arXiv:2603.01303v1 [math.GT] 1 Mar 2026

链环-箭图对应 I 的几何方法：有理缠结

Jonathan A. Higgins

摘要。 [21, 22] 的链环-箭图对应关系预测，链环的所有对称（或反对称）着色 HOMFLY-PT 多项式，都可以从与该链环相关的有限数据（一个箭图）中恢复。我们为针对有理缠结修改后的链环-箭图对应关系提供了一种新的几何证明（最初证明见 [33]），并用带孔平面及其二重构型空间中的绕数，明确描述了相应的箭图。

目录

1. 引言 2 2. 背景 6 2.1. 一些量子代数 6 2.2. 有理缠结 7 2.3. $\langle -\rangle_j$ 和 $\langle\langle -\rangle\rangle_j$ （有理缠结） 12 2.4. 计算 $\langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j$ 14的已有结果 2.5. 有理缠结的链环-箭图 19 3. 主定理 21 3.1. 为庞加莱多项式建立定理 21 3.2. Q 31的对称性 3.3. 特化为 HOMFLY-PT 多项式 36 4. 主定理的证明 36 4.1. $\mathrm{Conf}^2(M)$中的更多环路 38 4.2. 情形1的证明 40 4.3. 情形 2 的证明 43 4.4. 情形 3 的证明 45 5. 减少指标数量 45 5.1. $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 45的划分 5.2. $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$和 $P(\tau_{u/v})$的几乎箭图形式 50 6. 示例 50 6.1. $\tau_{n/1}$ 50形式的辫结 6.2. 缠结 $\tau_{10/3}$ 54

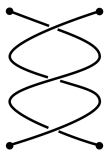
关键词和短语。着色 HOMFLY-PT 多项式、有理缠结、链环-箭图、构型空间。作者获得了 NSF DMS-2405402 资助的部分支持。1

1. 引言

对于任意链环 $L \subset \mathbb{R}^3$，都存在一个称为着色 HOMFLY-PT 多项式的无穷不变量族。Kucharski、Reineke、Stošić 和 Sułkowski 最初在 [21, 22], 中提出的链环-箭图对应预测，这些无穷多个不变量可以由与某个对称箭图相关的有限数据描述。尽管这项猜想相对较新，却已在数学物理和纽结理论领域带来许多进展。例如，该猜想预测的对称箭图并不唯一，因此与这项猜想相关的一个重要问题是这些箭图之间有何关联；这一问题已在 [8, 11,14, 20]中得到系统研究。进一步的发展和应用另见 [9, 10, 13, 19, 23, 29, 32] 。在 [33], 中，Stošić 和 Wedrich 通过归纳法证明了有理缠结和链环的猜想（随后又在 [34]中将其推广到树状情形），但这并未回答相关箭图与这些缠结和链环的几何结构有何关联。本文将针对有理缠结探讨这一问题，并将在后续论文 [12]中研究有理链环。具体而言，我们将利用带孔平面的构形空间中拉格朗日子流形的交模型，确定链环-箭图对应所预测的有限数据。Lawrence [24],、Bigelow [5, 6], 和 Anghel [1], 等人此前已针对量子不变量研究过这类交模型。与本文最相关的是 Wedrich [36], 的工作，他用第 j构形空间表示了有理缠结的 j-着色 HOMFLY-PT 多项式。我们工作的一个重要新特点是，只用带孔平面的第一和第二构形空间，就能描述有理缠结的所有着色 HOMFLY-PT 多项式。

在 [31], 中，Reshitikhin 与 Turaev 证明，我们可以通过用单李代数的不可约表示对线股着色，得到 B^3中辫结的不变量。 j 着色的 HOMFLY-PT 多项式 $\langle - \rangle_j$ 概括了将所有分支都用表示 $\Lambda^j V$着色所得到的不变量，其中 V是 $\mathfrak{sl}_N$的向量表示。（对 N 的依赖由设定 $a = q^N$给出）。对于链环，结果是一个 Laurent 多项式；但对于辫结，它是 skein 模中基元的线性组合，或 MOY 型网（见 [27]）。

本文将重点讨论有理缠结，它们是一类与 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 一一对应的四端辫结（见第 2.2 节或 [28]）。与 u/v 相关联的辫结记作 $\tau_{u/v}$。例如，

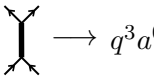
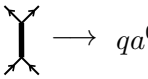
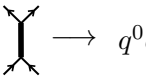
$\tau_{3/1} =$  ,

其中两条线股的方向均朝上，并且可以计算得出

$$\langle \tau_{3/1} \rangle_1 = (-q^5 + q^3 - q)$$  $$+$$

$\tau_{3/1}$的 1 色（或无色）HOMFLY-PT skein 模求值。

自 Khovanov [15], 的工作以来，人们投入了大量精力对这些不变量进行范畴化（参见 [3, 4, 16, 17, 18, 25, 35], 等）。$\tau_{u/v}$ 的范畴化不变量表现为某个范畴中的链复形，其生成对象由相应 skein 模的生成网给出。例如，$\tau_{3/1}$ 的 1 色（或无色）复形为

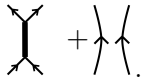
$$q^5 a^0 t^{-3}$$  $$\longrightarrow\ q^3 a^0 t^{-2}$$  $$\longrightarrow\ q a^0 t^{-1}$$  $$\longrightarrow\ q^0 a^0 t^0$$ 

(1)

其中，所示对象表示与该辫结的 skein 模求值中出现的相同基网，而我们将分次以乘法形式写在复形中各对象的前面。请注意，“t”表示同调分次。

这些复形仅在同伦意义下定义，而它们所定义于其上的范畴取决于 N。尽管如此，Wedrich 在 [36] 中证明，$\tau_{u/v}$的 j色 $\mathfrak{sl}_N$ 同调可由一个复形表示，其庞加莱多项式在 q, q^N, 和 t下对 $N \gg 0$稳定；因此，当 N足够大时，我们可以令 $a = q^N$。为方便起见，我们将这些稳定后的$\mathfrak{sl}_N$ 复形称为带色 HOMFLY-PT 复形，但我们只需要其庞加莱多项式，并以 $q, a,$ 和 t表示。

我们用 $\langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$ 表示$\tau_{u/v}$的 j着色HOMFLY-PT复形的庞加莱多项式，即该复形中所有对象之和，其写法如(1)所示。继续我们关于$\tau_{3/1}$的例子，我们得到

$$\langle\langle \tau_{3/1} \rangle\rangle_1 = (q^5 t^{-3} + q^3 t^{-2} + q t^{-1})$$  $$+$$.

正如对庞加莱多项式所应预期的那样，$\langle \tau_{u/v} \rangle_j$ 与 $\langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$ 由以下关系相联系

$$\langle \tau_{u/v} \rangle_j = \langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j \Big|_{t \mapsto -1}.$$

链环-箭图对应（已针对辫结作调整）表明，生成函数 $\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{j \geq 0} \langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$ 可以用一个“箭图”来表示；我们将该箭图视为二次型 Q，连同三个线性形式，它们均定义在一个配备优选基 $\mathcal{G}^1_{u/v}$的自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$上。与$\tau_{u/v}$ 相关联的是三穿孔平面中的弧拉格朗日$\alpha_{u/v}$，以及两类在穿孔点之间穿过的竖直拉格朗日子流形，如图1中针对$\tau_{5/2}$所示。 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的优选基由$\alpha_{u/v}$ 与两条竖线的交点给出。如果我们用 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$来表示三穿孔

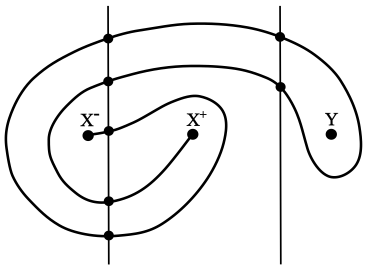


图1. 定理 1 中用于辫结 $\mathcal{T}_{5/2}$ 的图示 $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{5/2})$

平面中由$\mathcal{T}_{u/v}$的三条拉格朗日子流形构成的这一图像，则可将主定理陈述如下。

定理 1. 给定一个有理辫结$\mathcal{T}_{u/v}$， $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$可写为

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},...,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} q^{S\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} t^{T\cdot\boldsymbol{d}} \begin{bmatrix} d_1+...+d_u \\ d_1,...,d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1}+...+d_{u+v} \\ d_{u+1},...,d_{u+v} \end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{u+v}, d_1+...+d_u], \tag{2}$$

其中， S、 A 和 T 可通过计算基于拉格朗日交点的环路绕$\mathcal{D}(\mathcal{T}_{u/v})$ 中三个穿孔点的绕数得到。此外， Q 也可用类似方法计算：转到三穿孔平面的第二构形空间，并在其中考虑绕对角线 Δ的环路。

关于 S, A, T 和 Q 的精确陈述见定理 3.14。

也可以定义 $P(\mathcal{T}_{u/v}) = \mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})|_{t=-1}$，它是 Stošić 和 Wedrich 在 [33] 中研究的辫结生成函数（经缩放形式）。特别是，他们缩放后的形式$P'(\mathcal{T}_{u/v})$ 是将 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 乘以量子二项式得到的，该量子二项式将式（2）中的两个多项式系数合并为一个。这有助于证明他们关于有理纽结的定理，但它与缠结的几何$\mathcal{T}_{u/v}$ 不再有清晰的关联。此外，这种缩放不会影响 Q 或任何线性形式。在 [33], 中，他们通过归纳证明，$P'(\mathcal{T}_{u/v})$ 可以写成类似于式（2）的形式，并称之为其“箭图形式”。主要区别在于，在 $P'(\mathcal{T}_{u/v})$ 和 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 中，不再有线性形式 T，而 $q^{S\cdot\mathbf{d}}$ 被替换为 $(-q)^{S\cdot\mathbf{d}}$。因此，定理 1 实质上提供了一种新方法，通过利用$\mathcal{T}_{u/v}$的几何，证明 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 可以写成适当定义的箭图形式。

有理链环的链环-箭图在 [12], 中，我们将利用定理 1 为有理链环的链环-箭图对应提供一种新的几何解释。在标准表述中，链环-箭图对应指出，链环的着色 HOMFLY-PT 多项式的生成函数可以用某个生成函数来描述,

该生成函数是对称箭图的上同调霍尔代数的生成函数，经过变量替换后得到。具有 m 个顶点、邻接矩阵为 Q 的对称箭图的这个生成函数形式如下

$$P_Q(x_1,...,x_m)=\sum_{\mathbf{d}=(d_1,...,d_m)\in\mathbb{N}^m}(-q)^{-\langle\mathbf{d},\mathbf{d}\rangle_Q}\prod_{i=1}^{m}\frac{x_1^{d_1}...x_m^{d_m}}{(1-q^{-2})...(1-q^{-2d_i})}, \tag{3}$$

其中，$\langle\mathbf{d}、\mathbf{e}\rangle_Q=\sum_{i,\ j}(\delta_{ij}-Q_{ij})d_ie_j$是该箭图的欧拉型，$x_1$、.....、$x_m$是形式变量。生成函数编码了关于箭图表示的信息，并用于定义其唐纳森-托马斯（DT）不变量。关于对称箭图的生成函数和 DT 不变量综述，见 [30] 。若 $P_L^{\bigwedge^j}(q,\ a)$ 是链环 L 的$\bigwedge^j$-着色 HOMFLY-PT 多项式，则链环-箭图对应可以表述如下。

猜想 1.1 (链环-箭图对应)。 给定一个有 $|L|$ 个分支的链环 L ，若令

$$P(L)=\sum_{j\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{j}(1-q^{2i})\right)^{|L|-2}P_L^{\bigwedge^j}(q,a)x^j,$$

则存在一个对称箭图 Q_L ，使得 $P(L)$ 和 $P_{Q_L}(x)$ 经变量替换后相等。

我们将从几何视角研究有理链环中的 $P(L)$及这一陈述；这最终将依赖于本文的工作。Stošić 和 Wedrich 在 [33] 中对有理链环的猜想 1.1 所作的原始证明，是通过证明$P(L)$可以写成“箭图形式”来完成的，这与有理缠结的处理方式类似。为此，他们对重新缩放后的 $P(\tau_{u/v})$施加了闭合操作，而后者也写成了箭图形式。由此可见，证明 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$可以写成式 (2) 的形式，本质上就是对有理缠结的缠结-箭图对应的重新表述。

致谢 本研究是作者博士研究的一部分，因此作者谨向其导师 Jacob Rasmussen 致谢，感谢他在撰写本文过程中给予的宝贵反馈与鼓励。作者还要感谢 Ada Stelzer 和 Abbigail Price 就相关组合问题展开的有益讨论。此外，作者还要感谢 Marko Stošić、Paul Wedrich、Piotr Kucharski 和 Piotr Sułkowski 对早期稿件提出的宝贵意见。

论文结构 第 2 节将介绍本文所需的一些背景信息，包括量子代数、有理辫结、带色 HOMFLY-PT skein 模评估、计算$\langle\langle\tau_{u/v}\rangle\rangle_j$的既有几何结果，以及箭图形式的更多细节。第 3 节将建立并陈述主定理。我们还将证明，使用我们的公式计算时， Q具有对称性。第4节将证明该定理，第5节则将说明如何减少求和中使用的指标数量。最后，我们将在第 6 节给出一些示例。

2. 背景

在介绍新的结果之前，我们先回顾与本文相关的必要定义、记号和已知结果。

2.1. 一些量子代数。 在进行计算和陈述结果时，我们经常使用波赫哈默符号来压缩记号。一般形式的波赫哈默符号 定义为 $(x;y)_i = \prod_{j=0}^{i-1}(1-xy^j)$。 本文中，我们会遇到两种特别的波赫哈默符号：$q$-波赫哈默符号，定义为

$$(q^2;q^2)_i = \prod_{j=1}^{i}(1-q^{2j}),$$

以及对它们稍作修改所得的形式:

$$(-t^{-1}q^2;q^2)_i = \prod_{j=1}^{i}(1+t^{-1}q^{2j}),$$

在讨论庞加莱多项式以及在第5节约化指标时会用到这种形式。注意，通过令 $t=-1$，这两种波赫哈默符号便相互关联。

利用 q-波赫哈默符号，我们可以定义量子二项式和多项式系数。给定 $d_1+\ldots+d_m=j$，我们将量子多项式系数 定义为

$$\begin{bmatrix} j \\ d_1,\ldots,d_m \end{bmatrix} = \frac{(q^2;q^2)_j}{(q^2;q^2)_{d_1}\ldots(q^2;q^2)_{d_m}},$$

而量子二项式 只是 $m=2$ 时的特例。不过，我们将采用 [33] 的记号，写作

$$\begin{bmatrix} j \\ d_1 \end{bmatrix}_+ = \begin{bmatrix} j \\ d_1, j-d_1 \end{bmatrix} = \frac{(q^2;q^2)_j}{(q^2;q^2)_{d_1}(q^2;q^2)_{j-d_1}}.$$

值得注意的是，量子多项式系数经过化简后可表示为关于 q 的多项式。接下来，我们给出一个涉及波赫哈默符号的恒等式，该恒等式可见于 [22]。

引理 2.1. 对于 $d_1,\ldots,d_m \geq 0$，以下结论成立:

$$\frac{(x^2;q^2)_{d_1+\ldots+d_m}}{(q^2;q^2)_{d_1}\ldots(q^2;q^2)_{d_m}} = \sum_{\substack{\alpha_1+\beta_1=d_1 \\ \ddots \\ \alpha_m+\beta_m=d_m}} \frac{(-x^2q^{-1})^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} q^{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2+2\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_{i+1}(d_1+\ldots+d_i)}}{(q^2;q^2)_{\alpha_1}\ldots(q^2;q^2)_{\alpha_m}(q^2;q^2)_{\beta_1}\ldots(q^2;q^2)_{\beta_m}}.$$

该引理的一个特定推论是

$$\frac{(-t^{-1}q^2;q^2)_d}{(q^2;q^2)_d} = \sum_{\alpha+\beta=d} \frac{(t^{-1}q)^\alpha q^{\alpha^2}}{(q^2;q^2)_\alpha (q^2;q^2)_\beta}.$$

最后，我们给出一个将在第 3 节中用到的量子多项式系数恒等式。按照 [2],的记号，我们首先需要作如下定义。

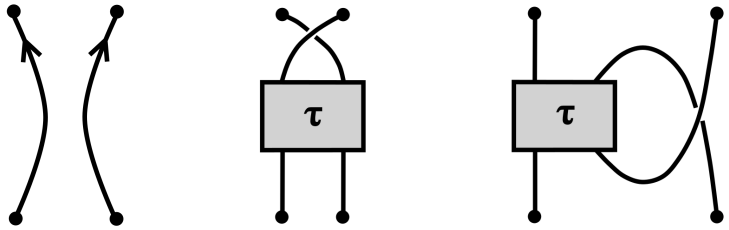


图2. 左：平凡缠结$\tau_{0/1}$。中：上方扭转规则。右：右方扭转规则。对于扭转规则，τ 表示被扭转的辫结，定向由 τ上端点的定向决定。

定义 2.2. 令 $\mathcal{S}_j^k(d_1, \ldots d_k)$ 表示 $[k] := \{1, ..., k\}$ 中长度为j 、包含 d_1 1、 d_2 2、.....以及 d_k 个 k 的序列的集合。

现在，若 $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_j)$是 $\mathcal{S}_j^k(d_1, ..., d_k)$中的一个序列，则

$$\mathrm{inv}(\sigma) := |\{(a, b) : a < b \text{ and } \sigma_a > \sigma_b\}|.$$

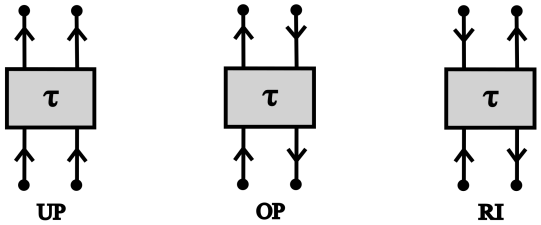
有了这一记号，我们便有来自 [2]的如下组合结果].

命题 2.3 (命题 1.7, [2]). 若 j、 k、 d_1、.....以及 d_k 为满足 $d_1 + ... + d_k = j$的非负整数，则

$$\begin{bmatrix} j \\ d_1, ..., d_k \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j^k(d_1,...,d_k)} q^{2\, inv(\sigma)}. \tag{4}$$

应当注意， [2]中的命题并不涉及指数中的2，但这是因为作者是用 q 而非 q^2来定义一切的。

2.2. **有理缠结**。正有理缠结是具有四个端点的定向缠结，可通过从平凡缠结出发，依次添加有限序列的顶部与右侧扭转而归纳构造。平凡缠结记为$\tau_{0/1}$，定义为具有两条未缠绕、向上定向的线股的辫结，如图2左侧所示。扭转规则亦见图2。这些扭转会改变线股的定向，我们需要加以追踪。遵循 [36], ，我们将使用UP、OP和RI记号来表示弧在边界处的定向，如下所示。



思考这些辫结的最佳方式或许是将它们置于 $\mathbb{R}^3$中单位球 B^3的标准嵌入中，四个端点位于$(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$，

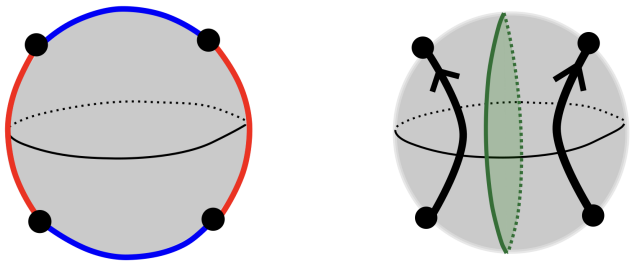


图3. 左：连接边界上分支点的四条彩色弧线 S^2。右：将 B^3 中的平凡缠结分隔开的圆盘。

它们可视为球上的东北、西北、东南和西南点投影到平面 $x = 0$上。我们可以考虑边界球面的双分支覆盖，其中四个端点为分支点。从拓扑上看，双分支覆盖是一个环面，因此我们记作 $\Sigma(S^2,4) \simeq S^1 \times S^1$。现在，考虑连接分支点的四条弧，如图3所示。顶部与底部的弧着蓝色，两侧的弧着红色。注意，我们可以定义双分支覆盖，使得蓝色弧提升为环面 $\Sigma(S^2,4)$的子午线，而红色弧线提升为经线。我们取顶部的蓝色弧与右侧的红色弧，它们的提升是 $H_1(\Sigma(S^2,4)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$的生成元 $[m]$与 $[l]$。

平凡缠结 $\tau_{0/1}$ 就是两条弧分别从东南和西南指向东北和西北的缠结。请注意，存在一个圆盘 B^2 将两个缠结分支分隔开，如图3右侧所示。该圆盘的边界是一条简单闭曲线 $\gamma \subset \partial B^3 = S^2$，它在环面 Σ 上的提升是两条互不相交的经线 S^2，4)。令 $\tilde{\gamma}$ 为其中一条经线。根据我们所构建的图示，顶部扭转是沿顶部蓝色弧线进行一次 Dehn 扭转，右侧扭转则是沿右侧红色弧线进行一次 Dehn 扭转。这些扭转会影响曲线 γ 如何绕边界球面缠绕，进而改变其提升 $\tilde{\gamma}$。

很容易看出，刚才提到的 Dehn 扭转会提升为沿着 $\Sigma(S^2,$ 4) $\simeq S^1 \times S^1$ 中提升后的子午线和经向的 Dehn 扭转，并且 $\tilde{\gamma}$ 是一个闭一链，由这些提升后的 Dehn 扭转作用于平凡缠结的子午线提升所确定。同调类可写为 $[\tilde{\gamma}] = u[m] + v[l] \in H_1(S^1 \times S^1)$，其中 gcd($u,$ v) $= 1$，取比值 u/v 可用于区分相应的有理缠结。我们将由这条提升曲线 $\tilde{\gamma}$ 给出的缠结记作 $\tau_{u/v}$ 。众所周知，有理缠结可由相应的分数 u/v 区分（在同伦意义下）。

现在，我们必须重新审视 Dehn 扭转的作用，以确定该有理辫结对应的分数。在辫结本身的层面上，我们用 T 表示顶部扭转，用 R 表示右侧扭转。正如我们之前所说， T 的提升给出环面的映射类群 Mod($S^1 \times S^1$) 中的一个 Dehn 扭转 $\tau \in$，而 R 的提升则是另一个 Dehn 扭转 $\rho \in \in$ Mod($S^1 \times S^1$)，满足

$$\tau:\begin{cases} m\mapsto m \\ l\mapsto m+l \end{cases} \qquad\qquad \rho:\begin{cases} m\mapsto m+l \\ l\mapsto l, \end{cases}$$

因此 $\tau(u[m]+v[l]) = (u+v)[m]+v[l]$，且 $\rho(u[m]+v[l]) = u[m]+(u+v)[l]$，由此得到

$$T\tau_{u/v} = \tau_{(u+v)/v} \qquad\qquad R\tau_{u/v} = \tau_{u/(u+v)}.$$

因此，给定施加于平凡缠结 $\tau_{0/1}$ 的上扭转与右扭转的有限序列，我们便有一种确定分数 u/v 的方法。我们知道可以将第一次扭转取为顶部扭转 T，因为 $R\tau_{0/1} = \tau_{0/1}$。现在，我们首先考虑 $u/v \geq 1$ 的情形，即最后一次扭转为顶部扭转 T 的情形。这意味着我们可以写成$T^{a_n}R^{a_{n-1}}...R^{a_2}T^{a_1}\tau_{0/1} = \tau_{u/v}$，其中 T 与 R 的规则给出

$$\frac{u}{v} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-2}+...+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}}.$$

