arXiv:2603.01308v1 [cs.LO] 1 Mar 2026

单值基础中的构造性与谓词性局部理论

by

Ayberk Tosun

提交给伯明翰大学以申请哲学博士学位的论文

计算机科学学院 工程与物理科学学院
伯明翰大学

提交日期：2024年11月30日 答
辩日期：2025年2月27日 接收
日期：2025年6月3日

摘要

我们在单值基础（也称为同伦类型论或 HoTT/UF）中，以构造性和直谓性的方式发展 locale 理论，尤其关注谱与 Stone 局部理论。基础框架的构造性意味着我们不使用任何经典原理，例如选择公理（或其任何较弱形式）、排中律，或有限全知原理的任何形式。在单值基础的语境中，直谓性特指不使用 Voevodsky 的命题缩放公理来发展数学。无点拓扑直谓性发展的传统方法，是使用称为形式拓扑的 locale 表示。这里，我们采取不同的方法：直接研究框架和 locale，仔细追踪所涉及的宇宙，并采用某些大小假设，以确保该理论适于直谓性发展。尽管乍看之下，locale 理论的许多基本构造似乎依赖于非直谓性，我们证明，在相当自然的大小假设下，可以规避这些问题。本文的发展受到 de Jong 和 Escardó 在单值基础中对域理论进行构造性与谓词性发展的启发。

我们首先为 locale 理论的直谓发展奠定基础。随后，我们将研究方向转向谱局部与 Stone 局部理论，并运用单值性公理和集合替换原理，确保谱 locale 的概念在直谓框架下具有良好的性质。我们还在谱局部的背景下发展 Stone 对偶，证明大、局部小且小完备的谱局部类型与小分配格类型之间存在范畴等价。此外，我们利用谱 locale 的一种称为 补丁 *locale* 的构造（即所谓可构造拓扑在 locale 中的体现），将 Stone 局部范畴呈现为谱局部与谱映射范畴的余反射子范畴。最后，我们在这一构造性、直谓的 locale 理论框架下，研究代数有向完备偏序集和 Scott 域的拓扑。我们构造 Scott 域的 Scott locale，证明它是一个谱 locale，继而研究其补丁。借助这一结果，我们得到 de Jong 所提出的尖锐元素概念的拓扑刻画：我们建立了 Scott 域的尖锐元素与其 Scott locale 的补丁中的点之间的对应关系。

我们的整个开发过程都已形式化，并使用 Agda 证明助手进行了机器检验。

致谢

首先，我谨向我的导师 Martín Escardó 致以衷心的谢意，感谢他的支持与指导。Martín 不仅提出了我博士课题的核心构想，还耐心地帮助我在构造性数学这片崎岖却美丽的天地中摸索前行。我的博士生涯始于 2020年7月 COVID-19 疫情最严峻的时期，因此有时这段旅程颇为动荡。尤其要感谢 Martín 在这段艰难时期给予我的支持。

我还要感谢 Eric Finster 和 Bas Spitters 担任我的论文审查人，并认真审阅了这篇论文。在修订版的准备过程中，他们的反馈极为宝贵。我也感谢 Paul B. Levy 担任我的答辩主席。

攻读博士学位期间，我有幸成为伯明翰理论组的一员。这里充满活力的研究氛围对我作为研究者的成长产生了深远影响。多年来，我有幸与组里许多优秀的博士生朋友共事：Todd Ambridge、George Kaye、Avgerinos Delkos、Paaras Padhiar、Bruno da Rocha Paiva。其他组员给予的支持和指导同样重要，尤其是 Anupam Das、Paul B. Levy、Sonia Marin、Eric Finster、Abhishek De、Paul Taylor 和 Steve Vickers。特别感谢 Paul 和 Steve 担任我的论文小组成员。

在理论组的成员中，有三位值得特别提及：我的同事 Igor Arrieta 和 Tom de Jong，以及我的第二位导师 Vincent Rahli。他们的支持、友谊和学术指导对完成这篇论文起到了至关重要的作用。

我对 Vincent 感激不尽，感激之情难以计数：感谢他的指导、始终如一的支持，也感谢他主持的多次指导会议。在那些会议上，他总是耐心地听我兴致勃勃地长篇大论，话题则是我当时感兴趣的任何事情。我真心觉得，能成为他的学生是我的幸运。Tom 关于单值基础中域理论的可断言性发展的博士研究启发了本论文所呈现的工作。此外，Tom 对其研究清晰透彻的阐述让我获益良多，尤其是他在 TypeTopology 中精心编写的 Agda 形式化。从更个人的角度来说，我要感谢 Tom 多年来给予我的支持，也感谢他一直像一位兄长般关照我。最后，我要表达对朋友 Igor 的感激之情：他不仅总是热情地与我分享自己在 locale理论方面的专长，而且

还为补丁 locale 的泛性质的可谓词化证明作出了贡献（这是第5.4.3节的主题）。

Eric 和 Tom 主动组织了 ASSUME 研讨会系列，促成伯明翰的理论组与诺丁汉的函数式编程实验室相聚交流。我从这些研讨会中获益良多，也与多位 ASSUME 参与者进行了许多富有见地的交谈，其中尤以诺丁汉大学的 Josh Chen 和 Jacob Neumann 为甚。我感谢 Eric 和 Tom 为组织 ASSUME 所付出的努力。

作为计算机科学学院的一名博士生，我很幸运能得到 Felipe Orihuela-Espina 的支持。他出色地履行了研究生导师的职责。此外，研究支持部门的 Jamie Hough 工作认真、尽职尽责，尤其值得表彰。

在本科期间，Mattox Beckman、José Meseguer 和 Grigore Roşu 几位老师培养了我的求知热情，并支持我的学业。我尤其感谢 José，他总是耐心地回答我那些天马行空的问题，并就如何学习数学给我有益的建议。在查尔姆斯理工大学攻读硕士期间，老师 Thierry Coquand、Pe- ter Dybjer、Nils A. Danielsson 和 Jesper Cockx 的鼓励激励我深入钻研类型论与构造性数学。我特别感谢 Jesper 指导我独立学习域理论，这也正是我对无点拓扑产生兴趣的起点。Thierry 对我的指导和支持影响深远，难以估量：他向我介绍了形式拓扑与无点拓扑，并在我还是一名刚刚开始接触研究的理学硕士生时，耐心地指导我的学习。我与他合作开展的形式拓扑硕士论文研究，可视为本论文背后研究计划的开端。

虽然我原本想将这份致谢仅限于学术同事和合作者，但若不向这些年来一直陪伴在我身边的朋友和家人致谢，我觉得未免有失公允。首先，我永远感激父母 Aynur 和 Fuat 为我所做的一切。此外，我还要感谢我在芝加哥的家人——Banu、Belma、Oğuzhan、Rana、Hayriye 和 Ömer Temizel。在我于伊利诺伊州读本科期间，他们让我在异乡也有了家的感觉。同样重要的，还有一些家族朋友给予的支持：Tülay 和 Fikret Bulut、Yurdanur 和 Tacettin Varol、Elifnur Ceylan 以及 Güler Apaydın。此外，几位亲密朋友给予我的友谊、支持和鼓励，对我意义重大：Tolga Aktaş、Ömer Eryılmaz、Kardelen Karaçor、Cumhur (Joomy) Korkut、Tunahan Moralı、Furkan E. Pehlivanlı 和 Onur Türköz。特别要感谢 Joomy 鼓励我学习类型论和 Agda。最后，我想感谢女友 Riya 对我的爱与支持，尤其是在我撰写这篇论文的那段忙碌的日子里。

Ayberk Tosun
2024年11月30日

目录

Ab摘要 i

致谢 ii

目录 iv

1 引言 1

1.1 概述与贡献总结.3 1.1.1 论文大纲与贡献列表.4 1.1.2 出版物.6

2 基础 7

2.1 马丁-洛夫类型论基础.8 2.1.1 基本类型.9 2.1.2 类型论中的公理.10

2.2 宇宙.10 2.2.1 宇宙运算.10 2.2.2 基本类型的宇宙规则.11 2.3 W-类型.
11 2.3.1 W-类型的定义.12 2.3.2 W-类型的例子.12 2.4 逻辑的柯里-霍华德解
释.13 2.5 恒等类型.14 2.5.1 形式定义.14 2.5.2 传输与路径上的作用.15
2.5.3 Σ-类型的恒等类型.16 2.5.4 恒等类型的同伦解释.17 2.5.5 结构与性质.
19 2.6 可判定类型与集合.20 2.6.1 类型的可判定性.20 2.6.2 可判定类型的集
合性.21 2.7 函数外延性与可逆函数.23 2.7.1 函数外延性公理.23 2.7.2 拟逆.
24

2.7.3 左可消去映射.24 2.8 等价与嵌入.25 2.8.1 等价.25 2.8.2 嵌入.26 2.8.3 重访函数外延性.26 2.9 类型的同伦层级.27 2.9.1 同伦层级体系的定义.27 2.9.2 同伦层级的基本性质.28 2.10 单值性公理.29 2.10.1 单值性公理的形式定义.30 2.10.2 假设单值性时，宇宙不是集合.30 2.10.3 结构恒等原理.31 2.11 高阶归纳类型.32 2.11.1 圆类型.33 2.11.2 命题截断.34 2.12 命题即类型的再探讨.34 2.12.1 精细化的命题即类型翻译.35 2.12.2 指定存在与未指定存在.36 2.12.3 子集.36 2.13 谓词性与命题缩放.37 2.13.1 子集与族.38 2.13.2 命题缩放公理.39 2.14 集合替换原理.41

3 点无关拓扑基础 43

3.1 框架概念的定义.44 3.1.1 框架的局部小性.45 3.1.2 可预测格论入门.45 3.1.3 框架与局部的范畴.48 3.1.4 非谓词性与直谓局部理论.49 3.1.5 局部的基本例子.50 3.2 子局部.54 3.3 紧致性与远小于关系.56 3.3.1 紧开集.56 3.3.2 远小于关系.59 3.4 闭开集与内含关系.60 3.4.1 闭开集.60 3.4.2 内含关系.60 3.5 基.61 3.5.1 内涵基与外延基.62 3.5.2 弱基与强基.63 3.5.3 基的定向化.64 3.5.4 例子.64 3.6 重要的局部类.66 3.7 框架的伴随函子定理.67 3.7.1 海廷蕴涵与开核.69

4 谱与 Stone 局部 70

4.1 引言.71 4.2 直谓设定中的谱性.71 4.2.1 从直谓视角看传统定义 . . . 72 4.2.2 谱性的命题性.73 4.2.3 联系两种方法.73 4.2.4 谱局部的范畴.77 4.3 谱 locale 的例子.78 4.3.1 终端 locale.78 4.3.2 离散 locale.78 4.3.3 Sierpiński locale.78

4.4 分配格及其谱.79 4.4.1 分配格的定义.79 4.4.2 分配格的理想.82 4.4.3 理想格中的并.84 4.4.4 理想框架的谱性.87 4.5 零维与正则 locale.90 4.5.1 正则 locale.90 4.5.2 零维 locale.90 4.6 Stone locale.92 4.6.1 Stone 基是谱的.93 4.6.2 另一种刻画.94 4.6.3 Stone 局部范畴.95 4.6.4 例子与反例.96 4.7 谱 locale 的 Stone 对偶.97 4.7.1 沿等价传输格结构 . . . . . 97 4.7.2 谱 locale 的紧开集构成的分配格 . . . . 98 4.7.3 Stone 对偶的对象部分.100 4.8 Stone 对偶的范畴部分.102 4.8.1 HoTT/UF 中的范畴等价.102 4.8.2 K^- 的函子作用.103 4.8.3 函子 K^- 给出范畴等价 104

5 补丁 locale 108

5.1 locale 上核的交半格.109 5.1.1 核的逐点序.109 5.1.2 核的交.110 5.2 核以非谓词方式构成框架.110 5.3 Scott 连续核的框架.112 5.3.1 Scott 连续核的交半格.112 5.3.2 并.115 5.4 补丁 locale.120 5.4.1 补丁 locale 的基构造.120 5.4.2 Patch 是 Stone.122 5.4.3 补丁 locale 的泛性质.124 5.5 补丁的例子.126

6 Scott 域的拓扑 128
6.1 单值基础中的域理论入门.129 6.1.1 有向完备偏序集的定义.129 6.1.2 带底元有向完备偏序集.129 6.1.3 域的有限元.130 6.1.4 代数有向完备偏序集.132 6.1.5 Scott 域.133 6.2 代数有向完备偏序集的 Scott locale.134 6.2.1 Frame结构.135 6.2.2 局部小性.135 6.2.3 Scott locale 的初等性质.136 6.2.4 Scott 域上 Scott locale 的基构造.138 6.2.5 Scott 域上 Scott locale 的谱性.139 6.2.6 Sierpiński的万有性质.139 6.3 尖锐元素.143 6.3.1 代数有向完备偏序集的尖锐元素.143 6.3.2 尖锐元素的拓扑刻画.144 6.4 Scott locale 的谱点.144 6.4.1 locale理论中的点概念.145 6.4.2 谱点.146 6.5 尖锐元素与谱点.147 6.5.1 Scott 域的 Scott locale 的点.147 6.5.2 Scott locale 的谱点.149 6.6 尖锐元素与补丁的点.150 6.6.1 谱点与补丁的点一致.150 6.6.2 尖锐元素刻画的总结.150

7 结论 152
7.1 总结.152 7.2 相关工作.153 7.2.1 形式拓扑.153 7.2.2 其他相关工作.156 7.3 未来工作.157 7.3.1 扩展到稳定紧locale.157 7.3.2 补丁 locale 与 Lawson 拓扑 157

参考文献 159

索引 170

第1章

引言

本论文旨在单值基础中以构造性且直谓的方式发展无点拓扑，特别关注谱的 和 *Stone locale*理论。

无点拓扑 [Joh82；Joh83；PP11]是一种拓扑研究方法，其基本研究对象是 *locale* ，而非拓扑空间。后者是一个由点组成的集合，并配备一种拓扑；这种拓扑是点集的一个类，要求对有限交和任意并封闭。相比之下，locale 是一种空间概念，仅由一个抽象的开集格刻画，而不要求这个格由某个点集的子集构成。抽象概括开集类行为的格论结构称为框架。

无点拓扑方法源于一个非凡的洞见：非平凡的拓扑问题可以仅通过对框架的代数研究来探讨。这一思想的起源可追溯至 Stone 的工作 [Sto34；Sto36]，研究的正是如今所谓的*Stone* 对偶。

采用无点方法研究拓扑的主要动机，是它使我们能够在构造性基础设定中发展拓扑。众所周知，点集拓扑的一些关键定理本质上是经典的。典型例子是 Tychonoff 定理，它的证明不仅使用选择公理，而且事实上已知该定理与之等价。 [Kel50]。尽管这表明，在点集框架下不可能指望构造性地证明 Tychonoff 定理，但事实证明，若采用将 locale 视为拓扑研究对象的观点，就可以构造性地证明该定理 [Coq03；Vic05]。因此，无点拓扑在构造性数学的基础框架中具有特殊意义，同时在经典数学中也很有用。

本论文关注在单值类型论这一基础框架中发展locale理论，并特别聚焦于谱与 Stone 局部理论。单值类型论（亦称同伦类型论或HoTT/UF）

是对马丁-洛夫类型论的一项近期细化 [Mar75; Mar82; Mar84], 源于将类型视为 ∞-群胚的观点 [HS98; War06; Awo06; Voe06]。除了在合成同伦论和高阶托扑斯理论中有应用之外，单值类型论还可作为实用的数学基础，并且事实证明它对构造性数学的发展特别有用。

构造性数学 这一学科 构造性数学 源自 L.E.J. 布劳威尔的思想 [Bro08], 他反对使用 经典原理 这与他对数学的认识论观点一致 [Bee24, §3.1]。布劳威尔的构造性数学理念是 反经典的：他采用了与排中律相矛盾的公理。

后来，毕晓普 [Bis67] 发展出一种中立形式的构造性数学。在毕晓普学派的构造性数学中，经典原理是 禁忌：既不可证明，也不可证伪。这种数学观比经典数学严格更为一般，因为始终允许采用经典公理。毕晓普认为，构造性数学也可以是实用的，他通过构造性地发展了 20^{th}世纪分析学的重要部分来支持这一观点（如 [Bee24, §3.3] 中所述）。

在本文中，我们采用一种基于单值基础的类似中立方法；在这种方法中，构造性意味着在不使用排中律、有限全知原理 [Bis67] （包括其较弱形式）或选择公理（包括可数选择）的情况下发展数学。

类型论马丁-洛夫类型论意义上的类型论 [Mar75；Mar82；Mar84], 是数学的一族基础系统。它最初由 [Mar75]开发，旨在阐明毕晓普式构造性数学的语言，并通过深入探究所谓的柯里-霍华德对应 [How69]，使人们能够将数学中的构造性证明视为具有丰富类型系统的合适编程语言中的项。

数学的类型论观点有一项实际优势，即能够将编程语言理论领域的技术引入数学基础。将数学基础转化为编程语言问题，促成了类型论计算机实现的发展，这些实现称为证明助手。值得关注的类型论证明助手例如：NuPRL [CAB+86], Coq [CH88], Agda [Nor09], 和Lean [AdMKU+]。本论文的一项主要贡献是为 Agda 证明助手开发了一个locale理论库，作为 Escardó 的开源TypeTopology 库 [Ec23]。

类型的同伦视角 同伦类型论 [Uni13] 是对马丁-洛夫类型论的近期细化，其源头可追溯至 Hofmann 和 Streicher 对类型论的群胚解释 [HS98]。利用这一解释来发展一种新形式的类型论，在 2000 年代末和 2010 年代初逐渐发展成一项独立的研究计划，最初的工作来自 Voevodsky [Voe06]以及 Awodey 和 Warren [AW09]。类型论的同伦解释带来的两项主要创新是 单值性公理 和高阶归纳类型。

从历史上看，在马丁-洛夫类型论中将外延性原则作为公设，一直是其作为基础系统的一个缺陷。Voevodsky 对单值性公理的表述指出了一个单一的外延性公理，它蕴含所有 其他外延性公理，其中最典型的例子是函数外延性和命题外延性。这为发明一种类型论铺平了道路：通过为单值性公理赋予计算解释，可以为这类公理制定计算规则。

寻找这样一种类型论的问题一直悬而未决，直到立方类型论的发明 [CCHM18] 于2018年。在立方类型论中，单值性公理是一条定理，而非一条公设。这是通过一种根本性的全新设计实现的：立方类型论具有一个内建的区间对象，以及用于处理高维路径的原始运算。立方类型论在HoTT/UF 社区中引起了广泛兴趣，并且已开发出它的多种计算机实现。其中，CubicalAgda [VMA19] 已成为领先的实现，其标准库 [Com24]是撰写本文时形式化单价数学的主要库之一。

预测数学项预测数学被不同的研究者用来指称密切相关但并不相同的概念。在单值基础的语境中，谓词性指的是在不使用命题缩放公理 [Uni13，公理3.5的情况下发展数学。5], 这些公理最初由Voevodsky作为规则提出 [Voe11]。避免这些公理相当于如下限制：涉及对某一宇宙作大量化的命题不被承认为该宇宙中的命题。已有人指出 [Uni13，§3 注释]命题缩放公理与Russell臭名昭著的可化归公理极为相似 [Rus08，第241–页244], 其起源于类型理论的语境 [Rus03，附录B]。因此，我们对项谓词性的使用与Russell传统中的意义相同。

在将单值类型论用作构造性基础的背景下，我们有一个采取直谓数学方法的具体动机：截至本文写作之时，为命题缩放公理寻找计算规则仍是一个未解决问题 [CCHM18，第 27]页。因此，我们坚持直谓数学，也是我们坚持构造性数学的进一步体现，因为我们希望避免使用计算行为尚未得到充分理解的公设。此外，已有研究还表明 [Uem19] ，存在单值类型论的模型，其中命题缩放并不成立。

1.1 概述与贡献总结

在第1.1.1节中，我们按章节概述论文内容，并解释各章所述的贡献。在第1.1.2节中，我们列出包含本文所述部分研究成果的出版物。

本论文中给出的几乎所有结果都已完全形式化，使用Agda 证明助手 [NDCA+07; Nor09], 作为 Escardó 的TypeTopology [Ec23]库的一部分。所有主要结果均已形式化，而未形式化的例外大多

涉及旁支发展或例子。对于显著的定义、引理、定理和例子，我们提供了HTML渲染中相应构造的链接，即我们的Agda 形式化。为此，我们使用带超链接的 Agda 图标（读作 鸡）。

1.1.1 论文纲要与贡献列表

第 2章：单值基础 我们介绍单值基础的标准表述，主要遵循 HoTT Book [Uni 13] 和 Escardó 的教程式导论 [Esc19]。我们的阐述也借鉴了 de Jong [dJon23, §2] 以及 Knapp [Kna18, §I.2]。本章没有新结果，只是对我们所采用的类型论基础的概述。

第 3章：无点拓扑基础 本章的主要贡献是在构造性与直谓的单值基础背景下，为 locale 理论奠定基础，并明确使用宇宙。对框架（定义 3.1.1）及其上的核（第 3.2节）的单值研究始于作者的理学硕士论文 [Tos20]，并延续至其与 Coquand [CT21] 关于形式拓扑的合作。此处直谓方法的主要新意在于使用小 locale基（第 3.5节）以及偏序伴随函子定理（第 3.7节）。正如我们在第7.2节所解释的，我们针对 locale 的直谓方法与形式拓扑密切相关，不过在某些关键方面有所不同。

本文所呈现的部分工作已发表于 [TE23] 与 [AET25]，尽管本章给出的论述包含若干改进与简化。

第4章：谱与 Stone 局部 本章给出谱与 Stone 局部理论的谓词式处理。正是在这里，我们开始运用单值类型论在基础方面的新成果。例如，我们在定义 4.2.1 中给出谱性的定义，该定义使用了单值性公理。此外，在定理 4.2.11中，我们利用集合替换原理证明了谱 locale 这一概念的各种刻画之间的逻辑等价。这依赖于引理 4.2.9，该引理蕴含了对 de Jong 与 Escardó 关于代数有向完备偏序集之刻画的加强 [dJon23，引理 4.8。3]。

在第 4.5 节中，我们简要转入在我们的设定下对零维与正则 locale 的谓词式处理，并确定零维与正则 locale 那些在直谓意义下表现良好的概念。这在第 4.6 节中得到应用，我们在该节发展 Stone locale 的理论（即紧且零维的 locale）。

接下来，我们将在第4.7节建立谱 locale 的 Stone 对偶。我们证明，一个框架是谱的，当且仅当它同构于一个小分配格上的小理想框架；这说明我们在定义4.2.1 中给出的谱性定义准确刻画了谱 locale 的范畴。随后，我们将这两个映射扩展为函子，并证明它们构成范畴等价。

本章所述工作的初步版本已发表于 [TE23]。刻画谱 locale 与 Stone locale 的定理 4.2.11 和4.6.9 已刊载于一篇

我们较新版本的工作 [AET25]。这些成果大幅简化了我们对谱 locale 的谓词式描述。特别是， [TE23] 末尾提到， [TE23中的引理 7。11] 在撰写时仍在进行形式化。 [AET25中的 §4 定理1] 使得这项证明得以完成。

第 5章：补丁 locale 我们对谱 locale 的补丁局部给出了一个构造性且直谓的构造，并证明了其泛性质。

补丁 locale 的构造见第 5.3 节。尽管这一构造基于 Escardó [Esc98；Esc99；Esc01]，的早期工作，但其中包含了一些新的要素，因为 前引文献中的发展使用了若干在我们的直谓设定中无法使用的非谓词式构造。这些新要素如下：

1. 补丁 locale 由 [Esc99] 中的 Scott 连续核算子框架定义。为了证明这确实是一个框架，通常先从所有核的框架出发，然后将 Scott 连续核展示为一个子框架。然而，在我们的工作背景下，这一过程似乎不可行，因为目前尚不清楚能否在直谓的方式下证明所有核构成一个框架。因此，我们直接构造 Scott 连续核算子框架，这要求对从所有核的框架继承而来的关于它的全部标准事实进行直谓式改写。2. Escardó 对补丁 locale 的描述使用了开核这一概念，而在直谓设定中，该概念并非先验存在。我们通过使用第3.7节中的偏序伴随函子定理解决了这一问题。3. Escardó 在 [Esc99；Esc01] 中的证明使用了完美映射这一概念，而在直谓设定中，该概念同样并非先验存在。这是因为在直谓语境下，框架同态的右伴随并非先验可用。

泛性质的证明见第 5.4.3 节。关于该构造满足其泛性质的直谓证明是新的，因为 Escardó 的证明依赖于所有核构成的框架的存在性，而这似乎无法在非直谓设定中构造（见第 5.2 节）。

此处所呈现结果的初步版本最初发表于 [TE23]。我们较新的工作 [AET25，§8] 给出了补丁 locale 的泛性质的全新简化证明，该证明是在与 Igor Arrieta 合作期间完成的。

第 6 章：Scott 域的拓扑 本章中，我们将无点拓扑的研究重点放在代数 DCPO 和 Scott 域的拓扑上。在第 6.2 节中，我们给出了代数 DCPO 的 Scott locale 的一种直谓构造，并证明它在直谓意义下具有良好的性质，即它是大、局部小且小完备的。对于 Scott 域这一特殊情形，我们还在第 6.2.5 节构造了 Scott 拓扑的一个小强基。

随后，我们运用在第4章建立的框架，研究 Scott 域的拓扑。在6.2.5节，我们构造性且直谓地证明，Scott 域的 Scott 拓扑总是一个谱 *locale*，由此得到一大类可通过直谓方式构造的谱 locale 例子。

此外，我们还运用第5章中发展的结果，研究 Scott 域的谱 Scott locale 的补丁 locale。我们证明，Scott 域的尖锐元素 [dJon21a] 与其 Scott locale 的谱点相一致，而这些谱点又与所讨论的 Scott locale 的补丁中的点相一致。这是对5.4.3节中补丁 locale 泛性质的一个示例性应用。

本章介绍的结果尚未发表，但计划在不久的将来投稿。此外，我们还相信，这里提出的尖锐元素与 Patch 的点之间的等价关系，将有助于我们在构造性语境中阐明 Scott 域的 Scott locale 的补丁 locale 与所讨论定义域上的 *Lawson* 拓扑 之间的关系。撰写本文时，我们正在沿这一方向拓展研究。

1.1.2 出版物

Par本论文所介绍的研究成果已发表于 [TE23] 和 [AET25] .

