍尔非线性耦合项，D_{Hc} 计入电阻耗散效应，而 Ψ 表征压力-应变效应的交叉螺度对应项。

类似地，我们为动螺度定义二阶结构函数：

$$S_{Hk} = \frac{m}{4e}\langle\delta\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}\rangle. \tag{21}$$

For S_{Hk}, the KHM equation reads

$$\partial_t S_{Hk} = K_{{\rm MHD}Hk} + K_{{\rm Hall}Hk} - \Psi_{Hk}, \tag{22}$$

其中

$$K_{{\rm MHD}Hk} = -\frac{m}{2e}\langle\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}]\rangle, \tag{23}$$

$$K_{{\rm Hall}Hk} = -K_{{\rm Hall}Hc}, \tag{24}$$

$$\Psi_{Hk} = \frac{m}{2e}\left\langle\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}{\rho}\right)\right\rangle. \tag{25}$$

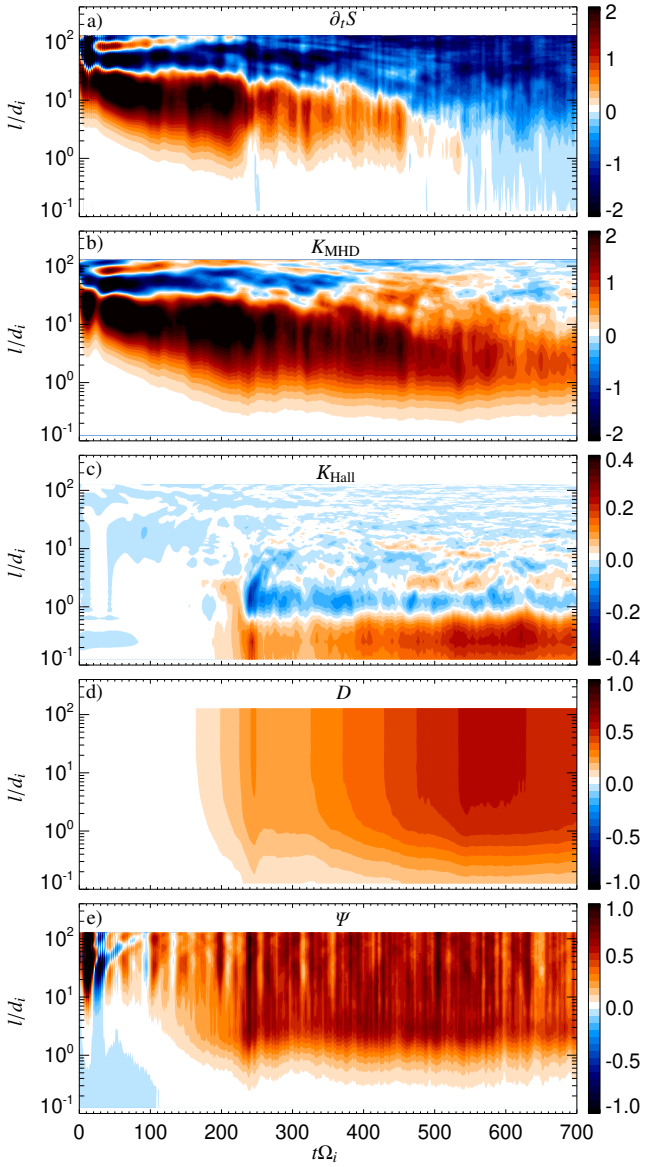

图 4. 各向同性化能量KHM结果的演化。图中显示了不同KHM项随时间t 和l的变化：(a) 衰减率 $\partial_t S$，(b) MHD级联率$K_{\rm MHD}$，(c) 霍尔级联率$K_{\rm Hall}$，(d) 电阻耗散率D，以及 (e) 压力-应变率 Ψ。所有量均以有效总耗散率Q 归一化（对 $600 \le t\Omega_i \le 700$取平均）。

这里，与交叉螺旋度类似，$K_{{\rm MHD}Hk}$ 和$K_{{\rm Hall}Hk}$ 分别表示磁流体力学和霍尔非线性耦合项，而 Ψ_{Hk} 则表征压力-应变效应对应的动能螺旋度等效量。

最后，对于混合螺度，我们将二阶结构函数定义为前两个结构函数之和，

$$S_{Hx} = S_{Hc} + S_{Hk}, \tag{26}$$

并得到相应的 KHM 方程（同样是前两个方程之和）：

$$\partial_t S_{Hx} = K_{{\rm MHD}Hx} - \Psi_{Hx} - D_{Hc}, \tag{27}$$

其中

$$K_{Hx} = K_{{\rm MHD}Hc} + K_{{\rm MHD}Hk} \tag{28}$$

$$\Psi_{Hx} = \Psi_{Hc} + \Psi_{Hk}. \tag{29}$$

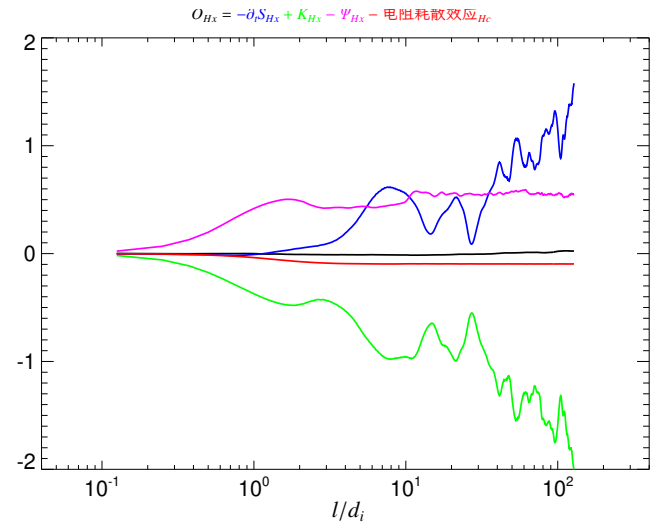

图5. 在$t\Omega_i = 700$时刻的各向同性化混合螺度KHM分析：有效性检验 O_{Hx}（黑线）作为l 的函数，以及各项不同贡献项：衰减率 $-\partial_t S_{Hx}$（蓝色）、磁流体力学项K_{Hx}（绿色）、电阻耗散率 $-D_{Hc}$（红色）和压力-应变率 $-\Psi_{Hx}$（品红色）。所有量均归一化到有效总（交叉螺度）耗散率 ϵ_{Hc}。