否则，若 $0 < u/v < 1$，则最后一次扭转为右侧扭转 R，因此我们有 $R^{a_n}T^{a_{n-1}}...R^{a_2}T^{a_1}\tau_{0/1} = \tau_{u/v}$，其中

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n-1}+...+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}}.$$

我们可以用 $[a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1]$ 来记录这些 a_i 的序列；在上述第一种情形中，n 为奇数，而在第二种情形中则为偶数。

现在我们已经仔细定义了有理缠结，并确定了区分它们的方法，接下来将介绍另一种将它们可视化的方式，这对本文内容会有所帮助。特别是，对于视为存在于 B^3 中的辫结 $\tau_{u/v}$，我们可以将其推到边界球面上。换言之，从平凡缠结 $\tau_{0/1}$ 出发，我们可以将两条线股推到与边界球面上的两条红色弧线平行的位置，因此我们知道它们都提升为 $\Sigma(S^2, 4) \simeq S^1 \times S^1$ 的经线，然后应用用于构造$\tau_{u/v}$的同一组顶部与右侧扭转（即边界球面上的 Dehn 扭转）。令 α 和 α' 为应用这些扭转后，我们为 $\tau_{u/v}$ 在 S^2 上得到的两条弧，其中 α 是端点位于东南方的弧，α' 是端点位于西南方的弧（扭转规则保证它们是两条不同的弧）。不难看出，它们在环面上的提升 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\alpha'}$ 满足 $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\alpha'}] = [\tilde{\gamma}] \in H_1(\Sigma(S^2, 4))$。因此，我们本可以使用其中任意一个来确定辫结 $\tau_{u/v}$。

由于 $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，四穿孔球面同胚于三穿孔平面。因此，如果去掉弧 α'，再相对于西南点应用立体投影，就会得到弧 α 投影到三穿孔平面上的结果。

定义 2.4. 给定一个有理辫结 $\tau_{u/v}$，令 $\alpha_{u/v}$ 为通过刚才描述的步骤在三穿孔平面中得到的对应弧 α。

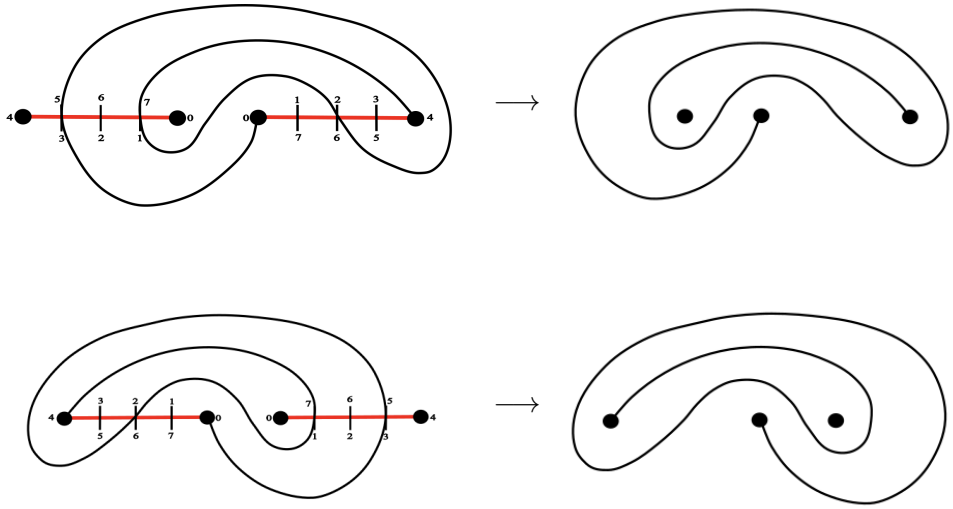


图 4。 将引理 2.5 应用于 $\tau_{4/3}$ （上）和 $\tau_{3/4}$ （下）

接下来，我们需要一种方法来确定特定 u/v 对应的这条弧的形状；下面的引理告诉我们如何做到这一点。该引理取自 [36]，的第 4.1 节，并根据我们的约定作了调整。

引理 2.5。 在同伦意义下，$\alpha_{u/v}$ 可绘制如下：在实轴上绘制区间 $[-2,-1]$和 $[1,2]$，并将它们划分为大小相等的 u 部分。若 $u \geq v$，从点 ± 1开始，按照图 *4* 左上方所示的顺时针方向，用0、1、.....、$2u-1 \in \mathbb{Z}/(2u)\,\mathbb{Z}$ 标记两条线段上各划分部分的端点。以标记为 *0* 的点 $par(u) \in \{\pm 1\}$为起点，根据 u的奇偶性，绘制弧 $\alpha_{u/v}$：先前往另一侧标记为 v 的点，然后前往起始所在一侧的 $2v$ （模 $2v$），如此继续，直到再次到达 $\{-2,-1,1,2\}$。平面中的三个穿孔点是实轴上位于 $x=\pm 1$、2 处的点。若 $u<v$，则交换 u 和 v的角色，以逆时针方向标记划分点，并按照前一种情况的类似方式进行，但从标记为 *0* 的点 $-par(v) \in \{\pm 1\}$开始。（等价地，将 $\tau_{v/u}$ 的图形关于虚轴反射。）在此情况下，平面中的三个穿孔点位于实轴上的 $x=\pm 1$、-2 处。

此外，在同伦意义下，我们可以将这幅图尽可能地“收紧”，从而使其唯一确定。必要时，通过推开双边形，我们可以确保 α 没有自交点，且与区间 $[-2,-1]$ 和 $[1,2]$ 的交点数最少（不过，严格遵循引理 2.5 中的步骤应该就能避免这种情况）。另外，在 $u \geq v$ 情形下，如果 $u<v$，我们可以保证 $\alpha_{u/v}$ 与$(-\infty,\ -2]$不相交，因此可以舍弃 $x=-2$；同时，$\alpha_{u/v}$ 也与 $[2,\infty$不相交，所以在这种情形下我们舍弃了 $x=2$。

现在，我们要在三穿孔平面中定义两种类型的竖直拉格朗日子流形。假设我们已按照引理 2.5 的步骤得到 $\alpha_{u/v}$，若 $u \geq v$，则令

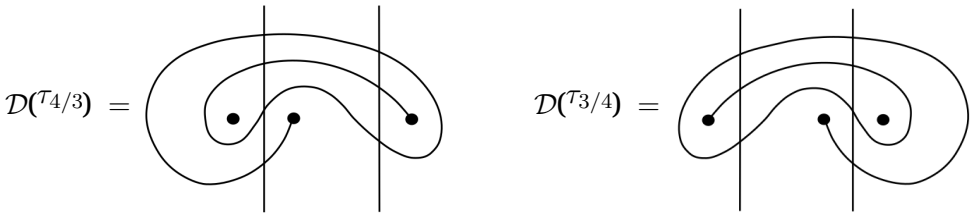


图 5. $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 记号的示例

l_A 表示一个竖直拉格朗日子流形，它与实轴的交点位于 $(-1,\ 1)$ 上；令 l_I 为一个平行的竖直拉格朗日子流形，它与区间 $(1,\ 2)$ 相交，且与 $\alpha_{u/v}$ 的交点数最少。当 $u < v$ 时，令 l_A 为一个竖直拉格朗日子流形，它与 $(-2,\ -1)$ 相交，且与 $\alpha_{u/v}$ 的交点数最少；再令 l_I 为一个平行的拉格朗日子流形，它与实轴上的区间 $(-1,\ 1)$ 相交。

注. 根据我们已建立的记号，我们有

$$|l_A \cap \alpha_{u/v}| = u \qquad \text{and} \qquad |l_I \cap \alpha_{u/v}| = v$$

无论 u与 v 如何相关。

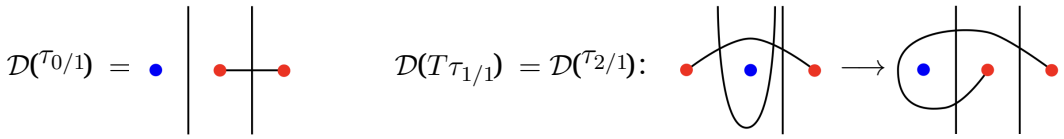
定义 2.6. 我们将分别称 l_A 和 l_I 为活动 轴和非活动轴，并将交点 $l_A \cap \alpha$ 活动交点 和 $l_I \cap \alpha$ 称为非活动交点。

一般来说，我们可以画出这些垂直线而不加标记，但重要的是要记住，l_A 始终位于左侧。现在我们也可以定义在引言中提到的 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 了。示例见图 5。

定义 2.7. 给定 $\tau_{u/v}$，令 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 表示三穿孔平面中的图形，它由 $\alpha_{u/v}$、 l_A 和 l_I 组成。

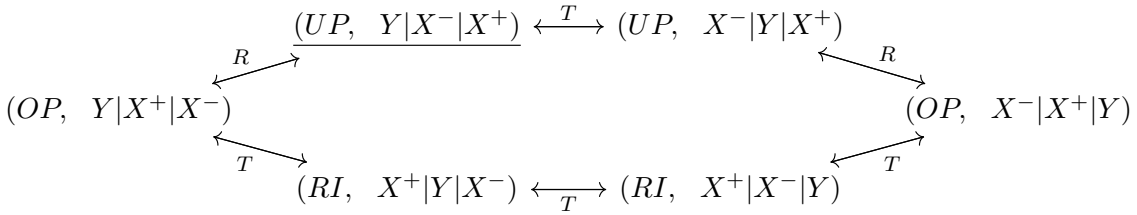
在下面的引理中（同样取自 [36], ），我们将说明如何通过考察扭转操作对垂直线 l_A 和 l_I 的作用，归纳地构造 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$。

引理 2.8. $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 可以按如下方式利用 l_A 和 l_I 归纳地构造。从对应于 $\tau_{0/1}$的图（如下所示）出发，通过将 l_A 弯向 l_I 并拉直来施加上扭转，如右下方所示。右扭转以类似方式进行，即将 l_I 弯向 l_A，然后拉直。



通过考虑球面上的德恩扭转，这一点很容易看出。此外，为了后续计算，我们需要追踪这三个穿孔点。我们将遵循 [36] 的约定，并将它们分别称为 $X^+, X^-,$ 和 Y，其中 Y始终是不是该弧端点的那个点（因此它是上方的蓝点），而 X^+ 和 X^- （上方的红点）由辫结的定向决定。在 $\tau_{0/1}$的情形中，从左到右标记的三个点分别是 $Y, X^-,$ 和 X^+，我们将其记作 $Y|X^-|X^+$。我们可以通过考察顶部与右侧扭转如何置换这些点，来追踪哪个点是哪个。下面的引理（ [36]中的推论 4.3）告诉我们这些扭转如何影响 $\tau_{u/v}$ 的定向以及这三个点的构型。在该引理中，我们将这一对数据称为一个状态。

引理 2.9. 下图展示了上方扭转和右侧扭转对弧的定向以及点 X^-、X^+ 和 Y 的构形所产生的影响（从左向右读）。带下划线的状态表示平凡缠结 $\tau_{0/1}$ 的状态。



继续看 $\tau_{4/3}$ 和 $\tau_{3/4}$ 的例子，可以很容易验证 $\tau_{4/3} = TR^2T\tau_{0/1}$，因此 $\tau_{4/3}$ 由状态 $(UP,\ \ Y|X^-|X^+)$ 给出；而 $\tau_{3/4} = RT^3\tau_{0/1}$，因此 $\tau_{3/4}$ 由状态 $(OP,\ \ X^-|X^+|Y)$ 给出。

2.3. $\langle -\rangle_j$ **和** $\langle\langle -\rangle\rangle_j$ **用于有理缠结。** 在 [36], , Wedrich 通过与 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 相关的图示研究了有理缠结的带色 $\mathfrak{sl}_N$ 不变量；我们在下一节也会用到这些图示。这类不变量以网的形式用图示表示，网即带有整数流的有向平面图，其中所有内部顶点均为三价。这类网编码了 $\mathfrak{sl}_N$ 的极小表示的张量积之间的线性映射信息（见 [7]）。

给定带有定向 $X \in \{UP, OP, RI\}$ 的 $\tau_{u/v}$，其 j 着色的 HOMFLY-PT 多项式记作 $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$，可视为带有 $N \gg 0$ 和 $a = q^N$ 的 j 着色 $\mathfrak{sl}_N$ 不变量。它是由 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$ 上形如 $X[j,k]$ 的网构成的线性组合，其中 $0 \le k \le j$，对于每种可能的 X，网 $X[j,k]$ 均在图 6 中以图示方式展示。我们约定删除标号为 0 的边。

如第 1 节所述， $\langle -\rangle_j$ 与 j色 HOMFLY-PT 复形的庞加莱多项式 $\langle\langle -\rangle\rangle_j$ 相关，具体为

$$\langle \tau_{u/v} \rangle_j = \langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j \Big|_{t \mapsto -1}$$

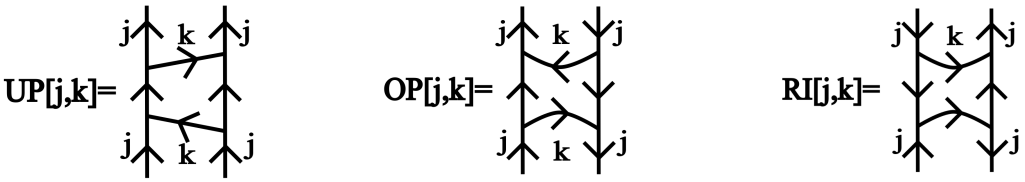
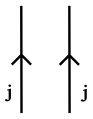


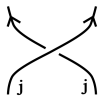
图 6. 三种类型的基网

对任意 $\tau_{u/v}$ 均成立。在 [36], 中，Wedrich 运用量子斜Howe对偶证明了如何对 $\langle\langle\tau_{u/v}\rangle\rangle_j$ 进行递归计算。具体而言，首先从

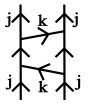
$$\langle\langle\tau_{0/1}\rangle\rangle_j = UP[j,0] =$$



然后应用从$\tau_{0/1}$构建$\tau_{u/v}$ 时所使用的同一顶部与右侧扭转序列。通过公式消解交叉



$$= \sum_{k=0}^{j} t^{-k} q^{k}$$



$$(q \leftrightarrow q^{-1} \text{ if negative crossing}),$$

这可转化为对每个 $X \in\{UP, OP, RI\}$将 T 与 R 应用于 $X[j,k]$ 的如下规则，如 [36]中所证明:

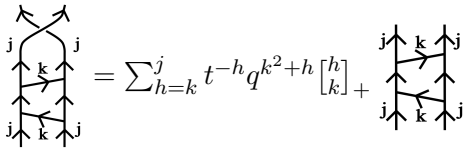
(1) TUP$[j,k] \cong \sum_{h=k}^{j} t^{-h} q^{k^2+h} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+UP[j,h]$(2) TOP
$[j,k] \cong \sum_{h=k}^{j} t^{-h} a^k q^{k(k-2j)+h} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+RI[j,h]$(3) TRI
$[j,k] \cong \sum_{h=k}^{j} t^{-h} a^h q^{q^2+h_{(1-2j)}} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+OP[j,h]$(4) RUP
$[j,k] \cong \sum_{h=0}^{k} t^{-h} a^h q^{k(2j-k)+h(1-2j)} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-OP[j,h]$(5)
ROP$[j,k] \cong \sum_{h=0}^{k} t^{-h} a^k q^{-k^2+h} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-UP[j,h]$(6) RRI
$[j,k] \cong \sum_{h=0}^{k} t^{-h} q^{-k(k-2j)+h} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-RI[j,h]$.

部分量子二项式的负上标表示其经过缩放的版本。具体而言，

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_+ \Big|_{q \mapsto q^{-1}}.$$

由此可见， $X[j,k]$ 构成了 $\langle\tau_{u/v}\rangle_j$和 $\langle\langle\tau_{u/v}\rangle\rangle_j$ 中出现的网类型的一种基，且对任意$\tau_{u/v}$均如此。此外，如果我们想让一切都保持图示形式，

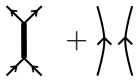
可以将上面的第一个方程写成



类似地，也可以将上述各个方程写成图示形式。

计算 $\langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$ 时，需要注意，在归纳过程中，必须对每个中间辫结的庞加莱多项式中的每个网应用上述扭转规则。最后，我们将重新讨论第 1 节中的例子 $\langle\langle \tau_{3/1} \rangle\rangle_1$，以演示如何应用扭转规则。

例子。回想一下，我们曾写出

$$\langle\langle \tau_{3/1} \rangle\rangle_1 = (q^5 t^{-3} + q^3 t^{-2} + q t^{-1})$$  $+$

在第 1 节中，它可以用 $X[j,k]$ 表示为

$$\langle\langle \tau_{3/1} \rangle\rangle_1 = (q^5 t^{-3} + q^3 t^{-2} + q t^{-1}) UP[1,1] + UP[1,0].$$

现在，我们将按照归纳步骤并应用扭转规则来展示这一点。注意，$\tau_{3/1} = T^3 \tau_{0/1}$，因此在三个步骤中的每一步，我们都需要对 $UP[1,1]$ 和 $UP[1,0]$ 应用 T。应用 $TUP[j,k]$ 的规则后，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle\langle \tau_{0/1} \rangle\rangle_1 &= UP[1,0] \\
\langle\langle \tau_{1/1} \rangle\rangle_1 &= \langle\langle T\tau_{0/1} \rangle\rangle_1 = q t^{-1} UP[1,1] + UP[1,0] \\
\langle\langle \tau_{2/1} \rangle\rangle_1 &= \langle\langle T\tau_{1/1} \rangle\rangle_1 = q^3 t^{-2} UP[1,1] + q t^{-1} UP[1,1] + UP[1,0] \\
&= (q^3 t^{-2} + q t^{-1}) UP[1,1] + UP[1,0] \\
\langle\langle \tau_{3/1} \rangle\rangle_1 &= \langle\langle T\tau_{2/1} \rangle\rangle_1 = (q^5 t^{-3} + q^3 t^{-2}) UP[1,1] + q t^{-1} UP[1,1] + UP[1,0] \\
&= (q^5 t^{-3} + q^3 t^{-2} + q t^{-1}) UP[1,1] + UP[1,0],
\end{aligned}$$

正如预期。

2.4. 计算的已有结果 $\langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$。在 [36], 中，Wedrich 提出了一种优雅的几何方法，通过计算任意一对生成元之间的分次差，为任意有理辫结$\tau_{u/v}$计算 $\langle\langle - \rangle\rangle_j$，结果相差一个普适的分次平移。给定$\tau_{u/v}$ 和一种着色 j，我们可以通过对所谓的$\mathcal{D}$（$\tau_{u/v}$）进行变体来计算 $\langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j$。回想一下，$\alpha_{u/v}$ 带有两个特殊的竖直拉格朗日子流形： l_A 和 l_I。此外，链复形中的对象具有 $X[j,k]$的形式，其中 k 称为权重。现在我们将这两个想法联系起来。

定义 2.10. 关于$\tau_{u/v}$ 的 j-带色 HOMFLY-PT 复形中权重为 k 的生成元由加权竖线和无权竖线定义。我们得到加权竖线

在带色 HOMFLY-PT 复形中，通过取 l_A的 k 个平行副本得到，记为w_1，..... w_k；而无权竖线是 l_I的 $j-k$ 个平行副本，记为 u_1，..... u_{j-k}。

我们可以利用这一新的几何设置来定义 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 的一种“变体”。

定义 2.11. 设 $\mathcal{D}^{k,j-k}(\tau_{u/v})$ 是三穿孔平面中的图形，由$\alpha_{u/v}, w_1, ..., w_k,$ 以及 $u_1, ..., u_{j-k}$组成。

在 [36], 中，Wedrich 证明， j-着色 HOMFLY-PT 复形中权重为 k 的生成元由交点的 j 元组给出

$$(x_1, ..., x_j) \in (w_1 \cap \alpha) \times ... \times (w_k \cap \alpha) \times (u_1 \cap \alpha) \times ... \times (u_{j-k} \cap \alpha),$$

位于 $\mathcal{D}^{k,j-k}(\tau_{u/v})$ 中，其中我们省略了表示 α 的 u/v 下标；随后他描述了如何计算对应于这些交点的生成元的分次差。若 $x = (x_1, ..., x_h, ..., x_j)$ 和 $x' = (x_1, ..., x'_h, ..., x_j)$ 是两个权重相同、且仅在第 h 个坐标上不同的生成元，则可以如下计算 x 与 x' 之间的分次差：

沿着 α 从 x_h 到 x'_h取路径，记作 α'，然后沿第 h条竖线取路径 β，从 x'_h 向下返回到 x_h。现在考虑以 x_h为基点的环路 $\alpha' \cdot \beta$。该环路围成的区域称为 D，是 $\mathbb{Z}$上的一个奇异二链。通过研究与此 D的交点，可以计算x 与 x' 之间的分次差。分次差有两类贡献，称为加性部分和非加性部分。

加性部分 由 D 与点 $\{X^+, X^-, Y\}$的交点情况决定。这些点与由 D 产生的简单圆盘 D_s 相交所带来的分次差贡献为

$$D_s \cdot X^+ = \frac{a^2}{tq^{4j-2}}, \qquad D_s \cdot X^- = D_s \cdot Y = \frac{q^2}{t}.$$

非加性部分 由 D 与 $\{x_1, ..., x_{h-1}, x_{h+1}, ..., x_j\}$中 x 和 x' 共有的点的交点情况决定。由 D产生的简单圆盘 D_s 与该集合中的一个 x_i 相交所产生的贡献为

$$D_s \cdot x_i = \begin{cases} q^4 & \text{if } x_i \in \text{int}(D_s), \\ q^2 & \text{if } x_i \in \partial D_s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在，我们有办法确定带色 HOMFLY-PT 复形中权重为 k 的任意两个生成元之间的分次差（因此，它们对应于 X 的对象： $X[j,k]$、 UP， OP， 或 RI）。因此，我们只需要找到一种比较不同权重生成元的方法。

假设 x 是权重为 k 的生成元， y 是权重为 $k-1$ 的生成元，且除第 k个坐标外， x 与 y 相同； y 的第 k个坐标是将第 x 个坐标中的第 k个竖线从加权侧滑向非加权侧后得到的。此时，我们称 x与 y 由一次简单滑动相关联，而这两个生成元之间的分次差取决于滑动时经过三个特殊点中的哪一个：

$\{X^+, X^-, Y\}$ 第 k个加权竖线滑向非加权侧时与之相交的特殊点。本文此处及后文均用 Z 表示另外两个特殊点之间的这个点。于是， x 与 y 之间的分次差为

$$\begin{cases} t/q & \text{if } Z \in \{Y, X^-\}, \\ tq^{2j-1}/a & \text{if } Z = X^+. \end{cases}$$

这些规则使我们能够确定带有 $a = q^N$ 的彩色 $\mathfrak{sl}_N$ 复形中任意两个生成元之间的分次差；这足以确定庞加莱多项式，除去分次的某种普适缩放。

Wedrich 还提供了另一种理解这些生成元及计算其分次差的方法，可与 Bigelow 和 Manolescu 分别在[6]和 [26],中的构造进行比较。现在我们将介绍这一方法。

将弧 $\alpha_{u/v}$ 视为 $\mathbb{C} \setminus \{X^+, X^-, Y\}$ 的一维子流形。为简化记号，我们现在令 $M = \mathbb{C} \setminus \{X^+, X^-, Y\}$，并使用 $\mathrm{Conf}^j(M) = \mathrm{Sym}^j(M) \setminus \Delta$ 表示 M 的第 j 个（无序）构形空间，其中Δ 是大对角线。现在，我们定义

$$\mathbb{L}^j_{u/v} := \mathrm{Sym}^j(\alpha_{u/v}) \setminus \Delta \subset \mathrm{Conf}^j(M),$$

and

$$\mathbb{L}^j_k := \pi(w_1 \times ... \times w_k \times u_1 \times ... \times u_{j-k}) \subset \mathrm{Conf}^j(M)$$