[AET25] Igor Arrieta、Martín H. Escardó 和 Ayberk Tosun：《单值基础中的补丁拓扑》。载于《数学结构与计算机科学》35（2025年），e18。DOI：10.1017/S0960129525000088（引自第 4–6页）。[TE23] Ayberk Tosun 和 Martín H. Escardó：《单值类型论中的谱 locale 的补丁 locale》。载于《*MFPSXXXVIII* 会议论文集》。第 1 卷。《理论信息学与计算机科学电子札记》。2023年2月。DOI：10.46298/entics.10808。网址：https://entics.episciences.org/10808（引自第 4–6 页）。

第2章

基础

我们的研究是在单值类型论这一基础框架中开展的；它是马丁-洛夫类型论 [Mar75； Mar82]并扩展了若干特性，使我们能够发展 单价数学。本章将介绍单值基础的基本思想 [Uni13] 并讨论我们所采用的基础框架的细节。

作为数学基础，类型论与集合论有着根本区别
在集合论中，人们使用无类型的集合概念，所有数学构造都由此建立。支配集合构造的规则由集合论的公理 给出。另一方面，在类型论中，人们使用类型 ，这些类型配备了支配其元素构造的规则。这些规则用于完成所关注的数学构造。这意味着，类型论中的数学构造并非孤立存在，而只作为元素 存在于某个类型之中。换言之，在类型论中进行的所有数学构造从根本上都是带类型的。

这种带类型的数学基础方法为构造性数学提供了有用的基础。例如，将等同性本身视为一个类型的观点，是马丁-洛夫类型论的标志性特征，为其表述铺平了道路，亦即单值性公理 以及 高阶归纳类型 ——这些概念并不能完全在集合论中得到表述（正如Escardó [Esc18]所解释的）。

本章的结构安排如下。

第 2.1节：我们介绍马丁-洛夫类型论的基础知识，这是我们所使用的单值类型论的起点。第 2.2节：我们讨论类型论的宇宙结构。第2.3节：我们介绍 W-类型，它们为 归纳生成的 类型提供形式化说明。第 2.4节：我们介绍马丁-洛夫类型论中命题即类型的 Curry-Howard 观点。第2.5节：我们介绍恒等类型的技术细节，并解释其

同伦解释，它构成了单值类型论关键特征的基础。第 2.6节：我们讨论类型的可判定性概念，并介绍 Hedberg 定理。第 2.7节：我们讨论函数外延性，以及可逆映射和左可消去映射，并解释它们的朴素表述为何不是性质。第 2.8节：我们介绍嵌入和等价的概念，它们将左可消去映射和可逆映射的概念细化到更精细的高阶群胚语境中。第 2.9节：我们解释类型按照同伦层级进行分层的方式，这构成了单值基础的核心。第 2.10节：我们介绍单值性公理。第 2.11节：我们介绍高阶归纳类型的概念。第 2.12节：我们重新审视第 2.4 节中命题即类型原则的朴素形式，并讨论它在单值类型论中的细化。第2.13节：我们介绍小类型和局部小类型的理论，这一理论支撑着基础框架中的谓词性概念及其缺失情形。随后，我们解释命题缩放公理，它们体现了我们对非直谓性的理解，并讨论我们避免采用这些公理的动机。第2.14 最后，我们讨论单值类型论中的集合替换原理及其作为高阶归纳类型的表述。除了命题截断之外，集合替换原理是本论文中使用的唯一其他高阶归纳类型。

2.1 马丁-洛夫类型论基础

我们概述马丁-洛夫类型论的基础知识，不对其进行完整的形式化介绍。关于完整的形式化介绍，请参阅 [Uni13，附录 A]。

类型论是一种基于判断的形式系统。在数学的类型论发展中，我们关注两个基本判断：

1. 类型判断，记作 $a : A$，表示项 a 具有类型 A。 2. 相等判断，记作 $a \equiv b : A$，表示项 a 和 b 是类型 A的相等元素。

类型论中的类型通过规定其类型判断、等同性判断和形成判断的证据是什么来定义（如马丁-洛夫所述 [Mar83]）。更具体地说，这包括给出它们的

- 形成规则，说明如何构造该类型；
- 引入规则，说明如何构造该类型的元素；
- 消去规则，说明如何使用该类型的元素；
- 计算规则，用于规定消去子的计算行为，以及它在该类型的元素上的行为。

2.1.1 基本类型

我们基础框架的起点是马丁-洛夫类型论，其中包含以下类型：

1. 空类型 0。2. 单位类型 1。3. 自然数的类型 $\mathbb{N}$。4. 类型构造子 List(-)，它为每个类型 A 给出由该类型上的列表（或单词）组成的类型 List(A)。5. 类型构造子 (-) $\times$ (-)，它为每对类型 A 和 B 给出积类型 $A \times B$。6. 类型构造子 (-) + (-)，它为每对类型 A 和 B 给出和类型 $A + B$。7. 类型构造子 Σ(-, -)，它为每个类型 A 以及每个以 A 为指标的类型族 $(B_a)_{a:A}$，给出依赖和类型 $\Sigma(A, B)$。8. 类型构造子 Π(-, -)，它为每个类型 A 以及每个以 A 为指标的类型族 $(B_a)_{a:A}$，给出依赖积类型 $\Pi(A, B)$。9. 类型构造子 $\mathrm{Id}_{(\text{-})}$(-, -)，它为每个类型 A 以及其中每对元素 $a, b : A$，给出表示它们之间同一或相等关系的类型 $\mathrm{Id}_A(a, b)$。

注记 2.1.1。 上文的类型（3）与（4）是归纳类型的例子，其形式化说明借助W-类型的一般机制给出。这些类型是我们所感兴趣的仅有的W-类型实例，因此我们更倾向于直接介绍它们。尽管如此，我们仍讨论它们借助W-类型的表示，见第2.3节。

记法

给定一个类型 A 以及一个以 A 为指标的类型族 $(B_a)_{a:A}$，我们将依赖积类型与依赖和类型分别记为

$$\Pi_{(x:X)} Y_x \quad \text{and} \quad \Sigma_{(x:X)} Y_x.$$

依赖积类型有时称为依赖函数类型或 Π-类型。若所考虑的类型族 $(B_a)_{a:A}$ 为常值，则我们将 $\Pi_{(a:A)} B_a$ 简记为 $A \to B$，并称之为函数类型，或在需要进一步澄清时称为非依赖函数类型 。

给定 $a : A$ 与 $b : B(a)$，$\Sigma_{(a:A)} B_a$ 的元素用元组记法 (a, b) 表示。Π-类型的元素通过 λ-抽象构造，记为 $\lambda x.t$ 或 $x \mapsto t$。

单位类型的唯一构造子记作$\star$。$\mathbb{N}$的两个构造子记作零和后继。和类型 $A + B$ 的构造子记作 $\mathrm{inl}(a)$ 和 $\mathrm{inr}(b)$。对于特殊情形 $2 :\equiv 1 + 1$，我们定义了更直观的记法：$0 :\equiv \mathrm{inl}(\star)$ 和 $1 :\equiv \mathrm{inr}(\star)$。我们用 ε表示空列表；将元素 x 前置到列表 s的操作记作 xs。对于列表 s和 t的连接，我们也采用相同的记法，写作 st。

对于恒等类型，我们常使用更具提示性的记号 $a =_A b$for $\mathrm{Id}_A(a, b)$。如果类型可由上下文明确，我们会进一步将其简写为 $a = b$。给定某个

元素 $a : A$，其与自身的恒等类型构造子记作 $\mathrm{refl}_a : a =_A a$。此外，我们会仔细区分判断相等与恒等类型，不会将符号 (-) ≡ (-) 和 (-) = (-) 互换使用。前者始终表示判断相等，后者始终表示恒等类型。最后需要说明的是，我们使用 (-) :≡ (-) 引入新的定义相等，遵循 [Uni13] 的约定。定义新函数时，我们通常将 $f :\equiv \lambda x.t$ 简写为 $f(x) :\equiv t$，遵循标准约定。

2.1.2 类型论中的公理

在类型论语境中，公理是某个特定类型的一个元素，该类型被声明为存在，且独立于该类型的引入规则与消去规则。至少有两个原因使得在类型论中使用公理存在问题：

> 1. 用公理扩展基础系统可能很危险，因为这会带来向系统中引入不一致性的风险。2. 类型论中公理的计算内容并未得到规定，因为它们并非通过具有明确计算行为的引入与消去原理构造而成。这意味着，使用公理的证明，其计算解释并不明确，这违背了类型论数学观的一项核心要求：阐明构造性证明的计算内容。

在我们的论述中，我们将使用若干原则，并称之为公理，尽管我们对这一术语的用法略有不同。在本文中，我们将基础框架公理化，而不采用某种具体的类型论实现。因此，对我们而言，“公理”仅仅是关于基础框架的一项假设；使用这一术语并不意味着我们认同将其元素视为未解释常量的观点。

我们将通过仅使用那些要么由单值性公理推出、要么由某些表现良好的高阶归纳类型的存在性推出的公理，来规避上述问题。这两者均已知是一致的，并且容许计算解释。例如，我们所使用的公理在立方类型论中均为定理 [CCHM18]。

2.2 宇宙

我们在本章引言中说明，马丁-洛夫类型论的所有项本质上都是带类型的。这就引出了如何为类型本身指派类型的问题。这类支配类型之结构的类型称为宇宙。就我们对locale理论的可断言性发展而言，宇宙至关重要，因为它们为类型提供了大小 这一概念。这支撑了我们基础框架的谓词性。

2.2.1 宇宙运算

我们类型论设定中的宇宙结构，与Agda证明助手 [NDCA+07；Nor09]以及 Escardó 的表述 [Esc19，

§2.4]. 宇宙构成一个层级，其中的宇宙依次变大。我们不假设这个层级具有累积性，也不假设它不具有累积性。该层级通过以下运算形式化定义：

- **基础宇宙**。存在一个基本宇宙 $\mathcal{U}_0$，称为基础宇宙，它构成了宇宙层级的基级。
- **后继运算**。存在一个运算 $(\text{-})^+$，它为每个宇宙 $\mathcal{U}$ 给出其后继宇宙，记作 $\mathcal{U}^+$。
- **最大运算**。存在一个运算 $(\text{-}) \sqcup (\text{-})$，它给出每一对宇宙 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的最小上界 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$。

我们保留花体字母 $\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$，……作为取值于宇宙的变量。此外，我们注意到，有时在需要更明确表述时，会使用术语 $\mathcal{U}$-类型来指居于宇宙 $\mathcal{U}$ 中的类型。

注记2.2.1。在第2.1节中，我们使用记号$(B_a)_{a:A}$ 表示一个以 A为指标的类型族，但没有解释它在类型论中的精确表示。引入宇宙之后，我们可以明确说明：一个居于宇宙$(B_a)_{a:A}$ 中的类型族就是一个函数：$B\ A \to \mathcal{U}$。

2.2.2 基本类型的宇宙规则

在此宇宙结构下，我们假定第2.1 节中给出的类型按如下方式被赋予宇宙：

1. 空类型 0 与单位类型 1 在每个宇宙中都有一个副本。当需要进一步澄清时，我们用下标表示它们的宇宙，并写作 $\mathbf{0}_{\mathcal{U}}$ 和 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$。2. 类型 $\mathbb{N}$ 在每个宇宙 $\mathcal{U}$中都有一个副本。3. 对每个类型 $X\colon \mathcal{U}$，类型列表(X)是宇宙 $\mathcal{U}$的元素。4. 对每个类型 $X\colon \mathcal{U}$以及每一对元素 $x, y\colon X$，恒等类型$x =_X y$ 是宇宙 $\mathcal{U}$的元素。5. 对每一对类型 $X\colon \mathcal{U}$与 $Y\colon \mathcal{V}$，和类型 $X + Y$与积类型$X \times Y$都属于宇宙 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$。6. 对每一对类型 $X\colon \mathcal{U}$ 以及类型族 $Y\colon X \to \mathcal{V}$，依赖积$\prod_{(x\colon X)} Y(x)$ 与依赖和 $\sum_{(x\colon X)} Y(x)$属于宇宙 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$。

若上述归纳定义类型是用 W-类型定义的，如注记 2.1.1 所述，则可以将这些宇宙规则视为 W-类型的宇宙规则（定义2.3.2）的特例来得到。然而，我们倾向于直接给出这些规则，而不借助 W-类型的一般性。

2.3 W-类型

我们在注记 2.1.1中提到，第 2.1.1 节给出的一些基本类型是归纳生成类型的例子。归纳生成类型这一一般概念的形式化说明，是通过 W-类型 [NPS90，§I15],这一机制给出的。本节将对此作简要概述。

2.3.1 $\mathcal{W}$-类型的定义

定义 2.3.1。 W-类型构造子 $\mathsf{W}_{(-),(-)}$ 对每个类型 $A : \mathcal{U}$以及每个由 A索引的类型族 $B : A \to \mathcal{V}$，给出一个类型 $\mathsf{W}_{A,B}$。该类型只有一个构造子 $\mathsf{sup} : \prod_{(a:A)} \left((B(a) \to \mathsf{W}_{A,B}) \to \mathsf{W}_{A,B}\right)$，并具有以下归纳原理：对于每个类型族 $Y : \mathsf{W}_{A,B} \to \mathcal{T}$，如果对每个 $a : A$ 和 $f : B(a) \to \mathsf{W}_{A,B}$，类型

$$\left(\prod_{(b:B(a))} Y(f(b))\right) \Rightarrow Y(\mathsf{sup}(a, f)),$$

是可居留的，那么我们有 $\prod_{(w:\mathsf{W}_{A,B})} Y(w)$。

上述归纳原理的见证记作 wrec。

定义 2.3.2 （W-类型的宇宙规则）。 W-类型按照以下规则指定宇宙：给定某个类型 $A : \mathcal{U}$ 和一个类型族 $B : A \to \mathcal{V}$，类型 $\mathsf{W}_{A,B}$ 属于宇宙 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$。

上述 W-类型定义的关键思想是，每个归纳生成类型都由两个部分组成：

- 一种构造子名称类型，
- 一个类型族，为每个构造子指定子树选择子。

这正是 W-类型构造子所编码的内容：类型 A 是构造子名称的类型，而类型族 $B : A \to \mathcal{V}$ 给出了每个构造子 $a : A$ 对应的子树标签类型。引入原理 sup 接着取（1）一个构造子 $a : A$，以及（2）一个函数，用于编码如何针对每个 $b : B(a)$ 构造一个更小的 $\mathsf{W}_{A,B}$的元素，并返回 $\mathsf{W}_{A,B}$的一个元素。

2.3.2 W$\mathcal{W}$-类型的例子

让我们来看一个例子，让内容更具体一些。

例 2.3.3. 自然数类型是 W-类型的一个典型例子。我们展示如何在给定的宇宙 $\mathcal{U}$中构造类型 $\mathbb{N}$ 的一个副本。由于类型 $\mathbb{N}$ 有两个构造子，我们选择 $A :\equiv 2_{\mathcal{U}}$。这两个构造子的类型分别是 $\mathsf{zero} : \mathbb{N}$ 和 $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。前者不带参数，而后者接受一棵子树。为对它们进行编码，我们定义类型族 $B : A \to \mathcal{U}$ 如下：

$$\begin{aligned} B(0) &:\equiv \mathbf{0}_{\mathcal{U}} \\ B(1) &:\equiv \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

接下来，我们使用 $\mathsf{W}_{A,B}$ 的 sup 构造子，将这两个构造子编码为

$$\begin{array}{ll} \mathsf{zero}' : \mathsf{W}_{A,B} & \mathsf{succ}' : \mathsf{W}_{A,B} \to \mathsf{W}_{A,B} \\ \mathsf{zero}' :\equiv \text{上确界(0,0-消去)} & \text{后继}'(w) :\equiv \mathsf{sup}(1, \star \mapsto w) \end{array}$$

例2.3.4。对于每个类型 $X:\mathcal{U}$，类型 List(X) 都可以编码为一个 W-类型。我们定义 $A_X :\equiv \mathbf{1} + X$，因为我们有一个空列表的构造子，以及 X 个 cons 构造子。我们将类型族 $B: A_X \to \mathcal{U}$ 定义为

$$\begin{aligned} B(0) &:\equiv \mathbf{0}_{\mathcal{U}} \\ B(1) &:\equiv \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

空构造子和 cons 构造子随后编码为

$$\begin{array}{lll} \text{空} & : & \mathsf{W}_{A_X,\,B} \\ \text{空} & :\equiv & \sup(0,\mathbf{0}\text{-消去}) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathsf{cons} & : & X \to \mathsf{W}_{A_X,\,B} \to \mathsf{W}_{A_X,\,B} \\ \mathsf{cons}(x,\ w) & :\equiv & \sup(\mathsf{inr}(x), \star \mapsto w) \end{array}$$

类型族 $X \mapsto \mathsf{W}_{A_X,\,B}$ 等价于类型族 List : $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$。

我们还要指出，W-类型有一种推广形式，称为指标化 W-类型，可以用类似的方式对归纳定义的类型族进行编码。这里不介绍带指标的 W 类型，因为我们的推导中用不到它们。

2.4 逻辑的 Curry-Howard 诠释

集合论是一种具有两个层次的基础系统：首先从一阶逻辑的逻辑层出发，然后用它来表述集合理论的公理，例如策梅洛-弗兰克尔集合论。与此相反，逻辑在类型论中并无特殊地位；它是通过赋予类型的某个片段以逻辑解读而得到的。

这一思想源自所谓的 逻辑的 *Curry-Howard* 解读 [其69]中类型 A 被视为命题，而类型判断 $a: A$ 则被解读为表达项 a 构成命题 A的证明。根据这种解读，类型对应以下逻辑含义：

- 空类型$\mathbf{0}$ 被解释为恒假 $\bot$。
- 单位类型$\mathbf{1}$被解释为真 $\top$。
- 积类型 $A \times B$ 被解释为逻辑合取 $A \wedge B$。
- 和类型 $A + B$ 被解释为逻辑析取 $A \vee B$。
- 函数类型 $A \to B$ 被解释为逻辑蕴含 $A \Rightarrow B$。
- 类型族 $B: X \to \mathcal{U}$ 被解释为类型 X上的谓词。
- 命题 A 的否定相应地由类型 $A \to \mathbf{0}$给出。
- 依赖积类型 $\prod_{(a:A)} B(a)$ 被解释为全称量词 $\forall a: A.\, B(a)$。
- 依赖和类型 $\sum_{(a:A)} B(a)$ 被解释为存在量词 $\exists a: A.\, B(a)$。
- 如果类型 X和 Y之间存在函数 $f: X \to Y$和 $g: Y \to X$，那么它们就被视为逻辑等价 命题。

在这种对类型的逻辑解读下，断言命题 A 成立，就是断言类型 A 可居留。此后我们将默认采用这种解释；如果显然是把类型视为命题，就不再明确断言它们可居留。例如，我们只说“B 只要 A”，而不说“B 可居留

只要 A 可居留”。

例 2.4.1. 逻辑陈述 $\forall n :\ \mathbb{N}.\ n = \text{零} \vee \exists m :\ \mathbb{N}.\ n = \text{后继}(m)$，表达每个自然数要么是零，要么是某个自然数的后继；根据柯里-霍华德原理，它被解释为

$$\Pi_{(n:\mathbb{N})}\ (n = \mathsf{zero}) + \left(\Sigma_{(m:\mathbb{N})} n = \mathsf{succ}(m)\right).$$

在某些类型论中，有一个专门的宇宙，用来容纳那些被视为命题的类型。最典型的例子是构造演算 [CH88] (简称 CoC ）。在 CoC中，有一个宇宙Prop ，其中包含被解释为命题的类型。然而，为命题这一概念是一种判断，而非 CoC 中的内部陈述。

单值类型论的一项显著创新，是它使我们能够使用命题类型的内部概念，从而可以在类型论本身内部定义命题类型的类型。这带来了对柯里-霍华德原理更精细的解释。在第 2.12 节中，我们将讨论单值类型论中这种更精细的逻辑观，并将其与本节介绍的朴素形式进行对比。

2.5 恒等类型

我们在第 2.1 节中简要提到了恒等类型。本节将重新探讨它，重点关注其技术细节，并讨论其同伦论解释。

2.5.1 形式定义

定义 2.5.1 （恒等类型）。类型 X 的恒等类型是由单个构造子生成的归纳类型族 $(\text{-}) =_X (\text{-})$:

$$\mathsf{refl}_{(\text{-})} : \Pi_{(x:X)}\ x =_X x.$$

它的消去原理通常称为 J-规则，其表述如下：对于每个族

$$C : \Pi_{(x,y:X)}\ (x =_X y \to \mathcal{U}),$$

以及每个函数 $c : \Pi_{(x:X)} C(x,\ x,\ \mathsf{refl}_x)$，我们都有一个元素

$$f : \Pi_{(x,y:X)}\ \Pi_{(p:x=_X y)}\ C(x, y, p)$$

满足计算规则 $f(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv c(x)$。

给定类型 X 与类型族 C （如上一定义中所述），该消去原理的见证记为

$$\mathsf{J}_X^C : \left(\Pi_{(x:X)}\ C(x, x, \mathsf{refl}_x)\right) \to \Pi_{(x,y:X)}\ \Pi_{(p:x=_X y)}\ C(x, y, p).$$

在实践中，直接使用这一消去原理往往相当繁琐。类型论中的标准做法是，利用J-规则显式证明恒等类型满足若干基本性质，然后仅使用这些性质进行工作。我们接下来处理这一点。

2.5.2 传输与路径上的作用

现在我们证明消去原理 J 的两个直接推论：所谓的传输 引理和路径上的作用 引理。实际上，使用这些推论远比直接使用J规则方便得多。

引理 2.5.2 (传输)。 对于每个类型 $X\colon \mathcal{U}$ 和类型族 $Y\colon X \to \mathcal{V}$，我们都有一个元素

$$\mathsf{transport}^{Y} : \Pi_{(x,x' :X)}\, x = x' \to Y(x) \to Y(x'),$$

满足计算规则 $\mathsf{传输}^{Y}(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{id}$，对每个 $x\colon X$ 均成立。

证明。 考虑一个类型 $X\colon \mathcal{U}$ 和类型族 $Y\colon X \to \mathcal{V}$。定义

$$C(x_1, x_2, p) :\equiv Y(x_1) \to Y(x_2),$$
$$c(x) :\equiv \mathsf{id}.$$

函数 $\mathsf{transport}^{Y}$ 定义为 $\mathsf{transport}^{Y}(x,\ x',\ p,\ y) :\equiv \mathsf{J}^{X}_{C}(c,\ x,\ x',\ p,\ y)$。 □