在混合螺度 KHM 方程中，K_{Hx} 表示磁流体力学的非线性耦合项（霍尔贡献相互抵消），D_{Hc}仍为交叉螺度电阻项，而 Ψ_{Hx} 则表征压力-应变效应在混合螺度情形下的对应项。

从混合螺度开始，我们定义有效性检验O_{Hx}，

$$O_{Hx} = -\partial_t S_{Hx} + K_{Hx} - \Psi_{Hx} - D_{Hc}, \tag{30}$$

与能量情形相同。图5 展示了模拟结束时模拟结果的各向同性化混合螺度KHM分析，$t\Omega_i = 700$，显示了有效性检验O_{Hx} 以及各项不同贡献项（$-\partial_t S_{Hx}$、K_{Hx}、$-\Psi_{Hx}$、$-D_{Hc}$）作为尺度分离l =的函数。这些量均归一化到总有效耗散率 $\epsilon_{Hc} = \epsilon_{\eta Hc} + \psi_{Hc}$，即交叉螺度的电阻耗散率与压力-应变率之和。与能量情形一样，混合螺度KHM方程（27）相对较好地得到满足（$|O_{Hx}|/\epsilon_{Hc} \lesssim 5\%$）。

图5 所示的行为与图3中能量的行为大不相同。衰减项 $\partial_t S_{Hx}$ 在大尺度上很重要（且为负值）。耗散项电阻耗散效应$_{Hc}$ 为正值但很小，交叉螺度和混合螺度的电阻耗散都很弱。虽然 $\partial_t S_{Hx}$ 和电阻耗散效应$_{Hc}$ 的行为与能量对应项相似，但K_{Hx} 和 Ψ_{Hx} 的符号相反。混合螺度的压力-应变项 Ψ_{Hx} 为负值，这表明压力-应变耦合会在小尺度上产生混合螺度。非线性项K_{Hx} 也为负值，这可能意味着混合螺度发生了逆级联。这两种推测都与混合螺度总体上减少的趋势相悖；因此，我们不能将K_{Hx} 解释为混合螺度的级联率，也不能将 Ψ_{Hx} 解释为其有效电阻耗散效应耗散率。

为了更好地理解混合螺度的行为，我们分别考察了它的两个贡献，H_c 和H_k。我们从动螺度KHM方程（22）入手，定义相应的有效性检验O_{Hk}，

$$O_{Hk} = -\partial_t S_{Hk} + K_{{\rm MHD}Hk} + K_{{\rm Hall}Hk} - \Psi_{Hk}. \tag{31}$$

图6 展示了模拟结束时模拟结果的各向同性化动理螺度KHM分析，$t\Omega_i = 700$;

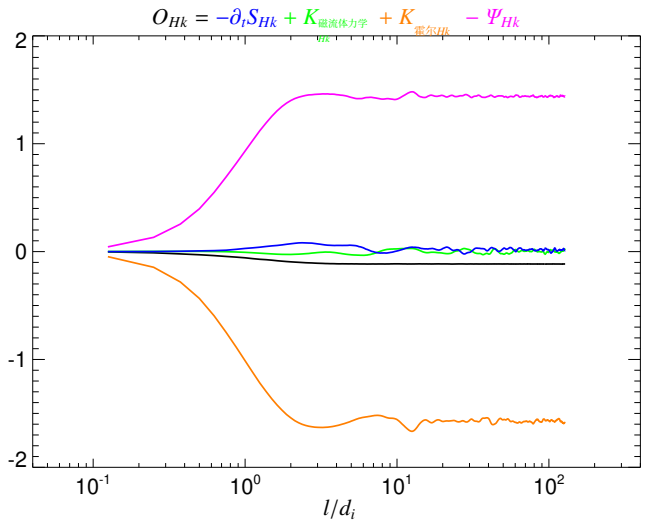

图6. 在 $t\Omega_i = 700$ 时的各向同性化动能螺旋度 KHM 分析：有效性检验 O_{Hk}（黑线）随 l 的变化，并显示不同的贡献项：衰减率 $-\partial_t S_{Hk}$（蓝色）、MHD级联率 $K_{\mathrm{MHD}Hk}$（绿色）、霍尔级联率 $K_{\mathrm{Hall}Hk}$（橙色）以及压力-应变率 $-\Psi_{Hk}$（洋红色）。所有量均以有效总（交叉螺旋度）耗散率 ϵ_{Hc}归一化。

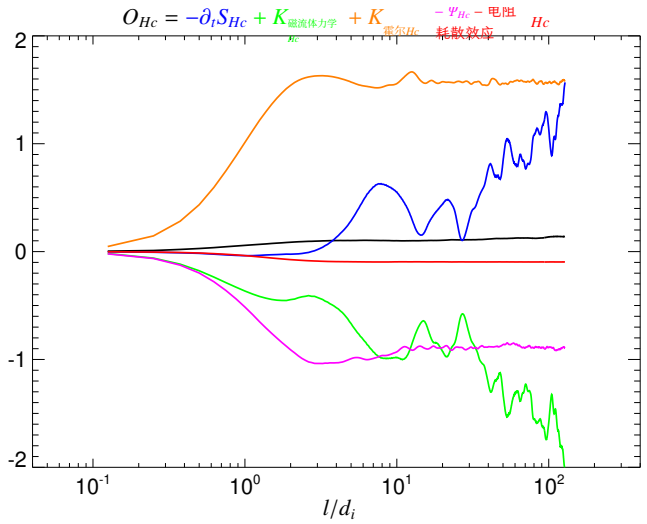

图7. 在$t\Omega_i = 700$时的各向同性化交叉螺度 KHM 分析：有效性检验 O_{Hc}（黑线）随l 的变化，以及各项贡献：衰减率 $-\partial_t S_{Hc}$（蓝色）、磁流体力学项$K_{\mathrm{MHD}Hc}$（绿色）、霍尔项$K_{\mathrm{Hall}Hc}$（橙色）、电阻耗散率 $-D_{Hc}$（红色）和压力 - 应变率 $-\Psi_{Hc}$（洋红色）。所有量均以有效总（交叉螺度）耗散率 ϵ_{Hc}归一化。