作为 $\mathrm{Sym}^j(M)$ 中两个 j 维（在 $\mathbb{R}$ 上）子流形，其中我们将 $\mathbb{L}^j_k$ 中所示的每条平行竖线视为位于各自的 $\mathbb{C}$ 副本中，并且

$$\pi : M^j \setminus \Delta \to \mathrm{Conf}^j(M).$$

现在，根据本节前文的记号，权重为 k 的生成元 $x = (x_1, ..., x_j)$ 可以视为 $\mathbb{L}^j_{u/v} \cap \mathbb{L}^j_k$ 中相应的点。事实上，$\tau_{u/v}$ 的 j 色 $\mathfrak{sl}_N$ 复形的全部生成元构成的集合（记作 $\mathcal{G}^j_{u/v}$）为

$$\mathcal{G}^j_{u/v} = \bigcup_{k=0}^{j} (\mathbb{L}^j_{u/v} \cap \mathbb{L}^j_k).$$

$\mathcal{G}^j_{u/v}$ 中权重相同为 k 的点之间的分次差，可以通过 $\mathbb{L}^j_{u/v}$ 和 $\mathbb{L}^j_k$ 在由满同态 $\Theta_j : \pi_1(\mathrm{Conf}^j(M)) \to \mathbb{Z}^3$ 指定的 $\mathrm{Conf}^j(M)$ 覆盖空间上的提升的分次交数来计算（ $\mathbb{Z}^3$ 对应于 q-、 a-和 t-分次）。借助一些更简单的同态，我们可以明确描述这个同态。对于任意 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$，我们可以定义一个同态

$$\Psi^j_V : \pi_1(\mathrm{Conf}^j(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^j(\mathbb{C} \setminus V)) \to \pi_1(\mathrm{Conf}^{j+1}(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_{j+1} \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z},$$

其中第一个映射是包含映射，第二个映射来自将 V中的点添加到无序 j元组中，最后一个映射是标准阿贝尔化同态。

此外，我们可以定义

$$\Phi^j : \pi_1(\mathrm{Conf}^j(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^j(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_j \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}.$$

我们的约定是，在借助这些同态进行计算时，首先确定相应的辫，该辫通过从图表上方观察环路来绘制，然后计算阿贝尔化——即正交叉的数目减去负交叉的数目。获取与环路相关联的辫的约定，稍后将通过一个例子加以阐明。

现在，对于 $x, y \in \mathbb{L}^j_{u/v} \cap \mathbb{L}^j_k$（两个权重相同的生成元），$x$ 与 y 之间的 q-、a-和 t-分次差由 $\Theta_j([\gamma_{x,y}]) \in \mathbb{Z}^3$给出，其中 $\gamma_{x,y}$ 是 $\mathrm{Conf}^j(M)$ 中的一条环路，它从 x出发，沿着 $\mathbb{L}^j_{u/v}$ 移动到 y，然后经由 $\mathbb{L}^j_k$ 向下返回 x。更准确地说，若 $x = (x_1, \ldots, x_j)$ 且 $y = (y_1, \ldots, y_j)$，则 $\gamma_{x,y}$ 由一个 j元组的路径给出：这些路径先沿着 $\mathbb{L}^j_{u/v}$ 从 x_i到达 $y_{\sigma(i)}$（其中某个 $\sigma \in S_j$），然后沿着 $\mathbb{L}^j_k$.中的第 $\sigma(i)$ 条竖线从 $y_{\sigma(i)}$ 到达 $x_{\sigma(i)}$

定义 2.12. 给定有理辫结 $\tau_{u/v}$的 j 带色 HOMFLY-PT 复形的两个生成元 x 和 y，令 $q(x) - q(y)$ 表示这两个生成元之间 q 分次的差。同理，我们定义 $a(x) - a(y)$ 和 $t(x) - t(y)$，分别表示 a 分次差和 t 分次差。

现在，我们用刚才给出的同态来精确表述这些分次差；这些同态是通过与 Wedrich 的交数和 2-链方法进行比较得到的。综合以上所有内容，我们得到

$$q(\overline{x}) - q(\overline{y}) = \left(2\Phi^j + (1-2j)\left(\Psi^j_{X^+} - \Phi^j\right) + \sum_{W \in \{X^-, Y\}} \left(\Psi^j_W - \Phi^j\right) \right)([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}]) \tag{5}$$

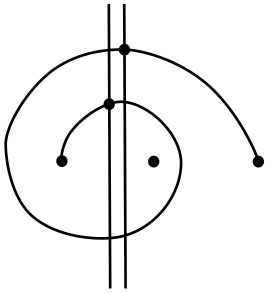
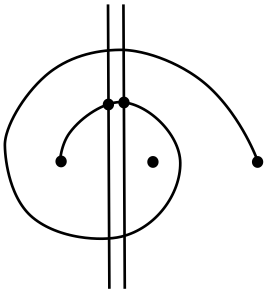
$$a(\overline{x}) - a(\overline{y}) = \left(\Psi^j_{X^+} - \Phi^j\right)([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}]) \tag{6}$$

$$t(\overline{x}) - t(\overline{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{W \in \{X^+, X^-, Y\}} \left(\Psi^j_W - \Phi^j\right)([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}]). \tag{7}$$

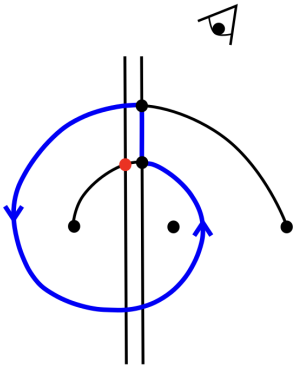
这一切都源于这样一个事实：$2\Phi^j$ 给出非加性部分，而对于 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$，$\frac{1}{2}\left(\Psi^j_V - \Phi^j\right)$ 计算绕 V的绕数。右侧这三个同态给出了 Θ_j的坐标同态。

例子。现在，我们举例比较权重为 2 的两个生成元 $x, y \in \mathbb{L}^2_{3/1} \cap \mathbb{L}^2_2$ 的分次差，其中 $\tau_{3/1}$。注意，$\tau_{3/1}$ 的状态为 $(UP, X^-|Y|X^+)$。

对于生成元，我们取

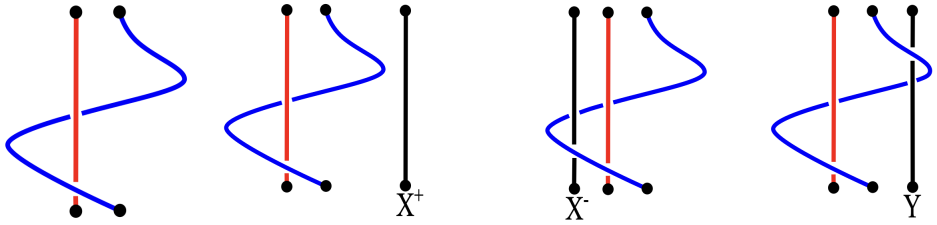
$\overline{x} =$  $\overline{y} =$ 

其中，我们可以将这些图形视为位于 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中。为了计算分次差，我们使用环路 $\gamma_{x,y}$：它沿着 $\mathbb{L}^2_{3/1}$ 从 x 走到 y，再沿着 $\mathbb{L}^2_2$ 返回 $\bar{x}$。下方展示了环路 $\gamma_{x,y}$，其中眼睛符号表示我们绘制相应辫子时所采用的视角。具体而言，辫子是从上方、沿同一平面观察该环路得到的（想象将页面倾斜，使顶部靠近你的脸，图画朝下），因此，当一条路径在页面上向左／右移动时，从这一视角看也会向左／右移动。回想一下，$\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路由两条不相交的环路，或两条交换起点与终点的路径构成。下方，红点表示一个常值环路。

$\gamma_{x,\overline{y}} =$ 

因此，例如，从指定的视角观察该环路，我们看到蓝色环路先向左延伸，并从 X^-前方经过，然后从 X^- 和 Y后方经过，向右移动，接着再次左转，从 Y 前方经过并返回基点。下方从左到右给出了由$\gamma_{x,\ y}$得到的辫子，用于计算 Φ^2，$\Psi^2_{X^+}$，Ψ_{X^-}，以及 Ψ^2_Y。我们用蓝色和红色标出了与有色分支对应的线股

$\gamma_{x,y}$的环路，而黑色绳股表示相应的穿孔点。



由此可得 $\Phi^2([\gamma_{x,y}]) = -2$，$\Psi^2_{X^+}([\gamma_{x,y}]) = -2$，$\Psi^2_{X^-}([\gamma_{x,y}]) = -4$，以及 $\Psi^2_Y([\gamma_{x,y}]) = -4$。现在，我们可以利用方程 (5)–(7) 计算 $q(x) - q(y) = -8$、$\bar{a}(x) - \bar{a}(y) = 0$，以及$t(x) - t(y) = 2$。

2.5. 有理辫结的链环-箭图。 在第 1 节中，我们简要讨论了链环-箭图对应在辫结中的类比：我们可以将 $\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{j\geq 0}\langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j$ 写成“箭图形式”，现在我们对其作出精确定义。

定义 2.13. 对于一个有理辫结 $\tau_{u/v}$，若 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 可以写成如下形式，则称其具有箭图形式

$$\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t} a^{A\cdot\mathbf{d}} t^{T\cdot\mathbf{d}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1}+\ldots+d_{u+v} \\ d_{u+1},\ldots,d_{u+v} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{u+v}, d_1+\ldots+d_u],$$

其中 S、A 和 T 是线性形式，Q 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模上的二次型，记作 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$。

此外，回顾第 1 节，$\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 配备了一个优选基 $\mathcal{G}^1_{u/v}$，该基由 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中的拉格朗日交点给出。

关于这些线性形式和二次型，建立一些记号会很有帮助。我们看到，$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的数据由 $\tau_{u/v}$ 的定向 X、三个线性形式 S、A 和 T（可写成向量），以及二次型 Q（可写成对称矩阵）构成。遵循 [33]，的约定，我们有时将这些数据表示为

$$X, [S|A|T], Q,$$

其中，三个向量作为矩阵的列排列。于是，每当需要对交点（或等价地，$\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的基元）进行划分时，可以使用诸如以下的分块表示

$$X, \left[\begin{array}{c|c|c} S_1 & A_1 & T_1 \\ \hline S_2 & A_2 & T_2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right]$$

来表示这些数据，其中下标 1 对应其中一个划分集合的块，下标 2 则对应另一个集合。因此，块 Q_{12} 和 Q_{21} 可以看作 Q 中关联两个集合间基元的部分。例如，

可以根据指标是否活跃来划分指标，并据此定义如上所示的块。

在第5节中，我们将介绍一种以不同形式表示 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$的方法，该形式的求和中包含更少的指标；这相当于将 S、A、T以及 Q 限制在$\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的一个自由子模上，其基由 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的一个子集给出。这样做的目的将在 [12],中显现出来，因为届时我们需要使用带有压缩指标的生成函数。然而，作为减少指标数量的结果，我们还需要一个额外的线性形式 K，它只由1和0组成。这种表示 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$的修正方式类似于 Stošić 和 Wedrich 在 [33], 中所称的“几乎箭图形式”，因此我们采用这一术语。

定义2.14。 给定一个有理辫结$\mathcal{T}_{u/v}$，如果 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$可以写成如下形式，我们称其为几乎箭图形式:

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},...,\mathbf{d_{m+n}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{m+n}}} q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}t^{T\cdot\mathbf{d}}(-t^{-1}q^2;q^2)_{K\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+...+d_m\\ d_1,...,d_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{m+1}+...+d_{m+n}\\ d_{m+1},...,d_{m+n}\end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{m+n},d_1+...+d_m],$$

其中， $m\le u$、 $n\le v$、 S、 A、 T以及 Q 都是来自箭图形式的同一组线性形式和二次型的限制，而 K 是新的线性形式。

写成几乎箭图形式的 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 的数据可由下式给出

$$X,[K|S|A|T],Q,$$

我们将在第5节中使用它。

在 [12], 中，我们将需要 $\mathcal{T}_{u/v}$ 的着色 HOMFLY-PT 多项式（或纽结 skein 模评价）的生成函数 $P(\mathcal{T}_{u/v}) = \sum_{j\ge 0}\langle\tau_{u/v}\rangle_j$ 。因此，我们将在适当时给出 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 的重要结果，但它们可通过令 $t=-1$ 由 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 的相应结果平凡地得到。目前，我们只陈述 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 的箭图形式和几乎箭图形式是什么样的。

定义2.15. 给定 $\mathcal{T}_{u/v}$，我们称 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 处于 箭图形式 ，如果它写成

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},...,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}}q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+...+d_u\\ d_1,...,d_u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{u+1}+...+d_{u+v}\\ d_{u+1},...,d_{u+v}\end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{u+v},d_1+...+d_u],$$

其中 $S,A,$ 和 Q 与 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 的箭图形式定义中相同。若$P(\mathcal{T}_{u/v})$ 可写成如下形式，则称其为几乎箭图形式

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},...,\mathbf{d_{m+n}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{m+n}}} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}}q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}(q^2;q^2)_{K\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+...+d_m\\ d_1,...,d_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{m+1}+...+d_{m+n}\\ d_{m+1},...,d_{m+n}\end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{m+n},d_1+...+d_m],$$

其中 $m, n, K, S, A,$ 和 Q 与$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的几乎箭图形式定义中相同。

我们可以用与 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 相同的方式表示 $P(\tau_{u/v})$ 的数据，但现在不再需要线性形式 T。

3. 主定理

3.1. 庞加莱多项式定理的铺垫。 本节讨论第 1 节中的定理 1。用我们已经建立的术语来说，该定理指出， $\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{j\geq 0}\langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j$ 可以写成箭图形式，也就是说

$$\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t} a^{A\cdot\mathbf{d}} t^{T\cdot\mathbf{d}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1}+\ldots+d_{u+v} \\ d_{u+1},\ldots,d_{u+v} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{u+v}, d_1+\ldots+d_u],$$

其中，线性形式 S， A， T，和 Q 是根据 M（即三穿孔平面）的第一和第二构形空间，以几何方式计算得出的。在精确陈述定理之前，我们需要先确立约定并证明一些简单的引理。第4节专门用于证明该定理。

给定一个有理辫结 $\tau_{u/v}$，回想一下，我们有 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$，由一个弧拉格朗日$\alpha_{u/v}$和两个竖直拉格朗日子流形 l_A和 l_I组成，它们位于 M（即三穿孔平面） $\mathbb{C}\setminus\{X^+, X^-, Y\}$中。令 $\mathcal{G}^1_{u/v}$为来自 $\alpha_{u/v}\cap(l_A\cup l_I)$ 的 $u+v$交点。我们将看到， S， A，和 T 可以看作线性形式，而 Q则可看作自由 $\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 上的二次型，该模配备了优选基 $\mathcal{G}^1_{u/v}$。

现在，我们需要为交点（或者等价地，为 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$的基）建立一些记号。

定义 3.1. 设 $\mathcal{G}^1_{u/v} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{u+v}\}$，其中点 $\xi_1, \ldots, \xi_u$ 来自 $\alpha_{u/v}\cap l_A$，而 $\xi_{u+1}, \ldots, \xi_{u+v}$ 来自 $\alpha_{u/v}\cap l_I$。约定沿着 l_A 或 l_I （即虚方向）向“上”移动时，给交点加上递增的下标。将交点的这种标准排序 称为交点的 ξ_i。

在第5节中，我们将使用交点的另一种排序方式，但除非另有说明，均假定采用标准排序。我们回顾定义 2.6，但现在使用新的记号。

定义 3.2. 将 $\xi_1, \ldots, \xi_u$（即来自 $\alpha_{u/v}\cap l_A$ 的交点）称为活跃交点。此外，将 $\xi_{u+1}, \ldots, \xi_{u+v}$（即来自 $\alpha_{u/v}\cap l_I$ 的交点）称为非活跃交点。

回想一下，这些名称源于这样一个事实： l_A 和 l_I 分别称为活动轴和非活动轴。

回到线性形式和二次型，事实证明，我们只需要考察它们作用于 ξ_i 的 $\mathbb{N}$-线性组合（其中 $0\in\mathbb{N}$）。如果 $d_1\xi_1+\ldots+d_{u+v}\xi_{u+v}\in\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 与所有

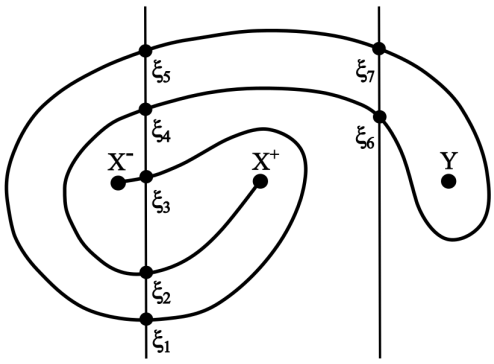


图 7. $\mathcal{D}(^{\mathcal{T}}5/2)$，其中的 ξ_i 按照标准约定标注。

$d_i \in \mathbb{N}$，我们将把这看作一个点 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots\ldots, d_{u+v}) \in \mathbb{N}^{u+v}$。正如从 $\mathcal{P}(^{\mathcal{T}}u/v)$ 的箭图形式所预期的那样，这些$\mathbf{d}$ 将对应于生成函数的指标。

定义 3.3. 令 $\mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v} \subset \mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 为所有满足全部 $d_i \in \mathbb{N}$ 的 $d_1\xi_1 + \ldots + d_{u+v}\xi_{u+v} \in \mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的集合。

由于 $S, A,$ 和 T 是自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 上的线性形式，只需在各个基元 ξ_i 上定义它们。我们将记作 $S_i = S(\xi_i)$， A 和 T 也类似。因此，对于 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{u+v}$，当我们写作 $S \cdot \mathbf{d}$ 时，我们指的是

$$S \cdot \mathbf{d} = S(\sum_{i=1}^{u+v} d_i\xi_i) = S_1d_1 + \ldots + S_{u+v}d_{u+v}.$$

由于 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 上的二次型可以视为 $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 上的线性形式，因此只需在 $\xi_i \cdot \xi_j \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 上定义 Q。特别地，我们有

$$Q\left(\sum_{i=1}^{u+v} d_i\xi_i\right) = \sum_{1\le i,j\le u+v} Q_{ij}d_id_j = \sum_{i=1}^{u+v} Q_{ii}d_i^2 + \sum_{1\le i<j\le u+v} 2Q_{ij}d_id_j,$$

其中 $Q_{ij} = Q_{ji} = Q'(\xi_i \cdot \xi_j)$，而 Q' 是 $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 上对应的线性形式。此外，这就是我们在箭图形式中所说的 $\mathbf{d} \cdot Q \cdot \mathbf{d}^T$ 的含义。

此外，我们将看到， S， A， T， 和 Q 的所有输出都是整数，因此就我们的目的而言，我们可以把它们看作表现得如同线性形式和二次型的函数 $\mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v} \to \mathbb{Z}$。

在用同态和环路来定义 S、 A、 T，以及 Q 之前，我们希望找到一种方法，将带色 HOMFLY-PT 复形的生成元约化为$\mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$的元素。回想一下，在 [36], 中，Wedrich 给出了一种比较生成元分次的方法

in 有理辫结的 j–带色 HOMFLY-PT 复形，其生成元是 j-元组

$$\overline{x} = (x_1, ..., x_j) \in (w_1 \cap \alpha) \times ... \times (w_k \cap \alpha) \times (u_1 \cap \alpha) \times ... \times (u_{j-k} \cap \alpha),$$

其中，我们省略了 $\alpha_{u/v}$的 u/v 下标。等价地，这些x 是 $\mathcal{D}^{k,j-k}(\tau_{u/v})$ 中拉格朗日子流形的交点。第 2.4 节介绍了如何计算生成元 x 与 x' 之间的分次差。

定义 3.4. 对于如上所述的有理辫结的带色 HOMFLY-PT 复形的一个生成元 $x = (x_1, ..., x_j)$，令 $c(x_i)$ 表示将 w_i或 u_i 分别视为 l_A 或 l_I 本身时得到的 ξ_l 。换言之，如果将 $w_1, ..., w_k$ 折叠为 l_A，并将 $u_1, ..., u_{j-k}$ 折叠为 l_I，那么每个 x_i 都会折叠为 $l_A \cap \alpha$ 或 $l_I \cap \alpha$上的一个点 ξ_l，而 $c(x_i)$ 就是这个点。

现在，我们可以用这个记号定义一个对本节非常有用的函数。

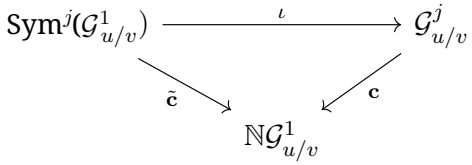
定义 3.5. 令 $\mathcal{G}^j_{u/v}$ 为所有生成元 $x = (x_1, ..., x_j)$ 的集合，这些生成元属于 $\tau_{u/v}$ 的 j-带色 HOMFLY-PT 复形（因此 k 的范围是从 0 到 j），则定义函数$\mathbf{c}$：
$\bigcup_{j\geq 0} \mathcal{G}^j_{u/v} \to \mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$，其中

$$\mathbf{c}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{j} c(x_i) = \sum_{l=1}^{u+v} d_l \xi_l \in \mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$$

若$x \in \mathcal{G}^j_{u/v}$，这意味着 $d_1 + ... + d_{u+v} = j$。

这个函数显然是满射。此外，回想一下， $\mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 中的这个点可以写成一个 $(u+v)$ 元组 $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_{u+v}) \in \mathbb{N}^{u+v}$。
注。 上面定义的集合 $\mathcal{G}^j_{u/v}$ 对应于 $T^j(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 的显然的基，即 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的 j 重张量积。特别地，对应于 x 的基元素是 $c(x_1) \otimes ... \otimes c(x_j)$。因此，$\mathbf{c}$ 的定义域是 $T(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}) = \bigoplus_{j\geq 0} T^j(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 的自然（无限）基。

同时考虑 $\mathrm{Sym}^j(\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v})$ 的自然基，即 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的 j 重对称积，由 ξ_i 的对称张量给出。我们将此基记为 $\mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v})$。注意存在一个单射 $\iota : \mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v}) \to \mathcal{G}^j_{u/v}$ 以及一个双射 $\tilde{\mathbf{c}} : \bigcup_{j\geq 0} \mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v}) \to \mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$，使得（取 $\mathbf{c}$ 与 $\tilde{\mathbf{c}}$ 的显然限制）



交换，其中，对于写成使得 $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_j \le u+v$ 的 $d = \xi_{i_1} \cdot \xi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_j} \in \mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v})$，我们有 $\iota(d) = (x_1, \ldots, x_j)$，对于 $c(x_m) = \xi_{i_m}$ 对于 $1 \le m \le j$（即 $c(x_i)$ 的下标是非递减的），并且

$$\tilde{\mathbf{c}}(d) = \sum_{m=1}^{j} \xi_{i_m} = \sum_{l=1}^{u+v} d_l \xi_l \in \mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}.$$

再次，我们可以将（d_1，……，d_{u+v}）写作 $\sum_{l=1}^{u+v} d_l \xi_l \in \mathbb{N}\mathcal{G}^1_{u/v}$。现在，若令 $d \equiv \iota(d) \in \mathcal{G}^j_{u/v}$，我们可以定义以下集合。

定义 3.6。给定 $d \in \mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v})$，定义 G_d 为集合

$$G_{\overline{d}} = \{\overline{x} \in \mathcal{G}^j_{u/v} : \mathbf{c}(\overline{x}) = \mathbf{c}(\overline{d})\}.$$

另一种写法是，G_d 是满足以下条件的 x 所组成的集合：$\mathbf{c}(x) = \tilde{\mathbf{c}}(d)$。

接下来，我们将证明关于 G_d 中生成元的 q-分次差的一些引理。为此，我们将使用公式

$$q(\overline{x}) - q(\overline{y}) = \left(2\Phi^j + (1-2j)\left(\Psi^j_{X^+} - \Phi^j\right) + \sum_{W \in \{X^-, Y\}} \left(\Psi^j_W - \Phi^j\right) \right) ([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}])$$

该公式来自第 2.4 节。不过，事实证明，在研究 G_d 时，我们只需要使用右侧表达式的一小部分。

引理 3.7。对于每个 $d \in \mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v})$，$G_d$ 都有唯一一个分次最低的生成元，其 q-分次由 d 给出。

证明。我们首先考虑如下情形：$x = (x_1, \ldots, x_j)$ 与 $y = (y_1, \ldots, y_j)$ 满足对所有 $i \notin \{m, m+1\}$（当 $m+1 \le k$ 或 $m \ge k$ 时）有 $x_i = y_i$。换言之，除了在 l_A 或 l_I 的两个平行副本的某个邻域内之外，它们看起来相同。由于 x、$y \in G_d$，我们必然有 $x_m = y_{m+1}$ 与 $x_{m+1} = y_m$。因此，该邻域看起来如图 8 中的图像所示，其中我们假设红点来自 x，蓝点来自 y（不失一般性），从而若 $c(x_m) = c(y_{m+1}) = \xi_i$ 且 $c(x_{m+1}) = c(y_m) = \xi_j$，则相对于标准排序有 $i > j$。于是，我们为计算 $q(x) - q(y)$ 所需要的环路 γ_x、$\gamma_y \subset \mathrm{Conf}^j(M)$ 由所有 $x_i = y_i$（当 $i \notin \{m, m+1\}$ 时）处的常值环路，以及随后图 8 中所示的一对绿色路径给出。我们可以将其视为交换红点与蓝点；我们将此称为矩形移动。由于该环路不绕行三个穿孔点中的任何一个，唯一的非零贡献来自 $2\Phi^j$，于是我们得到

$$q(\overline{x}) - q(\overline{y}) = 2\Phi^j([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}]) = 2.$$

因为与此环路对应的辫是辫群生成元 $\sigma_m \in \mathrm{Br}_j$.