传输引理有时称为类型论的相同者不可区分原理。它指出，如果某个类型中的两个项相等，那么没有任何谓词（即类型族）能够区分它们。

作为传输引理的进一步推论，我们得到如下结果。

引理 2.5.3。 对于每个函数 $f\colon\ X \to Y$ 我们都有一个元素

$$\mathsf{ap}_f : x =_X x' \to f(x) =_Y f(x').$$

证明。令 $f\colon X \to Y$ 定义类型族 $Z(x_1, x_2) :\equiv f(x_1) =_Y f(x_2)$。接着，我们使用引理 2.5.2 定义 $\mathsf{ap}_f(x, x', p) :\equiv \mathsf{transport}^{Z(x,-)}(x, x', p, \mathsf{refl}_f(x))$）。 □

项 ap 是项 作用于路径（action on paths）的缩写，源自恒等类型的同伦解释。我们将在下一节讨论。

引理 2.5.4。 对于每个类型 X，恒等类型 $(\text{-}) =_X (\text{-})$ 具有对称性和传递性。

证明。 设 $X\colon \mathcal{U}$ 是一个类型。

对于对称性，考虑两个元素 $x,\ y\colon X$，并令 $p\colon x =_X y$。我们需要构造一个类型 $y =_X x$ 的元素。定义类型族 $P(z) :\equiv z =_X x$

并运用传输。很容易看出，我们有一个元素

$$\mathsf{transport}^P(x, y, p, \mathsf{refl}_x) : y =_X x.$$

对于传递性，设 x、y、z: X，并考虑证明 p: $x =_X y$和 q: $y =_X z$。我们需要构造类型 $x =_X z$ 的一个元素。我们定义 $P(w) :\equiv x =_X w$。于是传输引理给出

$$\mathsf{transport}^P(y, z) : y =_X z \to x =_X y \to x =_X z,$$

利用它，我们可以轻松构造类型 $x =_X z$ 的一个元素，如下所示:

$$\mathsf{transport}^P(y, z, q, p) : x =_X z.$$

□

2.5.3 Σ-类型的恒等类型

考虑两个对 $(x_1、\ y_1)$ 和 $(x_2、\ y_2)$，它们属于依赖和类型 $\Sigma_{(x:\ X)}Y(x)$，其中 X: $\mathcal{U}$，且 Y: $X \to \mathcal{V}$是一个类型族。自然会认为，恒等类型

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

当且仅当两个分量之间的恒等类型可居留时，它才可居留。在类型论中，事实确实如此，不过由于 $Y(x)$ 中存在依赖性，需要谨慎处理。

引理 2.5.5. 设 X: $\mathcal{U}$，并设 Y: $X \to \mathcal{V}$。考虑两个对 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，它们是类型 $\Sigma_{(x:\ X)}Y(x)$ 的元素。恒等类型 $(x_1, y_1) =(x_2, y_2)$与以下类型逻辑等价:

$$\Sigma_{(p\,:\,x_1 =_X x_2)}\mathsf{transport}^Y(x_1, x_2, p, y_1) = y_2.$$

证明。 设 X: $\mathcal{U}$，并设 Y: $X \to \mathcal{V}$。考虑类型 $\Sigma_{(x:\ X)}Y(x)$ 的两个元素 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$。

(⇛由路径归纳，只需证明该蕴涵对 $\mathsf{refl}_{(x_1,y_1)}$成立。于是，对 $(\mathsf{refl}_{x_1},\mathsf{refl}_{y_1})$ 属于以下类型:

$$\Sigma_{(p\,:\,x_1 =_X x_1)}\mathsf{transport}^Y(x_1, x_1, p, y_1) = y_1.$$

(⇐) 根据 Σ-类型的归纳原理和路径归纳，我们需要证明该蕴涵对于 refl_{x_1}: $x_1 = x_1$ 和 refl_{y_1}: $\mathsf{transport}^Y(x_1, x_1, \mathsf{refl}_{x_1}, y_1) = y_1$ 成立。构造子 $\mathsf{refl}_{(x_1,y_1)}$ 属于类型 $(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$。 □

我们稍后将证明，上述逻辑等价可以扩展为满的类型等价。不过，要确定恰当的类型等价概念还需要一番讨论，因此我们暂且搁置这一事实。

2.5.4 恒等类型的同伦解释

催生单价数学的关键洞见，源于对类型的如下语义解释：

1. 类型 X 可视为一个空间（在同伦等价意义下）；从这个角度看，2. 恒等类型 $x =_X y$ 可解释为从空间 X中的点 x 到点 y 的路径类型。

在此语境下，

- 等式的传递性对应于路径复合，
- 等式的对称性对应于路径反演，
- J-规则被解释为一种J形式的路径归纳。

为突出这一观点，我们将 $y =_X x$的元素记为$p : x =_X y$ 经对称性（引理 2.5.4）得到的结果 p^{-1}。类似地，给定恒等式的两个证明$p : x =_X y$ 和 $q : y =_X z$，我们将 $x =_X z$的元素记为经恒等式的传递性（引理 2.5.4）得到的结果

$$p \bullet q : x =_X z.$$

在代数拓扑中，空间根据其同伦群的复杂程度进行分类。上述观察指出，恒等类型可以理解为路径的类型，这为将这一技术引入类型论铺平了道路，由此产生了根据恒等类型的复杂程度对类型进行分类的想法。不过，需要谨慎行事，以确保类型论的框架适合这种解释。

恒等类型的唯一性

截至目前，我们所见到的构造恒等类型元素的唯一方式，是使用refl 构造子，见定义 2.5.1。因此，构造路径似乎只有一种方式：使用 refl_x 来构造证明 $x =_X x$。换言之，乍看之下，恒等类型的证明结构似乎是平凡的。

“证明等同性至多只有一种方式”这一说法称为**K** 公理 [Str93]。

定义 2.5.6 (K 公理)。 给定一个类型 X，定义

$$\mathrm{K}(X) \quad :\equiv \quad \prod_{(x,y:X)} \prod_{(p,q:x=_X y)} p = q.$$

K 公理 于是指出，每个类型 X 都满足 $\mathrm{K}(X)$。

K 公理已知独立于我们在第2.1节中介绍的基本类型论，但又与之相容。因此，我们可以选择采纳它，也可以不采纳。采纳该公理会得到一种类型论，其中不可能对恒等类型作出丰富的同伦解释，因为该公理断言所有类型都具有平凡的路径类型。

这是单值类型论的构想得以出现的分岔点：通过不采纳**K** 公理，我们保留了采纳某些与之矛盾的其他公理的可能，这些公理通过提供构造恒等类型之元素的新方式而与之相矛盾。这些是：

1. 单值性公理，它使我们能够构造恒等类型 $A =_{\mathcal{U}} B$ 的非平凡元素，这些元素存在于类型 A， B： $\mathcal{U}$ 之间。2. 高阶归纳类型，这类类型配备了除 refl 之外的恒等构造子。

在例 2.10.5中，我们将考察一个针对**K** 公理的具体反例，该反例是利用单值性公理构造的。

初探同伦层级

在非平凡恒等类型成为可能的类型论设定中，可以依据恒等类型的复杂程度对类型进行合理分类。这引出了类型的同伦层级谱系 [Uni13，§7。1]。

具有最简单同伦结构的类型是可缩类型。

定义 2.5.7 (可缩类型 [Uni13，定义 3.11。1])。 类型 X 称为可缩的 (也称为 单元素集)，如果它恰好有一个元素，即类型

$$\text{is-contractible}(X) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(c:X)}\Pi_{(x:X)}\, x =_X c$$

是可居留的。

这个唯一的元素有时称为类型 X 的收缩中心 。

在可缩类型之后，我们介绍命题类型，它们是至多有一个 元素的类型：

定义 2.5.8。 类型 X 称为命题 （也称为子单元素），如果它至多有一个元素，即满足

$$\text{is-prop}(X) \quad :\equiv \quad \Pi_{(x,y:X)}\, x =_X y.$$

我们将命题类型的类型定义为

$$\Omega_{\mathcal{U}} \quad :\equiv \quad \Sigma_{(X:\mathcal{U})}\text{is-prop}(X).$$

在 HoTT/UF 文献中，有时将其记作 $\text{hProp}_{\mathcal{U}}$。

例 2.5.9. 单位类型 **1** 是可缩的，其中心为$\star$： **1**。根据**1** 的消去原理，很容易得出其中每个元素都等于$\star$。空类型**0** 是一个命题，但不可缩，因为它没有任何元素。

例 2.5.10. 对于每个类型 X，类型 $X \to \mathbf{1}$ 和 $\mathbf{0} \to X$都可缩（假设函数外延性成立）。前者以函数 $!_1(x) :\equiv \star$作为其收缩中心：容易看出，每个 f： $X \to \mathbf{1}$ 都等于 $!_1$，，因为

$f(x) = \star = !_1(x)$。至于后者，根据类型 $\mathbf{0}$的归纳原理可得到一个函数 $\mathbf{0} \to X$，它与任何其他这样的映射都平凡地相等。

例 2.5.11。 每个可缩类型都是命题，因为任意两个元素都等于收缩中心，因而也彼此相等。

引理 2.5.12。 类型 X 可缩，当且仅当它是有元素的命题 .

下一个同伦层级是集合：恒等类型平凡的类型。

定义 2.5.13。 如果类型 X 满足$\mathbf{K}(X)$，则称其为集合（更明确地说，是同伦集）。换言之，集合是一种类型 X，其性质是：对于任意一对元素 x，$y\colon X$，恒等类型 $x =_X y$ 是一个命题。

稍后我们将讨论这一层级的一般定义，并定义 n-类型 [Uni13，定义 7.1。1]。不过，目前对单值类型论核心思想的初步说明，已足以让我们开始构建基础框架的基础。

2.5.5 结构与性质

如果一个类型 X 按照定义 2.5.8的意义是一个命题，我们就认为它表达了一种性质。其思想是，命题类型天然是证明无关的，因为类型的命题性意味着断言不可能存在两个不同的证明。如果一个类型 X 不是命题，这意味着它具有非平凡的证明结构。在单值类型论中，必须谨慎区分结构与性质。

例 2.5.14。 我们将例 2.4.1中的逻辑陈述翻译成类型论中的表达式

$$\Pi_{(n:\mathbb{N})}\,(n = \mathsf{zero}) + \left(\Sigma_{(m:\mathbb{N})} n = \mathsf{succ}(m)\right), \tag{\dagger}$$

遵循命题即类型的 Curry-Howard 观点。对于每个 $n:\ \mathbb{N}$，类型

$$(n = \mathsf{zero}) + \left(\Sigma_{(m:\mathbb{N})} n = \mathsf{succ}(m)\right),$$

是自然数类型的 性质。这意味着类型（†）也是一种性质。

现在来看一个通过柯里-霍华德原理得到的类型示例，它不是命题。

例 2.5.15. 令 $\alpha\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，并考虑命题 $\exists_{(i:\mathbb{N})} \alpha(i) = 零$，它表示 α 有一个根。通过柯里-霍华德原理将其转换为类型论，得到

$$\Sigma_{(i:\mathbb{N})} (\alpha(i) = \mathsf{zero}).$$

然而，这是一种结构，而不是性质，因为一个序列 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 可以有不同的根。因此，应将其视为 α 的根的类型，而不是表示 α 有一个根的性质。

这个例子说明，我们在第2.4节将“命题即类型”原则称为“朴素”的用法是有道理的。在一种仔细按照同伦层级对类型进行分层的语境中，将逻辑命题翻译成并非命题的类型，会造成误导。在第2.12节，我们将重新探讨这个问题，并说明单值类型论如何为我们提供规避这一问题的手段。

在我们的论述中，我们将使用命题外延性公理，即逻辑等价的性质是相等的。

定义 2.5.16(公理:)命题外延性)。若宇宙 $\mathcal{U}$ 满足命题外延性，则对于每一对命题 P， Q : $\Omega_{\mathcal{U}}$ 满足$P \Rightarrow Q$且 $Q \Rightarrow P$，恒等类型 $P = Q$中都有一个元素。命题外延性公理断言所有宇宙都满足命题外延性。

2.6 可判定类型与集合

本节将讨论可判定类型的概念，随后介绍 Hedberg 定理 [Hed98；KECA17], 该定理指出，根据定义 2.5.13，所有可判定类型都是集合。

2.6.1 类型的可判定性

在逻辑中，排中律断言每个命题非真即假。若将朴素的命题即类型翻译应用于此，我们会得到

$$\Pi_{(A:\mathcal{U})} (A + \neg A).$$

在构造性基础设定下，一般而言，没有理由认为上述类型可居留。满足这一条件的类型称为可判定类型。

定义 2.6.1。若类型 X 具有和类型 $X + \neg X$ 的一个元素，则称其为可判定。

定义 2.6.2。 如果对于每一对元素 $x, y : X$，恒等类型 $x =_X y$ 都是可判定的，则称类型 X 具有可判定相等性（或称为离散的）。

例 2.6.3. 每个命题 P（按照定义 2.5.8 的意义）都有可判定相等性，因为恒等类型 $p =_P q$ 总是可居留的，因此是可判定类型。

引理 2.6.4. 命题 $P:\ \Omega_{\mathcal{U}}$ 可判定，当且仅当 $P = \top_{\mathcal{U}}$ 或 $P = \bot_{\mathcal{U}}$，假设命题外延性和函数外延性成立。

证明。 事实是， $\top_{\mathcal{U}}$ 和 $\bot_{\mathcal{U}}$ 都是可判定命题，这一点显而易见。令 $P:\Omega_{\mathcal{U}}$为一个可判定命题。若 P可居留，则显然 $\top \Rightarrow P$。因此可以轻易构造一个逻辑等价 $P \Leftrightarrow \top$，并利用命题外延性得出底层类型相等。若 P 不可居留，也就是说，我们有一个 $\neg P$的元素，则根据构造可得 $P \Rightarrow \bot$。同样，借助命题外延性，可知所考虑命题的底层类型相等。此外，由于「是命题」本身是一个命题（根据引理2.6.13，假设函数外延性成立），我们可以应用引理2.5.5，得出在$P = \top$前一种情形下有 $P = \bot$，而在后一种情形下有。 □

定义 2.6.5（朴素排中律）。 朴素排中律指出，每个类型都是可判定的。

这一公理独立于第 2.1.1 节中的基础类型论，但与之相容。然而，正如 [Uni13，推论 3.2 所示，它与单值性公理不相容。7]。

例 2.6.6。 类型 $\mathbb{N}$ 具有可判定相等性，其见证由以下类型族给出：

$$\begin{aligned} \mathrm{nateq}(\text{零},\ \text{零}) &:\equiv\ \ \mathbf{1} & \mathrm{nateq}(\text{后继}(m),\ \text{零}) &:\equiv\ \ \mathbf{0} \\ \mathrm{nateq}(\text{零},\ \text{后继}(n)) &:\equiv\ \ \mathbf{0} & \mathrm{nateq}(\text{后继}(m),\ \text{后继}(n)) &:\equiv \mathrm{nateq}(m,\ n) \end{aligned}$$

很容易看出，$\mathrm{nateq}(m,\ n)$ 的值要么是 $\mathbf{1}$，要么是 $\mathbf{0}$。此外，通过直接归纳法可以证明 $(m =_{\mathbb{N}} n) = \mathrm{nateq}(m,\ n)$。

2.6.2 可判定类型的集合性

类型论中有一个著名定理，由 Michael Hedberg 提出 [Hed98], ，指出每个具有可判定相等性的类型都是集合。这或许是证明某些类型是集合时最有用的证明技巧。这里，我们将通过 Kraus、Escardó、Coquand 和 Altenkirch [KECA 17]最近对 Hedberg 定理的重新表述来介绍该定理。更具体地说，本文的介绍遵循 Escardó 的Agda开发工作 [Esc12]。

引理 2.6.7。 对于每个类型 X、元素 $x:\ X$，以及一个由 X 索引的族

$$\varphi : \Pi_{(y:X)}\, x =_X y \to x =_X y$$

恒等类型上的自映射的等同性

$$p = \varphi_x(\mathrm{refl}_x)^{-1} \bullet \varphi_y(p),$$

对于每个 $y:\ X$ 以及每个等同证明 $p:\ x =_X y$。

证明。 由路径归纳法可直接得出。 □

定义 2.6.8 （弱常函数）。 若函数 $f: X \to Y$ 满足：对于任意一对元素 $x, x': X$，$f(x) =_Y f(x')$，则称其为弱常。

引理 2.6.9 （Hedberg 引理）。 对于每个类型 X 以及每个 $x:\ X$，若存在一个弱常值自映射族

$$\varphi : \Pi_{(y:X)} (x =_X y \to x =_X y),$$

那么对于每个 $y:\ X$，恒等类型 $x =_X y$ 都是一个命题。

证明。 设 X为一个类型，并考虑一个元素 $x: X$。假设对于每个 $y: X$，都存在一个弱常值自映射

$$\varphi_y : x =_X y \to x =_X y.$$

要证明对于每个 $y: X$，类型 $x =_X y$ 都是一个命题，考虑任意 $y: X$，并令 $p, q: x =_X y$。

$$\begin{aligned} p &= \varphi(\mathrm{refl}_x)^{-1} \bullet \varphi(p) && [\text{引理 2.6.7}] \\ &= \varphi(\mathrm{refl}_x)^{-1} \bullet \varphi(q) && [\varphi \text{ 是弱常值的}] \\ &= q && [\text{引理 2.6.7}] \end{aligned}$$

□

定理 2.6.10 (Hedberg [Hed98])。 每个具有可判定相等性的类型都是集合。

证明。 设 X 是一个具有可判定相等性的类型。我们需要证明，对于每个 $x =_X y$，恒等类型 $x, y: X$ 是一个命题。根据引理 2.6.9，只需构造一个弱常值自函数族

$$\Pi_{(x,y:X)} x =_X y \to x =_X y$$

。令 $x, y: X$。我们通过对其可判定性的证明进行分类讨论，证明存在一个作用于 $x =_X y$ 上的弱常值自函数。我们有两种情形：要么有一个 $\neg(x =_X y)$ 的证明，要么有某个元素 $p: x =_X y$。在前一种情形中，很容易看出显然的映射 $x =_X y \to \mathbf{0} \to x =_X y$ 是弱常值的。在后一种情形中，将所有元素都映射到恒等证明 p的映射 $x \mapsto p$构成一个弱常值自映射。 □

例 2.6.11. 类型 $\mathbb{N}$自然数集是一个集合，因为它具有可判定相等性，如例2.6.6所示。

例 2.6.12. 每个命题都是一个集合，因为根据例2.6.3，每个命题的相等性都是可判定的。

我们还将以下事实视为上述例子的有用推论。

引理 2.6.13。 对于每个类型 X，类型 是-命题(X) 是一个命题。

证明。 由引理 2.9.8 和例 2.6.12得出。 □

引理 2.6.14。 对于每个类型 X，类型 是-可缩(X)表示 X是可缩的，这是一个命题

证明。 令 X为一个类型，并考虑两个证明 $(c_1,\ \varphi_1)$，$(c_2,\ \varphi_2)$ 表明它是可缩的。由引理 2.5.5可知，只需构造一个证明 $p:\ c_1 = c_2$ 以及一个证明

$$q : \mathsf{transport}(c_1, c_2, p, \varphi_1) = \varphi_2.$$

函数 φ_2 给出一个证明 $\varphi_1(c_2):\ c_1 = c_2$。由于命题根据例 2.6.12 是集合，因此必有 传输$(c_1, c_2, \varphi_1(c_2)\ \varphi_1) = \varphi_2$，由函数外延性可得。 □

2.7 函数外延性与可逆函数

本节讨论函数外延性公理，以及可逆映射和左可消去映射的概念。

2.7.1 函数外延性公理

在类型论中，合理的预期是，函数相对于恒等类型满足函数外延性 原则。也就是说，给定一对函数 $f, g\colon X \to Y$，恒等类型 $f =_{(X\to Y)} g$应当与以下类型逻辑等价：

$$\Pi_{(x,x' : X)}\, f(x) =_Y f(x'),$$

表达函数 f与 g 外延相等。不幸的是，这在我们于第 [Str93，定理 3。17] 节介绍的基础类型论中无法证明 2.1。通常的解决办法是在类型论中以公理的形式假设函数外延性（如第 公理 2.1.2 节所述）。

为了讨论这一公理，我们首先定义两个函数的逐点相等。

定义 2.7.1 （逐点相等）。 两个依赖函数 f， $g\colon \Pi_{(x:\ X)}\ Y(x)$ 被称为外延相等或逐点相等，如果类型

$$f \sim g \quad :\equiv \quad \Pi_{(x:X)}\, f(x) =_{Y(x)} f(x')$$

是可居留的。

在对恒等类型的同伦解释下，这恰好是 f 与 g 之间的一个同伦。

定义 2.7.2（公理：朴素函数外延性）。朴素函数外延性公理指出，对于任意一对函数 $f, g\colon X \to Y$，$f \sim g$ 蕴含 $f = g$。

与第2.5.5节讨论的例子类似，上述表述是函数外延性公理的朴素形式。由于相关函数的陪域可能具有非平凡的恒等类型，因此它们可以有不同的同伦作为外延相等的见证；这意味着一般而言，这是一种结构，而非性质。我们将在第2.10.2节和第2.11节给出此类高阶群胚的例子。

2.7.2 拟逆

将逐点相等解释为同伦，这引出了类型之间同伦等价的以下概念。

定义 2.7.3（拟逆 [Uni13，§4.1]）。函数 $g\colon Y \to X$ 被称为某个函数的拟逆，该函数为 $f\colon X \to Y$，如果存在同伦

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad \text{and} \quad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y.$$

给定函数 $f\colon X \to Y$ 其拟逆类型定义为

$$\mathrm{QInv}(f) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(g:Y\to X)}(g \circ f \sim \mathrm{id}_X) \times (f \circ g \sim \mathrm{id}_Y).$$

定义 2.7.4. 函数 $f\colon X \to Y$ 被称为可逆，如果我们有 $\mathrm{QInv}(f)$ 的一个元素。

再次指出，这是所考虑概念的朴素形式，并不会作为我们的正式定义。原因在于，外延相等是结构而非性质，因此一个函数 $g\colon Y \to X$构成某个函数 $f\colon X \to Y$之逆这一事实，可能存在不同的见证。尽管如此，先把这些朴素形式确定下来仍有便利，原因有二：

1. 它们逻辑等价于其精炼形式。2. 对于集合的同伦层级（在定义 2.5.13 的意义下），它们等价于其精炼版本。

在第 2.8 节中，我们将把可逆映射的概念细化为等价的概念，它是任意类型的性质，而不只是集合的性质。

2.7.3 左可消映射

另一个有用但略显朴素的概念是左可消去映射。

定义 2.7.5 (左消去性 [Uni13，第 139]页)。 函数 $f\colon X \to Y$ 称为左可消去，如果存在一个映射

$$f(x) =_Y f(x') \to x =_X x',$$

对于每一对元素 x， $x'\colon X$。

与可逆映射的概念类似，左消去性一般来说不是一个命题；但当定义域是集合时，它总是一个命题。在第 2.8.2 节中，我们将把这一概念细化为嵌入，这类似于我们将可逆映射细化为等价。

2.8 等价与嵌入

我们在第 2.7.2 节介绍了可逆映射和左可消去映射的概念，并讨论了这些概念对于任意 n-类型并非性质这一事实。问题在于，可逆函数的概念仅对于集合才是恰当的等价概念，无法推广到任意 n-类型。本节将探讨这些概念经过细化后的版本，它们对所有类型都表现良好。

2.8.1 等价

定义2.8.2中给出的等价概念最初由 Voevodsky 提出。

定义 2.8.1 ([Uni13，定义 4.2。4])。 函数 $f\colon X \to Y$ 在点 $y\colon Y$ 上的纤维是类型

$$\mathrm{fib}_f(y) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(x:X)} f(x) =_Y y.$$

定义 2.8.2 ([Uni13，定义 4.4。1])。 函数 $f\colon X \to Y$ 称为等价，当且仅当

$$\text{is-equiv}(f) \quad :\equiv \quad \Pi_{(y:Y)}\, \text{is-contractible}(\mathrm{fib}_f(y)).$$

我们用 $X \simeq Y$ 表示类型 X 和 Y之间的等价类型。此外，给定等价 $e\colon X \simeq Y$ 我们用 e^{-1} 表示它的逆，并用 $\ulcorner e \urcorner$ 表示其底层映射 $X \to Y$。