它展示了有效性检验 O_{Hk} 以及不同的贡献项，$-\partial_t \mathrm{S}_{Hk}$、$\mathrm{K}_{\mathrm{MHD}Hx}$、$\mathrm{K}_{\mathrm{Hall}Hx}$ 和 $-\Psi_{Hk}$（均按总有效耗散率 ϵ_{Hc} 归一化）随尺度分离 l 的变化。动理螺度KHM方程得到了很好的满足（$|\mathrm{O}_{Hk}|/\epsilon_{Hc} \lesssim 10\,\%$），但不同项的行为与图 3 中的能量KHM结果截然不同。衰减项 $\partial_t \mathrm{S}_{Hk}$ 和磁流体力学耦合项 $\mathrm{K}_{\mathrm{MHD}Hx}$ 可以忽略；这与动螺度的演化相符，后者基本保持不变。相比之下，霍尔耦合项 $\mathrm{K}_{\mathrm{Hall}Hx}$ 和压力-应变项 Ψ_{Hk} 作用显著，且大多相互抵消，

$$K_{\mathrm{Hall}Hk} \simeq \Psi_{Hk}. \tag{32}$$

因此，霍尔项与动能螺旋度压力-应变项耦合。

我们继续考察交叉螺度 KHM 方程（16）：定义相应的有效性检验O_{Hc}，

$$O_{Hc} = -\partial_t S_{Hc} + K_{\mathrm{MHD}Hc} + K_{\mathrm{Hall}Hc} - \Psi_{Hk} - D_{Hc}. \tag{33}$$

图7展示了模拟结束时 $\mathrm{t}\Omega_i = 700$ 的模拟结果的各向同性化交叉螺度KHM分析；图中显示了有效性检验 O_{Hc} 以及各个贡献项 $-\partial_t \mathrm{S}_{Hc}$、$\mathrm{K}_{\mathrm{MHD}Hc}$、$\mathrm{K}_{\mathrm{Hall}Hc}$ $-\Psi_{Hc}$ 和 $-\mathrm{D}_{Hc}$ 随尺度分离 l 的变化。交叉螺度 KHM 方程总体上满足得相当好（$|\mathrm{O}_{Hc}|/\epsilon_{Hc} \lesssim 15\,\%$）。图7的结果与图3的能量KHM结果有些相似：衰减项 $\partial_t \mathrm{S}_{Hc}$ 为负，并在大尺度上占主导；电阻项和交叉螺度压力-应变率则表现为耗散通道，在小尺度上十分重要。然而，磁流体力学与霍尔耦合项仍然表现异常。尽管如此，将它们合并为一项 $\mathrm{K}_{Hc} = \mathrm{K}_{\mathrm{MHD}Hc} + \mathrm{K}_{\mathrm{Hall}Hc}$ 后，所得量呈现出与能量级联率类似的行为（见图3）。图8重复展示了图7的结果，但将磁流体力学和霍尔贡献合并为一项 K_{Hc}。这表明 K_{Hc} 描述了交叉螺度的总级联率（磁流体力学+霍尔）。图

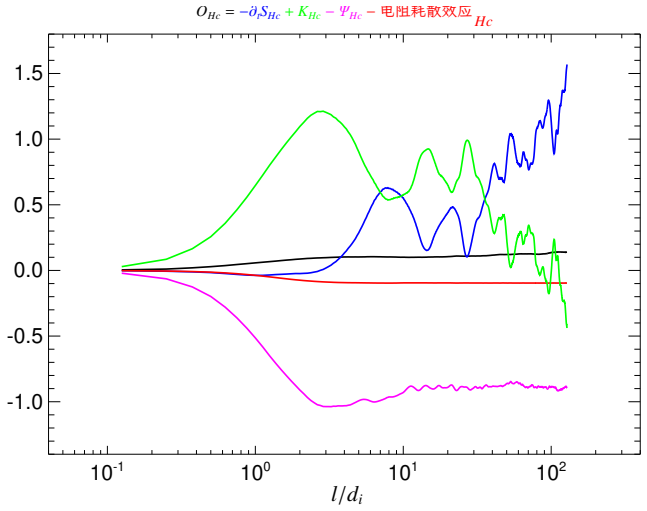

图8. 图7的重排各向同性化交叉螺度 KHM 分析：有效性检验O_{Hc}（黑线），衰减率 $-\partial_t S_{Hc}$（蓝色），磁流体力学项+霍尔项K_{Hc}（绿色），电阻耗散率 $-D_{Hc}$（红色）和压力-应变率 $-\Psi_{Hc}$（洋红色）随l变化。所有量均以有效总（交叉螺度）耗散率 ϵ_{Hc}。

8表明交叉螺度在大尺度上衰减，并发生级联

在中间尺度上，并至少在模拟结束时通过电阻耗散和有效压力-应变耗散效应在小尺度上耗散。我们使用交叉螺度 KHM 方程来研究系统的发展。图 9 展示了各向同性化 KHM 结果的演化、不同贡献项随时间的变化，以及相对于总有效耗散率 ϵ_{Hc} 的分离尺度 l（在时间区间 $600 \le \mathrm{t}\Omega_i \le 700$ 上取平均）。图 9 显示出与图 4 中能量性质非常相似的行为。在初始阶段（$0 \le \mathrm{t}\Omega_i \le 200$），系统受 $\partial_t \mathrm{S}_{Hc} \simeq \mathrm{K}_{Hc}$ 控制；由于在中间尺度上 $\partial_t \mathrm{S}_{Hc}$ 为正，通过（磁流体力学）非线性耦合不断生成越来越小的尺度。在较晚时期（约为 $\mathrm{t}\Omega_i \lesssim 550$），$\partial_t \mathrm{S}_{Hc}$ 变得大多为负，并且在小尺度上可以忽略不计。随着向更小尺度的能量传递持续进行，电阻耗散以及