任意两个 $\overline{x}, \overline{y} \in G_{\overline{d}}$ 都可以通过有限次这类变换相互关联，因此我们看到，存在唯一一个 $x \in G_d$，其 q 分次最低；它是通过将 l_A 侧和 l_I 侧的所有交点滑动，使状态从左下到右上依次填满而得到的。换言之，使用

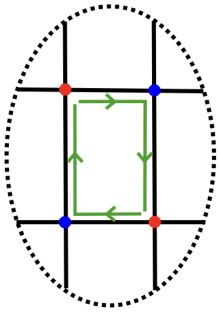
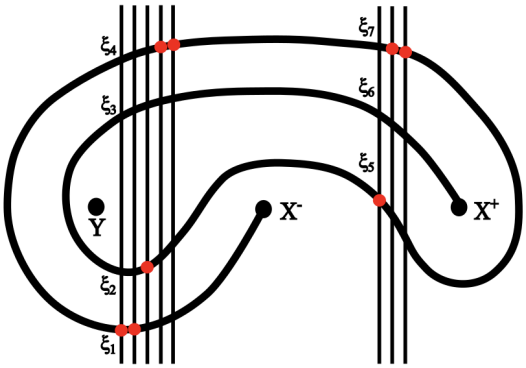


图 8. 矩形移动，如引理 3.7 的证明中所用

ξ_i的标准排序，我们证明了， G_d 中 q分次最低的元素由唯一的 $(x_1, \ldots, x_j)$ 给出，其中 $\mathbf{c}(x_i)$ 的下标对 $1 \leq i \leq j$ 非递减。这正是 d。□

下面说明这d 在一个具体例子中的样子。

例子。 考虑 $\tau_{4/3}$。下图展示如何按照标准排序标记交点 ξ_i。此外，它给出了 G_d中最低的 q-分次配置d，使得$\mathbf{c}(d) = 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_4 + \xi_5 + 2\xi_7$，其中交点由红点给出。因此， $j = 8$ 与 $d = (x_1, \ldots\ldots x_8)$ ，其中 $c(x_1) = c(x_2) = \xi_1$， $c(x_3) = \xi_2$，$c(x_4) = c(x_5) = \xi_4$， $c(x_6) = \xi_5$，以及 $c(x_7) = c(x_8) = \xi_7$。



接下来, 我们考虑 G_d 中所有元素的 q-分次如何相互关联。

引理 3.8. 给定 G_d，其中 $d = (\iota \circ \mathbf{c}^{-1})(\sum_{i=1}^{u+v} d_i\xi_i)$ 对于 $\tau_{u/v}$，我们有

$$\sum_{\overline{x} \in G_{\overline{d}}} q^{(q(\overline{x}) - q(\overline{d}))} = \begin{bmatrix} d_1 + \ldots + d_u \\ d_1, \ldots, d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1} + \ldots + d_{u+v} \\ d_{u+1}, \ldots, d_{u+v} \end{bmatrix}.$$

此外， G_d 中所有生成元的 a分次和 t分次都相同。

证明。 正如我们在引理 3.7 的证明中所见， G_d 中的所有元素都可以通过有限序列的矩形移动彼此关联，如图 8 所示；这些移动不会涉及三个穿孔点，因此对于任意 x， $y \in G_d$，我们得到

$$\begin{aligned} q(\overline{x}) - q(\overline{y}) &= 2\Phi^j([\gamma_{\overline{x},\overline{y}}]) \\ a(\overline{x}) - a(\overline{y}) &= 0 \\ t(\overline{x}) - t(\overline{y}) &= 0 \end{aligned}$$

因为 $\left(\Psi_V^j - \Phi^j\right)([\gamma_{x,y}]) = 0$ 对每个 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$都成立。这就证明了引理的第二部分。

对于第一部分，这归结为一个简单的组合问题。两个 q-多项式系数分别来自 $u \times k$ 和 $v \times (j-k)$ 网格；这些网格由 k 个 l_A 的平行副本和 $j-k$ 个与 α 相交的 l_I 的平行副本得到。由于求和遍历某个G_d中的生成元，这些生成元的权重 k 都相同，因此每个 x 都可以拆分为 (x_A, x_I)，其中$x_A = (x_1, \ldots, x_k)$ 和 $x_I = (x_{k+1}, \ldots, x_j)$ 分别对应活跃侧和非活跃侧上的交点。我们有

$$q^{(q(\overline{x})-q(\overline{d}))} = q^{(q(\overline{x}_A)-q(\overline{d}_A))} q^{(q(\overline{x}_I)-q(\overline{d}_I))},$$

因为矩形移动只涉及活跃侧或非活跃侧内部的变化（两侧之间不会混合），所以来自每一侧的分次差彼此独立。因此，只需证明

$$\sum_{\overline{x} \in G_{\overline{d}}} q^{(q(\overline{x})-q(\overline{d}))} = \begin{bmatrix} j \\ d_1, \ldots, d_u \end{bmatrix}$$

对于 $k = j$ 的情形。在此情形下，注意 $\mathbf{c}(d) = \sum_{i=1}^{u+v} d_i \xi_i$ ，其中 $d_i = 0$ 对 $i > u$。由此，我们得到一个双射

$$\begin{aligned} G_{\overline{d}} &\longleftrightarrow \mathcal{S}_j^u(d_1, \ldots, d_u) \\ \overline{x} &\longmapsto \sigma(\overline{x}), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{S}_j^u(d_1, \ldots, d_u)$ 是长度为 $j = k$、含有 d_1 1、 d_2 2.....以及 d_u 个 u 的序列集合（如定义 2.2 所给出），而 $\sigma(x)$ 是其第 i 项为 $\sigma(x)_i = n$ （若 $c(x_i) = \xi_n$）的序列。回想一下，在引理 3.7 的证明中，我们看到，在一次矩形移动中从红点滑向蓝点的过程会产生 q-分次差 2；由此不难看出

$$q(\overline{x}) - q(\overline{d}) = 2|\{(m,n) : m < n \text{ and } \sigma(\overline{x})_m > \sigma(\overline{x})_n\}| =: 2\,\mathrm{inv}(\sigma(\overline{x}))$$

因为 $\mathrm{inv}(\sigma(x))$ 是从 x 到 d 所需的矩形移动次数。因此，我们得到

$$\sum_{\overline{x} \in G_{\overline{d}}} q^{(q(\overline{x})-q(\overline{d}))} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j^u(d_1,\ldots,d_u)} q^{2\,\mathrm{inv}(\sigma)} = \begin{bmatrix} j \\ d_1, \ldots, d_u \end{bmatrix},$$

最后一个等式中我们使用了命题 2.3。 □

现在，我们在 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 上定义一个序，这将在全文中发挥作用。下文中，当具体的分数 u/v 无关紧要时（即为任意 $\tau_{u/v}$ 定义事物时），我们将写作 α，而不是 $\alpha_{u/v}$。

定义 3.9. 令 $\mathbf{r}\colon [0,1] \to \alpha$ 为 α 的常速参数化，且没有临界点，并满足 $\mathbf{r(0)} = X^-$ 和 $\mathbf{r(1)} = X^+$。对于 $\xi_i, \xi_j \in \mathcal{G}^1_{u/v}$，若$\xi_i = \mathbf{r}(t_0)$ 和 $\xi_j = \mathbf{r}(t_1)$，且 $t_0 < t_1$，则称 $\xi_i \prec \xi_j$。

换句话说，如果我们将弧 $\alpha_{u/v}$ 从 X^- 定向到 X^+，那么若 ξ_i “先于”ξ_j，就有 $\xi_i \prec \xi_j$。

接下来，我们将仔细定义本节所需的同态和环路。它们与第 2.4 节中的对象密切相关，但简单得多。事实上，我们只需要定义在 $\pi_1(\mathbf{Conf}^j(M))$ 上、针对 $j \in \{1,2\}$ 的同态。

回忆一下，我们在第 2.4 节中定义了同态 $\Psi^j_V, \Phi^j\colon \pi_1(\mathbf{Conf}^j(M)) \to \mathbb{Z}$，其中 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$，它们由复合给出

$$\Psi^j_V : \pi_1(\mathrm{Conf}^j(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^j(\mathbb{C} \setminus V)) \to \pi_1(\mathrm{Conf}^{j+1}(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_{j+1} \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z},$$

and

$$\Phi^j : \pi_1(\mathrm{Conf}^j(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^j(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_j \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}.$$

对于我们想要的第一类同态，设 $W \subseteq \{X^+, X^-, Y\}$。然后，我们将$\Psi_W\colon \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\Psi_W := \frac{1}{2} \sum_{V \in W} \Psi^1_V.$$

第二类同态是 $\Phi\colon \pi_1(\mathbf{Conf}^2(M)) \to \mathbb{Z}$，它被定义为恰好是$\Phi := \Phi^2$。

现在，我们必须明确地定义我们希望在同态中考虑的环路。首先，考虑 $\xi_i, \xi_j \in \mathcal{G}^1_{u/v}$ 并假设对于 $l_i, l_j \in \{l_A, l_I\}$有 $\xi_i \in \alpha \cap l_i$和 $\xi_j \in \alpha \cap l_j$。我们将把 $\gamma_{i,j}\colon [0,1] \to M$ 定义为路径拼接。设 $\eta^1_{i,j}$ 为沿 α 从ξ_i 到 ξ_j的路径。接下来，若 $l_i = l_j$，即若 ξ_i 和 ξ_j 均为活动或非活动交点，则将$\bar{\eta}^1_{j,i}$ 定义为沿 l_i从 ξ_j 回到 ξ_i 的路径；若 $l_i \neq l_j$，则取 $\bar{\eta}^1_{j,i}$ 为从ξ_j 到 l_j 的顶部交点（按标准排序为 ξ_u 或 ξ_{u+v}）的路径，随后经简单滑动到达 l_i，再沿 l_i 回到 ξ_i。

定义 3.10。给定 ξ_i，$\xi_j \in \mathcal{G}^1_{u/v}$，通过连接 $\gamma_{i,\,j} = \eta^1_{i,\,j} \cdot \bar{\eta}^1_{j,\,i}$，定义 $\gamma_{i,\,j}\colon [0,1] \to M$。

图 9 展示了其中一个环路的例子。在本节的主定理中，我们需要使用形如 $\gamma_{i,\,j}$ 的环路，其中 ξ_j 是相对于 $\prec$ 而言的 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的最大元。我们将使用特殊记号来标示这个交点。

D定义 3.11. 令 ξ_ω 表示相对于 $\prec$而言的 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 的最大元 .

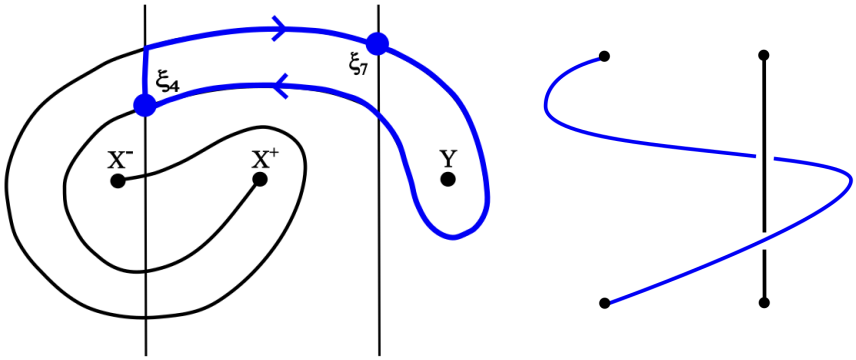


图 9. 左：为 $\tau_{5/2}$ 绘制了环路 $\gamma_{7,\,4}$。右：用于计算 $\Psi_Y([\gamma_{4,7}])$ 的 Br_2 中的辫子图像，其中蓝色线段来自该环路，黑色线段来自 Y。注意，这给出了 $\Psi_Y([\gamma_{7,4}]) = 1$。

换言之，ξ_ω 是距离穿孔点 X^+ 最近的交点。利用这一点，我们可以引入定理 3.14 中使用的简化记号，其中取环路 $\gamma_{i,\,j}$，其中 $j = \omega$。

定义 3.12. 定义 $\gamma_i : [0,1] \to M$ 为环路 $\gamma_i := \gamma_{i,\,\omega}$。

在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中定义我们所需的环路稍微棘手一些。对于 $\xi_i,\ \xi_j \in \mathcal{G}^1_{u/v}$，我们有 $\xi_i \cdot \xi_j \in \mathrm{Sym}^2(\mathcal{G}^1_{u/v})$，因此可以应用 ι 得到 $\iota(\xi_i \cdot \xi_j) = (x_1,\ x_2) \in \mathcal{G}^2_{u/v}$，使得 $c(x_1)$ 的下标（即 i 或 j）小于或等于 $c(x_2)$ 的下标。因此，如果二者都位于活跃侧或非活动侧，x_2 位于 x_1 的右侧，且可能在其上方；否则，x_1 位于活跃侧，而 x_2 位于非活动侧。现在，$(x_1,\ x_2)$ 也是 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的一个点，我们将用它们作为 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中环路的基点。此外，回忆第 2.4 节中的结论：$\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路由 M 中的两个不相交环路，或由一对交换起点和终点的路径给出；这两种情况都会出现。

根据上述设定，我们现在描述用于定义 $\tilde{\gamma}_{i,j} = (\sigma^1_{i,j}, \sigma^2_{i,j}) : [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$ 的路径，其中 $\sigma^1_{i,j}$ 和 $\sigma^1_{i,j}$ 是两条分量路径。令 $x_i \in \{x_1, x_2\}$ 为满足 $c(x_i) = \xi_i$ 的那个，并以类似方式定义 x_j。首先，我们定义路径 $\eta^2_{i,j;j} : [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$，它从 (x_1, x_2) 到 (x'_1, x'_2)，其中 $x_j = x'_j$ 且 $c(x'_i) = \xi_{j.}$。将 $x_j = x'_j$ 视为 M 中的一个固定点（位于 ξ_j 的左侧或右侧），并考虑我们已经定义过的沿着 α 的路径 $\eta^1_{i,j}$，但将其视为从 x_i 到 x'_i。如果 $\eta^1_{i,j}$ 与 x_j 不相交，则定义 $\eta^2_{i,j;j} = (\eta^1_{i,j}, x_j)$，其中 x_j 是位于 x_j 的常值路径。否则，如果 $\eta^1_{i,j}$ 与 x_j 相交，我们可以将其视为连接 $\eta^1_{i,j} = \rho^1_{i,j} \cdot \rho^1_{j,i'}$，其中 $\rho^1_{i,j}$ 是从 x_i 到 $x_j = x'_j$ 的路径，而 $\rho^1_{j,i'}$ 是从 $x_j = x'_j$ 到 x'_i 的路径。在这种情形下，我们取 $\eta^2_{i,j;j} = (\rho^1_{i,j}, \rho^1_{j,i'})$。下图展示了这两种情形，假设 x_i 和 x_j 都位于活跃侧或非活跃侧；其中一方处于活跃侧而另一方处于

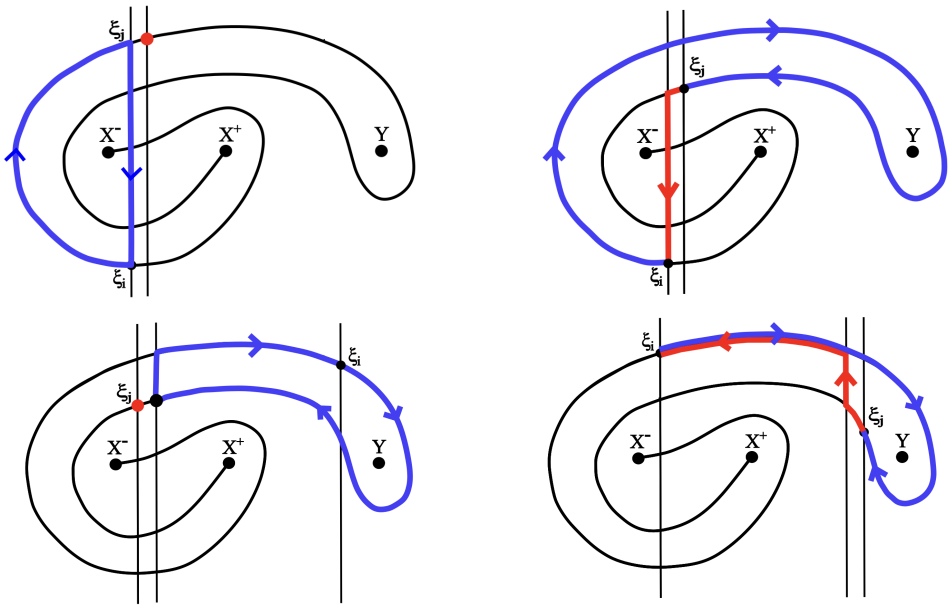
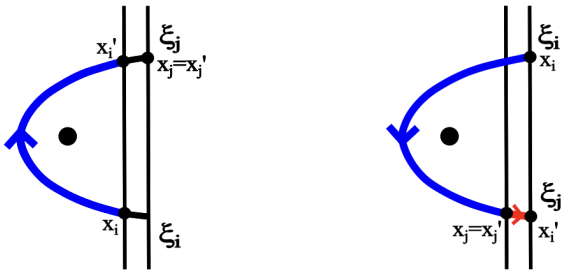


图 10. $\tilde{\gamma}_{i,\ j}$的示例，用于$\tau_{5/2}$展示定义中描述的四种不同情形。请注意，左侧两幅图中的 $\Phi([\tilde{\gamma}_{i,j}])$为 0，而右侧两幅图中的值为 1。

非活跃。



我们将$\tilde{\gamma}_{i,j}$定义为$\eta^2_{i,j;j}$与另一条路径$\bar{\eta}^2_{j;i,j} = (\bar{\sigma}^1_{i,j}, \bar{\sigma}^2_{i,j})$的连接：这条路径从$(x'_1, x'_2)$出发，沿着 $[0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$，其中 $c(x'_1) = c(x'_2) = \xi_j$，再返回$(x_1, x_2)$。如果$\eta^1_{i,j}$与$x_j$不相交，那么$\bar{\eta}_{j;i,j} = (\bar{\eta}^1_{j,i}, x_j)$，其中$\bar{\eta}^1_{j,i}$仍是之前那条路径，但视为从 x'_i 到 x_i。否则，我们取$\bar{\eta}_{j;i,j} = (x_j, \bar{\eta}^1_{j,i})$，从而得到$\mathrm{Conf}^2(M)$中的一个良定义的环。

定义3.13. 将 $\tilde{\gamma}_{i,\ j}\colon\ [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$ 定义为路径拼接 $\tilde{\gamma}_{i,\ j}\colon = \eta^2_{i,\ j;j} \cdot \bar{\eta}^2_{j;i,\ j}$。

这些路径的示例请参阅图 10：上方两幅图给出 x_i 与 x_j 均位于活跃侧时的环路，下方两幅图给出它们位于相反两侧时的环路。

注意。我们将稍微滥用记号，用 $(\Psi_W+\Phi)([\gamma_{i,j}])$ 代替 $\Psi_W([\gamma_{i,j}])+\Phi([\tilde{\gamma}_{i,j}])$。

继续之前，不妨想一想 $\tilde{\gamma}_{i,j}=(\sigma^1_{i,j},\sigma^2_{i,j})$ 与 $\gamma_{i,j}$ 有何关联。特别是，$\sigma^1_{i,j}$ 和 $\sigma^2_{i,j}$ 可以看作 M 中的路径，由定义很容易看出 $\sigma^1_{i,j}+\sigma^2_{i,j}=\gamma_{i,j}$ 在 $H_1(M)$ 中成立。我们也可以由同构 $H_1(M)\cong H_1(\mathrm{Sym}^2(M))$ 得到这一结论。

现在，我们可以陈述本节的主定理。下面公式中的 $\delta_{i,A}$ 等表达式应读作

$$\delta_{i,A}=\begin{cases}1, & \xi_i \text{ is an active intersection point}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

而对于非活跃交点，$\delta_{i,I}$ 也类似。此外，在证明中，我们用 Z 表示 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中三个穿孔点 X^+,X^-,Y 的中间那个，因此 δ_{Z,X^+} 也应视为一个克罗内克δ：当 $Z=X^+$ 时取 1，否则取 0。需要注意的是，$Z=X^+$ 等价于 $\tau_{u/v}$ 具有 OP 定向。

定理 3.14。在总体分次（q,a,t）存在某种平移的情况下，我们可以将 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$表示为

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\dots,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} q^{S\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t}a^{A\cdot\boldsymbol{d}}t^{T\cdot\boldsymbol{d}}\begin{bmatrix}d_1+\dots+d_u\\ d_1,\dots,d_u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{u+1}+\dots+d_{u+v}\\ d_{u+1},\dots,d_{u+v}\end{bmatrix} \times X[d_1+\dots+d_{u+v},d_1+\dots+d_u], \tag{8}$$

其中，S、A、T和 Q 由以下公式计算得出：

$$\begin{cases}S_i=\Psi_{\{X^\pm,Y\}}([\gamma_i])+\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}-\delta_{i,I}\delta_{\omega,A}\\ A_i=2\Psi_{X^+}([\gamma_i])+\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}-\delta_{i,I}\delta_{\omega,A})\\ T_i=-S_i=-\Psi_{\{X^\pm,Y\}}([\gamma_i])-\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}+\delta_{i,I}\delta_{\omega,A}\\ \begin{cases}Q_{ii}=(\Psi_{\{X^-,Y\}}-3\Psi_{X^+})([\gamma_i])+2\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,I}\delta_{\omega,A}-\delta_{i,A}\delta_{\omega,I})\\ Q_{ij}=Q_{ii}+(\Phi-2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}])+\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{j,I}-\delta_{j,A}\delta_{i,I}).\end{cases}\end{cases}$$