例 2.8.3。 对于每个类型 X，其上的恒等函数 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 显然构成一个等价。我们将其记为 $\mathrm{idequiv}_X\colon X \simeq X$。

引理 2.8.4。 成为等价是一种性质。也就是说，对于每个函数 $f\colon X \to Y$ 类型 is-等价(f) 是一个命题。

证明。 直接由引理2.9.8和引理 2.6.14得出。 □

在第 2.7.2 节中，我们解释过，可逆性对于任意类型而言并不是一个命题。因此，这两个概念并不等价。不过，它们在 逻辑上 等价。

L引理 2.8.5 ( )。 函数 $f\colon\ X \to Y$ 可逆，当且仅当它是一个等价。

在单值类型论中，对于 n-类型，拥有良好性质的等价概念至关重要，因为它使得各种外延性公理得以表述。在第 2.8.3 节中，我们将使用上述等价概念给出函数外延性公理的正式表述，从而避开我们在定义 2.7.2 中所给表述的朴素性。此外，这一等价概念对于陈述单值性公理也至关重要，因为使用可逆映射所作的表述可以证明是错误的，正如 [Uni13，练习 4.6.(iii)] 所示。

2.8.2 嵌入

正如上文我们将可逆映射的概念细化为等价的概念，现在我们将左可消去映射的概念（定义2.7.5）细化为嵌入的概念。

定义 2.8.6。 函数 $f\colon X \to Y$ 称为嵌入，如果

$$\text{is-embedding}(f) \quad :\equiv \quad \Pi_{(y:Y)}\, \text{is-prop}(\text{fib}_f(y)).$$

引理 2.8.7。 对于每个函数 $f\colon X \to Y$ 类型 is- 嵌入(f) 是一个命题。

证明。 由引理 2.9.8以及“是命题”本身是一个命题这一事实（引理 2.6.13），即可立即得出。 □

引理 2.8.8( )。每个等价都是一个嵌入。

证明。 参见 [Esc19，§3。26]。 □

引理 2.8.9( )。每个嵌入都是一个左可消去映射。

证明。 参见 [Esc19，§3。26]。 □

2.8.3 函数外延性再探

在第2.7节中，我们提出了所谓的朴素的函数外延性公理，并承诺稍后给出正式定义。现在，我们已经在定义 2.8.2中确定了良好的等价概念，正如承诺的那样，现在可以重新探讨函数外延性了。

定义 2.8.10 (happly)。 对于每一对依赖函数 f， $g\colon \Pi_{(x\colon X)} Y(x)$，我们定义映射

$$\mathsf{happly}_{f,g} : f = g \to f \sim g$$

如下。设 $f, g\colon \Pi_{(x\colon X)} Y(x)$，并定义类型族 $E(h) :\equiv f \sim h$；我们定义

$$\mathsf{happly}_{f,g}(p) \quad :\equiv \quad \mathsf{transport}^{E}(f, g, p, \lambda x.\, \mathsf{refl}_x).$$

定义 2.8.11 (公理：函数外延性 [Uni13，公理 2.9.3])。 函数外延性公理指出，对于任意一对函数 $f, g\colon \Pi_{(x\colon X)} Y(x)$，映射 $\mathsf{happly}_{f,g}$ 是一个等价。

显然这是一个命题，因为如引理 2.8.4所示，等价这一性质本身是一个命题。上述 正式的 函数外延性的表述在逻辑上等价于定义 2.7.2中的朴素表述，尽管上述表述针对的是依赖函数，因此乍看之下似乎更强。这一事实最早由 Voevodsky 发现，相关说明见 [Esc19，§3。18]。

引理 2.8.12. 函数外延性与以下两个陈述都逻辑等价：

- 定义 *2.7.2* 中的朴素函数外延性*2.7.2*，
- 朴素函数外延性的依赖版本，即如下陈述：对于每一对依赖函数 $f, g\colon \Pi_{(x\colon X)} Y(x)$，我们有

$$f \sim g \; \mathit{implies} \; f = g.$$

证明。 参见 [Esc19，§3。18]。 □

2.9 类型的同伦层级

在第 2.5.4 节中，我们解释了恒等类型的同伦解释如何根据恒等类型的复杂程度，对类型进行分类。我们还讨论了可缩类型和命题类型，以及集合的例子。本节将介绍 n-类型的概念，它将这一分类推广到任意同伦层级 $n :\equiv \mathbb{N}$。这种类型分层是 HoTT/UF 的核心。

2.9.1 同伦层级的定义

我们定义一个谓词 is-of-hlevel : $\mathcal{U} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U}$，用于表达类型 $X\colon \mathcal{U}$ 属于某个同伦层级 $n\colon \mathbb{N}$ 的含义。

D定义 2.9.1 (参见 [Uni13，定义 7.1。1])。 类型 的同伦层级 $X :\equiv \mathcal{U}$ 定义为

通过归纳法定义如下：

$$\begin{aligned} \text{is-of-hlevel}(X, \text{zero}) &:\equiv \text{is-contractible}(X) \\ \text{is-of-hlevel}(X, \text{succ}(n)) &:\equiv \Pi_{(x,y:X)} \text{is-of-hlevel}((x =_X y), n). \end{aligned}$$

如果我们有 X 属于 h-层级 n，则称类型 X 为 n-类型 。

备注 2.9.2。 请注意，HoTT Book [Uni13，定义 7.1。1]采用从 -2 开始的索引约定，这与我们上文的索引约定不同。

现在，我们可以将考察过的同伦层级重构为这一概念的特殊情形。

引理 2.9.3 ([Uni13，引理 3.11。10])。 对于每个类型 X，类型 *is-of-hlevel*$(X, 1)$ 可居留，当且仅当类型 X 是一个命题。

证明。 令 X 为一个类型。

($\nRightarrow$)这一方向很容易看出。假设 X满足 is-of-hlevel$(X, 1)$，也就是说，对于任意一对元素 x，$y\colon X$，类型 $x =_X y$都是可缩的。由此立即可知 $x =_X y$ 可居留，因为可缩类型显然都是可居留的。

($\Leftarrow$) 假设 X是一个命题，也就是说，对于任意一对元素 x，$y\colon X$，类型 $x =_X y$ 都是可居留的。由于命题是集合（见例 2.6.12），我们也知道类型 $x =_X y$ 是一个命题。由引理 2.5.12 可得，恒等类型 $x =_X y$ 是可缩的。 □

推论 2.9.4. 对于每个类型 X， X是集合，当且仅当 *is-of-hlevel*$(X, 2)$。

2.9.2 同伦层级的基本性质

现在我们汇总同伦类型层级的一些关键性质。我们的目标是概述 n-类型的理论，范围仅限于我们的论述所需。因此，我们省略了许多关于同伦层级层次结构的有趣且重要的事实。若读者想详细了解，可参阅 [Uni13，§7。1]。

根据例 2.5.11，可缩类型都是命题；由引理2.9.3可知，对于每个类型 X，我们有

$$\text{is-of-hlevel}(X, 0) \Rightarrow \text{is-of-hlevel}(X, 1).$$

此外，例 2.6.12 意味着，对于每个类型 X，我们有

$$\text{is-of-hlevel}(X, 1) \Rightarrow \text{is-of-hlevel}(X, 2).$$

事实上，包含映射到下一个同伦层级可以推广到任意同伦层级 n：

引理 2.9.5([Uni13，定理 7。17])。 同伦层级具有累积性。也就是说，对每个类型 X 和每个 $n:\ \mathbb{N}$，我们都有

$$\mathit{is\text{-}of\text{-}hlevel}(X, n) \Rightarrow \mathit{is\text{-}of\text{-}hlevel}(X, \mathrm{succ}(n)).$$

证明。 设 X 为一个类型。我们用归纳法进行证明。

基例： 零。我们已在例 2.5.11 中证明了可缩类型是命题；并且在引理 2.9.3 中证明了是命题等价于具有 1 同伦层级。

归纳步骤：$\mathrm{succ}(n')$。归纳假设每个 n'-类型也是一个 $(n'+1)$-类型，并设 X 是一个 $(n'+1)$-类型。也就是说，对于每一对元素 x，$y:X$，恒等类型 $x =_X y$ 是一个 n'-类型。根据归纳假设，这意味着恒等类型 $x =_X y$ 也是一个 $(n'+1)$-类型，因此类型 X 是一个所需的 $(n'+2)$-类型。 □

引理 2.9.6 ([Uni13，推论 7.1。5])。 对于每个 n-类型 X以及每个类型 Y 若 $X \simeq Y$ 则 Y 也为一个 n-类型。

闭包性质

同伦层级在 Σ-类型下是闭的。

引理 2.9.7 ([Uni13，定理 7.1。8])。 对于每个类型 $X:\mathcal{U}$、族 $Y:X\to\mathcal{U}$ 以及 $n:\mathbb{N}$，如果 X 是一个 n-类型，且每个 Y_x 都是一个 n-类型，那么依赖和 $\Sigma_{(x:X)}Y_x$ 也是一个 n-类型。

同样，只要族 Y由 n-类型构成，无论定义域 X 的同伦层级如何，依赖函数类型 $\Pi_{(x:X)}\ Y_x$ 都是一个 n-类型。

引理 2.9.8 ([Uni13，定理 7.1。9])。 对于每个类型 $X:\mathcal{U}$、族 $Y:X\to\mathcal{U}$ 以及每个 $n:\mathbb{N}$，如果每个 Y_x 都是一个 n-类型，那么依赖积类型 $\Pi_{(x:X)}\ Y_x$ 也是一个 n-类型。

2.10 单值性公理

到目前为止，我们已经讨论了两条外延性公理：命题外延性和函数外延性。由于逻辑等价是类型等价在 $n=1$同伦层级上的特例，因此，命题外延性可以解释为：命题之间的恒等类型与它们之间的等价类型相同。类似地，函数外延性刻画了函数类型的恒等类型，因为它意味着存在一个等价 $(f\sim g)\ \simeq f=g$。

单值性公理可以被理解为一种广义外延性公理，将任意 n-类型的恒等类型与它们之间的等价所构成的类型联系起来。颇为令人惊讶的是，单值性公理给出了所有标准外延性

公理作为推论：命题外延性和函数外延性都可以由它推出。

2.10.1 单值性公理的形式化定义

为了陈述单值性公理，我们首先定义映射 idtoeqv，它将两个类型的恒等类型映射到它们的等价类型中。

定义 2.10.1 ()。 对于每一对类型 X， $Y\colon \mathcal{U}$，我们定义一个映射

$$\mathrm{idtoeqv} : X =_{\mathcal{U}} Y \to X \simeq Y.$$

设 X和 Y是一对类型。我们定义类型族 $E(Z) :\equiv X \simeq Z$，并使用引理 2.5.2 来定义

$$\mathrm{idtoeqv}(p) \quad :\equiv \quad \mathrm{transport}^{E}(X, Y, p, \mathrm{idequiv}_X),$$

其中 idequiv 指的是例 2.8.3中的恒等等价。关于 传输 的判断相等给出 $\mathrm{idtoeqv}(\mathrm{refl}_X) \equiv \mathrm{id}$。

定义 2.10.2 (单价宇宙)。 若一个宇宙 $\mathcal{U}$ 满足以下条件，则称其为 单值的： 对于任意一对类型 $X, Y\colon \mathcal{U}$，上文定义的映射 $\mathrm{idtoeqv}\colon (X =_{\mathcal{U}} Y) \to (X \simeq Y)$ 是一个等价。

定义 2.10.3 (单值性公理)。 单值性公理 断言所有宇宙都是单值的。

我们通常会说 单值性公理，尽管在实践中，我们会假设某个特定的宇宙是单值的。只有在需要特别明确时，我们才会明确指出所假设具有单值性的宇宙。

已知单值性公理与我们在第 2.1.1 节介绍的基础马丁-洛夫类型论相容。这最初由 Voevodsky 的 单纯集模型 [KL21]证明，该模型验证了单值性。

定理 2.10.4。 每个单值宇宙 $\mathcal{U}$ 都满足命题外延性和函数外延性。

证明。 容易看出，单值性公理蕴含命题外延性，因为显然，在 $n = 1$的同伦层级上，等价特化为逻辑等价。它蕴含函数外延性的证明归功于 Voevodsky。证明见 [Uni13， §4。9]。 □

2.10.2 假设单值性时，宇宙不是集合

在第**2.5.4**节讨论K 公理时，我们提到它与单值性不一致，因为单值性公理为我们提供了构造非平凡

恒等类型的元素的方法。现在，我们来看在单值性假设下第一个不是集合的类型的例子。

例 2.10.5。宇宙不是集合。为看出这一点，考虑任意宇宙 $\mathcal{U}$。我们取宇宙 $\mathcal{U}$ 中布尔值类型的副本 $2_{\mathcal{U}}$。我们有一个证明

$$\mathrm{refl}_2 : 2 =_{\mathcal{U}} 2,$$

表明该类型等于自身。于是我们得到一个等价

$$\mathrm{idtoeqv}(\mathrm{refl}_2) : 2 \simeq 2.$$

借助传输的计算规则（引理 2.5.2），可见该等价的两边都是恒等映射。利用单值性公理，我们可以构造一个不同的证明，表明它等于自身。考虑函数

$$\begin{aligned} \mathrm{swap}(0) &:\equiv 1 \\ \mathrm{swap}(1) &:\equiv 0 \end{aligned}$$

容易看出，该类型也给出了 $2_{\mathcal{U}}$ 与自身的一个等价，从而由单值性得到一条路径 $p : 2 =_{\mathcal{U}} 2$。然而，如果我们有 $p = \mathrm{refl}_x$，则可推出 $\mathrm{swap} = \mathrm{id}$，这是一个矛盾，因为它蕴含 $0 = 1$。

2.10.3 结构恒等原理

在数学中，人们通常认为两个代数结构在同构时相同。得益于单值性公理，我们可以在单值基础中对这一非正式做法给出精确的数学论述，实际上证明同构结构相等。

这通过所谓的结构恒等原理实现。它可以被视为针对数学结构的广义外延性公理。其核心思想是定义一种广义的结构同构概念，并附加一些条件以确保其性质良好。随后，结构恒等原理用这种广义同构概念来描述数学结构的恒等类型。

文献中有多种形式的结构恒等原理。三种著名的表述分别出自 Coquand 和 Danielsson [CD13], Aczel [Uni13，第 9 节。8]，以及 Escardó [Esc19，第 3 节。33]本节介绍 Escardó 在同上提出的结构恒等原理。我们将作高层次概述，不深入探讨完整的技术细节。

在单值基础中定义数学结构时，我们通常先将所考虑的结构表示为类型族。以幺半群的概念为例。为了定义幺半群的类型，我们定义一个类型族

$$\text{Monoid-Structure} : \mathcal{U} \to \mathcal{U},$$

它接受一个类型 $X : \mathcal{U}$，并表示其上的幺半群结构类型。这可以定义为一个 Σ-类型，为所考虑的载体类型 X 配备一个单位

元 ϵ： X 以及一个二元运算 op： $X \to X \to X$，并满足幺半群公理：

$$\begin{aligned}&\text{Monoid-Structure}(X) :\equiv \\ &\quad \Sigma_{(\epsilon : X)} \Sigma_{(\text{op} : X \to X \to X)} \text{ satisfies-monoid-axioms}(\epsilon, \text{op}).\end{aligned}$$

幺半群的类型将定义为

$$\text{Monoid}_{\mathcal{U}} \quad :\equiv \quad \Sigma_{(X : \mathcal{U})} \text{Monoid-Structure}(X).$$

在 Escardó 于 [Esc19 第 3 节中提出的结构恒等原理表述里，33],两个数学结构的同构，是通过对所考虑结构的载体类型之间的等价施加某些条件来表达的。考虑两个幺半群 M和 N。若载体类型之间的等价 e: $|M| \simeq |N|$其底层映射 $\ulcorner e \urcorner$： $M \to N$ 是幺半群同态，则称其为同态的。

我们通过将数学结构视为由一个类型族 S: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 给出，来推广这一情形。S-结构的同构概念由一个族给出

$$\iota_{s_A, s_B} : A \simeq B \to \mathcal{U},$$

对于每一对 S-结构（A， s_A）和（B， s_B）：$\Sigma_{(X :\ \mathcal{U})}\ S\ (X)$。其思想是，$\iota$表达了等价保持 S-结构的含义。Escardó 的结构恒等原理接着规定了以下条件，以确保这种同构概念具有良好的性质：

1. 对于每个类型 A 和结构 s： $S(A)$，恒等等价 idequiv$_A$ (来自例 2.8.3) 满足 $\iota_{s_A,\ s_A}$(idequiv$_A$)。2. 对于每个类型 A，以及其上的每对 S-结构 s_A 和 t_A，典范映射 $s_A = t_A \to \iota_{s_A,\ A}$(idequiv$_X$) 是一个等价。

若结构 S: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$配备了一个满足上述条件的类型族 ι，则称其为标准结构概念。于是，结构恒等原理可以精确表述如下：

定理 2.10.6 ([Esc19, §3。33])。 设 S： $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$，并设 A， B： $\mathcal{U}$。假设宇宙 $\mathcal{U}$ 是单值的，若 S 是由某个 ι给出的标准结构概念，则有

$$((A, s_A) = (B, s_B)) \simeq ((A, s_A) \cong_\iota (B, s_B)),$$

w这里 $(A, s_A) \cong_\iota (B, s_B)$ 表示 ι-同构从 (A, s_A) 到 (B, s_B)之间的类型。

我们将在第4.7节中运用结构恒等原理，届时我们将构造大、局部小且小完备的谱 locale 类型与小分配格类型之间的等价。

2.11 高阶归纳类型

我们此前提到过归纳生成类型的概念，并在第 2.3 节解释了，归纳类型的形式化描述是通过以下机制给出的：

W-类型。避免使用 **K** 公理（这相当于从集合推广到 n-类型），使我们能够自由地将归纳生成类型的思想推广到 n-类型的情形。这一推广产生了高阶归纳类型的概念。

归纳类型由一组构造子生成，这些构造子以归纳方式生成所讨论的类型。高阶归纳类型由每个同伦层级 n 对应的一组 n-构造子生成： $\mathbb{N}$。要将类型 X 定义为高阶归纳类型，

- 0-构造子是通常的构造子，用于生成 X 的元素，
- 1-构造子通过自由添加非平凡路径构造子，扩充 X 的路径类型 $x =_X y$，
- 2-构造子通过在路径构造子之间添加路径构造子，扩充路径类型本身的路径类型 $p = (x =_X y)\ q$。

将此推广到任意 n，我们便得到 n-构造子的概念。

在本文中，我们只会使用两种高阶归纳类型。因此，我们不再完整阐述高阶归纳类型这一一般概念的数学论述，因为这是一个相当技术性且复杂的问题。相反，我们将先看一些简单的例子，然后介绍我们在工作中将要使用的特定高阶归纳类型。

2.11.1 圆类型

定义 2.11.1 ([Uni13, §6.4])。 圆 (记作 $\mathbb{S}^1$) 是由以下 n-构造子生成的高阶归纳类型：

- 一个单独的 0-构造子 $\mathrm{base} : \mathbb{S}^1$，
- 一个单独的 1-构造子 $\mathrm{loop} : \mathrm{base} =_{\mathbb{S}^1} \mathrm{base}$。

该类型具有以下归纳原理：对于每个类型族 $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$，若存在

- 一个点 $b : P(\text{基})$，并且
- 一条路径 $l : \text{基} = \text{基}$，

存在一个函数 $f : \Pi_{(x :\ \mathbb{S}^1)} P(x)$，满足相等

- $f(\text{基}) = b$，并且
- $\mathrm{ap}_f(\mathrm{loop}) = l$。

引理 2.11.2。 路径 $\mathrm{refl}_{\mathrm{base}}, \mathrm{loop} :\ \text{基} =_{\mathbb{S}^1} \text{基}$ 彼此不相等。

证明概要。 如果这两条路径相等，那么根据圆的归纳原理可以证明所有类型都是集合，但正如我们在例 2.10.5中所示，事实并非如此。参见 [Uni13，引理 6.4。1]以了解完整证明。 □

推论 2.11.3. 圆类型不是集合，这意味着它既不可缩，也不是命题。

从同伦论视角来看，loop 与 refl 不同这一事实$_{\text{base}}$揭示圆类型中包含一个孔洞。

2.11.2 命题截断

现在我们来看另一个对于将单值类型论用作数学基础至关重要的高阶归纳类型示例：一个类型的命题截断 。

定义 2.11.4. 命题截断由以下类型构造子给出

$$\|\text{-}\| : \mathcal{U} \to \mathcal{U}.$$

对于每个类型 $X: \mathcal{U}$，类型 $\|X\|$ 由以下 n-构造子定义：

- 一个单独的 0-构造子 $|\text{-}| : X \to \|X\|$。
- 一个单独的 1-构造子 trunc : $\Pi_{(x,\ y:\ \|X\|)}\ x =_X y$。

这给出了归纳原理

$$\Pi_{(P:\mathcal{V})}\ \text{is-prop}(P) \to (X \to P) \to (\|X\| \to P).$$

注意，这里的 trunc 构造子恰好说明类型 $\|X\|$ 是一个命题。

引理 2.11.5。 对于任意一对类型 $X:\ \mathcal{U}$ 和 $Y:\ \mathcal{V}$，只要我们有一个函数 $X \to Y$ 就有一个函数 $\|X\| \to \|Y\|$。

证明。 由命题截断的递归原理可立即得到，因为 $\|Y\|$ 是一个命题。 □

容易看出，这定义了一个函子。事实上，这个函子是宇宙 $\mathcal{U}$ 中类型到其命题全子范畴 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 的反射子。

引理 2.11.6. 命题截断 $\|\text{-}\| :\ \mathcal{U} \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 是包含映射 $\Omega_{\mathcal{U}} \overset{\text{pr}_1}{\hookrightarrow} \mathcal{U}$的左伴随。

在第2.5.5节中，我们讨论了结构与性质之间的区别。我们经常会遇到这样的情况：表达某个感兴趣陈述的类型是结构，而不是 性质。我们已在例 2.5.15中给出了一个例子。命题截断在这类情况下尤其有用，因为我们只需截断所考虑的结构，就能得到感兴趣的性质。

2.12 重新审视命题即类型

现在我们已经介绍了高阶归纳类型，并阐述了命题截断的机制，接下来就可以介绍命题的精细化形式——

正如我们在第2.4节承诺的那样，作为类型解释。

在例 2.5.15 中，我们举例说明，将 Σ-类型理解为断言类型论中对象存在性的说法可能会造成误导。这是因为，对 Σ-类型的证明会指定所考虑的对象，因而（一般而言）它体现的是结构，而不是性质。将和类型 $P + Q$解释为命题 P 和 Q的逻辑析取，也存在类似问题。和类型的证明不仅包含其中一个析取项成立的信息，还包含究竟是哪一个析取项 成立的信息。正是借助命题截断，我们才能构造这些类型的命题版本，从而将所有逻辑命题视为命题类型的指称。

2.12.1 更精细的命题即类型翻译

我们在引理 2.9.7 中证明，命题在积类型下封闭，也就是说，我们有一个函数

$$(\text{-}) \wedge (\text{-}) : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{V}} \to \Omega_{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}}.$$

此外，我们在引理2.9.8 中证明，依赖积类型给出一个函数

$$\Pi(\text{-}, \text{-}) : \Pi_{(X:\mathcal{U})} ((X \to \Omega_{\mathcal{V}}) \to \Omega_{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}}),$$

取一个量化域 $X:\ \mathcal{U}$ 以及其上的一个取值于 $\mathcal{V}$ 的谓词，并返回宇宙 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ 中的一个命题。

逻辑陈述	命题
恒假 $\bot$	空类型$\mathbf{0}$
真 $\top$	单位类型$\mathbf{1}$
合取 $P \wedge Q$	积 $P \times Q$
析取 $P \vee Q$	截断和 $\|P + Q\|$
蕴涵 $P \Rightarrow Q$	函数类型 $P \to Q$
类型上的谓词 X	命题族 $X \to \Omega$
全称量化 $\forall_{(x:X)} P(x)$	依赖积 $\Pi_{(x:\ X)} P(x)$
存在量化 $\exists_{(x:\ X)} P(x)$	截断依赖和 $\left\|\Sigma_{(x:\ X)} P(x)\right\|$