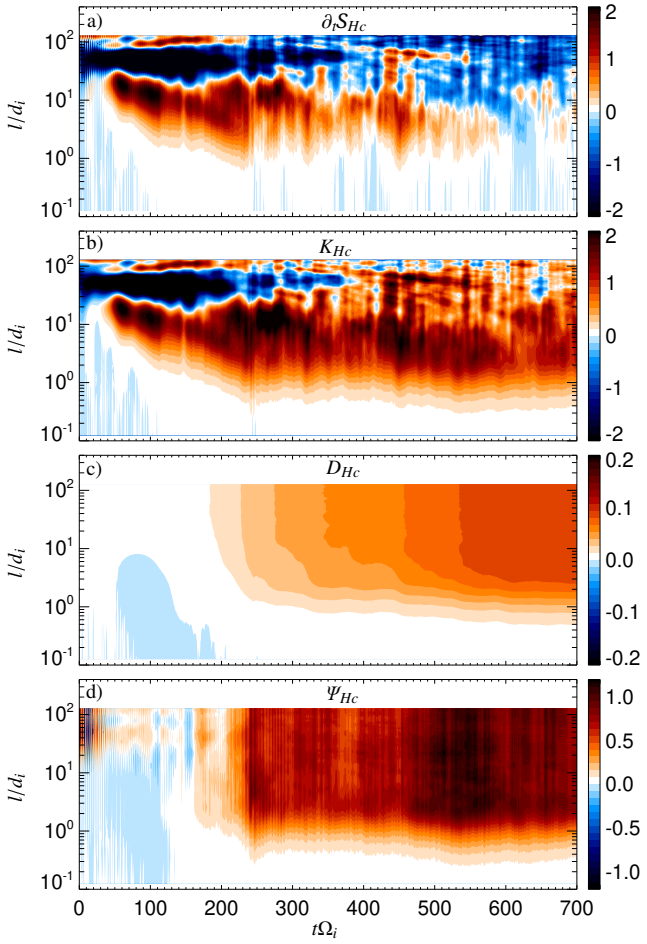

图 9. 各向同性化交叉螺度的演化 KHM 结果。图中展示了不同 KHM项随时间 t 和 l的变化：(a) 衰减率$\partial_t S_{Hc}$，(b) 磁流体力学+霍尔级联率 K_{Hc}，(c) 电阻耗散率 D_{Hc}，以及 (d) 压力-应变率 Ψ_{Hc}。所有量均以有效总耗散率 ϵ_{Hc} 600 ≤ $_i$ ≤ （在Ω 700上取平均）归一化。

更重要的是，压力-应变效应耗散逐渐出现（对应于电阻$\epsilon_{\eta Hc}$和压力-应变率 ψ_{Hc} 在图 1d）中的演化）。

6. 讨论

本文使用伪谱混合代码，研究了具有面外背景磁场的弱碰撞等离子体中的二维衰减等离子体湍流。等离子体系统初始状态下，大尺度处具有显著的涨落动能和磁能以及交叉螺度；这些初始涨落没有整体磁螺度或动螺度。我们利用 KHM 方程分析模拟结果，考察总能量（动能与磁能之和）、交叉螺度、动螺度和混合螺度。这些不同的 KHM 方程刻画相应物理量的跨尺度守恒，且均得到良好满足。代码的这些特性部分归功于伪谱格式；与有限差分格式相比，该格式能更好地维持跨尺度守恒。KHM 结果表明，初始分布于大尺度处的总能量，在非线性MHD项（随后还有霍尔项）的作用下向小尺度传递。经过一段过渡期后，系统形成充分发展的湍流，此时大尺度处的能量衰减，在中间尺度处级联，并通过电阻项和压力-应变项在小尺度处耗散；该系统由此发挥有效耗散机制的作用。效果。这些结果与先前的混合模拟结果一致（Hellinger 等，2022，2024 年）。

交叉螺度、动能螺度和混合螺度的性质更为复杂。在混合近似中，我们预期混合螺度（交叉螺度与动能螺度的组合）是相关量，它会衰减、级联并耗散。然而，模拟结果表明，在弱碰撞等离子体中，相关量是交叉螺度。相应的 KHM方程表明，交叉螺度的行为类似于总能量：它在大尺度上衰减，在中间尺度上通过磁流体力学和霍尔非线性耦合发生级联，并在小尺度上通过电阻项耗散；更重要的是，还通过压力-应变项的交叉螺度对应项耗散，而该项再次发挥有效耗散机制的作用。

总能量和交叉螺度随时间降低，但后者降低得更慢，因此相对交叉螺度增加。这与不可压缩磁流体力学的理论预期和数值模拟结果一致（例如 Dobrowolny etal. 1980；Montagud-Camps 等（2022）），但与观测结果不符（Bavassano 等，1998）。这种效应可能与太阳风膨胀造成的大尺度梯度有关（Grappin 等，2022）和／或速度剪切有关（Roberts 等，1992）；值得注意的是，假设均匀性成立，这些效应可以纳入KHM方程（Wan et al.2009；Stawarz et al.2011；Hellingeret al. 2013）。

磁螺度是混合系统中的一个独立理想不变量（与霍尔磁流体力学情形类似；参见Pouquet &Yokoi 2022）。在模拟中，磁螺度初始时可以忽略，并且仅通过电阻项少量产生（由于磁螺度并非正定量，该项可能导致其产生）。我们没有观察到磁螺度与交叉螺度之间存在耦合，这与理论预期一致。我们还推导并分析了磁螺度的KHM方程；结果表明，磁螺度并未表现出任何级联（此处未展示）。我们研究的是混合螺度与磁螺度彼此不耦合的系统，但在更一般的情形下，有必要考察广义（正则）螺度，即混合螺度与磁螺度的组合（参见Pouquet &Yokoi2022）。在这种情形下，交叉螺度与磁螺度之间可能发生耦合，从而导致能量级联减弱，这种现象称为螺度屏障（Meyrand 等，2021）。Squire 等（2023年）将一些混合模拟结果解释为螺度屏障所致。然而，我们的结果表明，螺度屏障与混合系统（或霍尔磁流体力学系统）无关。

在本研究中，我们使用 KHM 方程分析了数值模拟结果，以研究能量和交叉螺旋度的性质。基于这两种量的 KHM 结果之间的相似性，我们得出结论：尽管交叉螺度不是理想不变量，但它会与总能量同步衰减、级联和耗散。由于这些结果可能仅仅源于 KHM 方法的某些特殊性质，我们还研究了类似的谱传递方法和粗粒化方法（见附录 A 和 B）。我们得到了能量和交叉螺度的等效结果，因此可以认为这些结果具有稳健性。然而，我们只研究了一次采用特定参数组的二维模拟；还需要更多模拟来研究各种等离子体和湍流参数的作用。尤其是，值得

探究磁螺度的不同值（及其级联）如何影响等离子体湍流的性质（参见 Stribling 等（1995））。此外，在该模拟中，初始动螺度可以忽略不计，并且在整个模拟过程中始终很小。如果模拟以较强的动螺度为初始条件，会发生什么，目前尚不清楚。本研究还需要扩展到三维，以考虑背景磁场所诱导的各向异性（Verdini 等（2015）；Montagud-Camps 等（2022）；Hellinger 等（2024））。还必须研究全动理学区域；电子压强张量应变效应可能在能量的相对大尺度上起作用（Yang 等（2022）；Manzini 等（2024）），并可能影响交叉螺度的演化。