换言之，$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$可以写成箭图形式，其线性形式和二次型由$\tau_{u/v}$的几何计算得出。还应注意，定理 3.14 中的 δ 项对于在任意平移下计算 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$而言过于复杂，但采用这种写法是为了确保对于所有$\tau_{u/v}$，$S_\omega=A_\omega=T_\omega=Q_{\omega\omega}=0$。等价地，对于所有 j，由拉格朗日交点 x 与$\mathbf{c}(x)=j\xi_\omega$产生的带色 HOMFLY-PT 复形中的生成元，其（q，a，t）分次均为（0，0，0）。

在证明该定理之前，我们将先证明 Q 的公式会得到一个对称矩阵。

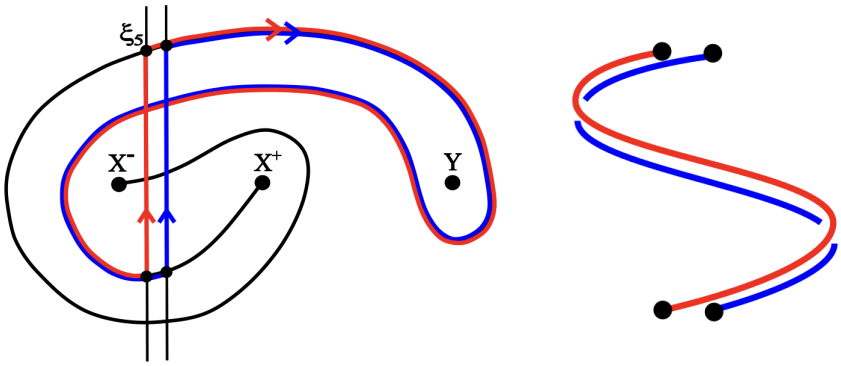


图11。 左：环路$\gamma^2_{5,\ 5}$对应$\tau_{5/2}$。右：相应的辫，位于 Br_2 中，对应$\gamma^2_{5,\ 5}$

3.2. **对称性** Q。 定理 3.14 中的公式以尽可能便于计算的方式呈现。特别地，我们可以将 Q 的对角线视为一个线性形式，该形式可以根据 M 中的环路进行计算。不过，我们也可以完全根据 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路来计算 Q，这样将更容易证明 Q 是对称的，即 $Q_{ij} = Q_{ji}$。

这种计算 Q 的新方法所需的同态是 Φ^2 （或仅用 Φ）和 $\Psi^2_{X^+}$。我们保留上标，以强调本小节中的所有内容都发生在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中。

最终，我们将给出一个计算 Q 各项的单一公式，但首先将对角线部分转换到 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 会有所帮助，因此我们先定义计算中用到的环路。为了计算 Q_{ii}，我们将定义一个环路 $\gamma^2_{i,i}\colon [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$，其基点为 $(x_1, x_2) \in \mathcal{G}^2_{u/v}$，使得 $c(x_1) = c(x_2) = \xi_i$。首先，定义路径 $\eta^2_{i;j}$，从 (x_1, x_2) 到 (y_1, y_2)，其中 $c(y_1) = c(y_2) = \xi_j$ 由 $\eta^2_{i;j} = (\eta^1_{i,j}, \eta^1_{i,j})$ 给出，可将其视为路径 $\eta^1_{i,j}$ 的两个平行副本，按自然方式选取，使其不与 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 的对角线 Δ 相交。这意味着其中一条路径始终位于另一条路径前方，因此如果它们转弯奇数次，就会交换起点和终点所在的垂直线。这是因为该路径在 Δ 的补集中仅在同伦意义下定义，所以各分量路径不会彼此交叉。为了定义 $\gamma^2_{i,i}$，我们尤其需要 $\eta^2_{i;\omega}$。

现在，我们通过取两条平行副本$\bar{\eta}^1_{\omega,\ i}$来定义路径 $\bar{\eta}^2_{\omega;i}$，即 $\bar{\eta}^2_{\omega;i} = (\bar{\eta}^1_{\omega,\ i},\ \bar{\eta}^1_{\omega,\ i})$，其中将两条路径彼此推开，以避开对角线 Δ。

定义3.15。 环路$\gamma^2_{i,\ i}$定义为$\gamma^2_{i,\ i} = \eta^2_{i;\omega} \cdot \bar{\eta}^2_{\omega;i}$的连接。

直观地说，该环路可视为 γ_i的两条平行副本，并以自然的方式定义，使其避开对角线。在图11中，可以看到$\tau_{5/2}$对应的$\gamma^2_{5,\ 5}$ 这个例子。

接下来，我们需要定义将用于Q的新公式中的一般回路$\gamma^2_{j,i}$。为此，我们将使用$\eta^2_{j,i;i}$（即用于定义$\tilde{\gamma}_{j,i}$的同一条路径）以及 $\eta^2_{i;\omega}$，

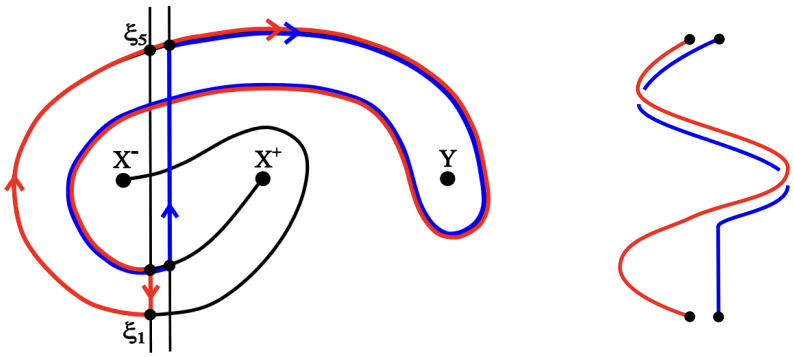


图12. 左：环路 $\gamma^2_{1,\ 5}$。右：对应的辫，属于 Br_2，其中 $\gamma^2_{1,\ 5}$

它刚刚已被定义。我们所需的唯一一条附加路径将记为$\bar{\eta}^2_{\omega;j,i}$，它是 $\bar{\eta}^2_{\omega;i}$的一个轻微推广。区别在于，我们并非取$\bar{\eta}^1_{\omega,i}$的两个平行副本，而是将分量路径定义为$\bar{\eta}^1_{\omega,i}$ 与$\bar{\eta}^1_{\omega,j}$ 的副本，并按自然方式选取，从而在$\mathrm{Conf}^2(M)$中得到一个良定义的环。

定义3.16. 定义环路 $\gamma^2_{i,\ j}\colon [0,1]\to \mathrm{Conf}^2(M)$，它由以下路径连接而成：$\gamma^2_{i,\ j}:=\eta^2_{i,\ j;j}\cdot \eta^2_{j;\omega}\cdot \bar{\eta}^2_{\omega;i,\ j}$。

图12中给出了一个含有 $i\neq j$ 的例子。

注。 定义3.16与我们定义 $\gamma^2_{i,\ i}$ 的方式一致（相差一个同伦），因为 $\eta_{i,\ i;i}$ 是位于 $(x_1,\ x_2)$ 的常值环路，其中 $c(x_1)=c(x_2)=\xi_i$，并且我们将最终路径记为 $\bar{\eta}^2_{\omega;i}$，但这与 $\bar{\eta}^2_{\omega;i,\ i}$ 相同。

现在，我们已经具备条件，可以给出一个新公式，用 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路来计算 Q。我们将陈述该公式，然后通过证明以下命题来说明它成立。

命题 3.17. 二次型 Q 可由下式计算

$$Q_{ij}=(2\Phi^2-\Psi^2_{X^+})([\gamma^2_{j,i}])+\Delta, \tag{9}$$

其中

$$\Delta=\delta_{Z,X^+}(2\delta_{i,I}\delta_{j,I}\delta_{\omega,A}-2\delta_{i,A}\delta_{j,A}\delta_{\omega,I}+\delta_{i,A}\delta_{j,I}\delta_{\omega,A}+\delta_{i,I}\delta_{j,A}\delta_{\omega,A}-\delta_{i,I}\delta_{j,A}\delta_{\omega,I}-\delta_{i,A}\delta_{j,I}\delta_{\omega,I}),$$

其含义是这与定理 *3.14* 一致。此外，方程（*9*）满足 $Q_{ij}=Q_{ji}$。

本命题的证明将占据本小节余下的篇幅，并分步进行。首先，我们证明对称性。

引理3.18。 利用方程（*9*），可计算得 $Q_{ij}=Q_{ji}$

证明。 首先，我们验证 $\gamma^2_{j,\ i}$ 和 $\gamma^2_{i,\ j}$ 是同调等价的。不失一般性，我们可以假设 $\xi_i \prec \xi_j$，这意味着 $\gamma^2_{j,\ i}$ “回溯”。更准确地说，我们可以将 $\eta^2_{i;\omega}$进一步分解为连接 $\eta^2_{i;j}\cdot\eta^2_{j;\omega}$；这里的回溯指的是一个简单的观察：$\eta^2_{j,\ i;i}\cdot\eta^2_{i;j}\sim\eta^2_{i,\ j;j}$，其中 $\sim$表示这些路径在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中同调等价（它们的差构成一个边界圈）。这意味着

$$\gamma^2_{j,i}=\eta^2_{j,i;i}\cdot\eta^2_{i;j}\cdot\eta^2_{j;\omega}\cdot\bar\eta^2_{\omega;j,i}\sim\eta^2_{i,j;j}\cdot\eta^2_{j;\omega}\cdot\bar\eta^2_{\omega;j,i}=\eta^2_{i,j;j}\cdot\eta^2_{j;\omega}\cdot\bar\eta^2_{\omega;i,j}=\gamma^2_{i,j},$$

其中我们还用到了 $\bar\eta^2_{\omega;j,\ i}=\bar\eta^2_{\omega;i,\ j}$。由于 Φ^2 和 $\Psi^2_{X^+}$ 是取值于 $\mathbb{Z}$的同态，它们经由 $H_1(\mathrm{Conf}^2(M))$分解，因此 $\gamma^2_{j,\ i}$ 和 $\gamma^2_{i,\ j}$ 同调等价意味着

$$(2\Phi^2-\Psi^2_{X^+})([\gamma^2_{j,i}])=(2\Phi^2-\Psi^2_{X^+})([\gamma^2_{i,j}]).$$

证明只需注意到，Δ 关于 i 和 j是对称的。 □

在继续证明命题 3.17 的最后一步之前，我们需要先证明以下引理。最终，这条引理将使我们能够把方程（9）改写成一种与定理 3.14 中 Q_{ij} 的公式相比较的形式。

引理 3.19. 作为 $H_1(\mathit{Conf}^2(M))$中的1-循环，

$$\gamma^2_{j,i}=\tilde\gamma_{j,i}+\gamma^2_{i,i}. \tag{10}$$

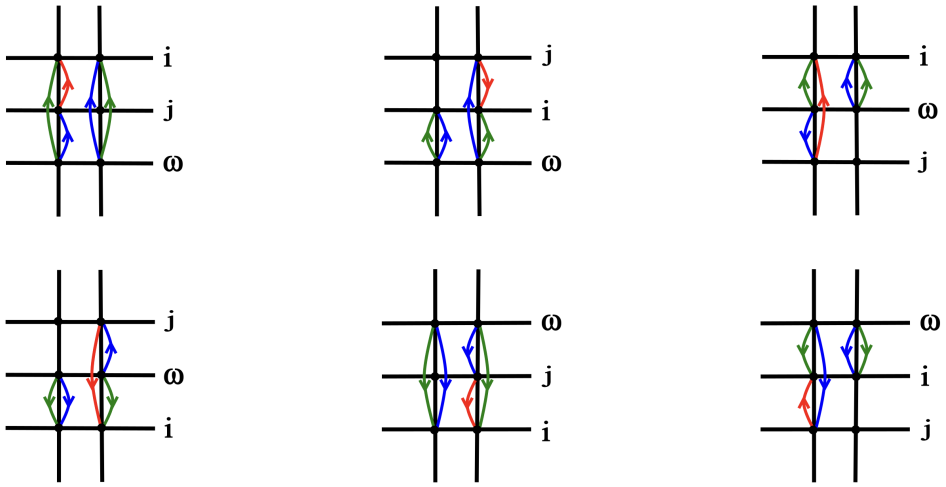
证明。 首先，我们证明

$$(\bar\eta^2_{i;j,i})^*\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i}\sim\eta^2_{i;\omega}\cdot\bar\eta^2_{\omega;i,i}=\gamma^2_{i,i}, \tag{11}$$

其中 $(\bar\eta^2_{i;j,\ i})^*$ 是 $\bar\eta^2_{i;j,\ i}$的逆向路径。换言之，作为 $H_1(\mathrm{Conf}^2(M))$，中的 1-链，我们有 $(\bar\eta^2_{i;j,\ i})^*=-\bar\eta^2_{i;j,\ i}$。要证明（11）成立，只需证明在 $H_1(\mathrm{Conf}^2(M))$ 中 $(\bar\eta^2_{i;j,\ i})^*+\eta^2_{\omega;j,\ i}-\bar\eta^2_{\omega;i,\ i}=0$。

如果 ξ_i、ξ_j 和 ξ_ω 都是活跃或非活跃交点，那么这三条路径只位于竖直拉格朗日子流形上；如果它们并非全都活跃或非活跃，则可以验证，不在竖直拉格朗日子流形上的路径分支会相互抵消。现在，我们明确考察 ξ_i、ξ_j 和 ξ_ω 都是活跃或非活跃交点时的情形。下文展示了它们沿相应竖直拉格朗日子流形彼此之间可能的六种排列情形（标记为 k 的水平拉格朗日子流形上的两个交点 x_1、x_2 满足 $c(x_1)=c(x_2)=\xi_k$）。对于这六种情形，我们都将 $(\bar\eta^2_{i;j,\ i})^*$ 画成红色

（不包括常值分支），$\eta^2_{\omega;j,\,i}$ 画成蓝色，$\bar{\eta}^2_{\omega;i,\,i}$ 画成绿色。



在每种情况下，我们都看到，翻转绿色箭头（取 $-\bar{\eta}^2_{\omega;i,\,i}$）会导致完全抵消，这证明了 $(\bar{\eta}^2_{i;j,\,i})^{\,*}+\eta^2_{\omega;j,\,i}-\bar{\eta}^2_{\omega;i,\,i}=0$。现在，我们有

$$\gamma^2_{j,i}=\eta^2_{j,i;i}\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i}\sim\eta^2_{j,i;i}\cdot(\bar{\eta}^2_{i;j,i}\cdot(\bar{\eta}^2_{i;j,i})^*)\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i}=(\eta^2_{j,i;i}\cdot\bar{\eta}^2_{i;j,i})\cdot((\bar{\eta}^2_{i;j,i})^*\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i}),$$

而在 $H_1(\mathrm{Conf}^2(M))$ 中，上面的最后一项可拆分为一和。特别地，

$$(\eta^2_{j,i;i}\cdot\bar{\eta}^2_{i;j,i})\cdot((\bar{\eta}^2_{i;j,i})^*\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i})=(\eta^2_{j,i;i}\cdot\bar{\eta}^2_{i;j,i})+((\bar{\eta}^2_{i;j,i})^*\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,i}),$$

其中 $\eta^2_{j,\,i;i}\cdot\bar{\eta}^2_{i;j,\,i}=\tilde{\gamma}_{j,\,i}$ 以及 $(\bar{\eta}^2_{i;j,\,i})^{\,*}\cdot\eta^2_{i;\omega}\cdot\eta^2_{\omega;j,\,i}\sim\gamma^2_{i,\,i}$ 由（11）得到，因此引理得证。 □

最后，我们需要检验方程（9）计算出的 Q 是否与定理 3.14 中的结果相同。这样，我们就完成了命题 3.17 的证明；该命题表明，定理 3.14 中的 Q 公式给出了一个对称矩阵。

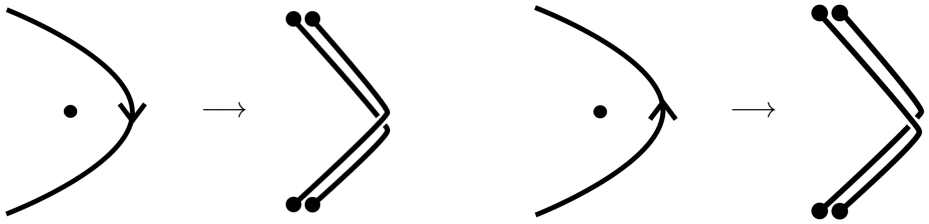
引理 3.20. 方程（*9*）与定理 *3.14* 中 Q的公式一致 .

证明. 首先注意到，定理 3.14 中 Q_{ii} 的公式可以写成

$$Q_{ii}=(\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}}-4\Psi_{X^+})([\gamma_i])+2\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,I}\delta_{\omega,A}-\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}).$$

我们声称 $\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}}([\gamma_i])=\Phi^2([\gamma^2_{i,i}])$。注意，$\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}}([\gamma_i])$计算 γ_i 绕任一穿孔点的次数（带符号）；对于 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路$\gamma^2_{i,\,i}$，绕穿孔点会使 Br_2 中 $\gamma^2_{i,\,i}$ 的辫子图像增加一个单个交叉。例如，下图展示了 γ_i 绕行如何将

穿孔点 i n M 转化为对应于 $\gamma_{i,\,i}^2$ 的二股辫，其中有一个单个交叉 .



我们还可以考虑 $\alpha_{u/v}$ 绕穿孔点向另一侧弯曲的两种情形。在每种情形中，我们都看到，这些路径段对 $\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}}([\gamma_i])$ 和 $\Phi^2([\gamma_{i,i}^2])$ 贡献的符号一致。因此， $\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}}([\gamma_i])$ $= \Phi^2([\gamma_{i,i}^2])$，这里我们还使用了这样的假设：$\alpha_{u/v}$ 已被构造得尽可能“紧”，这意味着在这种情况下，对于 $\gamma_{i,\,i}^2$，辫中只有这些交叉。

此外，每当 γ_i 在 M 中绕着 X^+ 旋转时，环路 $\gamma_{i,\,i}^2$ 都会绕着它旋转两次。由第 2.4 节可知， $\frac{1}{2}\left(\Psi_{X^+}^2 - \Phi^2\right)$ 计算环路在 $\mathsf{Conf}^2(M)$ 中绕着 X^+旋转的次数，这意味着

$$2\Psi_{X^+}([\gamma_i]) = \frac{1}{2}\left(\Psi_{X^+}^2 - \Phi^2\right)([\gamma_{i,i}^2]),$$

因此，综合以上所有内容可得

$$(\Psi_{\{X^+,X^-,Y\}} - 4\Psi_{X^+})([\gamma_i]) = (2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\gamma_{i,i}^2]).$$

现在，注意到 δ 项也相匹配，很容易看出方程（9）与定理 3.14 在 Q 的对角线上一致。

接下来，我们必须检查 Q的非对角线元素是否一致。为此，我们需要用到引理 3.19，它给出

$$(2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\gamma_{j,i}^2]) = (2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\tilde{\gamma}_{j,i}]) + (2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\gamma_{i,i}^2]).$$

因此，

$$Q_{ij} = Q_{ii} + (2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\tilde{\gamma}_{j,i}]) + \delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{j,I} - \delta_{j,A}\delta_{i,I}),$$

其中， δ 项同样可以通过考虑 ξ_i， ξ_j，和 ξ_ω 是活跃交点还是非活跃交点这八种可能情形来求出。现在，我们只需检查

$$(2\Phi^2 - \Psi_{X^+}^2)([\tilde{\gamma}_{j,i}]) = \Phi([\tilde{\gamma}_{j,i}]) - 2\Psi_{X^+}([\gamma_{j,i}]).$$

然而，这立刻可由以下事实推出：$\tilde{\gamma}_{j,\,i}$ 和$\gamma_{j,\,i}$ 绕行 X^+ 的次数相同。由以下事实很容易得到这一结论：如前所述，$\sigma_{j,\,i}^1 + \sigma_{j,\,i}^2 = \gamma_{j,\,i}$ 在 H_1（M）中，其中$\tilde{\gamma}_{j,\,i} =$ $(\sigma_{j,\,i}^1,\ \sigma_{j,\,i}^2)$。这意味着

$$\Psi_{X^+}([\gamma_{j,i}]) = \frac{1}{2}\left(\Psi_{X^+}^2 - \Phi^2\right)([\tilde{\gamma}_{j,i}]).$$

□

由此完成了命题 3.17 的证明，它告诉我们，无论是通过定理 3.14 还是方程（9）来计算 $Q_{ij} = Q_{ji}$，结果都相同 Q。

3.3. **专门化到 HOMFLY-PT 多项式**。在第 2.5 节中，我们简要讨论了 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ $= \sum_{j\geq 0}\langle \tau_{u/v}\rangle_j$ 采用箭图形式的含义。在 [12], 中，我们需要使用这类生成函数，因为我们的主要结果将以完全去范畴化的 HOMFLY-PT 不变量来表述。因此，我们在下文给出定理 3.14 关于 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 的等价版本。

命题 3.21。我们可以将 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 写成箭图形式，即

$$(12)\qquad \sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}} a^{A\cdot\mathbf{d}} q^{\mathbf{d}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{d^t}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1}+\ldots+d_{u+v} \\ d_{u+1},\ldots,d_{u+v} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{u+v}, d_1+\ldots+d_u],$$

其中 S、A 和 Q 由以下公式给出：

$$\begin{cases} S_i = \Psi_{\{X^{\pm},Y\}}([\gamma_i]) + \delta_{i,A}\delta_{\omega,I} - \delta_{i,I}\delta_{\omega,A} \\ A_i = 2\Psi_{X^+}([\gamma_i]) + \delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{\omega,I} - \delta_{i,I}\delta_{\omega,A}) \\ \begin{cases} Q_{ii} = (\Psi_{\{X^-,Y\}} - 3\Psi_{X^+})([\gamma_i]) + 2\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,I}\delta_{\omega,A} - \delta_{i,A}\delta_{\omega,I}) \\ Q_{ij} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}]) + \delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{j,I} - \delta_{j,A}\delta_{i,I}). \end{cases} \end{cases}$$

证明。该定理可由定理 3.14 直接推出，因为

$$\langle \tau_{u/v}\rangle_j = \langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j\Big|_{t\mapsto -1},$$

这意味着 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 可由 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 通过令 $t=-1$ 得到。我们还需注意的是，作为向量，$T=-S$，因此当令 $t=-1$ 时，$\mathcal{P}(\mathcal{T}_{u/v})$ 中相关的部分变为 $q^{S\cdot\mathbf{d}}(-1)^{T\cdot\mathbf{d}} = (-q)^{S\cdot\mathbf{d}}$。□

正如我们在第 3.2 节中所见，我们也可以将 Q 写成一个单一公式：

$$Q_{ij} = (2\Phi^2 - \Psi^2_{X^+})([\gamma^2_{j,i}]) + \Delta.$$

现在，我们开始证明定理 3.14。

4. 主定理的证明

定理 3.14 的证明在于说明，按照定理陈述中的公式计算得到的 (2)，对每个 j 都给出正确的 $\langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j$。由于我们只关心分次整体平移若干单位后的庞加莱多项式 $\langle\langle \tau_{u/v}\rangle\rangle_j$，因此只需证明

即，一旦将 j 色复形的生成元与求和式中的各项配对

$$\sum_{\substack{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},...,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}\\ d_1+...+d_{u+v}=j}} q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}t^{T\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+...+d_u\\ d_1,...,d_u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{u+1}+...+d_{u+v}\\ d_{u+1},...,d_{u+v}\end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{u+v},d_1+...+d_u], \tag{13}$$