表 2.12.1：精化的命题即类型原则总结。

得益于命题截断的存在，我们现在可以考虑截断和类型，它给出一个函数 $\|(\text{-}) + (\text{-})\| : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{V}} \to \Omega_{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}}$，以及截断的 Σ-类型构造子，其类型为

$$\|\Sigma(\text{-}, \text{-})\| : \Pi_{(X:\mathcal{U})} ((X \to \Omega_{\mathcal{V}}) \to \Omega_{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}}).$$

我们将截断的 Σ-类型视为断言某个对象的未指定存在。借助这些，我们可以将逻辑命题完整地翻译为命题的类型 Ω 。我们在表2.12.1中总结了这一精化形式的命题即类型原则。

例如，我们通过精化后的命题即类型翻译来精化朴素排中律（定义 2.6.5）。

定义 2.12.2 （排中律（LEM））。宇宙 $\mathcal{U}$ 上的排中律断言：对于每个命题 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$，析取 $\|P + \neg P\|$ 都有一个元素。

此后我们将分别使用简写记号 $\exists_{(x:\, X)} P(x)$ 与 $P \vee Q$表示截断的Σ-类型与和类型。

2.12.2 指定存在与未指定存在

如前所述，结构与性质之间的区分是单值类型论的标志性特征。既然我们已经介绍了将要使用的指定与 未指定 存在这两个概念，我们便采用一些惯用约定来区分结构与性质。

- 我们避免说“x 是 Y，若所考虑的类型族 Y 并非由命题构成。
- 对于匿名可居留性 $\|A\|$ （一个类型 A的），我们说 A 是可居留的。
- 我们称类型 A 的指定元素，以区别于匿名元素 $\|A\|$。类似地，我们会说有一个指定的或选定的元素，以强调我们使用的是 Σ 而不是 ∃。
- 对于截断的 Σ-类型，我们使用“存在某个”和“存在某个”这两种说法。在需要更明确时，我们也会使用“存在一个指定的／未指定的”这一说法。
- 与 HoTT Book 不同 [Uni13], 我们不使用形容词纯粹的来表示未指定存在。

2.12.3 子集

由于 Ω 是我们视为性质的（大）类型的类型，我们将取值于 Ω的函数视为谓词或子集。

定义 2.12.3($\mathcal{V}$-子集)。一个 $\mathcal{V}$-子集(或 $\mathcal{V}$-值子集) 是类型 X 的 $\mathcal{U}$一个谓词 $S : X \to \Omega_{\mathcal{V}}$。的-幂集，记作 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X)$，是所有$\mathcal{V}$-子集 X的类型。

注记 2.12.4。这里值得注意的是，对于每个类型 $X : \mathcal{U}$，类型$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X) \equiv X \to \Omega_{\mathcal{V}}$ 都属于宇宙 $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}^+$。特别是，所有$\mathcal{U}$-子集组成的类型 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(X)$ 属于宇宙 $\mathcal{U}^+$。

这里的情形与托扑逻辑非常相似。在托扑理论中，人们使用子对象分类器 Ω 这一概念，并通过一条泛性质对其进行公理化：态射 $\mathrm{Hom}(X, \Omega)$ 与 X 的子对象之间存在双射。

在单值类型论中，类型 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 扮演子对象分类器的角色，因为它对子类型进行分类；我们稍后会对此进行详细讨论。不过，与托扑逻辑不同，它的构造完全在类型论内部；它能够对子对象进行分类这一事实是一个定理，而非公理。

这里与托扑逻辑的另一个区别是， $\Omega_{\mathcal{U}}$ 不被视为生活在宇宙 $\mathcal{U}$ 中的类型，因为它对宇宙 $\mathcal{U}$ 中的类型进行量化。这就引出了谓词性这一主题，我们很快会在第2.13节讨论。

Kuratowski 有限子集

在构造性数学中，有限性有几种不同的概念。其中最重要的两种是*Bishop*有限性 和 *Kuratowski*有限性。下面简要介绍后者，因为它与我们发展locale理论相关。

我们用 Fin(n) 表示恰有 n 个元素的类型。在我们的框架中，可以将它构造为由 n个单位类型1组成的和类型。此外，给定子集 $P\colon X \to \Omega_{\mathcal{U}}$，我们用 $\mathbb{T}(P)$ 表示类型 $\Sigma_{(x\colon X)} P(x)$，也就是 x 中属于 P 的所有元素构成的类型。

定义2.12.5（Kuratowski有限性）。

- 类型 X称为 *Kuratowski* 有限，如果存在一个满射 $\mathsf{Fin}(n) \twoheadrightarrow X$，其中某个 $n : \mathbb{N}$。这称为 对 的枚举 X。
- 给定一个类型 $X\colon \mathcal{U}$，若子集 $P\colon X \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 使类型 $\mathbb{T}(P)$ 是 Kuratowski 有限的，则称其为 *Kuratowski* 有限。

我们用 KFin(X) 表示类型 X 的 Kuratowski 有限子集所构成的类型。

引理2.12.6（Kuratowski有限归纳 [dJon23，引理4.2。10]）。对于任意类型 $X\colon \mathcal{U}$以及性质 $P\colon \mathsf{KFin}(X) \to \Omega_{\mathcal{V}}$，若要证明该性质对 X的所有 *Kuratowski* 有限子集都成立，只需证明以下几点： P对 X的所有 *Kuratowski* 有限子集都成立：

- 空集满足性质 P。
- 所有单元素集都满足性质 P。
- 性质 P 对二元并封闭。

2.13 谓词性与命题缩放

现在我们开始研究类型的大小 这一概念，它刻画了我们所说的基础框架的谓词性。首先定义 $\mathcal{U}$-小类型和局部 $\mathcal{U}$-小类型的概念。

定义 2.13.1 ([Rij17])。 类型 $X\colon \mathcal{U}$ 称为 $\mathcal{V}$-小 当且仅当

$$\text{is-}\mathcal{V}\text{-small}(X) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(Y\colon \mathcal{V})} X \simeq Y.$$

定义 2.13.2 ([Rij17])。 一个类型 $X\colon \mathcal{U}$ 称为局部 $\mathcal{V}$-小的，如果对任意一对元素 x， $y\colon X$，恒等类型 $x =_X y$ 是 $\mathcal{V}$- 小的。在形式化记法中，我们将其记为是 - 局部 -$\mathcal{V}$- 小的 (X)。

例 2.13.3. 假设命题外延性成立，则类型 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 是局部$\mathcal{U}$-小的。该类型属于 $\mathcal{U}^+$，因此恒等类型 $P = Q$属于 $\mathcal{U}^+$。然而，恒等类型 $P = Q$ 总有一个等价的 $\mathcal{U}$-小副本，由类型 $(P \Rightarrow Q) \times (Q \Rightarrow P)$ 给出。由于两个$\mathcal{U}$-小命题之间的蕴涵总是 $\mathcal{U}$-小的，因此该类型是小的。

自然会想知道类型 is-$\mathcal{V}$-small(X) 是否是一个命题。事实证明确实如此，但有些出人意料的是，它的命题性关键依赖于下述引理所体现的单值性公理。

引理 2.13.4 ( ). 以下各项等价：

1. 对任意一对宇宙 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，对于每个类型 $X : \mathcal{U}$，类型 is-$\mathcal{V}$-小(X) 都是一个命题。*2.* 单值性公理成立。

证明。 证明见 [Esc20]。 □

在单值性假设下，小这一性质具有重要应用，将用于我们对谱 locale 的谓词性理论的构建。具体而言，这将确保引理 4.2.3 中，我们关于谱 locale 的定义之一（定义4.2.1）是一个性质，而非结构。

2.13.1 子集与族

在第 2.12.3 节中，我们将类型 嵌入。 中的子集定义为该类型上的谓词。现在我们通过

定义 2.13.5 ($\mathcal{V}$-族)。一个 $\mathcal{V}$-族 $\mathcal{V}$-小族（或 on a type X 是一个函数 $I \to X$，其定义域 I属于 $\mathcal{V}$。

我们用 $\mathrm{Fam}_{\mathcal{V}}(X)$ 表示某个类型 X 上的 $\mathcal{V}$-族的类型。此外，我们常用记号 $(x_i)_{i:I}$ 表示一个族 $x : I \to X$。另外，我们有时用概括记号 $\{x_i \mid i : I,\ P(i)\}$ 表示形如 $x : (\Sigma_{(i:I)} P(i)) \to X$ 的族，其中指标类型是一个 Σ-类型。

定义 2.13.6 (子族)。 给定一个 $\mathcal{V}$-族 $(x_i)_{i:I}$以及一个映射 $\alpha : J \to I$，其中$J : \mathcal{V}$，复合 $x \circ \alpha : J \to X$称为沿 α 重新指标化得到的子族 。

使用族记号来表示重新指标化映射本身很方便，因此将重新指标化后的族写作 $(x_{i_j})_{j:J}$。相应地，我们将直接称 $(x_{i_j})_{j:J}$为族 $(x_i)_{i:I}$的一个子族，而不再显式使用重新指标化映射 $\alpha : I \to J$。

定义 2.13.7 ($\mathcal{V}$-子类型)。 一个 $\mathcal{V}$-子类型 是类型 X 上的一个 $\mathcal{V}$-族，且 X 是一个嵌入。

我们将 $\mathcal{V}$-子类型的类型记作 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{V}}(X)$。

引理 2.13.8。 假设单值性公理成立，则类型 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 将 $\mathcal{U}$-类型的 $\mathcal{U}$-子类型分类。换言之，对于每个类型 $X : \mathcal{U}$，都有一个等价

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{U}}(X) \simeq \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(X).$$

证明。 证明见 [Esc19，§3。31]。 □

一个不一定是嵌入的族，可以看作包含重复项。换言之，如果一个族不是嵌入，这意味着指标集不能为所考虑子集中的元素提供唯一表示。尽管嵌入族恰好对应于子集，但在实践中，去掉嵌入这一要求，并用可能含有重复项的族来表示子类型，往往更为方便。在第 2.14 节中，我们将讨论集合替换原理；该原理使我们能够在需要时去除这些重复项。只要集合替换原理可用，这一过程在构造性和直谓设定下也同样适用。此外，在第 3.5 节中，我们将重新探讨这个问题，并讨论它在我们发展 locale 理论中的应用。

2.13.2 命题缩放公理

我们将经常遇到这样的情况：需要处理一个子 t

$$X \to \Omega_{\mathcal{U}^+}$$

由大命题给出（相对于某个基宇宙 $\mathcal{U}$），而我们希望它是小的，也就是说，是一个 $\mathcal{U}$值的对象。我们之前解释过，单值类型论的一个标志性特征，是对性质这一概念进行内部定义，并据此定义 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 型 $\mathcal{U}$命题。这与构造演算（Calculus of Constructions） [CH88] 不同；在后者中，命题宇宙 Prop 可以通过构造变成非谓词性的，因为在 CoC 中，“是命题”属于判断。

在我们当前的基础框架中，问题随之而来：当我们以 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 作为子类型分类器时，如何在这样的框架中进行非谓词数学？Voevodsky 提出的解决方案是考虑所谓的命题缩放规则 [Voe11，第 10] 页。这些规则有略微不同的形式，但概括而言，它们断言每个命题 P： $\Omega_{\mathcal{U}}$ 都可以缩小为$\Omega_{\mathcal{U}_0}$。

尽管重缩放规则很方便，但目前尚不清楚扩展了这些规则的类型论是否仍然强规范化。这是单值类型论中一个长期存在的未解决问题。因此，重缩放规则以公理的形式进行研究。

定义 2.13.9（参见 [dJE21，定义 2]以及 [Uni13，公理 3.5。5]）。

- 命题（$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$）-重定大小公理表示，每个命题 P： $\Omega_{\mathcal{U}}$ 都是$\mathcal{V}$-小的。
- 全局命题缩小公理指出，对于每一对宇宙 $\mathcal{U}$

以及 $\mathcal{V}$，命题（$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$）缩小公理成立。

- （Ω-$(\mathcal{U},\mathcal{V})$-缩小公理 指出，对于任意两个宇宙 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，类型 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathcal{V}$-小的。

- 类型 $\Omega^{\neg\neg}_{\mathcal{U}}$表示满足 $\neg\neg P \Rightarrow P$的命题类型 $P\colon \Omega_{\mathcal{U}}$。（$\Omega_{\neg\neg}$-$(\mathcal{U},\mathcal{V})$-缩小公理 指出，类型 $\Omega^{\neg\neg}_{\mathcal{U}}$是 $\mathcal{V}$-小的。

备注 2.13.10. 注意，排中律立即给出 Ω-重定大小。对于宇宙 $\mathcal{U}$而言，排中律相当于断言 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 等价于类型 $2_{\mathcal{U}}$。由于类型2 在每个宇宙中都有一个副本，因此我们可以据此按需重定大小 $\Omega_{\mathcal{U}}$。也就是说，在经典环境中无法进行预测数学。换句话说，预测数学是构造性数学中限制更严格的一个分支。

引理 2.13.11。 对于任意一对宇宙 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，Ω-$(\mathcal{U},\mathcal{V})$-缩小蕴含命题$(\mathcal{U},\mathcal{V})$-缩小公理。此外，如果命题$(\mathcal{V},\mathcal{U})$-缩小成立，那么命题$(\mathcal{U},\mathcal{V})$-缩小蕴含$\Omega$-$(\mathcal{U},\mathcal{V}^{+})$-缩小

证明。 参见 [dJE21，命题 3]以及 [Esc19，§3.36。4]。 □

以公理的形式表述时，上述所有内容都独立于单值类型论，但与之相容。若未作进一步说明而提及“命题缩放公理”，我们指的是上述定义中的全局命题缩小公理。

在单值基础的语境下，非谓词数学 指的是使用上述任意一种重定大小形式所发展出的数学。此时，我们回顾第2.1.2节关于类型论中的公理的讨论：类型论中的公理是一个类型的元素，它被声明为独立于该类型的引入规则而存在；这些规则被确保具有定义良好的计算行为。

正是在这一点上，我们的基础框架为何要具有谓词性便显现出来。撰写本文时，为上述命题重定大小公理寻找计算规则仍是一个未解决问题。我们此前解释过，我们的基础框架是对一类单值类型论的公理化，因为我们假设某些公理可以得到满足，而不是将它们作为固定、具体的类型论实现中的公设。为了获得计算应用，我们始终可以采用满足这些公理的某个具体类型论实现，例如立方类型论 [CCHM18]；在该实现中，我们所用的所有公理都可以配备计算规则。这是因为立方类型论 [CCHM18]为单值性公理以及高阶归纳类型（至少是我们在此使用的那些）提供了计算解释。

据作者所知，截至撰写本文时，还没有已知的类型论能够为命题缩放公理提供计算解释。按照我们只使用其计算行为已得到充分理解的公理这一初衷，我们不使用上述命题缩放公理的任何形式。因此，作为我们在本文中坚持构造性数学的进一步体现，我们坚持直谓数学

在这篇论文中，转向构造性数学。

命题缩放与命题截断

考虑命题缩放公理的另一个动机是，它们提供了一种构造命题截断的替代方法。这里的思路是，我们可以对类型 $(X \to \bot) \to \bot$取双重否定，这始终会是一个命题。这个命题可以被视为对 X的命题截断的一种近似。然而，不幸的是，除非排中律成立，否则它并不满足命题截断的泛性质 [KECA17,§7]。

然而，对所有命题进行量化，就可以得到一个大类型

$$\Pi_{(P:\Omega_{\mathcal{U}})} (X \to P) \to P, \tag{2.13.12}$$

它确实给出了 X的命题截断，不过由于涉及大范围量化，因此不能将其作为同一宇宙中的命题。Escardó [Esc19, §36。5] 证明，如果每个宇宙 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_0)$都满足命题（$\mathcal{U}$，$\mathcal{U}_0$）-重定大小，那么上述构造就在每个宇宙中满足截断的泛性质。

在我们的工作中，我们无需了解这里构造的细节。顺带提及这里对命题缩放的运用，是因为这是一个很好的例子，说明高阶归纳类型如何通过发挥缩放原理的作用，来规避对非直谓性的需求。更详细的讨论请参阅 [KECA17, §7]和 [dJon23, §2.11.1]。

2.14 集合替换原理

现在我们来考察一条原理，它将在第4章中谱与 Stone 局部理论的构建中发挥重要作用。正如命题截断的高阶归纳类型规避了使用（2.13.12）中的非谓述编码的需求，集合替换原理也可作为一种缩放原理，使我们在构建 locale 理论的某些环节中能够避免非直谓性。

定义 2.14.1 (公理：集合替换 [Rij22，公理 18.1。8])。 集合替换原理 指出，对于每个函数 $f\colon X \to Y$ 若有

- Y 是一个集合，
- X 是 $\mathcal{U}$-小的，并且
- Y 是局部 $\mathcal{V}$-小的，

那么类型 image(f) 是（$\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$）-小的。

明确记录以下特殊情形很有用。

推论 2.14.2。 设 $X\colon \mathcal{U}$ 是一个类型， $Y\colon \mathcal{U}^+$ 是一个集合。对于任意函数 $f\colon X \to Y$，要证明 像(f) 是 $\mathcal{U}$-小的，只需证明 Y 局部是 $\mathcal{U}$-小的。

集合替换原理的一个元素可以构造为高阶归纳类型（如 Rijke 所示 [Rij17]），因此，在具备所有高阶归纳类型的基础框架中（例如 Cubical Type Theory [CCHM18]），它是一个定理。如第 2.1.2 节所述，由于我们不致力于单值类型论的某个具体实现，因此只需假设我们的基础框架满足这一原理。

我们还要指出 de Jong 的一项相关结果 [dJon23，定理 2.11。24], 该结果表明，集合替换原则与小集合商的存在性逻辑等价；构造小集合商同样需要使用高阶归纳类型。对我们而言，de Jong 的结果意味着，在任何提供小集合商的基础框架中，上述公理都成立。

第3章

无点拓扑基础

正如我们在引言中所解释的，无点拓扑是一种研究拓扑的方法，其基本研究对象是一个 *locale*，而非拓扑空间。后者是一个由点 构成的集合，并配备了一种拓扑，即点的子集所组成的一个类；该类须对有限交和任意并封闭。与之相对，locale 是一种空间概念，其特征完全由一个抽象的开集格刻画。抽象概括开集类行为的格论结构称为框架。通过研究框架作为空间来探讨非平凡拓扑问题这一非凡见解，可以追溯到 Stone 的工作 [Sto34；Sto36]。

采用无点方法研究拓扑的动机有两方面：

1. 与拓扑空间相比，locale是构造性表现更好的空间概念。2. locale范畴具备一些拓扑空间范畴所不具备的理想性质，即使在经典环境中也是如此。

对我们的目的而言，主要动机是（1），因为我们希望在构造性基础设定中发展拓扑学。locale在构造性方面表现更好的一个典型例子，是Tychonoff定理的locale形式：其点集形式等价于选择公理 [Kel50] 而其locale形式则可在构造性框架下证明 [Coq03；Vic05]。此外，经典数学中有许多定理刻画了一个locale何时能够表示为某个拓扑空间的开集框架（即具有空间性）。这些定理表明，空间 locale涵盖了各种有趣的空间。不过，这类定理的一个共同特点是，它们最终都等价于各种经典原理，这意味着，要对这类空间进行构造性处理，无点方法至关重要。

本章将在构造性和直谓单值基础的框架下，介绍 locale理论的基础知识，其技术细节已在第2章中阐述。本章的组织结构如下：

第 3.1 节：介绍框架和 locale 的概念，并探讨其直谓发展中的技术细节

。第 3.2 节：讨论子locale。第 3.3 节：讨论紧致性和远小于关系。第 3.4 节：讨论无点拓扑中既开又闭的概念，以及内含关系。第 3.5 节：介绍 locale 的各种基，它们在谱 locale 理论的发展中发挥着关键作用。第 3.6 节：介绍一些在谓词性构造中性质良好的 locale 类的定义，包括谱 locale、Stone locale、零维 locale 和正则 locale。第3.7 节：介绍框架的伴随函子定理的一种直谓形式。

3.1 框架概念的定义

我们对框架的类型论定义，其最一般的形式由三个宇宙参数化：

1. 承载集所在的宇宙；2. 序的真值所在的宇宙；3. 并完备性所用的宇宙，也就是定义并运算所依据的族的指标类型所在的宇宙。

我们约定分别用宇宙变量 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 表示它们。

定义 3.1.1 (框架) 一个 $(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})$-框架 L 由以下部分组成：

- 一个类型 $|L|:\ \mathcal{U}$,
- 一个偏序 $(\text{-}) \leq (\text{-}) :\ |L| \to |L| \to \Omega_{\mathcal{V}}$,
- 一个最大元$\mathbf{1}:\ |L|$,
- 一个运算 $(\text{-}) \wedge (\text{-}) :\ |L| \to |L| \to |L|$ 给出每一对元素的最大下界 $x \wedge y\ x, y:\ |L|$,
- 一个运算 $\bigvee(\text{-}) : (I \to |L|) \to |L|$ 给出每一个$\mathcal{W}$-族的最小上界 $\bigvee \alpha\ \alpha:\ I \to |L|$,

使得二元交对任意并分配，即 $x \wedge \bigvee_{i:I} y_i = \bigvee_{i:I} x \wedge y_i$ 对每一个 $x:\ |L|$ 以及 $\mathcal{W}$-族 $(y_i)_{i:I}$（在 $|L|$ 中）。

如同上面的定义中所做的，我们采用简写记号 $\bigvee_{i:\ I} x_i$表示族 $(x_i)_{i:\ I}$的并。我们也采用通常的记号滥用，写作 L而非 $|L|$。

我们也在此指出，定义 3.1.1 中涉及的宇宙一般性并非必需；这一点将在第 3.1.2节详细讨论。尽管如此，以如此一般的层次表述框架的概念仍然很有用，因为这将使我们能够讨论为什么它并非必需。

读者可能已经注意到，我们在此定义中并未对载体类型施加集合性条件。原因在于，集合性会自动

由该类型上偏序的反对称性推出。

引理 3.1.2. 每个配备偏序的类型 X 都是一个集合。

证明. 令 X 为一个配备偏序 $(\leq)$的类型。根据引理 2.6.9，只需在 X的恒等类型上构造一族常值自映射。令 $x, y : X$。我们将映射 $x =_X y \to x =_X y$ 定义为以下映射的复合：

$$x =_X y \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (x \leq y) \times (y \leq x),$$

其中，f是通过自反性和对等同性证明应用路径归纳得到的显然映射，而映射 g 正是反对称性条件。由于该序是命题值的，类型（$x \leq y$） $\times$ （$y \leq x$）是一个命题，因此复合映射 $g \circ f$是一个常值映射。 □

我们对这一证明的呈现遵循 Agda 证明 Escardó [Esc12].