总之，本文表明，弱碰撞等离子体中交叉螺度的动力学在很宽的尺度范围内（甚至远高于离子尺度）受到霍尔效应和压力应变物理的强烈影响。对这些结果进行观测检验颇具挑战性；相关量包含涡度场，仅凭一艘航天器无法测量。不可压缩磁流体力学 KHM 方程常用于根据太阳风中的航天器原位测量估算能量和交叉螺度级联率（Sorriso-Valvo 等（2007年）；MacBride 等（2008年）；Stawarz 等（2009年）；Marino 和 Sorriso-Valvo（2023））。我们的结果与先前研究的结果一致，表明在大尺度上，这种近似对能量而言足够精确；霍尔修正在离子尺度上显现（Bandyopadhyay 等（2020）），能量的压力-应变效应也在大约这一尺度上变得重要（Yang 等（2022）；Manzini 等（2024））。另一方面，我们的结果表明，太阳风中基于磁流体力学估算的交叉螺度级联率并不可靠；在我们的模拟中，交叉螺度磁流体力学级联率弱于霍尔级联率，且二者符号甚至相反。

致谢。 本工作得到捷克共和国教育、青年和体育部通过 e-INFRA CZ（ID:90254）的资助。作者感谢 T. Tullio 持续而富有助益的支持，并感谢与 A. Verdini、S. Landi、L. Matteini、Emanuele Papini 和 L. Franci 的有益讨论。

参考文献

Alexakis A., Biferale L., 2018, 《物理报告》, 767, 1 Alexandrova O., Jagarlamudi V.K., Hellinger P., 等, 2021年, 《物理评论E》, 103, 063202 Aluie H., 2011年, 《物理评论快报》, 106, 174502 Arró G., Califano F., Lapenta G., 2022, 《天文学与天体物理学》, 668, A33 Bandyopadhyay R., Sorriso-Valvo L., Chasapis A., 等, 2020年, 《物理评论快报》, 124, 225101 Banerjee S., Galtier S., 2016, 《物理评论E》, 93, 033120 Banerjee S., Galtier S., 2017年, 《物理学杂志A》, 50, 015501 Bavassano B., Pietropaolo E., Bruno R., 1998年, 《地球物理研究杂志》, 103, 6521 Belcher J.W., Davis L. Jr., 1971, 《地球物理研究杂志》, 76, 3534 Bruno R., Carbone V., 2013, 《Living Reviews in Solar Physics》, 10, 2 Http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2013-2/ D'Amicis R., Bruno R., 2015年, 《天体物理学杂志》, 805, 84 de Kármán T., Howarth L., 1938, 《伦敦皇家学会会刊A辑》, 164, 192 Del Sarto D., Pegoraro F., Califano F., 2016, 《物理评论E》, 93, 053203 Dobrowolny M., Mangeney A., Veltri P., 1980, 《物理评论快报》, 45, 144 Eyink G.L., Aluie H., 2009年, 《流体物理学》, 21, 115107 Favre A., 1969, 载于: 《流体力学与连续介质力学问题》, 231–266, 工业与应用数学学会, 费城 Franci L., Landi S., Matteini L., Verdini A., Hellinger P., 2015年, 《天体物理学杂志》, 812, 21 Frigo M., Johnson S.G., 2005, 《IEEE会刊》, 93, 216 Grappin R., Velli M., Mangeney A., 1991, 《地球物理年鉴》, 9, 416 Grappin R., Verdini A., Müller W.C., 2022, 《天体物理学杂志》, 933, 246 Grete P., O'Shea B.W., Beckwith K., Schmidt W., Christlieb A., 2017年, 《等离子体物理学》, 24, 092311 Hellinger P., Trávní˘cek P.M., Štverák Š., Matteini L., Velli M., 2013, 《地球物理研究杂志》, 118, 1351 Hellinger P., Papini E., Verdini A., et al., 2021, 《天体物理学杂志》, 917, 101 Hellinger P., Montagud-Camps V., Franci L., et al., 2022, 《天体物理学杂志》, 930, 48 Hellinger P., Verdini A., Montagud-Camps V., et al., 2024, 《天文学与天体物理学》, 684, A120 Kida S., Orszag S.A., 1990年, 科学计算杂志, 5, 85 Kiyani K.H., Osman K.T., Chapman S.C., 2015, 英国皇家学会哲学汇刊A辑, 373, 20140155 MacBride B.T., Smith C.W., Forman M.A., 2008年, 《天体物理学杂志》, 679, 1644 Manzini D., Sahraoui F., Califano F., Ferrand R., 2022, 《物理评论E》, 106, 035202 Manzini D., Sahraoui F., Califano F., 2024年, 《物理评论快报》, 132, 235201 Marino R., Sorriso-Valvo L., 2023年, 《物理报告》, 1006, 1 Matthaeus W.H., Goldstein M.L., 1982, 《地球物理研究杂志》, 87, 6011 Matthaeus W.H., Yang Y., Wan M., et al., 2020年, 《天体物理学杂志》, 891, 101 Matthews A., 1994 年 , 计算物理杂志 , 112, 102 Meyrand R., Squire J., Schekochihin A.A., Dorland W., 2021年, 等离子体物理学杂志, 87, 535870301 Mininni P.D., Alexakis A., Pouquet A., 2007, 等离子体物理学杂志, 73, 377 Montagud-Camps V., Hellinger P., Verdini A., et al., 2022年, 《天体物理学杂志》, 938, 90 Politano H., Pouquet A., 1998a, 地球物理研究快报, 25, 273 Politano H., Pouquet A., 1998b, 《物理评论E》, 57, R21 Pouquet A., Yokoi N., 2022, 英国皇家学会哲学汇刊A辑, 380, 20210087 Roberts D.A., Goldstein M.L., Matthaeus W.H., Ghosh S., 1992年, 《地球物理研究杂志》, 97, 17115 Shi C., Velli M., Panasenco O., et al., 2021年, 《天体物理学杂志》, 650, A21 Sorriso-Valvo L., Marino R., Carbone V., et al., 2007, 《物理评论快报》, 99, 115001 Squire J., Meyrand R., Kunz M.W., 2023 年 , 天体物理学杂志快报 , 957, L30 Stawarz J.E., Smith C.W., Vasquez B.J., Forman M.A., MacBride B.T., 2009年, 《天体物理学杂志》, 697, 1119 Stawarz J.E., Vasquez B.J., Smith C.W., Forman M.A., Klewicki J., 2011年, 《天体物理学杂志》, 736, 44 Stribling T., Matthaeus W.H., Oughton S., 1995年, 《等离子体物理学》, 2, 1437 Tu C.Y., Marsch E., Thieme K.M., 1989年, 《地球物理研究杂志》, 94, 11739 Valentini F., Trávní˘cek P., Califano F., Hellinger P., Mangeney A., 2007, 计算物理杂志, 225, 753 Verdini A., Grappin R., Hellinger P., Landi S., Müller W.C., 2015, 《天体物理学杂志》, 804, 119 Wan M., Servidio S., Oughton S., Matthaeus W.H., 2009年, 《等离子体物理学》, 16, 090703 Yang Y., Matthaeus W.H., Parashar T.N., et al., 2017, 《等离子体物理学》, 24, 072306 Yang Y., Matthaeus W.H., Roy S., et al., 2022年, 《天体物理学杂志》, 929, 142 Yokoi N., 1999年, 《流体物理学》, 11, 2307