我们有 (13) 给出了所有生成元之间正确的分次差，这些分次差可以用 Wedrich 在 [36] 中的方法计算得到。

首先，回顾若 $d\in\bar{G}_d$ 是 G_d 中 q-分次最低的唯一生成元，且 $\mathbf{c}(d)=\sum_{i=1}^{u+v}d_i\xi_i$，则我们可以用 $\mathbf{d}=(d_1,...,d_{u+v})\in\mathbb{N}^{u+v}$. 表示 $\bar{d}$。因此，(13) 中对应于 d 的单项由下式给出

$$q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}t^{T\cdot\mathbf{d}}\times X[j,d_1+...+d_u],$$

并且对 G_d 中所有项求和由下式给出

$$q^{S\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t}a^{A\cdot\mathbf{d}}t^{T\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+...+d_u\\ d_1,...,d_u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{u+1}+...+d_{u+v}\\ d_{u+1},...,d_{u+v}\end{bmatrix}\times X[j,d_1+...+d_u],$$

由引理 3.8。因此，我们可以将 (13) 视为对所有 $d\in\mathrm{Sym}^j(\mathcal{G}^1_{u/v})$ 的 $\bar{d}=\iota(d)$ 求和。此外，现在由引理 3.8 可得，我们只需比较这些生成元 d 与 d' 中任意两者之间的 q-、a- 和 t-分次差，其中它们分别表示集合 G_d 与 $G_{d'}$ 的最低 q-分次生成元，因为这些集合内的点具有由量子多项式系数编码的分次差。

现在，假设 $\bar{d}\in G_d$ 和 $\bar{d'}\in G_{d'}$ 分别是各自生成元集合中 q-分次最低的唯一生成元。正如我们刚才所解释的，尽管 d 和 d' 是 j 元组，但它们由 $\mathbf{c}(\bar{d})=\sum_{i=1}^{u+v}d_i\xi_i$ 中的 d_i 所给出的 $(u+v)$-元组唯一确定（d' 的情况类似）。现在，我们将它们视为向量

$$\bar{d}\mapsto\vec{d}=\langle d_1,...,d_{u+v}\rangle$$
$$\bar{d'}\mapsto\vec{d'}=\langle d'_1,...,d'_{u+v}\rangle.$$

只需证明，定理 3.14 中关于 S,A,T 和 Q 的公式，在 $\vec{d}-\vec{d'}=\pm\langle 0,...0,1,0,...0,-1,0,...,0\rangle$ 时，给出了 d 和 d' 的正确分次差；也就是说，此时 $\vec{d}$ 向量 d 和 d' 对于 $1\le i,j\le u+v(i\neq j)$ 相差 e_i-e_j，其中 e_k 是长度为 $u+v$ 的向量，其第 k 个坐标为 1，其余坐标均为 0。任意的 d 和 d' 都可以通过这些差异构成的有限序列相互关联。

现在，经过简单计算可知，若 $d-d'=e_i-e_j$，则

$$q(\bar{d})-q(\bar{d'})=S_i-S_j+Q_{ii}+Q_{jj}-2Q_{ij}+2\sum_{k=1}^{u+v}d'_k(Q_{ik}-Q_{jk}) \tag{14}$$

$$a(\bar{d})-a(\bar{d'})=A_i-A_j \tag{15}$$

$$t(\bar{d})-t(\bar{d'})=T_i-T_j. \tag{16}$$

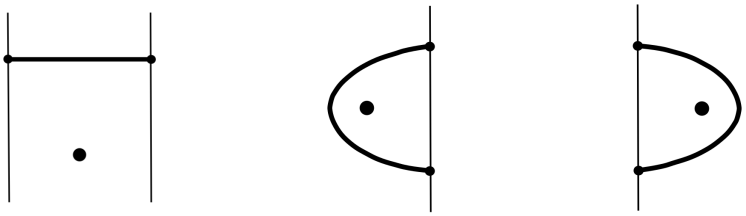


图 13. 定理 3.14 证明中的三个主要情形

事实上，只需考虑这样的情形： i 和 j 对应于 ξ_i， $\xi_j \in \mathcal{G}^1_{u/v}$，其中 ξ_i 和 ξ_j 关于 $\prec$ 序相邻。换言之，我们将每次把点滑动到相邻的交点，以比较 d和 d' 的分次。这将产生三种情形需要考察。具体而言， $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$中相邻的交点通过 α 以图 13 所示的三种方式之一彼此相连；在$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$每种情形下，我们需要证明，若 d 和 d' 满足：对于 ξ_i，$d - d' = e_i - e_j$，且 ξ_j 是该情形所表示的交点，则方程 (14)-(16)给出的分次差与 [36]相同。

第一幅图表示这样的情形：我们通过简单滑动，将活跃侧上的一个点滑动到非活跃侧上与之相邻的点（反之亦然），从而改变生成元的权重。请记住，我们用 Z 表示 $\tau_{u/v}$ 的三个穿孔点中间的那个点；在第一种情形的图中，它由未标记的点表示。另两幅图对应于将一个点滑动到同一侧（活跃侧或非活跃侧）上与之相邻的点的情形，因此权重保持不变。额外的未标记点可以是 X^+、X^-、或 Y，并将标记为 W。

4.1. Conf$^2(M)$ 中的更多环路。请记住，我们将环路 $\gamma_{i,j}$：$[0,1] \to$Conf$^2(M)$（省略波浪号）定义为基于 $\iota(\xi_i\xi_j)$ 的环路，即基于 (x_1, x_2)；当 $c(x_1) = \xi_i$ 且$c(x_2) = \xi_j$ 时如此，而当 $i > j$ 时则反之。如果 ξ_i 和 ξ_j 都是活跃交点或非活跃交点，我们也可以在上述条件下定义基于 (x_2, x_1) 的环路 $\widehat{\gamma_{i,j}}$，其定义规则与 $\gamma_{i,j}$ 相同。图 14 展示了两个例子。这些环路应与图 10 中上方展示的两个环路进行比较。

我们将定义另外两种类型的环路，它们有助于证明我们的定理。定义 $s_{i,\ j}$ 为与 $\gamma_{i,\ j}$ 位于同一点的环路，如图 15 左图所示；类似地，令 $\widehat{s_{i,\ j}}$ 为与 $\widehat{\gamma_{i,\ j}}$ 位于同一点的环路，如同一图的右图所示。

引理 4.1. 如果 ξ_i 和 ξ_j 都是活动交点或非活跃交点，那么

$$\Phi([\gamma_{i,j}]) = \Phi([\widehat{\gamma_{i,j}}]) - 1.$$

证明。 我们将证明该引理，方法是根据 $\gamma_{i,j}$ 的行为，证明 $s_{i,j}\cdot\gamma_{i,j} \sim \widehat{\gamma_{i,j}}$或 $\widehat{s_{i,j}}\cdot\widehat{\gamma_{i,j}} \sim \gamma_{i,\ j}$，其中 $\sim$ 表示在 Conf$^2(M)$ 中同调等价。只需证明

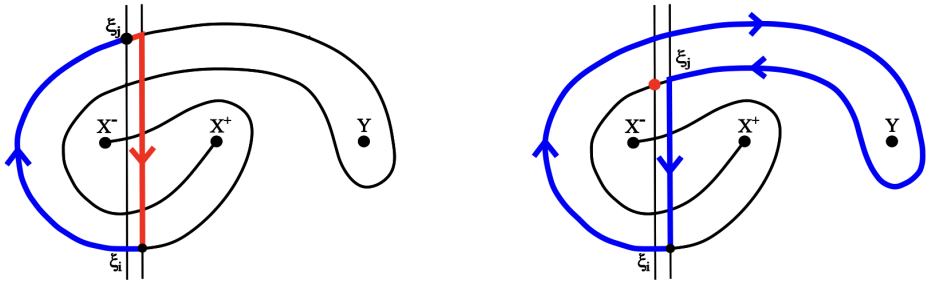


图 14. 两个例子 $\widehat{\gamma_{i,\ j}}$ 环路，对应$\tau_{5/2}$

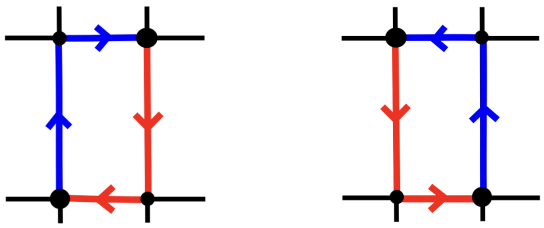
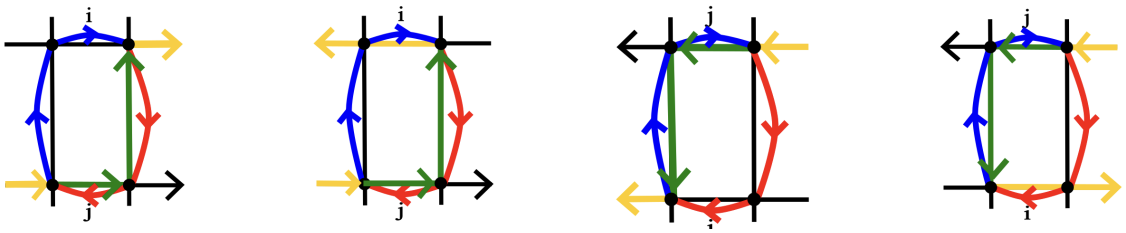


图 15. 环路 $s_{i,\ j}$ （左）和 $\widehat{s_{i,\ j}}$ （右）

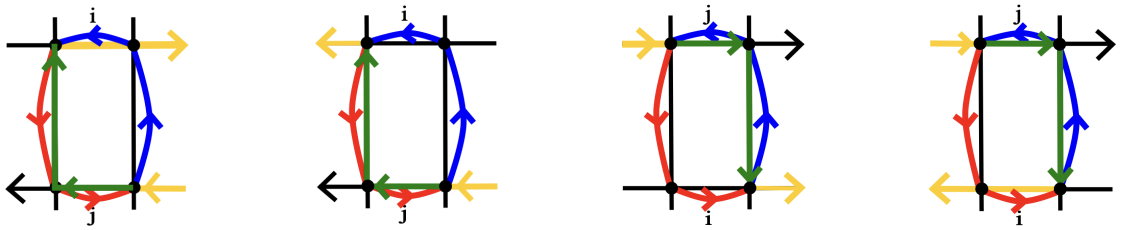
这一点，因为 Φ 通过同调分解，因此由于 $\Phi([s_{i,j}]) = 1$ 和$\Phi([\widehat{s_{i,j}}]) = -1$，该引理便得证。

环路 $\widehat{\gamma_{i,\ j}}$ 和$\gamma_{i,\ j}$ 仅在两个竖线及其与 α 相交的部分附近有所不同，而$s_{i,\ j}$ 和 $\widehat{s_{i,\ j}}$ 完全包含在这样的邻域中，因此我们只需考察该处发生的情况。我们将考虑$\gamma_{i,\ j}$在 α 与两条竖线相交处（局部水平的部分）的所有可能定向，同时还需考虑 $i < j$ 还是 $j < i$。因此，共有八种可能情形；其中四种有$s_{i,\ j} \cdot \gamma_{i,\ j} \sim \widehat{\gamma_{i,\ j}}$，另外四种有 $\widehat{s_{i,\ j}} \cdot \widehat{\gamma_{i,\ j}} \sim \gamma_{i,\ j}$。

首先，我们考虑$s_{i,j} \cdot \gamma_{i,j} \sim \widehat{\gamma_{i,j}}$这四种情形。这些是$\gamma_{i,j}$分裂为两条非平凡路径的情形。$\gamma_{i,j}$ 的路径分支分别着为黄色和绿色，而$s_{i,j}$ 的分支着色方式与图 15中相同。在每种情形中，都容易看出$s_{i,j} \cdot \gamma_{i,j} \sim \widehat{\gamma_{i,j}}$。



其余四种情形满足$\widehat{s_i}_{,j}\cdot\widehat{\gamma_i}_{,j}\sim\gamma_{i,j}$，如下所示。我们用黄色和绿色表示$\widehat{\gamma_i}_{,j}$的分支，并用红色和绿色表示$\widehat{s_i}_{,j}$的分支，与之前的做法类似。



由于所有情形都满足 $\Phi([\gamma_{i,j}])=\Phi([\widehat{\gamma_{i,j}}])-1$，引理得证。 □

根据同态 Φ 的定义，它可经由 $H_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}))$ 分解，因此，对于在 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中同调等价的环路， Φ 必须相等。事实上，这是显然的，因为 Φ 的像群与 $H_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}))$ 同构。在证明这三种情形时，这一观察将有助于计算诸如 $\Phi([\gamma_{i,k}])-\Phi([\gamma_{j,k}])$ 和 $\Phi([\gamma_{k,i}])-\Phi([\gamma_{k,j}])$ 这样的值。

现在，我们逐一考虑图 13 所示的三种情形，以证明定理 3.14。

4.2. 情形1的证明。现在，我们考虑图 13 左侧所示的情形，其中我们要比较由简单滑动关联的两个生成元之间的分次差。具体而言，我们要证明定理 3.14 预测的分次差与 [36] 给出的分次差一致。

引理 4.2. 设 ξ_i 和 ξ_j 在 $\prec$ 序中相邻，且一个位于活跃侧，另一个位于非活动侧，如图 *13* 最左侧的图所示。那么，如果 $\vec{d}-\vec{d'}=e_i-e_j$，定理 *3.14* 中的公式便给出了 d 与 d' 之间正确的分次差。

证明。 设 $d=(x_1,\overline{\ldots\ldots},\ x_k,\ x_{k+1},\ \ldots\ldots,\ x_{u+v})$ 是权重为 k 的生成元，我们要将其分次与 $d'=(x'_1,\ \ldots\ldots,\ x'_{k-1},\ x'_k,\ \ldots\ldots,\ x'_{u+v})$（权重为 $k-1$的生成元）进行比较，其中 $\vec{d}-\vec{d'}=e_i-e_j$，且 $i\le u$、$j>u$，并且 ξ_i 和 ξ_j 在 $\prec$序中相邻。因此，若 $l\le\sum_{k\le i}d'_k$ 或 $l>\sum_{k\le j-1}d'_k+1$，则 $x'_l=x_l$；若$\sum_{k\le i}d'_k<l<\sum_{k\le j-1}d'_k+1$，则 $x'_l=x_{l+1}$；而若 $l=\sum_{k\le j-1}d'_k+1$，则 x_l 满足 $c(x_l)=\xi_j$。

从几何上看，我们可以将 d 的 $l=\sum_{k\le i}d_k$ 中的点 x_l 从活跃侧滑动到非活跃侧上相邻的点，从而得到 d'。首先，我们需要根据 [36] 考虑分次差应当如何变化。将点从活跃侧滑动到非活跃侧的规则要求该点位于第 k 条竖线上，以使 k 的权重符合要求，因此首先需要将 x_l （如段落开头所示）滑动到第 k 条竖线上。我们可以一步一步完成这项操作：在将点 x_l 向右滑动的同时，依次将 x_m 对于 $l<m\le k$ 向左滑动；每一步都会使 q 分次差增加 -2，而 a 和 t 分次差均增加 0（见图 8 以及

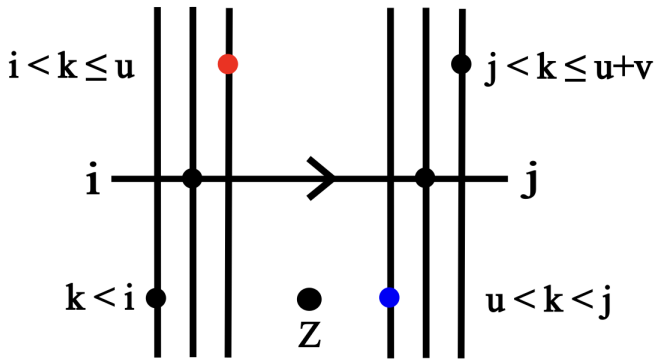


图 16. 引理 4.2 证明中所考察主要情形的几何设定

引理 3.7 的证明中对其的应用）。然后，我们可以通过一次简单滑动，将该点从活跃侧滑动到非活跃侧，这会产生第 2.4 节所述的分次平移。接着，我们必须将该点滑动到非活跃侧上的适当位置，以得到 d'；每一步都会使 q 分次差增加 $+2$，而其他分次差均不变。请记住，我们用 Z 表示活跃侧与非活跃侧之间的点。

图 16 有助于直观理解上一段所述内容。边上的标记表示活跃交点和非活跃交点的下标，其中包含了将 ξ_i 和 ξ_j 通过简单滑动关联起来的 α 部分。红色点和蓝点分别表示在上述过程中对 q 分次差贡献 -2 或 $+2$ 的点的类型。

从代数角度看，上述过程表明 [36] 给出

$$\begin{cases} q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 1 - 2\sum_{i<k\leq u} d'_k + 2\sum_{u+1\leq k<j} d'_k \\ a(\overline{d}) - a(\overline{d'}) = 0 \\ t(\overline{d}) - t(\overline{d'}) = -1 \end{cases} \qquad \text{if } Z \in \{X^-, Y\}$$

and

$$\begin{cases} q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 1 - 2j - 2\sum_{i<k\leq u} d'_k + 2\sum_{u+1\leq k<j} d'_k \\ a(\overline{d}) - a(\overline{d'}) = 1 \\ t(\overline{d}) - t(\overline{d'}) = -1 \end{cases} \qquad \text{if } Z = X^+.$$

现在，我们需要检验定理 3.14 中的公式是否也给出这些分次差。我们先检验 $Z \in \{X^-, Y\}$ 的情形。

根据定理 3.14，我们显然得到 $S_i - S_j = 1$、$A_i - A_j = 0$ 和 $T_i - T_j = -1$，因为对任意 $W \subset \{X^+, X^-, Y\}$ 有 $\Psi_W([\gamma_i]) = \Psi_W([\gamma_j])$。由此也得到 $Q_{ii} = Q_{jj}$。此外，$\Phi([\gamma_{i,j}]) = 0$，故 $Q_{ij} = Q_{ji} = Q_{jj} = Q_{ii}$。因此，我们已经有了正确的 a- 与 t-分次

差，这与方程（15）和（16）相符，而公式 (14) 给出

$$q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{u+v} d'_k(Q_{ik} - Q_{jk}).$$

因此，只需证明

$$Q_{ik} - Q_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } k \le i \text{ or } k \ge j \\ -1 & \text{if } i < k \le u \\ 1 & \text{if } u+1 \le k < j \end{cases}$$

现在，我们证明 $Q_{ik} - Q_{jk} = 0$ 当 $k \le i$。若 $k \ge j$，论证类似。定理 3.14 中关于 Q的公式给出

$$Q_{ik} - Q_{jk} = Q_{ii} - Q_{jj} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,i}]) - (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,j}]).$$

不难看出，根据它们在 M 和 $\mathsf{Conf}^2(M)$ 中作为环路的定义，$\gamma_{k,\,i} \sim \gamma_{k,\,j}$，这意味着 $\Psi_{X^+}([\gamma_{k,i}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{k,j}])$，并且 $\Phi([\gamma_{k,i}]) = \Phi([\gamma_{k,j}])$。然后，由于$Q_{ii} = Q_{jj}$，我们得到 $Q_{ik} - Q_{jk} = 0$。

现在，若 $i < k \le u$，我们希望证明 $Q_{ik} - Q_{jk} = -1$。如前所述，在这种情形以及我们接下来要考虑的情形中，Ψ_{X^+} 对两个环路的贡献相同，因此我们将略去这些项，因为它们会相互抵消。这意味着

$$Q_{ik} - Q_{jk} = \Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]).$$

对于这种情形，可以验证 $\gamma_{k,\,j} \sim \widehat{\gamma_{k\,i,}}$，因此 $\Phi([\gamma_{k,j}]) = \Phi([\gamma_{k,i}]) + 1$，从而得到$\Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]) = -1$。因此，我们得到 $Q_{ik} - Q_{jk} = -1$。若 $\xi_i \prec \xi_j \prec \xi_k$，则同样成立。

如果 $u+1 \le k < j$，那么我们也可以采用类似的方法。此处可得 $\gamma_{k,\,i} \sim \widehat{\gamma_{k\,j,}}$，因此$\Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]) = 1$，所以确实可以得到 $Q_{ik} - Q_{jk} = 1$。

接下来，我们需要讨论当 $Z = X^+$ 时会发生什么。之前的大部分工作在这里仍然适用，因为关于 Φ 和 Ψ_{X^+} 值之差的一切结论仍然成立，但也有一些细微变化。特别是，Q_{ii} 和 Q_{jj} 不再相等，因此我们需要在 Q 的非对角线元素中使用 $\delta_{Z,\,X^+}(\delta_{i,\,A}\delta_{j,\,I} - \delta_{j,\,A}\delta_{i,\,I})$ 项。

容易验证，在这种情况下有 $S_i - S_j = 1$、$A_i - A_j = 1$ 和 $T_i - T_j = -1$，这已经涵盖了 a 和 t 分次。也很容易看出，由于 δ 项，$Q_{jj} = Q_{ii} + 2$ 和 $Q_{ij} = Q_{jj} - 1$。因此，公式 (14) 再次给出

$$q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{u+v} d'_k(Q_{ik} - Q_{jk}),$$

因此，根据我们先前使用 [36], 的方法所做的计算，只需证明

$$Q_{ik} - Q_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{if } k \le i \text{ or } k \ge j \\ -2 & \text{if } i < k \le u \\ 0 & \text{if } u+1 \le k < j \end{cases}$$

定理 3.14 给出

$$Q_{ik} - Q_{jk} = -2 + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,i}]) - (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,j}]) + \delta,$$

其中 δ 表示$\delta_{Z,\ X^+}(\delta_{i,\ A}\delta_{j,\ I} - \delta_{j,\ A}\delta_{i,\ I})$各项之差。现在，我们需要证明这对每个 k都给出正确的值。

若 $k \leq i$，则我们已经知道 $\Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]) = 0$ 以及 $\Psi_{X^+}([\gamma_{k,i}]) - \Psi_{X^+}([\gamma_{k,j}]) = 0$。此外， $\delta = 1$ 由于 ξ_i 和 ξ_k 是活跃交点，而 ξ_j 是非活跃的，所以 $Q_{ik} - Q_{jk} = -1$。类似地，对所有其他可能的 k，我们都可以利用在 $Z \in \{X^-, Y\}$时计算出的 Φ 值之间的相同差值来计算 $Q_{ik} - Q_{jk}$ ，并注意到对所有 k都有$\delta = 1$ 。

最后，请注意，如果我们转而考虑如（即从非活跃侧向活跃侧滑动一个点），这只会翻转所有符号，而这正是我们所预期的。□

因此，我们完成了第一种情形的证明。

4.3. **情形 2 的证明**。 现在，我们转而考虑定理的第二种主要情形，即图 13 中间的图示所示的情形。

引理 4.3。 设 ξ_i 和 ξ_j 关于 $\prec$ 序相邻，且二者都位于活跃侧或非活跃侧，如图 *13* 中间的图示所示。那么，若 $\vec{d} - \vec{d'} = e_i - e_j$，定理 *3.14* 中的公式给出的 d 与 d' 之间的分次差就是正确的。

证明。 我们将深入考察 $d - d' = e_i - e_j$ 与 $1 \leq i < j \leq u$ 时会发生什么。 $j > i$ 的情形也相同，只是符号相反（如前所述）；而如果$u + 1 \leq i$， $j \leq u + v$，那么论证完全相同，只需交换各点所在的活跃侧和非活跃侧。