3.1.1 框架的局部小性

在定义 2.13.2中，我们介绍了局部小类型的概念。若类型具有半格结构，则可以用序来刻画该类型的局部小性，如下所示：

引理 3.1.3 ()。对于任意一个 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$-框架 L、任意一对元素 $x, y : L$，以及任意一个宇宙 $\mathcal{T}$，有 $x \leq y$ 是 $\mathcal{T}$-小的，当且仅当 L 的载体是一个局部 $\mathcal{T}$-小类型。

证明。 设 $x, y : L$，且 $\mathcal{T}$是一个宇宙。格论中的一个标准事实是$x \leq y \leftrightarrow x \wedge y = x$。

(⇒)若框架在如下意义下是局部 $\mathcal{T}$-小的：对于任意两个 $x, y : L$， $x \leq y$都是 $\mathcal{T}$-小的，那么恒等类型 $x = y$也必定是 $\mathcal{T}$-小的，因为它等价于合取 $(x \leq y) \times (y \leq x)$。

(⇐) 反之，如果 L 的载体是局部 $\mathcal{T}$-小类型，那么 $x \leq y$ 必定是$\mathcal{T}$-小的，因为它等价于恒等类型 $x \wedge y = x$。 □

备注3.1.4。 正如我们将在第3.1.2节详细讨论的那样，我们始终关注大且小完备的框架，也就是说，并完备性宇宙低于载体宇宙的框架。最好在这个特殊情形下理解上面的引理：它指出，载体是局部小的，当且仅当序具有小真值。

3.1.2 直谓格论入门

框架这一概念的初步定义来自定义 3.1.1，具有高度的一般性；定义中涉及的三个宇宙允许互不相同。它是

值得考虑这种一般性程度是否合理。为了详尽地探讨这一问题，我们现在简要概述 de Jong 与 Escardó 的研究 [dJE21; dJE23; dJon23]，其研究对象为单值基础中格论的直谓方面。

框架可以看作某些余完备 (-1)-范畴 (也称为 偏序的或 薄 范畴)。从这个角度看，一个 $(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})$-框架是一个范畴，其对象属于宇宙 $\mathcal{U}$，其（平凡的）Hom 集属于宇宙 $\mathcal{V}$，其余极限则取自 $\mathcal{W}$-图表。在范畴论中，有一个由 Freyd 提出的著名（经典）结果 [Fre64，第3章，练习 D]，指出每个完备小范畴都是偏序的。这是一条所谓的不可行定理，表明对非偏序完备范畴的研究 必定 局限于那些既大又小完备的范畴。

备注 3.1.5。 这里要指出，我们将使用完备格 一词，而不使用余完备格。尽管后者在技术上更准确，但在格论语境中并非标准用法，而且容易引起混淆。

尽管完备小格可以用非谓词方式构造，但在直谓基础设定中也存在类似的不可行定理。可以证明，不借助某种形式的非谓词性，就无法构造这类格。此类结果最早由 Curi 提出 [Cur10a；Cur10b], 他证明，在 Aczel 和 Rathjen 的构造性[1] ZF 集合论 [AR10]，（一个直谓系统）中，完备小格的存在性不可证。

de Jong 和 Escardó [dJE21；dJE23；dJon23] 在单值基础的框架下证明了 Curi 结果的一个类似结论。他们的结果更直接，且属于反向构造数学的风格：他们给出了一个 缩放禁忌，直接表明非平凡完备小格的存在性蕴含某种形式的命题缩放。为使内容自足，我们现在对这一结果作高层次概述；技术细节请参阅 [dJon23，§6] 以及 [dJE23，§4]。

上述缩放禁忌适用于一类预序，其一般性远超并完备格。

定义 3.1.6 (有向族)。设 X 是一个带有预序的类型。若族 $(x_i)_{i:I}$满足以下条件，则称其为有向的

- 指标类型 I 是可居留的，并且
- 对于每一对指标 $i,\ j:I$，都存在某个 $k:I$，使得 x_k 是 x_i和 x_j的一个上界。

定义 3.1.7 ([dJE23，例子 4.3])。 一个 $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$-预序 X 称为

- $\mathcal{W}$-上确界完备，如果它具有 $\mathcal{W}$-族的并，
- $\mathcal{W}$-有界完备，如果它具有有界 $\mathcal{W}$-族的并，
- $\mathcal{W}$-有向完备 如果它具有有向 $\mathcal{W}$-族的并（即所有“有向

[1]请注意，在集合论的语境下，术语构造性 对应于我们所称的构造性且直谓。术语直觉主义的 用于指我们所称的构造性，也就是不使用经典原理的数学。

并”）。

用上述 $\mathcal{W}$-上确界完备格来表述时，$(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W})$-框架是一个满足以下条件的 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-预序：(1) $\mathcal{W}$-上确界完备；(2) 有有限交；(3) 有限交对 $\mathcal{W}$-并具有分配性。

注 3.1.8。 请注意，de Jong [dJon23] 使用记号 $\mathcal{W}$-DCPO$_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$（参见 [dJon23，定义 3.2。11]）来表示我们上文所称的 $\mathcal{W}$-有向完备 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-预序。此外，序和载体宇宙通常会被省略不写，因此只说 $\mathcal{W}$-DCPO。我们也会省略这两个宇宙，因而称之为 $\mathcal{W}$-上确界完备预序。

注 3.1.9。 “完备小格 ”这一术语不可与“小完备格”混淆。为避免可能引起混淆之处，我们始终对后者使用带连字符的形式。

定义3.1.7 中的每个完备性条件都蕴含一种有用的技术性完备概念，称为 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备性：

定义 3.1.10 （$\delta_{\mathcal{W}}$-完备偏序集 [dJon23，**定义 6.2.**）。对于某个宇宙 $\mathcal{W}$，若族 $\delta_{x,\,y,\,P}\colon\ \mathbf{1}+P\to X$ 满足以下定义，则偏序集 X 称为 $\delta_{\mathcal{W}}$- 完备：

$$\delta_{x,y,P}(\mathsf{inl}(\star)) :\equiv x$$
$$\delta_{x,y,P}(\mathsf{inr}(p)) :\equiv y,$$

对于每个 $x\le y$ 以及每个 $\mathcal{W}$-命题 P，它在 X 中都有一个并。

上述概念的 Agda 形式化由 TypeTopology 贡献者 Ian Ray 完成。

de Jong 和 Escardó 还对偏序集是非平凡的这一性质采用了一种正向改写，他们通过小于关系的正向表述来定义这一性质。他们将其称为 严格小于 （参见 [dJE23，定义 4.8] 中的定义）。

- 偏序集 X 是 非平凡的 [dJE23，定义 4.4]，如果存在指定的 $x,\ y\colon\ X$ 使得 $x\neq y$ 且 $x\le y$。
- 一个 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备偏序集 X 是 正的 [dJE23，定义 4。13] 如果存在指定的$x,\ y\colon\ X$ 满足 x 严格小于 y。

请注意，上述正性概念是针对 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备偏序集表述的。因此，所关注的缩放禁忌表述如下。

定理 3.1.11 ([dJE23，定理 4。23])。

1. 存在非平凡的小型 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备偏序集，当且仅当宇宙 $\mathcal{W}$中的 $\Omega_{\neg\neg}$-重定大小成立。*2.* 存在正的小型 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备偏序集，当且仅当宇宙 $\mathcal{W}$中的 Ω-重定大小成立。

由于上述引入的完备性概念蕴含 $\delta_{\mathcal{W}}$-完备性，我们有以下推论：

推论 3.1.12.

1. 存在非平凡的小型 $\mathcal{U}$-上确界格、 $\mathcal{U}$-有向完备偏序集或 $\mathcal{U}$-有界完备格，当且仅当宇宙 $\mathcal{U}$ 中成立 $\Omega_{\neg\neg}$-重定大小。*2.* 存在正的小型 $\mathcal{U}$-上确界格、 $\mathcal{U}$-有向完备偏序集或 $\mathcal{U}$-有界完备格，当且仅当宇宙 $\mathcal{U}$ 中成立 Ω-重定大小

这意味着不存在非平凡的小型框架，除非某种形式的重定大小成立：

推论 3.1.13. 存在正的（分别地，非平凡的）小型框架，当且仅当成立Ω-重定大小（分别地， $\Omega_{\neg\neg}$-重定大小）。

3.1.3 框架与 locale 的范畴

推论 3.1.13表明，在直谓基础设定中，必须将讨论限制在大且小完备的框架上。此外，我们知道，序不需要比 $\mathcal{U}^+$ 更大的宇宙，因为引理 3.1.3 证明，序总能重定大小为 $\mathcal{U}^+$。事实上，就本文而言，只需考虑局部小的框架（即其值为 $\mathcal{U}$-小）即可，因为这一类涵盖了实践中遇到的大多数框架。鉴于此，我们在此将讨论限制在 $(\mathcal{U}^+,\mathcal{U},\mathcal{U})$-框架上，并称之为大、局部小且小完备的框架。

约定。 我们固定一个基 宇宙 $\mathcal{U}$，并将具有 $\mathcal{U}$ 中等价副本的类型称为小类型。相较之下，我们将 $\mathcal{U}^+$ 中的类型称为大类型。因此，

$$\textit{we hereafter take frame/locale to mean } (\mathcal{U}^+,\mathcal{U},\mathcal{U})\textit{-frame/locale,}$$

除非另有说明。

备注 3.1.14。 尽管大、局部小且小完备的框架足以满足本论文的研究需要，但确实存在一些大且小完备的框架，除非某种形式的重定大小成立，否则它们不可能是局部小的。我们将在第 3.5.4 节给出一个新的缩放禁忌，以说明这一点。

确立了上述约定后，我们现在可以定义框架范畴，从而定义locale范畴。

定义 3.1.15 (框架同态)。 设 K 和 L 是两个框架。函数 $h\colon |K| \to |L|$ 称为框架同态，如果它保持最大元、二元交以及小族的并。我们用 $\mathbf{Frm}_{\mathcal{U}}$ 表示框架及其同态所构成的范畴（相对于我们的基宇宙 $\mathcal{U}$）。当上下文已明确基宇宙时，我们通常省略下标 $\mathcal{U}$。

一个 *locale* 是视为反范畴中对象的框架，记作 $\mathbf{Loc}_{\mathcal{U}} :\equiv \mathbf{Frm}_{\mathcal{U}}{}^{\mathrm{op}}$。我们采用 Mac Lane 和 Moerdijk [MM94] 以及 John- stone [Joh02的记号约定，定义 1.2。1]；为强调我们将 locale 范畴视为空间范畴，

- 用字母 $X, Y, Z, \ldots$（有时也用 $A, B, C, \ldots$）表示 locale，
- 将与 locale X 对应的框架记作 $\mathcal{O}(X)$。

对于取值于 locale X 的开集框架中的变量，我们使用字母 $U, V, W, \ldots$ 我们用字母 f 和 g 表示 locale 的连续映射 $X \to Y$。locale 的连续映射 $f\colon X \to Y$ 是一个框架同态 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$。locale 的同胚是其定义框架之间的框架同构。

3.1.4 非谓词性与直谓 locale 理论

locale 理论的传统发展是在非谓词性基础设定中进行的，在这种设定下，可以构造非平凡的完备小格。事实上，非直谓设定中的标准做法是利用这一能力，只通过完备小格来发展理论。借助命题缩放公理，可以按如下方式实现：

1. 考虑一个完备小框架 L，它位于宇宙 $\mathcal{U}$ 中。2. 对于每个子集 $P\colon L \to \Omega_{\mathcal{U}}$，使用引理2.13.8 中的等价，并利用 $|L|$ 的小性，取相应的 $\mathcal{U}$-族，然后即可在 L 中计算其并。3. 对于更一般的子集 $P\colon L \to \Omega_{\mathcal{V}}$，通过进一步应用命题缩放，总能得到一个副本 $P'\colon L \to \Omega_{\mathcal{U}}$。

由于在命题缩放存在时可以使用上述方法，传统的 locale 理论发展着重研究完备小框架。

由于传统研究着重于完备小框架，该领域传统发展中的许多基本构造仅适用于完备小框架的情形。例如，框架中的*Heyting* 蕴涵的构造便是如此；它对 locale 理论中的许多重要概念至关重要，包括不动点集 [Joh02，命题 1.1.13.(iv)], 开子场所 [Joh02，例子 1.1.16.(a)], 双重否定核 [Joh02，例子 1.1.16.(c)],等。

Heyting 蕴涵针对完备小格构造为

$$x \Rightarrow y \quad :\equiv \quad \bigvee \{z \in L \mid z \wedge x \leq y\},$$

这涉及对整个承载集的量化。当所考虑的框架具有大承载集时，该族是大的，因而其并在我们的直谓设定中不可用。

同样，在完备小格中，也可以从任意并构造任意交：将一个族的交定义为该族所有下界组成的集合的并。然而遗憾的是，一个族的下界集合是一个大集合，这意味着在直谓设定中，这个并通常并不存在。因此，在直谓设定中，完备格一词的含义与其在非谓词性基础中的含义并不完全相同：

交完备格和并完备格指的是不同的概念。locale理论中的许多构造都依赖于任意交的存在性，而在我们的直谓基础设定中，这些交并非先验可得。

对于此类问题，我们的解决办法是把注意力限制在具有小基的 locale 上，并借鉴关于局部可呈示范畴的文献 [AR94]。我们还将证明，某些丰富的 locale 类，例如谱场所范畴，默认就具有小基。我们将在第3.5节和3.7节回到这一问题。

3.1.5 locale 的基本例子

我们现在来看 locale 的三个基本例子：

1. 终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$（范畴 $\mathbf{Loc}_{\mathcal{U}}$），2.（小）集合 X 上的离散 locale，3. Sierpiński locale，即一个生成元上的自由框架。

终端 locale

终端 *locale* (记作 $\mathbb{1}_{\mathcal{U}}$) 是由初始框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 定义的 locale：

例 3.1.16 (初始框架)。 对于每个宇宙 $\mathcal{U}$，(大)类型 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 在由蕴涵定义的序下构成一个偏序集。由于每个命题 $P \Rightarrow Q$ 都是小的，这个偏序集是局部小的。注意，这个序的反对称性恰好就是命题外延性。此外，这个偏序集构成一个框架：最大元是真命题 $\top_{\mathcal{U}}$，交运算由两个命题的合取给出，而命题族 $(P_i)_{i:I}$ 的并定义为

$$\bigvee_{i:I} P_i :\equiv \exists_{(i:I)} P_i,$$

对于每个小命题族，这都是一个小命题。

容易看出，这些运算确实定义了交运算和并运算。对于分配律，容易验证，对于每个 $P:\ \Omega_{\mathcal{U}}$ 以及每个族 $(Q_i)_{i:I}$，都有 $(P \wedge \exists_{(i:I)} Q_i) \leftrightarrow \exists_{(i:I)} (P \wedge Q_i)$，这要用到命题截断的递归原理。

在证明初始框架的泛性质之前，我们先建立以下引理：

引理 3.1.17 ()。 令 $\beta:\ 2_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 为定义如下的函数：$\beta(0) :\equiv \bot$，$\beta(1) :\equiv \top$。每个 $P:\ \Omega_{\mathcal{U}}$ 都等于

1. 并 $\bigvee_{p:P} \top_{\mathcal{U}}$，以及 *2.* 有向族 $\{\beta(b) \mid b{:}2, \beta(b) \leq P\}$ 的并，它由映射 $(\Sigma_{(b:2_{\mathcal{U}})} \beta(b) \leq P) \xrightarrow{\beta \circ \mathrm{pr}_1} \Omega_{\mathcal{U}}$ 形式化给出。

证明。 (1) 易于看出，因为 $P = \top$ 当且仅当 P 成立。对于 (2)，我们证明

$$P = \bigvee \{\beta(b) \mid b : 2, \beta(b) \leq P\}$$

根据反对称性。若 P成立，则 $P = \top$，因此 $\beta(1) \equiv \top \leq P$。反过来，注意到 P 是该族的一个上界，因为 $\bot \equiv \beta(0)$ 显然小于 P，而 $\top \leq P$意味着 P成立。族 $\{\beta(b) \mid b : 2,\ \beta(b) \leq P\}$ 是有向的，因为其中总有 $\beta(0)$，且对于任意一对布尔值 b_1, $b_2 : 2$，若$\beta(b_1) \leq P$且 $\beta(b_2) \leq P$，析取 $b_1 \vee b_2$要么是 b_1，要么是 b_2。 □

引理 3.1.18 ( )。框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 是范畴 $\mathbf{Frm}_{\mathcal{U}}$中的始对象。

证明。 设 L 是一个框架。根据引理 3.1.17， $P : \Omega_{\mathcal{U}}$ 可以表示为小并$\bigvee_{p : P} \top$。这意味着每个框架同态 $h : \Omega_{\mathcal{U}} \to L$ 都是唯一的，因为它必须满足以下等同性：

$$h(P) = h\left(\bigvee_{p:P} \top\right) = \bigvee_{p:P} h(\top) = \bigvee_{p:P} \mathbf{1}_L.$$

我们据此如上定义唯一映射 $\Omega_{\mathcal{U}} \to L$。容易看出，这定义了一个框架同态。 □

注记 3.1.19。 上述证明中的宇宙可以加以推广，但如第3.1.2节所解释的，我们仅关注范畴 $\mathbf{Frm}_{\mathcal{U}}$ （于本论文中）。对宇宙的推广感兴趣的读者请参阅Agda 形式化。

离散 locale

该离散 *locale*，即小类型 $X : \mathcal{U}$ 上由幂集框架 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(X)$所定义的 locale，我们将在下文加以定义。

例 3.1.20 （幂集框架）。 设 $X : \mathcal{U}$ 为一个小类型。在命题外延性与函数外延性的假定下，幂集 $X \to \Omega_{\mathcal{U}}$依由子集包含定义的序构成一个偏序集。由于 X的小性，该偏序集是局部小的，因为这蕴含对 X 的量化是小的。此外，该偏序集构成一个框架：

- 最大开集由全子集 $x \mapsto \top_{\mathcal{U}}$ 给出，
- 两个子集 S, T 的交 $X \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 由集合交给出，定义为
$$S \cap T :\equiv x \mapsto x \in S \wedge x \in T,$$
- 一族子集 $(S_i)_{i : I}$ 的并由集合并给出，定义为
$$\left(\bigvee_{i:I} S_i\right) :\equiv x \mapsto \exists_{(i:I)} x \in S_i,$$
对于每个小子集族，它都是一个小子集。

我们通常用 X 表示全子集 $x \mapsto \top$。

正如我们在上面的例子中提到的，类型 X 的小性对于框架 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(X)$ 的局部小性至关重要，因为包含序 $S \subseteq T :\equiv \prod_{(x:\ X)} x \in S \Rightarrow x \in T$ 通常并非小的，除非使用某种重定大小形式。下面的缩放禁忌说明了这一点。

引理 3.1.21. 如果大命题 P 上的幂集格是局部小的，那么否定 $\neg P$ 是一个小命题。

证明。 令 $P : \Omega_{\mathcal{U}^+}$。回顾一下，在幂集框架 $\mathcal{P}(X)$ 中，我们用 X 表示顶子集 $x \mapsto \top$，这意味着我们用 P 本身表示 $\mathcal{P}(P)$ 的顶子集。我们有，$P \subseteq \emptyset$ 当且仅当 $\neg P$ 成立。假设格 $\mathcal{P}(P)$ 局部小，则类型

$$P \subseteq \emptyset$$

是小的，因此 $\neg P$ 也是小的。 □

如果 $\neg P$ 是小的，那么显然 $\neg\neg P$ 也是小的，这意味着我们有：

推论 3.1.22. 如果每个大命题上的幂集框架都是局部小的，那么对于每个宇宙 $\mathcal{U}$，我们都有从 $\mathcal{U}^+$ 到 $\mathcal{U}$ 的 $\Omega_{\neg\neg}$-重定大小。

给定一个大类型 $X : \mathcal{U}^+$，注意到幂集格 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(X)$ 的局部小性是命题缩放的推论，因为包含映射 $S \subseteq T$ 总是一个命题。写下本文时，作者尚不清楚这个格的局部小性是否等价于某种广为人知的重定大小形式。

接下来我们将考察 Sierpiński locale，它是一个框架的例子：尽管定义在大类型上，却是局部小且小完备的尽管。

Sierpiński locale

例 3.1.23 (谢尔宾斯基框架)。 子集 $S : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 的 $\mathcal{U}$-命题称为 *Scott* 开，如果它保持命题有向族的并。Scott 开子集的集合在包含序下构成一个偏序集，可以证明它是局部小的。这个偏序集构成一个小完备框架，它定义的 locale 称为 *Sierpiński locale*。

证明。 容易看出，全子集是 Scott 开的。给定 Scott 连续子集 $S, T : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$，要证明交 $S \cap T$ 是 Scott 连续的，

考虑一个命题的有向族 $(P_i)_{i:I}$。我们有

$$\begin{aligned}(S \cap T)\left(\bigvee_{i:I} P_i\right) &= \left(\bigvee_{i:I} S(P_i)\right) \wedge \left(\bigvee_{i:I} T(P_i)\right) && \text{(Scott-continuity)}\\ &= \bigvee_{i,j:I} S(P_i) \wedge T(P_j)\\ &= \bigvee_{i:I} S(P_i) \wedge T(P_i) && (\dagger)\end{aligned}$$

对于步骤 (†)，$\geq$ 方向显然。$\leq$方向由族 $(S(P_i))_{i:I}$和 $(T(P_i))_{i:I}$的有向性得出。

为说明 Scott 开子集的（小）并仍是 Scott 开集，设 $(S_i)_{i:I}$是一个 Scott 开子集族，并设 $(P_j)_{j:J}$是一个命题的有向族。

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{i:I} S_i\right)\left(\bigvee_{j:J} P_j\right) &= \exists_{(i:I)} S_i\left(\bigvee_{j:J} P_j\right)\\ &= \exists_{(i:I)}\left(\bigvee_{j:J} S_i(P_j)\right) && \text{(Scott-continuity of } S_i)\\ &= \exists_{(i:I)}\exists_{(j:J)} S_i(P_j)\\ &= \exists_{(j:J)}\exists_{(i:I)} S_i(P_j)\\ &= \bigvee_{j:J}\left(\left(\bigvee_{i:I} S_i\right)(P_j)\right)\end{aligned}$$

我们还需要证明，对于任意一对 Scott 开子集 S 和 T，逐点序 $\prod_{(P:\,\Omega_{\mathcal{U}})} S(P) \Rightarrow T(P)$ 是 $\mathcal{U}$-小的。我们将上述序的小版本定义为 $S \subseteq_s T :\equiv \prod_{(P:\,\Omega_{\mathcal{U}})} S(P) \Rightarrow T(P)$，并证明 $S \subseteq_s T$ 与 $S \subseteq T$ 逻辑等价。非平凡的方向是 $S \subseteq_s T \Rightarrow S \subseteq T$。假设 $S \subseteq_s T$，并令 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$。根据引理 3.1.17，我们知道 P 可以表示为有向并 $\bigvee\{\beta(b) \mid b : 2_{\mathcal{U}}, \beta(b) \leq P\}$。$S$和 T的 Scott 开集性意味着

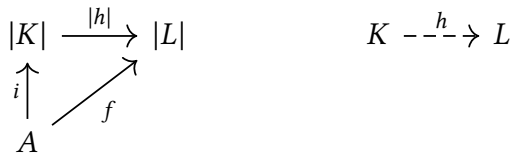
$$\begin{aligned}S\left(\bigvee\{\beta(b) \mid b : 2_{\mathcal{U}}, \beta(b) \leq P\}\right) &= \bigvee\{S(\beta(b)) \mid b : 2_{\mathcal{U}}, \beta(b) \leq P\}\\ &\leq \bigvee\{T(\beta(b)) \mid b : 2_{\mathcal{U}}, \beta(b) \leq P\}\\ &= T\left(\bigvee\{\beta(b) \mid b : 2_{\mathcal{U}}, \beta(b) \leq P\}\right).\end{aligned}$$

□

我们将宇宙 $\mathcal{U}$ 中的 Sierpiński locale 记作 $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$。如果上下文已明确宇宙，则省略下标，写作 $\mathbb{S}$。

给定一个小集合 A，如果存在一个函数 $i : A \to |K|$，使得对于每个框架 L 和每个函数 $f : A \to |L|$，都存在唯一的框架同态 $h : K \to L$ 满足 $f = |h| \circ i$，如以下图表所示，则称框架 K 是由 A 自由生成 的

图表：



Sierpiński locale $\mathbb{S}$ 的万有性质是，其框架 $\mathcal{O}(\mathbb{S})$由单位类型 $\mathbf{1}$自由生成。由于函数 $\mathbf{1} \to |L|$ 恰好是框架 L的开集，这一万有性质可以简化如下。

定义 3.1.24 （Sierpiński的万有性质）。 若一个 locale X 具有一个指定的开集 U，并满足以下性质：对于每个 locale Y以及每个开集 V: $\mathcal{O}(Y)$，都存在一个映射 f: $Y \to X$，满足 $V = f^*(U)$，则称该 locale 具有 *Sierpiński* 的万有性质。

命题 3.1.25 ()。 我们在例 *3.1.23* 中构造的谢尔宾斯基框架满足上述万有性质。指定的开集由恒等映射给出。

从概念上说，上述万有性质表明，Sierpiński locale 对每个 *locale* 的开集进行分类。我们将推迟到第 6.2.6 节再证明我们的构造满足这一性质，因为该证明需要一些技术准备。

¬¬稳定命题的框架

例 3.1.26. 我们用 $\Omega_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$命题类型 $P:\ \Omega_{\mathcal{U}}$ 满足$\neg\neg P \Rightarrow P$的命题称为 ¬¬-稳定命题。按蕴涵排序时，它们构成一个框架，交由合取给出，与例3.1.16中相同。不过，并与例 3.1.16中的不同。给定一族 ¬¬-稳定命题 $(P_i)_{i:I}$，其在 $\Omega_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$中的并定义为

$$\neg\neg\left(\bigvee_{i:I} P_i\right) \equiv \neg\neg\exists_{(i:I)} P_i.$$

我们用 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$表示由上述框架定义的 locale。

上述框架可以更自然地描述为终端 locale 的一个子*locale*，即由双重否定核 [Joh82,§II.2.4]:

$$\neg\neg : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}.$$

遗憾的是，我们必须暂缓此处的描述，因为我们尚未介绍子locale和核的概念。我们将在下一节讨论这一点。

3.2 子局部

在 locale 理论的传统发展中，有几种等价的方式来表示子*locale*这一概念 [Joh02, 命题 1.1₁₃]:

1. $\mathcal{O}(X)$ 的正则框架商，即到 $\mathcal{O}(X)$ 的满射框架同态的同构类。2. $\mathcal{O}(X)$ 上的框架同余。3. $\mathcal{O}(X)$ 上的核。4. $\mathcal{O}(X)$ 的不动点集，即满足以下条件的子集：(1) 对任意下确界封闭；(2) 关于海廷蕴涵构成指数理想。

上文关于子locale的一些概念并非直谓可用。例如，我们并不清楚在我们的框架中如何定义不动点集，因为它们预设了所考虑的框架中存在任意下确界和海廷蕴涵；正如我们在第3.1.4节所解释的那样，这两者都无法直谓地使用。

就本论文而言，我们将核作为子locale的主要概念 .