附录 A：能量

A.1. 谱传递方法

量化湍流特性的另一种方法是采用谱方法（参见Mininni 等（2007）；Grete 等（2017））。我们通过低通滤波后的量来表征总能量（Hellinger 等（2021），2024年）

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k}\left(|\widehat{\boldsymbol{w}}|^2 + |\widehat{\boldsymbol{B}}|^2\right), \tag{A.1}$$

其中，宽帽表示傅里叶变换。对于谱分解量 E_k，我们得到了以下动力学方程

$$\partial_t E_k + S_{\mathrm{MHD}k} + S_{\mathrm{Hall}k} = -\Psi_k - D_k, \tag{A.2}$$

其中，$S_{\mathrm{MHD}k}$ 和 $S_{\mathrm{Hall}k}$ 分别表示磁流体力学和霍尔能量传输率；Ψ_k 描述压力-应变效应；D_k 是波矢模长小于或等于 k 的模式的电阻耗散率。它们可表示为

$$S_{\mathrm{MHD}k} = \Re\sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k}\Big[\widehat{\boldsymbol{w}}^*\cdot\widehat{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w}} + \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{w}}^*\cdot\boldsymbol{w}\widehat{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})} - \widehat{\boldsymbol{w}}^*\cdot\rho^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}} - \widehat{\boldsymbol{B}}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})}\Big], \tag{A.3}$$

$$S_{\mathrm{Hall}k} = \Re\sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k}\widehat{\boldsymbol{B}}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\widehat{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})}, \tag{A.4}$$

$$\Psi_k = \Re\sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k}\widehat{\boldsymbol{w}}^*\cdot\rho^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathbf{P}, \tag{A.5}$$

$$D_k = \eta\sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k}|\boldsymbol{k}'|^2|\widehat{\boldsymbol{B}}|^2. \tag{A.6}$$

在这些表达式中，星号表示复共轭，$\Re$表示实部。对于充分发展湍流，$S_{\mathrm{MHD}k}$ 和 $S_{\mathrm{Hall}k}$ 分别是磁流体力学和霍尔级联率。

与 KHM 情形类似，我们将谱传递（ST）方程的有效性检验定义为式（A.2），即

$$O_k = \partial_t E_k + S_{\mathrm{MHD}k} + S_{\mathrm{Hall}k} + \Psi_k + D_k. \tag{A.7}$$

图 A.1 给出了 ST 有效性检验 O_k 及各贡献项作为 k 的函数（于$t\Omega_i = 700$）。ST 方程（A.2）相对而言得到了较好的满足（$|O_k|/Q \lesssim 14$ %）。图 A.1定量刻画了湍流特性：能量在大尺度衰减，在中间尺度级联，而在小尺度上级串一部分经由霍尔项继续，一部分则由电阻耗散和压力-应变效应耗散。图 A.1中的 ST 结果与相应的 KHM 结果（见图3）通过反比例关系 $kl = \sqrt{2}$在定量上等价。利用这一关系，我们得到

$$S_{\mathrm{MHD}k} \simeq K_{\mathrm{MHD}},\quad S_{\mathrm{Hall}k} \simeq K_{\mathrm{Hall}}. \tag{A.8}$$

其他术语则体现出互补性：ST 方法从构造上来说是（谱）低通滤波器，而 KHM 方法则表现出高通（或空间低通）滤波器的特性（参见 Hellinger 等，2021年，2024年）。

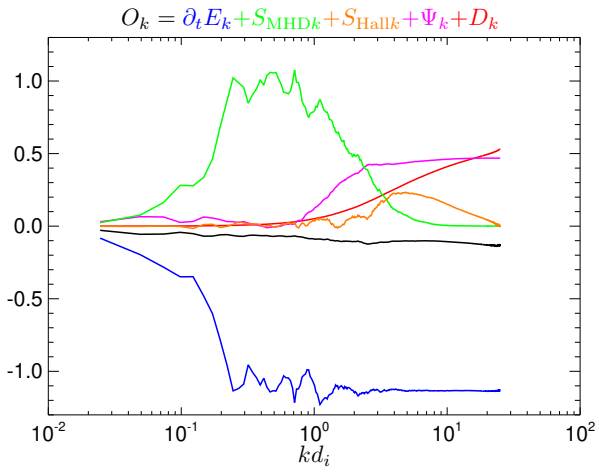

图 A.1. 总能量的谱传递（ST）分析，各向同性 ST 的有效性检验 O_k，式（A.7），作为k 在$t\Omega_i$ =700 时的函数（黑线），以及不同贡献项：衰减率$\partial_t E_k$（蓝色）、MHD级联率$S_{\mathrm{MHD}k}$（绿色）、霍尔级联率 $S_{\mathrm{Hall}k}$（橙色）、电阻耗散率 D_k（红色）以及压力-应变率 Ψ_k（品红色）。所有量均以总（有效）耗散率 Q为单位。

A.2. 粗粒化方法

分析湍流特性的另一种方法是空间滤波（Eyink 与 Aluie（2009）；Aluie（2011）；Manzini 等，2022）。在这种方法中，利用空间滤波器（粗粒化）对组合能量进行尺度分解

$$E_l = \frac{1}{2}\left\langle\overline{\rho}|\widetilde{\boldsymbol{u}}|^2 + |\overline{\boldsymbol{B}}|^2\right\rangle \tag{A.9}$$