再一次，我们可以考虑以下子情形：图 13 中用一个点标出的特殊点（我们将其称为 W）同时也是 X^- 或 Y；但此时必须单独处理$W = X^+$ 。和之前一样，我们根据 [36], 检查 d和 d' 的分次差应为何值，然后证明我们的公式也给出了这个结果。注意，若 $d = (x_1, \ldots\ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots\ldots, x_{u+v})$，则 d'满足 $d' = (x'_1, \ldots\ldots, x'_k, x'_{k+1}, \ldots\ldots, x'_{u+v})$，其中 x'_l与 x_l 的关系和我们在情形1开头看到的一样。

从几何上看，我们可以这样理解从 d 到 d' 的变化：首先沿着 α 将 x_l（对于 $l = \sum_{k \leq j-1} d'_k + 1$）滑动到同一竖直拉格朗日量上方的点；若 $W \in \{X^-, Y\}$，这会产生 q^2/t 的分次差（以乘法形式书写），若 $W = X^+$，则产生 a^2/tq^{4j-2} 。之后，我们需要将该点进一步向右滑动，使其位于 d'对应的正确竖线上；为此，每个必须依次向左滑动的 $\sum_{i \leq k < j} d'_k$ 个点都会使 q分次增加 $+2$ 。

与引理 4.2 的证明一样，可以借助图 17 将刚才描述的过程可视化。蓝点表示 $\sum_{i < k < j} d'_k$ 与 ξ_i 之间对分次差有贡献的 ξ_j 个点 $+2$ 。

这次，我们得到

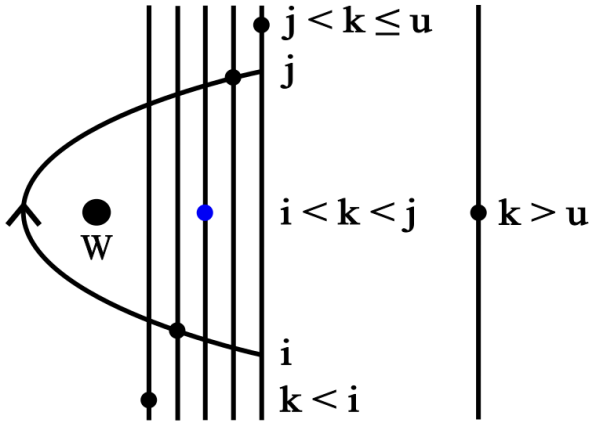


图 17. 引理 4.3 证明中所考虑主要情形的几何设定

$$\begin{cases} q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 2 + 2\sum_{i \le k < j} d'_k \\ a(\overline{d}) - a(\overline{d'}) = 0 \\ t(\overline{d}) - t(\overline{d'}) = -1 \end{cases} \qquad \text{若 } W \in \{X^-, Y\}$$

and

$$\begin{cases} q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 2 - 4j + 2\sum_{i \le k < j} d'_k \\ a(\overline{d}) - a(\overline{d'}) = 2 \\ t(\overline{d}) - t(\overline{d'}) = -1 \end{cases} \qquad \text{若 } W = X^+$$

按照 [36] 中计算分次差的规则。

现在，假设 $W \in \{X^-, Y\}$。定理 3.14 显然给出 $S_i - S_j = 1$、$A_i - A_j = 0$ 和 $T_i - T_j = -1$。这说明 a 和 t 分次差已经正确，因此我们只需考虑 q 分次。我们还得到 $Q_{ii} = Q_{jj} + 1$，接着得到 $Q_{ij} = Q_{jj}$，因为 $(\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{i,j}]) = 0$，这很容易验证。因此，我们得到

$$q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 2 + 2\sum_{k=1}^{u+v} d'_k (Q_{ik} - Q_{jk})$$

根据公式 (14)，因此我们需要证明的是

$$Q_{ik} - Q_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \le k < j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们有 $Q_{ii} - Q_{jj} = 1$，因为 $\Psi_W([\gamma_{i,j}]) = 1$，这意味着

$$Q_{ik} - Q_{jk} = 1 + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,i}]) - (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{k,j}]).$$

显然， $\Psi_{X^+}([\gamma_{k,i}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{k,j}])$，因为 $W \neq X^+$，所以右侧化简为 $1 + \Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}])$。现在，为了比较来自 Φ 的贡献，我们先考虑 $i \leq k < j$ 的情形。在这种情况下，可得 $\gamma_{k,i} \sim \gamma_{k,j}$ 是 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中的 1-链，因此 $\Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]) = 0$，这是因为 Φ 经由 $\mathrm{H}_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C}))$ 分解。对于其他任意 k，可以验证 $\gamma_{k,i} \sim \widehat{\gamma_{k\,j}}$，因此由引理 4.1 可得 $\Phi([\gamma_{k,i}]) - \Phi([\gamma_{k,j}]) = -1$。由此，当 $W \in \{X^-, Y\}$ 时，我们得到了所有正确的 $Q_{ik} - Q_{jk}$ 值。

如果 $W = X^+$，那么我们先前证明的所有关于来自 Φ 、对 $Q_{ik} - Q_{jk}$ 的贡献仍然成立，但我们需要检查来自 Ψ_{X^+} 的差异，这些差异现在不再为 0。首先注意，定理 3.14 给出 $S_i - S_j = 1$、 $A_i - A_j = 2$ 和 $T_i - T_j = -1$。照例，这已经给出了 a和 t分次。然而， Ψ_{X^+} 的贡献给出$Q_{ii} = Q_{jj} - 3$ 和 $Q_{ij} = Q_{jj} - 2$，因此我们有

$$S_i - S_j + Q_{ii} + Q_{jj} - 2Q_{ij} = 2.$$

因此，设定i 而，将公式 (14) 设为 [36], 给出的 $q(d) - q(d')$ 的预测值，我们得到

$$q(\overline{d}) - q(\overline{d'}) = 2 + 2(-2j + \sum_{i \leq k < j} d'_k) = 2 + 2\sum_{k=1}^{u+v} d'_k(Q_{ik} - Q_{jk}),$$

这意味着我们必须有

$$Q_{ik} - Q_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{if } i \leq k < j \\ -2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果定理 3.14 成立。这个 -2 的平移可由显而易见的事实 $\Psi_{X^+}([\gamma_{k,i}]) - \Psi_{X^+}([\gamma_{k,j}]) = -\Psi_{X^+}([\gamma_{i,j}]) = -1$ 来解释，它对 $Q_{ik} - Q_{jk}$ 的贡献为 $+2$ ；但与 $W \in \{X^-, Y\}$ 的情形相比， $Q_{ii} - Q_{jj}$ 少了四，因此这仍使$Q_{ik} - Q_{jk}$ 平移了 -2。□

4.4. **情形 3 的证明**。 最后，我们讨论最后一种情形，如图 13 右侧所示，它可由情形 2 直接得出。

引理 4.4。 设 ξ_i 和 ξ_j 在 $\prec$ 序中相邻，且二者都位于活跃侧或非活动侧，如图 *13* 最右侧的图像所示。那么，如果 $\vec{d} - \vec{d'} = e_i - e_j$，定理 *3.14* 中的公式给出了 d 和 d' 之间的分次差。

证明。 这一情形的证明与引理 4.3 的证明基本相同 . □

至此，我们已经证明了定理 3.14，因为我们已经表明这些公式能够正确地预测分次差。接下来，我们将了解如何减少求和中的指标数量。

5. 减少指标数量

5.1. **划分** $\mathcal{G}^1_{u/v}$。 前两节致力于给出一种几何方法，用以通过在 $u + v$ 指标上定义的求和来计算 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$。然而，在某些条件下减少这些指标的数目可能是有利的，其代价是增加波赫哈默符号。采用第 2.5 节的语言，减少

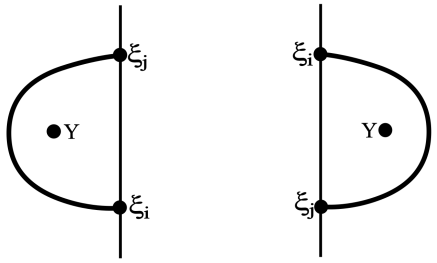


图18. 连续的 ξ_i，$\xi_j \in \alpha \cap l$（对于 $l \in \{l_A, l_I\}$）绕过 Y 的两种情形。

$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$中的指标数目，对应于将其写成几乎箭图形式。在 [12],本文的续篇中，我们将需要使用写成几乎箭图形式的 $P(\tau_{u/v})$的一个版本，以证明有理纽结的主定理，并遵循 Stošić 与 Wedrich 在 [33], 中的一般证明结构，但我们仍需要线性和二次型的几何解释。在本节中，我们将研究如何在我们的几何框架内运作的同时，减少生成函数中的指标数目。我们从下面的引理开始。

引理 5.1. 假设 $\xi_i, \xi_j \in \alpha \cap l$，其中 $l \in \{l_A, l_I\}$，满足 ξ_i和 ξ_j如图*18*（左图或右图）所示相关。那么， $S_i = S_j + 1$, $A_i = A_j$, $T_i = T_j - 1$，以及$Q_{ii} = Q_{jj} + 1$。

对于涉及图18左图的情形，本引理可直接由引理 4.3 证明中的工作得出；右图的情形与之类似。

现在，我们将推广这个引理，使其适用于满足引理 5.1 所述性质的点对集合。为避免使用双重下标，我们将使用 x和 y，其中 x对应于如上所述的 ξ_i 一类的点，而 y对应于如上所述的 ξ_j 一类的点。

引理 5.2. 将 α 与 l_A 和 l_I 的交点集划分为 $\mathcal{G}^1_{u/v} = \mathfrak{X} \sqcup \mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$，其中 $\mathfrak{X} = \{x_1, ..., x_k\}$ 和 $\mathfrak{Y} = \{y_1, ..., y_k\}$ 使得对每个 $i \in \{1, ..., k\}$， x_i和y_i 满足引理 *5.1*的条件，且 k 尽可能大。于是，存在 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 中指标点的一个序，使得 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的数据由下式给出

$$X, \left[\begin{array}{c|c|c} S_1+1 & A_1 & T_1-1 \\ \hline S_1 & A_1 & T_1 \\ \hline S_2 & A_2 & T_2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{11}+1 & Q_{11}+L & Q_{12} \\ \hline Q_{11}+U & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right],$$

其中 U 和 L 表示适当大小的、由1构成的严格上三角矩阵和下三角矩阵。

值得注意的是，正如引理 5.1所提示的，引理 5.2中所示的块依次按 $\mathfrak{X}$、然后 $\mathfrak{Y}$、再然后 $\mathfrak{Z}$ 排序。

证明。 首先请注意，引理 5.1 已经完成了部分工作。只要我们始终对块 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$进行一致排序（这意味着 x_i 和 y_i 必须始终满足引理 5.1 中的性质

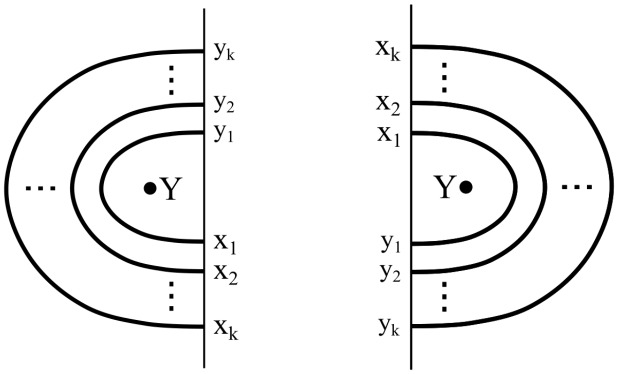


图 19. 引理 5.2 的证明中所需的 x_i 和 y_i 的序

），那么线性形式 $S, A,$ 和 T 就已经处理好了。不过，处理 Q时必须格外小心。事实上，我们将固定一种特定的序（不同于标准排序），以确保得到具有 L 和 U的块。

如图 19 所示，我们希望按由内向外的顺序排列这些点；当穿孔点 Y 位于竖线 l 的左侧时， $x_i's$ 位于底部；而当 Y 位于 l 的右侧时， $y_i's$ 位于底部。我们将明确证明 Y 位于 l 左侧的情形；另一种情形的论证相同。

为了说明 Q 相对于这一序在左上方 2×2 个块中具有所需的结构，只需证明，对于 $i < j$，由某些 x_i、 $x_j \in \mathfrak{X}$ 和 y_i、 $y_j \in \mathfrak{Y}$ 标记的行和列所构成的每个 4×4 子矩阵都具有相同的结构。为简化记号，我们用 i 代替 x_i，用 i' 代替 y_i，并类似地分别用 j 和 j' 代替 x_j 和 y_j。采用这一记号，由这些指标得到的 4×4 块应具有如下形式

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ i' \\ j' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & i' & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} A+1 & C+1 & A & C \\ C+1 & B+1 & C+1 & B \\ A & C+1 & A & C \\ C & B & C & B \end{bmatrix} \end{array}$$

对于某些 $A, B, C \in \mathbb{Z}$。在证明的其余部分，我们将经常不加说明地使用 Q 是对称的这一事实。

设定 $A = Q_{i'i'}$、 $B = Q_{j'j'}$和 $C = Q_{i'j'} = Q_{j'i'}$ 后，我们已由引理 5.1 得知 $Q_{ii} = A + 1$ 和$Q_{jj} = B + 1$ 。接下来，我们确认 $Q_{ij} = Q_{ji} = C + 1$。通过检查交点由 α 连接的四种可能方式（如图 20 所示），很容易验证 $\gamma_{i,\ j} \sim \gamma_{i',\ j'}$ 作为 $\mathsf{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中的环路是成立的。特别地，$\gamma_{i,\ j}$ 和 $\gamma_{i',\ j'}$ 在虚线部分上重合，因此当我们将它们视为 $\mathsf{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中的 1-链时，这部分在 $\gamma_{i,\ j} - \gamma_{i',\ j'}$ 中相互抵消；随后很容易验证剩余部分

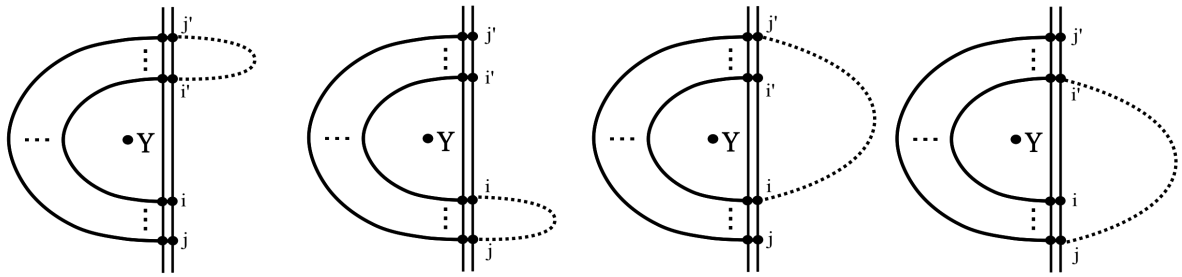


图 20。 α 连接标记为 i、i'、j、和 j'的四个交点的四种可能方式

在每种情况下都是零调同调的。因此，我们有 $\Phi([\gamma_{i,j}]) = \Phi([\gamma_{i',j'}])$。此外，显然 $\Psi_{X^+}([\gamma_{i,j}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{i',j'}])$。由此可得 $Q_{ij} = Q_{ji} = C + 1$，或$Q_{ij} - Q_{i'j'} = 1$，因为 $Q_{ii} - Q_{i'i'} = 1$。

接下来，我们计算 $\Phi([\gamma_{i,i'}]) = \Phi([\gamma_{j,j'}]) = 0$ 和 $\Psi_{X^+}([\gamma_{i,i'}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{j,j'}]) = 0$，于是

$$Q_{ii'} = Q_{i'i} = Q_{i'i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{i,i'}]) = Q_{i'i'} = A.$$

类似地， $Q_{jj'} = Q_{j'j} = B$。还需证明 $Q_{ij'} = Q_{j'i} = C$ 和 $Q_{ji'} = Q_{i'j} = C + 1$。由定理 3.14，有

$$C = Q_{j'i'} = Q_{j'j'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{i',j'}]).$$

显然，通过考察图 20 中的各种情形或使用同调论证，可得 $\Psi_{X^+}([\gamma_{i,j'}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{i',j'}])$ 以及 $\Phi([\gamma_{i,j'}]) = \Phi([\gamma_{i',j'}])$。因此，我们得到

$$Q_{ij'} = Q_{j'i} = Q_{j'j'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{i,j'}]) = Q_{j'i'} = C.$$

为证明 $Q_{ji'} = Q_{i'j} = Q_{ji'} = C + 1$，我们可以使用类似的论证。我们仍有$\Psi_{X^+}([\gamma_{j,i'}]) = \Psi_{X^+}([\gamma_{j',i'}])$，但现在$\gamma_{j,\ i'} \sim \widehat{\gamma_{j'}}_{,\ i'}$，因此引理 4.1给出 $\Phi([\gamma_{j,i'}]) = \Phi([\gamma_{j',i'}])+1$。从这里可以计算出

$$\begin{aligned} Q_{ji'} = Q_{i'j} &= Q_{i'i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i'}]) \\ &= Q_{i'i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j',i'}]) + 1 = Q_{j'i'} + 1 = C + 1, \end{aligned}$$

这就完成了 Q 的上方 2×2 块的证明。

要完成证明，我们需要证明，对于任意 $z \in \mathfrak{Z}$ 和 $1 \le i \le k$，都有 $Q_{iz} = Q_{i'z}$。如果 x_i，y_i，和 z 都位于同一条竖线 $l \in \{l_A, l_I\}$ 上，那么我们首先断言， z 在 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中位于 x_i 和 y_i 两者的上方或下方。否则，由于 α 是 M 中的一条嵌入弧，且 Y 不是端点，我们就会得到 $z \in \mathfrak{X}$ 或 $z \in \mathfrak{Y}$，这与 $z \in \mathfrak{Z}$ 矛盾（我们假设 $k = |\mathfrak{X}| = |\mathfrak{Y}|$ 尽可能大）。现在，很容易看出 $\Phi([\gamma_{i,z}]) = \Phi([\gamma_{i',z}])$，且 $\Phi_{X^+}([\gamma_{i,z}]) = \Phi_{X^+}([\gamma_{i',z}])$，因此 $Q_{iz} = Q_{i'z}$。

如果 z 位于 $l' \ne l \in \{l_A, l_B\}$ 上，那么显然 Φ 和 Ψ_{X^+} 在环路 $\gamma_{i,z}$ 和 $\gamma_{i',z}$ 上也一致。此外，$(\delta_{i,A}\delta_{z,I} - \delta_{i,A}\delta_{z,I})\delta_{Z,X^+} = (\delta_{i',A}\delta_{z,I} - \delta_{i',A}\delta_{z,I})\delta_{Z,X^+}$，因此 $Q_{iz} = Q_{i'z}$。

这就完成了证明： $S, A, T,$ 和 Q 可以拆分为引理中所述的块。□

现在，我们要做的是通过去掉 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 中的一些点，来减少生成函数中的指标数。不过，为此我们需要引入第 2.1 节中介绍的形式为 $(-t^{-1}q^2;q^2)_i$ 的波赫哈默符号。现在，我们通过添加另一个线性形式 K 来扩展生成函数的数据，使得X， $[K|S|A|T]$， Q 对应于生成函数

(17)
$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\dots,\mathbf{d_{m+n}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{m+n}}} q^{S\cdot\mathbf{d}}a^{A\cdot\mathbf{d}}q^{\mathbf{d}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{d^t}}t^{T\cdot\mathbf{d}}(-t^{-1}q^2;q^2)_{K\cdot\mathbf{d}}\begin{bmatrix}d_1+\ldots+d_m\\ d_1,\ldots,d_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{m+1}+\ldots+d_{m+n}\\ d_{m+1},\ldots,d_{m+n}\end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{m+n}, d_1+\ldots+d_m],$$

其中，当然， $\alpha\cap l_A$ 中有 m 个交点对指标有贡献，而 $\alpha\cap l_I$ 中有 n 个这样的交点，因此 $m\le u$ 和 $n\le v$。

现在，我们需要考察一些量子代数，以说明如何从引理 5.2 得到 (17) 中所示形式的生成函数。下面的引理与 [33], 中的引理 4.11 类似，但针对我们的特定情形作了调整。

引理 *5.3*。 *</style}*来自

$$X,\left[\begin{array}{c|c|c|c}0 & S_1+1 & A_1 & T_1-1\\ \hline 0 & S_1 & A_1 & T_1\\ \hline 0 & S_2 & A_2 & T_2\end{array}\right],\left[\begin{array}{c|c|c}Q_{11}+1 & Q_{11}+L & Q_{12}\\ \hline Q_{11}+U & Q_{11} & Q_{12}\\ \hline Q_{21} & Q_{21} & Q_{22}\end{array}\right]$$

and

$$X,\left[\begin{array}{c|c|c|c}1 & S_1 & A_1 & T_1\\ \hline 0 & S_2 & A_2 & T_2\end{array}\right],\left[\begin{array}{c|c}Q_{11} & Q_{12}\\ \hline Q_{21} & Q_{22}\end{array}\right]$$

给出相同的生成函数。

证明。我们从包含三个块的第一组数据开始。对于这三个块，我们将采用 $\mathfrak{X}$， $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Z}$ 的记号，如引理 5.2 所示。假设 $|\mathfrak{X}|=|\mathfrak{Y}|=k$。那么，在生成函数中，我们可以将对应于 $\mathfrak{X}$ 的指标写作 $\vec{b}=(d_1,\ \ldots,\ d_k)$，将对应于 $\mathfrak{Y}$ 的指标写作 $\vec{c}=(d_{k+1},\ \ldots,\ d_{2k})$。为便于阅读，我们将 d_i 重新标记为 b_i，将 d_{k+i} 重新标记为 c_i，于是有 $\vec{b}=(b_1,\ \ldots,\ b_k)$ 和 $\vec{c}=(c_1,\ \ldots,\ c_k)$。因此，我们需要的生成函数相关部分是

$$\sum_{\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{N}^k}\frac{q^{S_1\cdot(\vec{b}+\vec{c})}a^{A_1\cdot(\vec{b}+\vec{c})}q^{(\vec{b}+\vec{c})\cdot Q_{11}\cdot(\vec{b}+\vec{c})^t}t^{T_1\cdot(\vec{b}+\vec{c})}(t^{-1}q)^{b_1+\ldots+b_k}q^{b_1^2+\ldots+b_k^2+2\sum_{i=1}^{k-1}b_{i+1}((b_1+c_1)+\ldots+(b_i+c_i))}}{(q^2;q^2)_{b_1}\ldots(q^2;q^2)_{b_k}(q^2;q^2)_{c_1}\ldots(q^2;q^2)_{c_k}}.$$

现在，引理 2.1 告诉我们，该表达式等于

$$\sum_{\vec{d}\in\mathbb{N}^k}\frac{q^{S_1\cdot\vec{d}}a^{A_1\cdot\vec{d}}q^{\vec{d}\cdot Q_{11}\cdot\vec{d}^t}t^{T_1\cdot\vec{d}}(-t^{-1}q^2;q^2)_{d_1+\ldots+d_k}}{(q^2;q^2)_{d_1}\ldots(q^2;q^2)_{d_k}},$$

$\vec{\quad}$ $\vec{\quad}$其中 $d = b + \vec{c}$，因此 $d_i = b_i + c_i$。最后，我们注意到这正是第二组数据的生成函数中的相应部分，因此证明完毕。□

5.2. **() 的几乎箭图形式** $P(\tau_{u/v})$。结合引理 5.2 和 5.3 可知，我们可以通过几何方法计算 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的 S，A，T，和 Q：只需对来自 $\mathfrak{Y}$和 $\mathfrak{Z}$的交点，执行定理 3.14 中的计算即可。唯一的区别是现在有了线性形式 K。下面我们用一个定理来表述这一结果。