定义3.2.1 （核）。 *locale* 上的核 X 是一个自映射 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，它具有膨胀性、保持二元交且幂等。

我们定义 Nucleus$(X) :\equiv \Sigma_{(j\colon \mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(X))}$is-nucleus$(j)$。此外，我们采用标准约定，使用字母 j、k、$l\ldots$表示取值于核的变量。

例 3.2.2 （闭核）。 对于每个 locale X和每个开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$，映射

$$\mathbf{c}(U) :\equiv V \mapsto U \vee V$$

是一个核。它是膨胀的，因为对于每一对开集U, V，都有 $V \leq \mathbf{c}(U)\,(V) \equiv U \vee V\colon \mathcal{O}(X)$。它也是幂等的，因为

$$\mathbf{c}(U)(\mathbf{c}(U)(V)) \equiv U \vee (U \vee V) \equiv U \vee V.$$

二元交的保持性由对偶分配律得出。

引理3.2.3 ([Tos20, 命题 3.27]). 对于每个 *locale* X和核 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，不动点类型

$$\Sigma_{(U\colon \mathcal{O}(X))}(U = j(U))$$

由 j构成框架，其定义的 *locale* 记作 X_j。它满足这样的性质：包含映射 $\mathcal{O}(X_j) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$是映射的右伴随

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) &\to \mathcal{O}(X_j) \\ U &\mapsto j(U) \end{aligned}$$

引理3.2.4. 对于每个核 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，类型 $\Sigma_{(U\colon \mathcal{O}(X))}(U = j(U))$ 等价于 j 的像。

证明。 这是 locale理论中的标准事实。例如参见 [Joh82，第 49]。 □

定义 3.2.5。 若存在某个核$j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，使得 Y同胚于 X_j，则称 locale Y为 locale X的子*locale* 。

从概念上说，核的概念将由框架商 $q\colon \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$ 及其右伴随 $q_*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 所产生的单子公理化。定义 $j_q \coloneqq q_* \circ q$，则 j_q- 不动开集是商 $q\colon \mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$ 所确定的等价类的代表。

备注3.2.6。我们也会研究具有膨胀性且保持二元交、但不一定是幂等的函数。这类函数称为预核。我们还注意到，要证明预核 j是幂等的，只需证明 $j(j(U)) \leq j(U)$，因为反方向可由膨胀性推出。事实上，核的概念可以定义为满足不等式 $j(j(U)) \leq j(U)$的预核，但为求简洁，我们按照定义3.2.1 来定义，并在幂等性的证明中隐式地使用这一事实。

引理 3.2.7. 每个预核都是单调映射。

证明. 格论中一个众所周知的事实是，交保持性蕴含单调性 [DP02，引理 2。8]。 □

3.3 紧致性与远小于关系

3.3.1 紧开集

紧致性是一个基本的拓扑性质。在点集拓扑中，空间的子空间$Y \subseteq X$是紧的，如果 Y的每个开覆盖都有有限子覆盖。由于这是一个仅涉及该空间的开子集的性质 X，它可以很容易地转化到无点语境中，从而定义 locale 中紧开集的概念。我们下面的类型论定义紧密遵循 Johnstone [Joh82，第 II.3 段。1], 不同之处在于，我们通过使用 Kuratowski 有限族对其进行了改进。

我们首先做一些准备工作。

引理 3.3.1 ()。对于任意有向开集族 $(U_i)_{i:I}$，该族中任意 *Kuratowski* 有限元素集在该族中都有一个上界。

证明。 设 $(U_i)_{i:I}$是一个有向开集族。我们通过 Kuratowski 有限子集归纳法（引理 2.12.6），证明该族中任意 Kuratowski 有限元素集 $(U_i)_{i:I}$在该族中都有一个上界。

基础情形 *(1)*：空子集。根据有向性的假设，该族可居留；该族的任意成员都真空地是空集的上界。

基础情形 *(2)*：单元素子集。我们需要证明，对于每个 $i\colon I$，单元素子集 $\{U_i\}$ 在族 $(U_i)_{i:\ I}$ 中有一个上界。这显然成立，因为

每个开集 U_i 根据定义都属于该族，并且是包含自身的单元素集的上界。

归纳步骤：二元并。设 F_1 和 F_2 是该族元素的两个子集，并假设根据归纳法，它们在该族中分别有上界 U_1、U_2。我们需要证明，它们的并集 $F_1 \cup F_2$ 在该族中有上界（U_i）$_{i:I}$。根据该族的有向性，必定存在该族中的某个 U_3，它同时大于 U_1 和 U_2。显然，这意味着 U_3 是子集 $F_1 \cup F_2$ 的一个上界。 □

定义 3.3.2。设 X 是一个 locale，并考虑一族开集 $(U_i)_{i:I}$。族 $U^{\uparrow}\colon \mathrm{List}(I) \to \mathcal{O}(X)$ 定义如下：

$$U^{\uparrow}(i_0, \ldots, i_{n-1}) :\equiv U_{i_0} \vee \cdots \vee U_{i_{n-1}},$$

称为$U_{i)i:I}$在有限并下的闭包。

引理 3.3.3（参见[Joh82, §II.3。1]）。对于 *locale* U的每个开集 X，以下条件等价：

1. 对于每个开集族 $(V_i)_{i:I}$满足 $U \leq \bigvee_{i:I} V_i$，存在一个 *Kuratowski* 有限子族 $(V_{i_j})_{j:J}$，使得 $U \leq \bigvee_{j:J} V_{i_j}$。*2.* 对于每个开集族 $(V_i)_{i:I}$ 满足 $U = \bigvee_{i:I} V_i$，存在一个 *Kuratowski* 有限子族 $(V_{i_j})_{j:J}$，使得 $U = \bigvee_{j:J} V_{i_j}$。*3.* 对于每个有向族 $(V_i)_{i:I}$满足 $U \leq \bigvee_{i:I} V_i$，存在一个指标 $i\colon I$，使得$U \leq V_i$。

证明。我们从等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 开始。对于正向蕴涵，设某个开集 U满足条件 (1)，并令 $(V_i)_{i:I}$ 为一个满足 $U = \bigvee_{i:I} V_i$ 的开集族。必定存在一个 Kuratowski 有限子族 $(V_{i_j})_{j:J}$，使得$U \leq \bigvee_{j:J} V_{i_j}$。接下来只需证明 $\bigvee_{j:J} V_{i_j} \leq U$，但我们已经有 $\bigvee_{j:J} V_{i_j} \leq \bigvee_{i:I} V_i = U$。对于反向蕴涵，令 U为一个满足条件 (2) 的开集，并考虑一个满足 $U \leq \bigvee_{i:I} V_i$ 的开集族 $(V_i)_{i:I}$。这意味着

$$U = U \wedge \bigvee_{i:I} V_i,$$

因此，由 frame 分配律可得

$$U = \bigvee_{i:I} U \wedge V_i.$$

根据条件（2），这意味着存在一个有限子覆盖

$$U = \bigvee_{j:J} U \wedge V_{i_j}.$$

这再次由分配律推出 $U = U \wedge \bigvee_{j:J} V_{i_j}$，其成立当且仅当$U \leq \bigvee_{j:J} V_{i_j}$，因此证明完毕。

对于等价 (3) $\Leftrightarrow$ (1)，我们首先处理蕴涵 (3) $\Rightarrow$ (1)。设 U 是满足 (3) 的开集，并设 $(V_i)_{i:I}$ 是满足 $U \le \bigvee_{i:I} V_i$ 的族。我们考虑如上所定义的 $(V_i)_{i:I}$ 在有限并下的闭包。由于有向化保持该并，我们有 $U \le \bigvee_{s:\text{列表}(I)} V_s^{\uparrow}$，因此由条件（3）的假设可知，存在一个指标列表 $i_0, \dots, i_{n-1}$，满足 $U \le V_{i_0} \vee \cdots \vee V_{i_{n-1}}$。列表 $V_0, \dots, V_{i_{n-1}}$ 中的成员关系定义了 $(V_i)_{i:I}$ 的一个 Kuratowski 有限子族，该子族的一个上界属于该族，并且位于 U 之上。对于反向蕴涵，设 U 是满足条件（1）的开集，并考虑有向族 $(V_i)_{i:I}$，使得 $U \le \bigvee_{i:I} V_i$。必定存在 Kuratowski 有限子族 $(V_{i_j})_{j:J}$，满足 $U \le \bigvee_{j:J} V_{i_j}$。由引理 3.3.1，该子族在 $(V_i)_{i:I}$ 中必有一个上界 V_k，这意味着我们有

$$U \le \bigvee_{j:J} V_{i_j} \le V_k.$$

□

定义 3.3.4(紧致性)。

- 一个开集 $U : \mathcal{O}(X)$ 称为 紧，如果它满足引理3.3.3中的等价条件。
- 一个 locale X 称为紧，如果它的最大开集 $\mathbf{1}_X$ 是紧的。

在形式化中，我们将引理 3的条件（3.3.3 ）作为紧致性的主要定义。

例 3.3.5。 终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 是紧的。由并的定义可直接得出，对于任意一族 $\mathcal{U}$-命题 $(P_i)_{i:I}$，我们有 $\top \le \bigvee_{i:I} P_i$ 当且仅当某个 P_i 成立，即对于某个 $i : I$。

例 3.3.6. 在 $\mathbb{N}$ 上的离散 locale**并非**紧，因为根据引理 3.3.3 ，这意味着 $\mathbb{N}$ 是 Kuratowski 有限类型。

例 3.3.7. Sierpiński locale 是紧的。令 $(S_i)_{i:I}$ 为 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 的 Scott 开子集的一个有向族，且 $\top \le \bigcup_{i:I} S_i$，也就是说，并集 $\bigcup_{i:I} S_i$ 包含 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 中的每个命题。于是必定存在一个 Scott 开子集 S_i，使得 $\bot \in S_i$。根据 Scott 开子集的单调性，S_i 必定包含每个命题，因为 $\bot$ 蕴含每个 $\mathcal{U}$-命题。因此我们有 $\top \subseteq S_i$。

引理 3.3.8 ( ). 紧开集在有限并下封闭，也就是说，底开集 **0** 总是紧的，且两个紧开集的并也是紧的。

证明。locale理论中的熟知事实 [Joh82，引理 II.3。2]。 □

我们用 $\mathrm{K}(X)$ 表示 locale X 的紧开集类型。换句话说，我们

定义

$$\mathrm{K}(X) :\equiv \Sigma_{(U:\mathcal{O}(X))} U \text{ is compact.}$$

3.3.2 远小于关系

在无点拓扑中，有一种称为远小于关系的紧致性推广。一个开集 $U:\mathcal{O}(X)$ 是紧的，当且仅当 U 的每个开覆盖都含有一个有限子覆盖，使得 U；而如果 V 的每个开覆盖都含有一个有限子覆盖，使得 U，则称某个开集 V 远小于另一个开集 V。换句话说，U 远小于 V（记作 $U \ll V$）表示 U 相对于开集 V 是紧的。

定义 3.3.9 (远小于关系). 若 locale X 的开集 U 满足以下条件，则称其远小于开集 V，记作 $U \ll V$：对于每个有向族 $(W_i)_{i:I}$，且满足 $V \le \bigvee_{i:I} W_i$，都存在某个 $i:I$，使得 $U \le W_i$。

引理 3.3.10. 对于每一对开集 U 和 V，命题 $U \ll V$ 成立。

注意，对于每个开集 $U:\mathcal{O}(X)$，命题 $U \ll U$ 在判断上等同于引理 3.3.3 中的条件（3.3.3）。

引理 3.3.11。

- 对于任意两个开集 $U, V:\mathcal{O}(X)$，若 $U \ll V$，则 $U \le V$。
- 对于任意 $U, V, W:\mathcal{O}(X)$，若 $U \ll V$ 且 $V \le W$，则 $U \ll W$。
- 对于任意 $U, V, W:\mathcal{O}(X)$，若 $U \le V$ 且 $V \ll W$，则 $U \ll W$。

证明。 参见 [Joh82，引理 VII.2。2]在我们的基础框架中，证明保持不变。 □

最后，我们还指出，引理 3.3.8 可推广到远小于关系。

引理 3.3.12。 对于每个开集 $U:\mathcal{O}(X)$，

1. 底开集 $\mathbf{0}_X$ 远小于 U，且 2. 对于任意一对开集 V 和 W，若 $V \ll U$ 且 $W \ll U$ 则 $V \vee W \ll U$。

证明。(1) 设 $(U_i)_{i:I}$ 是一个有向族，满足 $\mathbf{0}_X \le \bigvee_{i:I} U_i$。由于该族是有向的，因此其中必存在某个 U_k，故有 $\mathbf{0}_X \le U_k$。

(2) 设 U_1, U_2 是 X 的一对开集，其中 $U_1 \ll U$ 且 $U_2 \ll U$。设 $(V_i)_{i:I}$ 是一个开集族，满足 $U \le \bigvee_{i:I} V_i$。必定存在 $i, j:I$，使得 $U_1 \le V_i$ 且 $U_2 \le V_j$。由于族 $(V_i)_{i:I}$ 是有向的，必定存在某个 $k:I$，使得 $U_1 \le V_i \le V_k$ 且 $U_2 \le V_j \le V_k$。由此可得 $U_1 \vee U_2 \le V_k$。 □

3.4 闭开集与良内关系

3.4.1 闭开集

现在我们来看点集拓扑中开闭子集这一概念的无点类比。

定义 3.4.1 (既开又闭)。 locale X 的开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$ 称为既开又闭，如果它是格 $\mathcal{O}(X)$ 中的一个有补元素。也就是说，存在一个指定的 U'，满足

$$U \wedge U' = \mathbf{0}_X \quad \text{and} \quad U \vee U' = \mathbf{1}_X.$$

请注意，在上述定义中不必使用命题截断：

引理 3.4.2. 对于每个开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$，表达 U 为既开又闭的类型是一个命题。

证明。 直接由布尔补元的唯一性得出。 □

例 3.4.3. 终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 的闭开集恰好是可判定命题（即 $\top_{\mathcal{U}}$ 与 $\bot_{\mathcal{U}}$，如引理 2.6.4所示）。

为使论述自洽，我们记录一些关于闭开集的基本事实。

引理 3.4.4. 在每个 *locale* X 中，

- 最大开集 $\mathbf{1}_X$ 与底开集 $\mathbf{0}_X$ 是既开又闭的，
- 闭开集对二元并与二元交封闭。

证明。 容易看出， $\mathbf{1}_X$ 和 $\mathbf{0}_X$ 都是既开又闭的，因为它们显然互为补。给定两个闭开集 $F_1, F_2\colon \mathcal{O}(X)$，其补分别为 F_1'和 F_2'，则交$F_1 \wedge F_2$（并 $F_1 \vee F_2$）的补为并 $F_1' \vee F_{\prime 2}$（交$F_1' \wedge F_{\prime 2}$）。 □

3.4.2 内含关系

正如远小于关系将紧开集的概念推广一样，内含关系 将既开又闭集的概念推广了。U内含于 V（记作 $U \Subset V$）这一陈述，表示开集 U相对于开集 V是既开又闭的。

定义 3.4.5 (内含关系)。 我们称一个 locale 的开集 U X内含于 开集 V，记作 $U \Subset V$，若存在某个开集 W满足 $U \wedge W = \mathbf{0}_X$且 $V \vee W = \mathbf{1}_X$。这样的 W称为 U 的交补和 V 的并补。

这里我们注意到，在上述定义中使用未指定存在性至关重要，因为未截断版本是结构而非性质。下面的例子对此进行了说明：

例 3.4.6 ( ). 考虑终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$，它以单位命题 $\top_{\mathcal{U}}$ 作为其最大开集，并以空命题 $\bot_{\mathcal{U}}$ 作为其底开集。我们有 $\bot \leqslant \top$，但这可以由两个不同的命题来见证。命题 $\bot$是其自身的交补，因为 $\bot \wedge \bot = \bot$，同时也是 $\top$的并补，因为 $\top \vee \bot = \top$。同样地， $\top$ 是 $\bot$ 的交补，并且是其自身的并补。

引理 3.4.7 (). 给定一个 *locale* 的开集 U、 V、 W，

1. 若 $U \leqslant V$且 $V \leq W$，则 $U \leqslant W$；
2. 若 $U \leq V$且 $V \leqslant W$则 $U \leqslant W$。

证明。 参见 [Joh82，引理 III.3.1.1.(iii)]。在我们的基础框架中，证明不变。 □

在紧locale中，内含关系蕴含远小于关系。

引理 3.4.8。 在每个紧*locale* X中，若 $U \leqslant V$则 $U \ll V$，对任意一对开集U, V: $\mathcal{O}(X)$。

证明。 这是一个众所周知的证明。参见 [Joh82，第 303]页。 □

由于每个开集 U: $\mathcal{O}(X)$ 紧当且仅当 $U \ll U$，且既开又闭当且仅当 $U \leqslant U$，我们立即得到以下推论：

推论 3.4.9。 在每个紧*locale*中，闭开集都是紧的。

那么这个蕴涵的逆命题呢？在第 4.5.1 节中，我们将证明，在我们于定义 正则 *locale* 中所定义的3.6.5正则 locale 中，远小于关系蕴涵内含关系。

3.5 基

在点集拓扑中，拓扑的一个基 (或基） X [Eng89，第 12] 页，是一个由 $\mathcal{B}$ 中的开子集组成的集合 X，满足每个开集 $U \in \mathcal{O}(X)$ 都可以表示为 $\mathcal{B}$ 的某个子集族的并集。 $\mathcal{B}$ 这些开集称为基本开集。

在无点拓扑的语境中，这种基的概念被序论概念生成格抽象化。在 [Joh02，第 548], 页，例如，locale X的基被定义为子集 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(X)$，使得框架 $\mathcal{O}(X)$ 中的每个元素都可以表示为 $\mathcal{B}$中若干成员的并。这个定义可以很容易地转化到类型论的语境中：

定义 3.5.1。设 X 是一个locale。若开集族 $(B_i)_{i:I}$满足以下条件，则称其为 X 的基：对于每个 U: $\mathcal{O}(X)$，都存在一个指定的有向子族 $(B_{i_j})_{j:J}$，使得$U = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$。这称为开集 U 的基本覆盖族。

请注意，在上述定义中，我们并未要求基本开集的集合由一个嵌入族给出。从技术上讲，生成格这一概念的精确翻译会包含这一要求，因为子集对应于嵌入族。然而，对于我们的目的而言，考虑这一概念的一个变体颇为有用：在该变体中，我们允许基本开集族中出现重复元素。我们称之为内涵基，并将其与带有嵌入要求的基区分开来；后者称为外延基。我们将在第3.5.1节进一步讨论二者的区别。

我们还考虑了基这一概念的另一种变体，即弱基：在这种基中，基本覆盖族的指定存在要求被弱化为未指定的存在性。我们将在第3.5.2节进一步讨论这一点。乍看之下，这样做的动机可能并不明显，但事实证明，这对于谱与 Stone 局部理论的直谓发展相当重要。我们将在第4章详细讨论这一点。

3.5.1 内涵基与外延基

我们来考虑基概念的一种变体，称为外延基：

定义 3.5.2（外延基）。若一个基（B_i）$_{i:I}$称为外延的，则函数 $B:\ I \to \mathcal{O}$（X）是一个嵌入；也就是说，它是定义 2.13.7 意义下的一个子类型。

要求基本开集族是一个嵌入，这意味着每个基本开集在基中都有唯一的表示。虽然这恰好符合 locale 基的标准概念，但通常使用允许重复的基会更方便。离散 locale 就是一个例子：

E例 3.5.3。设 X是一个小类型。函数 β: List(X) $\to \mathcal{P}(X)$ 定义如下

$$\beta(x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad :\equiv \quad y \mapsto y =_X x_0 \vee \cdots \vee y =_X x_{n-1},$$

它给出了框架 $\mathcal{P}(X)$ 的一个（小）内涵基。然而，这不是一个外延基，因为列表的每种置换都会给出相同的子集。我们也可以改用 β 的像来消除重复。不过要注意，β 的像恰好是 X的 Kuratowski 有限子集类型，而其小性需要集合替换原理。因此，若将外延基作为标准定义，就会迫使我们采用一个额外的假设。

取像以得到外延基的这一过程（我们在上述例中提到过）可以推广到任意基。我们称之为内涵基的外延化。它关键地依赖于集合替换原理。

引理 3.5.4. 对于 *locale* X 上的每个小基$(B_i)_{i:I}$，在假定集合替换原理的条件下，$B: I \to \mathcal{O}(X)$ 的像是一个小类型。

证明。 设 $(B_i)_{i:I}$是一个小基。根据集合替换原理（推论 2.14.2），只需证明 (1) I是一个小类型，且 (2) $\mathcal{O}(X)$ 是一个局部小集合，即可证明 像(B) 是一个小类型。前者由假设立即得出，后者由引理 3.1.3给出。 □

由于将基的一个指标替换为其像，不会影响基所给出的覆盖族的并，因此得到以下推论：

推论 3.5.5 (基的外延化)。 对于 *locale* X 上的任意小内涵基 $(B_i)_{i:I}$，包含映射 像$(B) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$，其形式定义为第一投影，是一个小外延基，且恰好包含相同的开集。

3.5.2 弱基与强基

考虑一个族 $(B_i)_{i:I}$。它构成内涵基这一陈述，以及它构成外延基这一陈述，都不是命题。这是因为基可以通过多种方式给出并相同的覆盖族。例如，可以选择在基本覆盖族中包含或不包含底元。尽管这不会改变该族的并，但形式上该族会有所不同。

在第 4章中，我们将遇到一些 locale 情形，在这些情形中可以证明外延基是唯一的。对于这类 locale，构造一个基并非一种性质，这一点将成为限制因素，使我们无法获得一种命题性的基概念。为了解决这个问题，我们定义了弱基的概念，将指定存在的要求放宽为未指定存在。

定义 3.5.6 (弱基)。 locale X的一个弱基是一个族 $(B_i)_{i:I}$，满足对每个 U: $\mathcal{O}(X)$，都存在一个未指定的有向子族 $(B_{i_j})_{j:J}$，使得$U = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$。

备注 3.5.7。 需要注意的是，弱基这一概念通常并不具有良好的性质：许多我们希望借助基来证明的结果，都要求覆盖族具有指定存在性。因此，应将其视为一种具有某些用途的辅助技术概念；在某些类别的 locale 中，族的覆盖结构可以由其未指定存在性推出，此时该概念具有良好的性质。

在需要仔细区分二者的语境中，我们使用明确的术语强基来指称定义3.5.1。除非另有说明，所有基都是强的。在强基的语境中所说明的内涵—外延区别，同样适用于弱基。

3.5.3 基的定向化

在上述所有定义中，我们都要求由基给出的基本覆盖族是有向的。在框架的语境中，由于我们拥有所有有限并，这一要求并非必要，因为我们总可以选择使用基在有限并下的闭包（如定义3.3.2中所示），此时基本覆盖族是有向的。更具体地说，下面介绍如何将基有向化：

1. 给定一个基 $(B_i)_{i:I}$，我们对其作对有限并封闭。2. 对于由基 $(B_i)_{i:I}$给出的每个基本覆盖族，我们也通过对有限并封闭来将其有向化。这得益于步骤（1）。

如果所考虑的基本身已经对有限并封闭，则可以跳过上述步骤（1）。

引理 3.5.8 ()。对于 *locale* X 的每个基 $(B_i)_{i:I}$，族

$$B^{\uparrow} : \mathsf{List}(I) \to \mathcal{O}(X),$$

通过对有限并封闭而得到（如定义 *3.3.2*所述）的族构成一个具有有向覆盖族的基。

证明。 设 U为 X的一个开集。记$(B_{i_j})_{j:J}$为 B对 U给出的基本覆盖族。我们将 $B^{\uparrow}$给出的有向覆盖族定义为子族α：列表$(J) \to \mathcal{O}(X)$，定义为

$$\alpha(j_0, \ldots, j_{n-1}) :\equiv B_{i_{j_0}} \vee \cdots \vee B_{i_{j_{n-1}}},$$

它显然是有向的，并且是 $B^{\uparrow}$的一个子族。 □

我们注意到，小基在有限并下的闭包是小的，因为 列表(I)与 I 居于同一宇宙。此外，我们注意到，鉴于引理 3.5.8，本可以在定义基这一概念时不要求基本覆盖族是有向的。尽管如此，出于技术上的便利，我们仍倾向于在定义中包含这一要求。

3.5.4 例子

现在我们再看一些基的例子，从终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$开始 .