其中，横线表示空间滤波

$$\overline{\boldsymbol{a}}_l(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^2x G_l(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \tag{A.10}$$

波浪号表示相应的密度加权滤波或 Favre 滤波（Favre 1969）

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}_l = \frac{\overline{\rho\boldsymbol{u}}_l}{\overline{\rho}_l}. \tag{A.11}$$

对于滤波能量，我们得到了如下动力学方程

$$\partial_t E_l + \Pi_{\mathrm{MHD}l} + \Pi_{\mathrm{Hall}l} = -\Phi_l - \mathcal{D}_l \tag{A.12}$$

其中，$\Pi_{\mathrm{MHD}l}$ 和 $\Pi_{\mathrm{Hall}l}$ 分别表示磁流体力学和霍尔能量传输率；Φ_l 和 $\mathcal{D}_l$ 分别表示压力应变效应和电阻耗散效应。这些项可以表示为

$$\Pi_{\mathrm{MHD}l} = \left\langle\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}} : \overline{\rho}\widetilde{\boldsymbol{\tau}}\right\rangle - \left\langle\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}\right\rangle - \left\langle\overline{\boldsymbol{J}}\cdot\overline{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})}\right\rangle \tag{A.13}$$

$$\Pi_{\mathrm{Hall}l} = \left\langle\overline{\boldsymbol{J}}\cdot\overline{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})}\right\rangle \tag{A.14}$$

$$\Phi_l = -\left\langle\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}} : \overline{\mathbf{P}}\right\rangle \tag{A.15}$$

$$\mathcal{D}_l = \eta\left\langle|\overline{\boldsymbol{J}}|^2\right\rangle \tag{A.16}$$

其中$\widetilde{\boldsymbol{\tau}} = \widetilde{\boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widetilde{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}$。与之前一样，我们将粗粒化（CG）方程（式A.12）的有效性检验定义为

$$O_l = \partial_t E_l + \Pi_{\mathrm{MHD}l} + \Pi_{\mathrm{Hall}l} + \Phi_l + \mathcal{D}_l \tag{A.17}$$

图 A.2 展示了使用归一化矩形窗函数对空间低通滤波器进行粗粒化的结果。

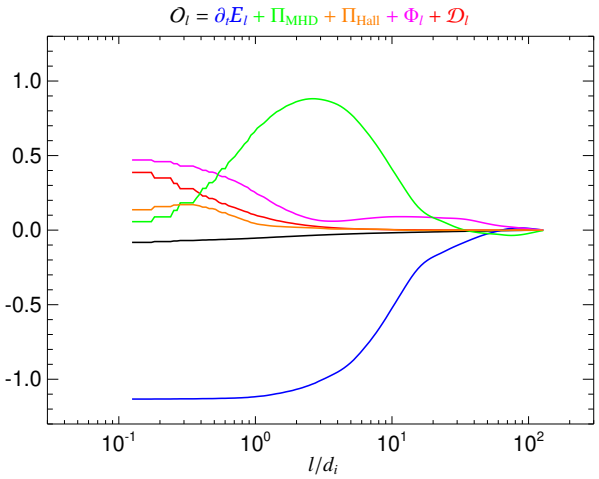

图 A.2. 总能量的粗粒化（CG）分析：各向同性粗粒化的有效性检验 O_l，方程（A.17），作为 k 在$t\Omega_i = 700$（黑线）的函数，以及各项贡献：衰减率 $\partial_t E_l$（蓝色）、MHD级联率 $\Pi_{{\rm MHD}l}$（绿色）、霍尔级联率$\Pi_{{\rm Hall}l}$（橙色）、电阻耗散率 $\mathcal{D}_l$（红色）和压力-应变率 Φ_l（品红色）。所有量均以总（有效）耗散率 Q为单位。

CG 有效性检验基本满足要求（$|O_l|/Q \lesssim 10\,\%$）；KHM、ST 和 CG 方法的误差相当。图A.2 重现了我们在 KHM 和 ST 方法中观察到的湍流图景：大尺度上能量衰减，中间尺度上发生级联，而在小尺度上，级联一部分通过霍尔项继续进行，另一部分则由电阻耗散效应和压力-应变效应耗散。对于空间低通滤波器，在相同的分离尺度和滤波尺度 l 下，我们得到的磁流体力学级联率和霍尔级联率在定量上与 KHM方程所得结果相当（因此，也与上一小节中所见的 ST 方程所得结果相当）：

$$\Pi_{{\rm MHD}l} \simeq K_{\rm MHD}, \quad \Pi_{{\rm Hall}l} \simeq K_{\rm Hall}. \tag{A.18}$$

CG 和 KHM 方法中的其他相应项表现出互补性，这与 A.1 小节中的 ST 方法相似A.1。我们注意到，可以采用类似于 CG 方法的方式进行谱滤波（Arró等人 2022）。可以使用谱低通滤波器，使不同量随 l 呈反向变化（即$l \to -l$）。

附录 B：交叉螺度

B.1. 谱传递

对于交叉螺度的谱尺度分解，我们选择了

$$H_{ck} = \Re \sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k} \left(\widehat{\boldsymbol{u}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{B}_1}\right) \tag{B.1}$$

与 KHM 方程类似（在该方程中，增量表示会丢失有关背景磁场 $\boldsymbol{B}_0$的信息），我们使用了涨落磁场 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0$。对于 H_{ck}，我们得到了以下动力学方程

$$\partial_t H_{ck} + S_{Hck} = -\Psi_{Hck} - D_{Hck}, \tag{B.2}$$

其中S_{Hck} 表示（磁流体力学与霍尔联合的）交叉螺度传递率，而 Ψ_{Hck} 和电阻耗散效应$_{Hck}$ 描述压力-应变以及分别为电阻耗散效应。这些项可以表示为

$$S_{Hck} = \Re \sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k} \Big[\widehat{\boldsymbol{B}_1}^* \cdot (\widehat{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}})\boldsymbol{u} - \widehat{\boldsymbol{B}_1}^* \cdot \frac{\widehat{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}}{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}}\Big] \tag{B.3}$$

$$\Psi_{Hck} = \Re \sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k} \widehat{\boldsymbol{B}_1}^* \cdot \frac{\widehat{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}}{\rho} \tag{B.4}$$

$$D_{Hck} = \eta \Re \sum_{|\boldsymbol{k}'|\le k} |\boldsymbol{k}'|^2 \widehat{\boldsymbol{u}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{B}} \tag{B.5}$$