定理 5.4。给定 $\tau_{u/v}$，令 $\mathcal{G}^1_{u/v} = \mathfrak{X} \sqcup \mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$，其中 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{Y}$和 $\mathfrak{Z}$ 的定义与引理 *5.2* 中相同。那么，$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 可以写成几乎箭图形式，即

$$\mathcal{P}(\tau_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N}^{m+n}} q^{S\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} t^{T\cdot\boldsymbol{d}} (-t^{-1}q^2;q^2)_{K\cdot\boldsymbol{d}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_m \\ d_1,\ldots,d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{m+1}+\ldots+d_{m+n} \\ d_{m+1},\ldots,d_{m+n} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{m+n}, d_1+\ldots+d_m],$$

其中 S、A、T和 Q 按照定理 *3.14* 中相同的公式计算，但限制在 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^1_{u/v}$ 中以 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$为基的自由子模上。线性形式 K 由下式给出

$$K_i = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathfrak{Y} \\ 0, & \xi_i \in \mathfrak{Z}. \end{cases}$$

在 [12], 中，我们主要研究 $P(\tau_{u/v})$，而不是 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$，因此我们将简要讨论完全去范畴化生成函数的相应结果。具体而言，我们希望从几何视角考察 $P(\tau_{u/v})$ 的几乎箭图形式。

命题 5.5. 给定定理 *5.4* 中的 $\tau_{u/v}$ 和 $\mathcal{G}^1_{u/v} = \mathfrak{X} \sqcup \mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$，$P(\tau_{u/v})$ 可以写成几乎箭图形式，即

$$P(\tau_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N}^{m+n}} (-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} (q^2;q^2)_{K\cdot\boldsymbol{d}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_m \\ d_1,\ldots,d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{m+1}+\ldots+d_{m+n} \\ d_{m+1},\ldots,d_{m+n} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{m+n}, d_1+\ldots+d_m],$$

其中 S、A、K 和 Q 与定理 *5.4* 中的相同。

最后，我们将给出一些示例，说明如何将定理 3.14 和 5.4 应用于特定的有理辫结。

6. 示例

6.1. **形式为 $\tau_{n/1}$ 的辫结**。现在，我们来确定一族特定的无穷辫结所对应的 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$。辫结 $\tau_{n/1}$ 的闭合给出了 $(2,n)$-环面结与链环。这一类特别容易研究，因为其线性型和二次型具有良好的结构。

我们将采用不同于第 3 节中所用的指标标记方式。在本例中，我们将按照 $\prec$ 序来标记它们，这意味着 $\xi_i \preceq \xi_j$ 当且仅当

$i \le j$。关于此序， Q 存在一种特殊的对称性，因此我们定义以下记号，以便更轻松地用符号描述这一结构。

定义 6.1。给定 $k \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{I}_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i = k \text{ and } j \le k, \text{or } j = k \text{ and } i \le k\}.$$

因此，如果 $(i,j) \in \mathcal{I}_k$，那么矩阵的第 (i,j) 个元素位于第 k 行或第 k 列，但对于 $l > k$，它不在第 l 行或列中。

使用这一记号，我们可以用以下方式表示 $\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的数据。

例 6.2。 对于辫结 $\tau_{n/1}$，给定上文所述的 ξ_i 标记，$\mathcal{P}(\tau_{u/v})$ 的数据为

$$\begin{cases} S_i = n - i + 1 \\ A_i = 0 \\ T_i = i - n - 1 \\ \begin{cases} Q_{ij} = n - k, & if (i,j) \in \mathcal{I}_k, 1 \le k \le n \\ Q_{ij} = 0, & if (i,j) \in \mathcal{I}_k, k = n+1. \end{cases} \end{cases}$$

证明。 首先注意到，当 n 为偶数时，$\tau_{n/1}$ 的状态为 $(UP, Y|X^-|X^+)$；当 n 为奇数时，状态为 $(UP, X^-|Y|X^+)$。对于 $\tau_{n/1}$，不难验证，只要 $\xi_i \prec \xi_j$， $\Phi([\gamma_{i,j}]) = 0$，而且 Z 永远不会是 X^+。由于 $Q_{ij} = Q_{ji}$，并且定理 3.14 中使用的环路均不绕行 X^+，因此，如果 $(i,j),(i',j') \in \mathcal{I}_k$，那么 $Q_{ij} = Q_{i'j'} = Q_{kk}$。因此，我们只需检查线性形式（包括 Q 的对角线）的情况。由观察可知，对于所有 i， $A_i = 0$ 成立，因为 Ψ_{X^+} 在我们所有的环路上均为零；接着，定理便由以下显而易见的观察得出：

$$\Psi_{\{X^-,Y\}}([\gamma_i]) = \begin{cases} n - i, & i \le n \\ 0, & i = n+1 \end{cases}$$

并且上面的 ± 1 部分来自 S 和 T中的 $\delta_{i,\ A}$ 项。 □

例子。 图 21 展示了 $\mathcal{D}(\tau_{8/1})$，其中交点按照本节所述的约定标注。于是，我们有

$$\left[\ S \mid A \mid T\ \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 8 & 0 & -8 \\ 7 & 0 & -7 \\ 6 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Q = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由例 6.2。

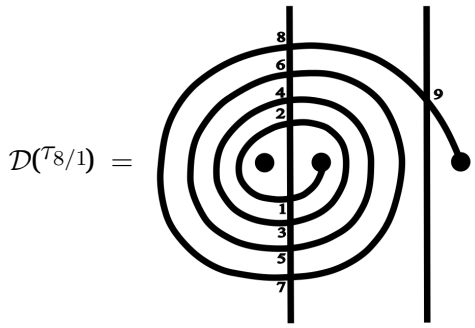


图 21。 $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{8/1})$，其中 $\mathcal{G}^1_{u/v}$ 按 $\prec$排序

如果我们仔细地重新标记交点，就可以应用定理 5.4 来减少指标的数量，代价是增加一些波赫哈默符号。分别考虑 n 为偶数或奇数的情形会有所帮助。

若 n 为偶数，注意到顶部的 $n/2$ 交点从“由内向外”依次标记为偶数 2，4，.....，n，底部的点也从内向外依次标记为 1，3，.....，$n-1$。我们采用的新约定是：底部的 $n/2$ 点从内向外依次标记为 1，2，.....，$n/2$，顶部的 $n/2$ 点则依次标记为 $n/2+1$，$n/2+2$，.....，n。底部的 $n/2$点给出 $\mathfrak{X}$，顶部的 $n/2$点给出 $\mathfrak{Y}$，而 $\mathfrak{Z}$ 是唯一的非活跃交点。然后，应用定理 5.4 可得如下结果。

例6.3。 考虑$\mathcal{T}_{n/1}$，其中 n 为偶数。则， $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{n/1})$由下列数据给出，其中有 $n/2+1$ 个指标来自 $\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$:

$$\begin{cases} K_i=\delta_{i\le n/2} \\ S_i=-T_i=n-2i+1 \\ A_i=0 \\ \begin{cases} Q_{ij}=n-2k, & \text{if } (i,j)\in\mathcal{I}_k,\ 1\le k\le n/2 \\ Q_{ij}=0, & \text{if } (i,j)\in\mathcal{I}_k,\ k=n/2+1, \end{cases} \end{cases}$$

并且 $\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$ 的标签从其原始标签向下回移了 $n/2$。

应当指出，应用 [33], 第4节中的工作，可以提取出一个算法，通过在 k步内将 T^2 应用于$\mathcal{T}_{0/1}$，对$\mathcal{T}_{2k/1}$归纳地计算 $K,S,A,$以及 Q。使用Stošić和Wedrich的这些约定，对于 $K,A,$以及 Q会得到相同的公式，但这将导致 S的公式为 $S_i=-2i+1$。其效果是把 $\mathcal{P}$（$\mathcal{T}_{n/1}$）中的每一个 $\langle\langle\tau_{n/1}\rangle\rangle_j$ 按 q^{nj}缩小，但所有相对分次都相同。

例子。 现在我们再次考虑辫结 $\mathcal{T}_{8/1}$ 的生成函数数据，但这次使用 K 线性形式。在这种情况下， $\mathfrak{Y}$ 中的活跃指标来自图 21 中以偶数标记的交点。线性形式和二次型如下：

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} K & S & A & T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 7 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad Q = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

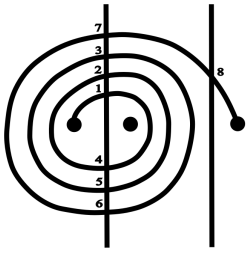
如果 n 是奇数，我们也可以对 $\tau_{n/1}$ 进行类似处理。在这种情况下，将有 $\frac{n+1}{2}$ 个活跃指标来自活跃侧的上方点。按如下方式为交点编号：上方 $\frac{n+1}{2}$ 点依次标为 1，2，..... $\frac{n-1}{2}$，n；下方 $\frac{n-1}{2}$ 点依次标为 $\frac{n+1}{2}$，$\frac{n+3}{2}$，..... $n-1$，两者都再次按由内向外的顺序编号。于是，$\mathfrak{X}$ 由标为 1，..... $\frac{n-1}{2}$ 的点组成，$\mathfrak{Y}$ 由标为 $\frac{n+1}{2}$，$\frac{n+3}{2}$，..... $n-1$的点组成，而 $\mathfrak{Z}$ 包括标为 n 的点以及唯一一个非活跃交点。应用定理 5.4 可得如下结果。

例 6.4。考虑 $\tau_{n/1}$，其中 n 为奇数。那么，$\mathcal{P}(\tau_{n/1})$ 由以下数据给出，其中有 $\frac{n+3}{2}$ 个指标来自 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$:

$$\begin{cases} K_i = \delta_{i \le \frac{n-1}{2}} \\ \begin{cases} S_i = -T_i = n - 2i + 1, & if 1 \le i \le \frac{n-1}{2} \\ S_i = -T_i = 1, & if i = \frac{n+1}{2} \\ S_i = -T_i = 0, & if i = \frac{n+3}{2} \end{cases} \\ A_i = 0 \\ \begin{cases} Q_{ij} = n - 2k, & if (i,j) \in \mathcal{I}_k, 1 \le k \le \frac{n-1}{2} \\ Q_{ij} = 0, & if (i,j) \in \mathcal{I}_k, k \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}, \end{cases} \end{cases}$$

$\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$ 的标签从原标签向下移了 $\frac{n-1}{2}$ 位。 ——

例子。接下来，我们考虑 $\tau_{7/1}$，为 n 为奇数的情况提供一个具体例子。交点按规定的方法标记如下，因此 $\mathfrak{Y}$包含标记为 4、5 和 6 的点，而 $\mathfrak{Z}$ 包含 7 和 8。



在这种情况下，生成函数数据由下式给出

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} K & S & A & T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.2. 缠结$\tau_{10/3}$。 现在，我们考虑辫结 $\tau_{10/3}$。与 $\tau_{n/1}$ 为n 偶数的情况一样，所有交点 $\alpha \cap l_A$ 两两配对，因此根据定理 5.4，我们可以减少$\mathcal{P}(\tau_{10/3})$中的指标数量。特别地，我们可以按 $\mathfrak{x}$和$\mathfrak{y}$对活跃交点进行划分，其中 $\mathfrak{x}$ 是 $\alpha_{10/3} \cap l_A$底部的五个交点， $\mathfrak{y}$ 是顶部的五个交点。定理 5.4 告诉我们，我们只需考虑 $\mathfrak{y}$ 和 $\mathfrak{z}$，它们是由三个非活跃交点组成的集合。

当然，这八个点有许多种排序方式，但我们选择将标准排序限制在 $\mathfrak{y} \sqcup \mathfrak{z}$ 上。见图 22。我们将先给出最终结果，然后介绍其中几项背后的推导过程。

He以下是给定指标排序时生成函数的数据 :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} K & S & A & T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 5 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

还需注意，$\tau_{10/3}$ 具有状态（UP， $Y|X^-|X^+$），这是进行计算所必需的。现在，我们明确展示如何计算 Q_{44} 和 Q_{24}。对于 Q_{44}，

$\mathcal{D}(\tau_{10/3})$ =

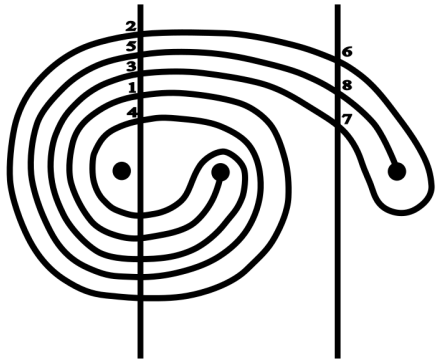
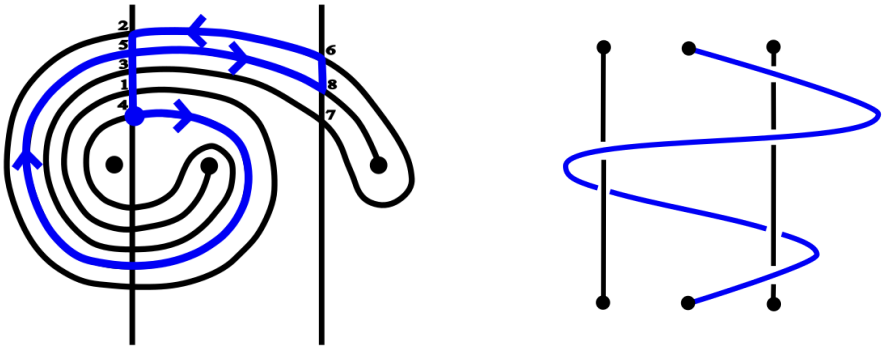
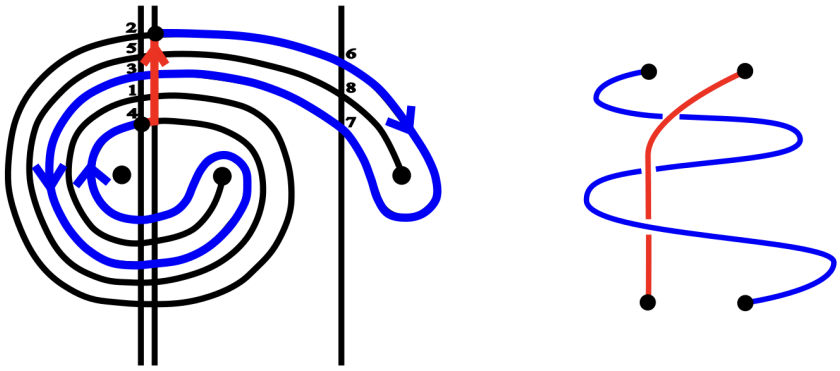


图 22。 $\mathcal{D}(\tau_{10/3})$以及交点的标记，用以标出活跃指标和非活跃指标

我们画出了路径 γ_4，需要据此计算 $\Psi_{\{X^-,Y\}}([\gamma_4])$。旁边是由 γ_4 添加 Y 和 X^- 在 $\mathrm{Conf}^3(\mathbb{C})$ 中的常值环路后得到的辫。我们只画出了 X^- 和 Y 对应的线股，因为显然，由 X^+ 得到的线股与其他线股完全没有缠绕，这意味着 $\Psi_{X^+}([\gamma_4]) = 0$。此外，由于$Z = X^-$，可知 $Q_{44} = \Phi_{\{X^-,Y\}}([\gamma_4])$；从辫图中很容易确定其值为 2。



为了计算 Q_{42}，我们绘制了环路 $\gamma_{2,\ 4} \subset \mathrm{Conf}^2(M)$，用于计算 $\Phi([\gamma_{2,4}])$，以及由 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的路径得到的辫。从这个辫可以轻易看出 $\Phi([\gamma_{2,4}]) = -1$，因为其中有两个负交叉和一个正交叉。



也不难看出 $\Psi_{X^+}([\gamma_{2,4}]) = 1$，因此我们得到

$$Q_{42} = Q_{44} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{2,4}]) = Q_{44} - 3 = -1.$$

参考文献

[1] Cristina Ana-Maria Anghel. “着色琼斯多项式的一个拓扑模型”。*Selecta Mathematica*28.3 (2022), 53. doi: 10.1007/s00029-022-00772-4.[2] Adrian Avalos and Mark Bly. 序列、*q*-多项恒等式、带种类的整数分拆与广义伽罗瓦数. 2020年. arXiv: 1910.11286 [math.CO]. url: https://arxiv.org/abs/1910.11286.

[3] Dror Bar-Natan. “辫结与协边的 Khovanov 同调”。《几何与拓扑》9 (2005), 1443–1499. doi: 10.2140/gt.2005.9.1443. eprint: math/0410495.[4] Dror Bar-Natan. “关于琼斯多项式的 Khovanov 范畴化”。《代数几何与拓扑》2 (2002), 337–370. eprint: math/0201043.[5] Stephen Bigelow. “HOMFLY多项式的一个同调定义”。《代数几何与拓扑》7 (2007), 1409–1440. doi: 10.2140/agt.2007.7.1409.[6] Stephen Bigelow. “琼斯多项式的一个同调定义”。《几何与拓扑专著》4 (2002), 29–41. doi: 10.48550/arXiv.math/0201221. url: https://www.gtc.reading.ac.uk/volume-4/paper-1/.[7] Sabin Cautis, Joel Kamnitzer, and Scott Morrison. “网与量子斜Howe对偶”。《数学年刊》360.1-2 (2014), 351–390. doi: 10.1007/s00208-013-0984-4.[8] S. Chauhan, P. Kucharski, D. Noshchenko, Ramadevi Pichai, Vivek Kumar Singh, and Marko Stosic. “全扭转与结和箭图的稳定性”。*arXiv*预印本 *arXiv:2508.18417* (2025年). url: https://arxiv.org.[9] Tobias Ekholm, Angus Gruen, Sergei Gukov, Piotr Kucharski, Sunghyuk Park, Marko Stošić, and Piotr Sułkowski. “结补空间的分支、箭图与理想”。《几何物理学杂志》177 (2022), 104520. doi: 10.1016/j.geomphys.2022.104520. eprint: 2110.13768.[10] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “结同调与广义箭图配分函数”。《数学物理快报》113.6 (2023), 117. doi: 10.1007/ s11005-023-01733-4.[11] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “多重覆盖 skein、箭图与三维 $\mathcal{N} = 2$对偶”。《高能物理学杂志》2020.2 (2020), 18. doi: 10 .1007 / JHEP02(2020)018.[12] Jonathan Higgins. “链环-箭图对应的几何方法 II：有理链环”（准备中）。[13] Jakub Jankowski, Sergei Gukov, Piotr Kucharski, and Marcin Manowita. “箭图对角化与开放 BPS 态”。《数学物理通讯》402.2 (2023), 1551–1606. doi: 10.1007/s00220-023-04753-2.[14] Jakub Jankowski, Piotr Kucharski, Hélder Larraguível, Dmitry Noshchenko, and Piotr Sułkowski. “结与箭图的排列多面体”。《物理评论 *D*》104.8 (2021). doi: 10.1103/PhysRevD.104.086017. url: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104. 086017.[15] Mikhail Khovanov. “琼斯多项式的范畴化”。《杜克数学杂志》101.3 (2000), 359–426. doi: 10.1215/S0012-7094-00-10131-7. eprint: math/9908171.[16] Mikhail Khovanov. “三重分次链环同调与 Soergel 双模的 Hochschild 同调”。《国际数学杂志》18.8 (2007), 869–885. arXiv: math/0510265 [math.GT].[17] Mikhail Khovanov and Lev Rozansky. “矩阵分解与链环同调”。《基础数学》199 (2008), 1–91. doi: 10.4064/fm199- 1- 1. arXiv: math/0401268[math.QA].[18] Mikhail Khovanov and Lev Rozansky. “矩阵分解与链环同调 II”。《几何与拓扑》12.3 (2008), 1387–1425. doi: 10 . 2140 / gt . 2008 . 12 . 1387. arXiv: math/0505056 [math.QA].

[19] Piotr Kucharski. “三维流形的箭图：对应关系、BPS态与三维$\mathcal{N}=2$理论”。《高能物理杂志》2020.75 (2020), 1–27. doi: 10.1007/JHEP09(2020) 075.[20] Piotr Kucharski、Hélder Larraguível、Dmitry Noshchenko 和 Piotr Sułkowski. “解链对称箭图”。《数学物理快报》116.1 (2026), 10. doi: 10.1007/s11005- 025-02038-4.[21] Piotr Kucharski、Markus Reineke、Marko Stošić 和 Piotr Sułkowski. “BPS态、结与箭图”。《物理评论 *D*》96.12 (2017), 121902. doi: 10.1103/PhysRevD.96. 121902.[22] Piotr Kucharski、Markus Reineke、Marko Stošić 和 Piotr Sułkowski. “结与箭图对应关系”。《理论与数学物理进展》23.7 (2019), 1849–1902. issn: 1095-0753. doi: 10.4310/atmp.2019.v23.n7.a4. url: http://dx.doi.org/10.4310/ATMP. 2019.v23.n7.a4.[23] Piotr Kucharski、Markus Reineke、Marko Stošić 和 Piotr Sułkowski. “结与箭图对应关系的物理与几何”。《数学物理通讯》379.3 (2020), 1061– 1097. doi: 10.1007/s00220-020-03840-y.[24] R. J. Lawrence. “单变量琼斯多项式的函子方法”。《微分几何杂志》37.3 (1993), 689–710.[25] Marco Mackaay、Marko Stosic 和 Pedro Vaz. “1,2着色HOMFLY-PT链环同调”。《美国数学会汇刊》363.4 (2011), 2091–2124.[26] Ciprian Manolescu. “幂零切片、希尔伯特概形与琼斯多项式”。《杜克数学杂志》132 (2004年12月). doi: 10.1215/S0012-7094-06-13224-6.[27] M. Murakami、T. Ohtsuki 和 A. Yamada. “通过着色平面图的不变量构造Homfly多项式”。《数学教学》44 (1998), 325–360.[28] Kunio Murasugi. 纽结理论及其应用. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1996.[29] Miłosz Panfil、Marko Stošić 和 Piotr Sułkowski. “Donaldson-Thomas不变量、环面结与格路”。《物理评论 *D*》98.2 (2018), 026022. doi: 10.1103/ PhysRevD.98.026022.[30] Markus Reineke.对称箭图的*Donaldson-Thomas*不变量. 2024年. arXiv: 2410.03219 [math.RT]. url: https://arxiv.org/abs/2410.03219.[31] N. Yu. Reshetikhin 和 V. G. Turaev. “带状图及其由量子群导出的不变量”。《数学物理通讯》127.1 (1990), 1–26. issn: 0010-3616. doi: 10.1007/BF02096491. url: https://link.springer.com/article/10.1007/ BF02096491.[32] Marko Stošić 和 Piotr Sułkowski. “环面结与广义施罗德路径”。*Nucl. Phys. B* 1012 (2025), 116814. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2025.116814.[33] Marko Stosic 和 Paul Wedrich. “有理链环与箭图的DT不变量”。*Int.Math. Res. Not.* 2021.6 (2021), 4169–4210. doi: 10.1093/imrn/rny289. arXiv: 1711.03333 [math.QA].[34] Marko Stošić 和 Paul Wedrich. “缠结加法与结与箭图对应关系”。*J. London Math. Soc.*104.1 (2021), 341–361. doi: 10.1112/jlms.12433.

[35] Ben Webster 和 Geordie Williamson. “着色HOMFLY-PT同调的几何构造”。《几何与拓扑》21.5 (2017), 2557–2633. doi: 10.2140/gt.2017. 21.2557.[36] Paul Wedrich.“有理辫结的范畴化 $\mathfrak{sl}_N$ 不变量”。《代数几何与拓扑》16.1 (Feb. 2016), 427–482. issn: 1472-2747. doi: 10.2140/agt.2016.16.427. url: http://dx.doi.org/10.2140/agt.2016.16.427.

JonathanHiggins，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校数学系，1409 W Green St, Urbana, IL 61801, 美国
电子邮箱地址：jh110@illinois.edu