这里，我们再次定义了 ST 交叉螺度的有效性检验方程（B.2）如下

$$O_{Hck} = \partial_t H_{ck} + S_{Hck} + \Psi_{Hck} + D_{Hck}. \tag{B.6}$$

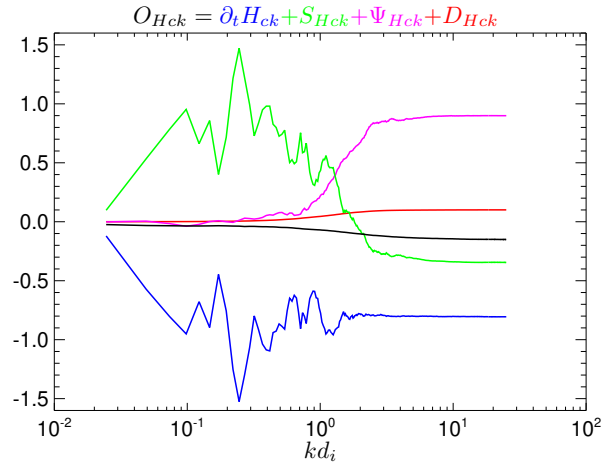

图 B.1. 交叉螺度的 ST 分析：各向同性 ST O_{Hck}，方程（B.6），作为 k 的函数，取值于 $t\Omega_i = 700$ （黑线），以及不同的贡献项：衰减率 $\partial_t H_{ck}$（蓝色）、级联率 S_{Hck}（绿色）、电阻耗散率 D_{Hck}（红色）和压力-应变率 Ψ_{kHc}（洋红色）。所有量均以总（有效）交叉螺度耗散率 ϵ_{Hc}为单位。

图B.1显示，交叉螺度 ST 方程（B.2）得到了较好的满足（$|O_{Hck}|/\epsilon_{Hc} \lesssim 15\%$）。在图 B.1中，我们得到了 KHM 结果：交叉螺度在大尺度上衰减，在中间尺度上级联，而在小尺度上则由电阻耗散效应和压力-应变效应耗散，其中后者占主导地位。与能量 ST 和 KHM 方程的情况类似，交叉螺度 ST 和 KHM 方法得出的级联率相同

$$S_{Hck} \simeq K_{\rm Hc} \tag{B.7}$$

对于 $kl = \sqrt{2}$。其他项的行为再次呈互补性。

B.2. 粗粒化

对于交叉螺度的尺度分解，我们选择以下滤波量

$$H_{cl} = \left\langle \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle. \tag{B.8}$$

对于粗粒化交叉螺度H_{cl}，我们得到了以下动力学方程

$$\partial_t H_{cl} + \Pi_{Hcl} = -\Phi_{Hcl} - \mathcal{D}_{Hcl}. \tag{B.9}$$

其中，Π_{Hcl} 表示交叉螺度传递率，Φ_{Hcl}和 $\mathcal{D}_{Hcl}$ 分别描述压力-应变和电阻耗散效应。这些项可表示为

$$\Pi_{Hcl} = \left\langle \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \overline{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}} \right\rangle - \left\langle \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}}{\rho} \right\rangle - \left\langle \overline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overline{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}} \right\rangle + \left\langle \overline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overline{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}} \right\rangle \tag{B.10}$$

$$\Phi_{Hcl} = \left\langle \overline{\boldsymbol{B}_1} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}}}{\rho} \right\rangle \tag{B.11}$$

$$\mathcal{D}_{Hcl} = \eta \left\langle \overline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overline{\boldsymbol{J}} \right\rangle \tag{B.12}$$

如前所述，我们将粗粒化交叉螺度方程（B.9）的有效性检验定义为

$$\mathcal{O}_{Hcl} = \partial_t H_{cl} + \Pi_{Hcl} + \Phi_{Hcl} + \mathcal{D}_{Hcl} \tag{B.13}$$

图 B.2 显示，交叉螺度粗粒化方程是相对

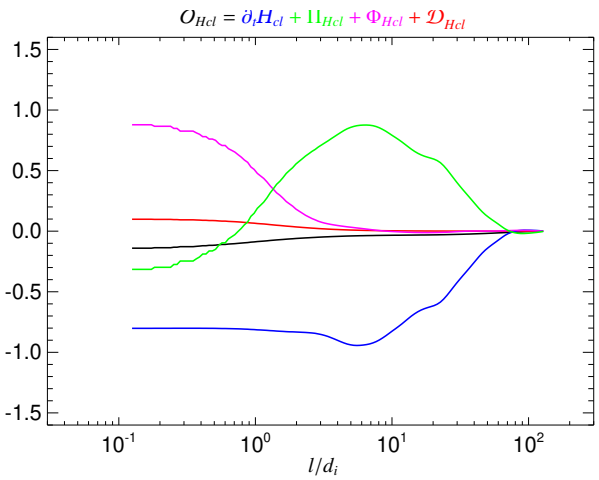

图 B.2。 交叉螺度的粗粒化分析：各向同性粗粒化 $\mathcal{O}_{Hcl}$，方程（B.13）的有效性检验，作为 k 在 $t\Omega_i = 700$（黑线）的函数，并显示不同贡献项：衰减率 $\partial_t H_{cl}$（蓝色）、MHD级联率 Π_{Hcl}（绿色）、电阻耗散率 $\mathcal{D}_{Hcl}$（红色）以及压力-应变率 Φ_{Hcl}（洋红色）。所有量均以总（有效）交叉螺度耗散率 ϵ_{Hc}为单位。

满足得相当好（$|\mathcal{O}_{Hcl}|/\epsilon_{Hc} \lesssim 16\%$）。图B.2 再次呈现了对应的 KHM 和 ST 分析中相同的信息：交叉螺度在大尺度上衰减，在中间尺度上级联，并在小尺度上通过电阻耗散效应和压力-应变效应耗散。KHM 和 CG 方法给出了定量上相似的结果，对于级联率

$$\Pi_{Hcl} \simeq K_{Hc}. \tag{B.14}$$

CG 和 KHM 方法中的其他对应项表现出互补性，这与小节 B.1 中的 ST 方法相似。