终端 locale 的基

在引理 3.1.17中，我们展示了如何将一个命题分解为可判定命题的并。确定了基的概念后，我们现在进一步扩展引理 3.1.17 ，证明可判定命题构成终端 locale 的一个基：

例 3.5.9( )。 回忆引理 $\beta : 2 \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 中的族3.1.17，其定义如下

$$\beta(0) :\equiv \bot_{\mathcal{U}}$$
$$\beta(1) :\equiv \top_{\mathcal{U}}$$

这构成了终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$的一个基。对于每个命题 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$，族$\{\top \mid p : P\}$ 是 P的覆盖族，这由引理 3.1.17得出。我们应用引理 3.5.8 中的定向化过程，使基本覆盖族成为有向的。

请注意，若不使用定向化过程，上述覆盖族并非有向的。由于使用经过定向化的基在技术上有些不便，我们也展示如何直接证明上述族 $\beta : 2 \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 构成一个有向基。

例 3.5.10。 族 $\beta : 2 \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 来自例3.5.9 构成 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$的一个有向基。对于每个命题 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$，基本覆盖族为

$$\left(\Sigma_{(b:2)} \beta(b) \leq P\right) \xrightarrow{\beta \circ \mathrm{pr}_1} \Omega_{\mathcal{U}}.$$

此族总是由空命题 $\bot_{\mathcal{U}}$居留。给定两个 $b_1, b_2 : 2$满足$\beta(b_1) \Rightarrow P$且 $\beta(b_2) \Rightarrow P$，有 $\beta(b_1 \vee b_2) \Rightarrow P$，因此最小上界 $b_1 \vee b_2$ 属于该族。它覆盖 P这一事实已由引理 3.1.17给出。

Sierpiński locale 的基构造

要为 Sierpiński locale 构造一个基，我们先做一些准备。

定义 3.5.11. 对于每个命题 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$，其上闭集（或主滤子），记作$\uparrow P$，定义为

$$\uparrow P :\equiv Q \mapsto (P \Rightarrow Q).$$

这定义了一个函数 $\uparrow P : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$。

引理 3.5.12. 对于每个可判定命题 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$，主滤子 $\uparrow P$ 是一个 *Scott* 开子集 $\Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$。

证明。设 $P : \Omega_{\mathcal{U}}$是一个可判定命题，并设 $(Q_i)_{i : I}$是一个命题的有向族。我们需要证明，$P \Rightarrow \exists_{(i : I)} Q_i$当且仅当 $\exists_{(i : I)} P \Rightarrow Q_i$。如果$P$是可居留的，那么很容易看出 $P \Rightarrow \exists_{(i : I)} Q_i$成立，因为 $\top \Rightarrow \exists_{(i : I)} Q_i$当且仅当$\exists_{(i : I)} Q_i$当且仅当 $\exists_{(i : I)} \top \Rightarrow Q_i$。如果 P不可居留，根据底类型的消去原理，$\exists_{(i : I)} P \Rightarrow Q_i$必然平凡地成立，因为族 $(Q_i)_{i : I}$是可居留的。因此我们有

$$\exists_{(i : I)} P \Rightarrow Q_i \leftrightarrow \top \leftrightarrow P \Rightarrow \exists_{(i : I)} Q_i.$$

□

引理 3.5.13。 主滤子 $\uparrow\perp_{\mathcal{U}}$ 是 $\Omega_{\mathcal{U}}$的全子集。

证明。 这显然成立，因为每个命题都大于 $\perp$。 □

例 3.5.14。 族 $(\uparrow\beta(b))_{b:2}$构成 Sierpiński locale 的一个基。每个 Scott 开子集 $S: \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 都可以表示为一个并

$$S = \bigvee_{b:2} \{\uparrow\beta(b) \mid \beta(b) \in S\}$$

对于每个命题 $P \in S$，由于我们知道（由例 3.5.10）

$$P = \bigvee_{\substack{b:2 \\ \beta(b)\leq P}} \beta(b),$$

S 的 Scott 连续性意味着

$$\bigvee_{\substack{b:2 \\ \beta(b)\leq P}} S(\beta(b)),$$

因为我们有 $S\left(\bigvee_{b:\beta^{2}()\leq P}{}^{\beta}(b)\right)$。反过来，给定一个命题 P，使得存在某个 $b:2$满足 $\beta(b) \in S$ 且 $\beta(b) \leq P$，由 S 的单调性可立即得出 $P \in S$。

3.6 locale 的重要类

在第 3.5 节确定了基这一概念之后，我们现在考察仅通过要求存在满足某些条件的基即可定义的各类 locale。这一方法受到局部可呈示范畴与局部可及范畴这些概念的启发 [AR94], ，以及 de Jong 与 Escardó 将其应用于域理论的可断言性发展。

定义 3.6.1 （谱 locale）。 一个 locale X 称为谱的，如果它具有某个小基（B_i）$_{i:I}$，满足以下三个条件。

（$\mathrm{SP_b}1$）基中的每一个 B_i 都是紧的。（$\mathrm{SP_b}2$）它包含最大开集 $\mathbf{1}_X$。（$\mathrm{SP_b}3$）它对二元交是闭的，即对每两个 $i, j: I$，存在某个$k: I$，使得 $B_k = B_i \wedge B_j$。

满足这些条件的基称为谱基。

在第4章中，我们将给出这一谱 locale 概念的多种另一种刻画（使用单值性公理）。不过，我们在概念上优先采用此定义，因为它是某种通用技巧的一个实例，而这种技巧通常会得出符合直谓单值基础语境的正确

谓词式单值基础背景下的概念。

定义3.6.2 （零维 locale）。 若某个locale X 具有由闭开集构成的基 $(B_i)_{i:I}$，则称其为零维。我们用零维基来指称这样的基。

定义 3.6.3. 若某个locale X具有满足以下三个条件的基 $(B_i)_{i:I}$，则称其为*Stone*。

($\mathrm{ST_b}1$) 基中的每个元素都是紧的 ($\mathrm{ST_b}2$) 它包含最大开集 $\mathbf{1}_X$。($\mathrm{ST_b}3$) 基中的每个元素都是闭开集。

满足上述条件的基称为*Stone* 基。

定义3.6.4 （局部紧 locale）。 若某个locale X 的框架是连续格，也就是说它具有某个基 $(B_i)_{i:I}$且满足以下条件：对于每个开集 $U:\mathcal{O}(X)$，覆盖 U的覆盖族中的基本开集都远小于 U，则称其为局部紧。

定义 3.6.5 （正则 locale）。 若某个 locale X 具有基 $(B_i)_{i:I}$使得对每个开集 $U:\mathcal{O}(X)$，覆盖子族 $U = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$对每个 $j:J$都满足 $B_{i_j} \leqslant U$，则称其为正则 。

引理 3.6.6. 每个零维 *locale* 都是正则的。

证明。 设 X是一个具有零维基的 locale $(B_i)_{i:I}$并考虑某个$U:\mathcal{O}(X)$。基本覆盖族 $U = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$ 由满足$B_{i_j} \leqslant B_{i_j}$的基本开集组成。由于每个 B_{i_j}都小于 U，由引理 3.4.7 可知，每个 B_{i_j}都满足$B_{i_j} \leqslant U$。 □

3.7 框架的伴随函子定理

在第 3.1.4 节中，我们解释了传统 locale 理论中的许多重要构造，例如 Heyting 蕴涵和任意下确界，在我们的直谓语境中并不可用。本节将通过给出一个针对具有小基的框架的伴随函子定理的可谓词化证明，说明如何解决这一问题。其核心思想在于，我们的基概念起到了满足解集条件的作用。

定义 3.7.1. 设 $(A, \leq_A)$ 和 $(B, \leq_B)$ 是两个预序集。给定单调映射 $f: A \to B$ and $g: B \to A$，若映射 g 满足以下条件，则称其为 f 的右伴随 （并称 f 为 g 的左伴随 ）：

$$f \dashv g \quad :\equiv \quad f(a) \leq_B b \Leftrightarrow a \leq_A g(b) \text{ for all } a:A, b:B.$$

引理 3.7.2 ( ). 表达 f 和 g 构成伴随的命题 $f \dashv g$ 是一个命题。此外，对于每个单调映射 $f\colon A \to B$，其右伴随的类型，即 $\Sigma_{(g:B\to A)} f \dashv g$，是一个命题，因为右伴随是唯一的。

在非偏序范畴的情形下，伴随函子定理涉及所谓的解集条件。在我们的直谓基础框架中，小基起到解集的作用，使我们能够构造框架同态的右伴随。这里一个颇有意思的观察是，弱基 的未指定存在性足以证明伴随函子定理。

定理 3.7.3 (偏序伴随函子定理。 设 X和 Y 是两个 *locale*，并设 $h\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 是一个框架之间的单调映射。假设 Y有一个未指定的、小的弱基。映射 h 有右伴随，当且仅当它保持小族的并。

证明。 设 $h\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 是一个框架之间的单调映射，并假设 Y有一个未指定的、小的弱基。

正向推导很简单：设 h 有一个右伴随 $g\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$，并设 $(U_i)_{i:I}$ 是 $\mathcal{O}(Y)$ 中的一个族。根据并的唯一性，只需证明 $h(\bigvee_i U_i)$ 是族 $(h(U_i))_{i:I}$ 的并。显然，由于 h 是单调的，它是一个上界。设 $(h(U_i))_{i:I}$ 的另一个上界为 V，则有 $h(\bigvee_i U_i) \le V$，因为 $h(\bigvee_i U_i) \le V \leftrightarrow (\bigvee_i U_i) \le g(V)$，这意味着只需对每个 U_i 证明 $U_i \le g(V)$。由于 $U_i \le g(V)$ 当且仅当 $h(U_i) \le V$，而后者可由 V 是所考虑族的一个上界直接得出，因此结论成立。

反过来，首先注意到我们可以使用命题截断的归纳原理，因为 h 的右伴随类型由引理3.7.2可知是一个命题。因此，我们在给定的小基 $(B_i)_{i:I}$下进行论证。假设对于每个小开集族 $(U_i)_{i:I}$，都有 $h(\bigvee_i U_i) = \bigvee_{i:I} h(U_i)$。我们将 h 的右伴随定义为

$$g(U) \quad :\equiv \quad \bigvee \{B_i \mid i : I, h(B_i) \le U\}.$$

我们需要证明 g 是 h 的右伴随，也就是说，对于任意一对开集 $V\colon \mathcal{O}(Y)$、$U\colon \mathcal{O}(X)$，都有 $h(V) \le U \leftrightarrow V \le g(U)$。

对于 (⇒)方向，假设 $h(V) \le U$。必定存在某个指定的覆盖族 $(i_j)_{j:J}$，使得 $V = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$。这意味着我们只需证明，对于每个 $j\colon J$，都有 $B_{i_j} \le g(U)$；这一点成立，因为 $h(B_{i_j}) \le h(V) \le U$。

对于（⇐）方向，假设 $V \le g(U)$。这意味着我们有：

$$\begin{aligned} h(V) &\le h(g(U)) \\ &= h\left(\bigvee \{B_i \mid i : I, h(B_i) \le U\}\right) \\ &= \bigvee \{h(B_i) \mid i : I, h(B_i) \le U\} \\ &\le U \end{aligned}$$

因此 $h(V) \le U$，正如所需。 □

3.7.1 Heyting 蕴涵与开核

利用伴随函子定理，我们构造具有小（弱）基的框架上框架同态的右伴随。这将在我们的论述中有多项应用。最重要的是，它将使我们能够定义海廷蕴涵，从而可以在直谓基础设定中的开核这一概念下开展工作。这对于我们在第5章构造补丁 locale 至关重要。

定义3.7.4 ( )。 设$f\colon X \to Y$是 locale 之间的连续映射，其中Y具有一个未指定的小基。根据定理 3.7.3，框架同态 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 有一个右伴随，记为

$$f_* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y).$$

定义 3.7.5（海廷蕴涵）。设 X 是一个具有某个小基的 locale。对于每个开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$，映射 (-) $\wedge U\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 根据框架分配律是一个框架同态。因此，它具有一个如定义3.7.4中构造的右伴随。我们将这个右伴随记为 $U \Rightarrow$ (-) : $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$。运算 (-) $\Rightarrow$ (-) 称为海廷蕴涵。

引理3.7.6 ( )。 设 X 是一个具有小弱基的 *locale*，并考虑一个开集$U\colon \mathcal{O}(X)$。映射 $\mathbf{o}(U)\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 定义为

$$\mathbf{o}(U) \quad :\equiv \quad V \mapsto U \Rightarrow V,$$

构成一个核。

证明。 参见 [Joh82，§II.2。4]。 □

定义 3.7.7 (开核) 核 $\mathbf{o}(U)$ 在上述引理中构造的称为由 开核 所诱导的 U。

第 4 章

谱与 Stone 局部

在上一章中，我们介绍了单值基础中构造性 locale 理论的直谓方法基础。现在，我们开始在这一框架下发展谱与 Stone 局部理论。我们的直谓方法受到局部可表现范畴的启发 [AR94], 以及 de Jong 和 Escardó 对这些范畴的运用 [dJon23; dJon21b] 他们在单值基础中对域理论进行直谓发展的工作。本章的组织结构如下：

第4.1节：我们将对谱 locale 的概念及其历史作高层次概述。第4.2节：我们讨论如何将谱 locale 概念的标准非谓词性定义转化到直谓设定中，并证明在集合替换原理和单值性公理的假设下，该转化等价于定义3.6.1 。第4.3节：我们考察谱 locale 的一些例子和反例。第4.4节：我们构造小分配格上的理想框架，为第4.7节中对 Stone 对偶的直谓发展作准备。第4.5节：我们定义零维 locale 和正则 locale，并记录它们的一些显著性质。第4.6节：我们定义 Stone locale，并开始发展其理论。第4.7节：我们证明，大型、局部小且小完备的谱 locale 类型**Spec** 与小分配格类型**DLat**之间存在等价。第4.8节：我们将第4.7 节中的类型等价推广，以证明**DLat** 与**Spec**之间存在范畴等价。

4.1 引言

在第3章的引言中，我们提到，将框架视为空间来研究这一思想可以追溯到 Stone 的工作 [Sto34；Sto36]。Stone 的研究起源于如今称为*Stone*空间的领域。在经典点集拓扑中，这类空间可定义为布尔代数的超滤子所构成的空间 [Simmy93，§2。5]。Stone 工作中的重要洞见是，这类空间可以用一种完全代数化的方式来研究，因为它们完全由其开闭子集所构成的布尔代数刻画。这一思想由 Stone 表示定理体现出来 [Joh82，§II.4。4] 该定理指出，Stone空间及其连续映射构成的范畴，与布尔代数及其同态构成的范畴之间存在对偶的范畴等价。这通常称为布尔代数的*Stone* 对偶，在历史上值得一提的是，这是人们发现的第一个此类对偶。

Stone 后来将 [Sto37]这一对偶从布尔代数推广到了分配格（如 [DST19]中所述）。其基本思想是：Stone 空间可由其开闭子集构成的布尔代数完全刻画，而谱空间可由其紧开集构成的分配格完全刻画。在 Stone 空间中，紧开子集与开闭子集重合，因此，从 Stone 空间推广到谱空间，关键在于认识到，真正刻画所讨论空间的是紧开集代数。关于这一主题的详细历史，请参阅 [DST19]中的综述。

在经典点集拓扑中，谱空间的定义见[1] [DST19，定义 1.1：5]它是一个空间 X，满足以下条件：

1. 空间 X 是紧的，且 T_0。 2. 紧开子集族构成空间 X 上拓扑的一个基。
3. 紧开子集在二元交下封闭。 4. 空间 X 是 sober。

在本文中，我们将研究谱空间这一概念在 locale 理论中的体现，并称之为谱 *locale* （有些人称之为相干*locale* ，包括 John- stone [Joh82，§II.3。2]）。在经典数学中，可以证明每个谱 locale 都是空间性的；但在构造性语境中，这等价于分配格的素理想定理 [Joh83，第 46]页。采用研究谱空间的无点方法时，Stone 对偶可以完全以构造性的方式证明。

4.2 直谓设定中的谱性

在第 3.6 节中，我们给出了若干例子，说明如何仅通过规定满足某些条件的基的未指定存在性来定义各种类别的 locale。我们还解释了：（1）这种方法可以被视为将局部可达且可呈示范畴推广到偏序集框架；（2）de Jong 和 Escardó 从关于这些范畴的文献中汲取灵感，发展出令人满意的域理论描述 [dJon23；dJon21b]构造性与可预测的单值基础。

[1]请注意，在 [DST19，定义 1.1。5] 此定义中使用了拟紧一词。我们在此更倾向于使用紧一词。

我们回顾一下，我们在第 3.6 节中给出的谱 locale 定义（定义 3.6.1）如下：

- 一个 locale X 若有某个小谱基，则称其为谱的，其中
- 谱基是指由紧开集构成且对有限交封闭的基。

我们还解释过，为何在概念上优先采用这个定义：它是某种一般技术的一个实例，而这种技术往往能导出在谓词性构造中性质良好的定义。不过，这个定义是否对应于传统的谱 locale 定义，事先并不明了 [Joh82，第 II.3 段。2]在下文第 4.2.1 节中，我们将通过传统定义来引出另一种在谓词性构造中性质良好的定义，然后在第 4.2.3节中证明这两种定义等价。等价性的证明并不简单，而且似乎关键依赖于单值性公理和集合替换原理（正如我们在第 2.14 节中解释的，后者等价于小集合商的存在性）。

4.2.1 从直谓观点看传统定义

一个谱 *locale*的传统定义是：其紧开集构成一个在有限交下封闭的基 [Joh82，§II.3。2]在直谓设定中仔细分析这一定义可知，它仅在完备小局部的范围内性态良好，而其中只有平凡者才能在直谓设定中构造出来（正如我们在第3.1.2节中详细讨论的那样）。让我们详细考察这一定义，以阐明它为何在直谓语境中不能令人满意。

对谱 locale 之传统定义的直接转译，将相当于要求该包含映射

$$\mathrm{K}(X) \xhookrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathcal{O}(X)$$

构成一个在有限交下封闭的基。在处理 $(\mathcal{U},\ \mathcal{U},\ \mathcal{U})$-框架时，由于载体是一个小集合，这个族总是小的。然而请注意，在处理大、局部小且小完备的框架时，一般没有理由认为类型 $\mathrm{K}(X)$ 是小的。这至少在两个方面是成问题的：

1. 这样的基无法构造我们在第3.1.4节讨论的那些对象；为此，基必须是小的。
2. 在我们的直谓设定中，谱 locale 所适用的 Stone 对偶，其自然形式是谱局部与小分配格之间的对偶。正如我们稍后将详细说明的，对一个小分配格取其（小）理想所构成的框架，总会得到一个大、局部小且小完备的框架。如果将满足这种意义下的 Stone 对偶视为谱 locale 这一概念的良好定义所应具备的条件，那么允许紧开集属于大类型的定义就不合适。

事实证明，正如我们即将在本章讨论的那样，只需规定类型 $\mathrm{K}(X)$ 为小，便可补救上述两个问题。这引出了谱 locale 概念的如下谓词式表述：

定义 4.2.1（谱 locale）。 若 locale X 满足以下条件，则称其为谱的：

(SP1) 它是紧的（即空交是紧的）。(SP2) 紧开集
在二元交下封闭。(SP3) 类型 K(X) 构成一个弱基。
(SP4) 类型 K(X) 是小的。

除了上文讨论的动机之外，我们还注意到，目前没有任何 locale 满足条件 (SP1)–(SP3)，但不满足条件 (SP4)。

最后，我们记录谱框架中序的如下刻画：

引理 4.2.2。 设 X 是一个谱 *locale*。框架 $\mathcal{O}(X)$ 的序等价于如下定义的序

$$U \leq_s V \quad :\equiv \quad \Pi_{(K:\mathrm{K}(X))}\, K \leq U \Rightarrow K \leq V.$$

证明。(↠)显然，对任意一对开集 U, V，$U \leq V$ 蕴含 $U \leq_s V$：$\mathcal{O}(X)$。非平凡的方向是反向蕴含：(⇐) 设 U 和 V 是一对开集，且满足 $U \leq_s V$。由 (SP3)，我们知道存在一个未指定的基本覆盖族 $(K_i)_{i:I}$，覆盖 U，且由紧开集组成。由于我们知道 $U = \bigvee_{i:I} K_i$，只需证明 $(\bigvee_{i:I} K_i) \leq V$。对于每个 $i:I$，我们知道 K_i 是一个满足 $K_i \leq U$ 的紧开集，因此根据假设 $U \leq_s V$，有 $K_i \leq V$。□

4.2.2 谱性的命题性

我们希望表达 locale 的谱性的类型是一个命题，为此需要确保定义 4.2.1 中的所有四个条件都是命题。令人惊讶的是，似乎必须使用单值性公理来使条件 (SP4) 成为一个命题，因为由引理2.13.4可知，小的命题性与单值性逻辑等价。此外，为了确保条件 (SP3) 是一个命题，我们使用定义 *3.5.6*中的弱基。

引理 4.2.3。 假设单值性公理成立，则对于每个 *locale* X，X 是谱的这一性质所对应的类型是一个命题。

证明。 很容易看出，条件 (SP1)–(SP3) 都是命题。假设单值性公理成立，则由引理 (SP4) 可知，条件 2.13.4是一个命题。 □

在下一节中，我们将证明定义3.6.1和定义4.2.1是等价的。

4.2.3 联系这两种方法

在第 3.6 节中，我们将各种类的 locale 定义为具有未指定基且满足某些条件的 locale。在该节的定义 3.6.1 中，我们还使用上述一般方法给出了谱 locale 这一概念的定义

，该方法也适用于许多其他类的 locale。在确定了定义 4.2.1（从标准的非谓词性定义的角度来看，这一定义有充分的动机）之后，我们现在继续证明，在单值性和集合替换的假设下，这两个定义是等价的。我们证明这一等价性的动机有两方面：

1. 这说明在谱性的条件下，基的选择无关紧要，即便是在构造性和直谓设定下也是如此，而这一事实本身就值得注意。2. 在第 4.7 节和 4.8 节中，我们证明定义 4.2.1 满足 Stone 对偶，这证明了我们识别出了正确的谱 locale 范畴。为了使这一论证适用于定义 3.6.1，这两个定义的等价性是必要的，因为 Stone 对偶似乎只适用于定义 4.2.1。换句话说，证明这两个定义等价，似乎是证明定义 3.6.1 具有 Stone 对偶的自然步骤。

现在我们开始为证明这一等价性做一些准备。

引理 4.2.4。 对于每个具有基 $(B_i)_{i:I}$ 的 *locale* X， X 的每个紧开集都属于该基。换言之，对于每个紧开集 K，存在一个指标 $i:I$ 使得$K = B_i$。

证明。 令 $K:\mathcal{O}(X)$ 为一个紧开集。由于 $(B_i)_{i:I}$是强基，因此存在一个指定的有向指标族 $(i_j)_{j:J}$，使得 $K = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$。由 K 的紧致性，存在某个 $k:J$，使得 $K \leq B_{i_k}$。显然， $B_{i_k} \leq K$ 也成立，因为 K 是族 $(B_{i_j})_{j:J}$ 的一个上界，这意味着我们有 $K = B_{i_k}$。 □

推论 4.2.5 ()。 对于每个具有小基 $(B_i)_{i:I}$（由紧开集组成）的 *locale* X，我们有一个类型等价：

$$\mathrm{image}(B) \simeq \mathsf{K}(X).$$

这个等价对我们特别有用，因为它充当类型 $\mathsf{K}(X)$ 的重缩放原理：

引理 4.2.6。 对于每个 *locale* X，若 X 有一个由紧开集组成的小基，那么在假设集合替换原理成立的前提下，类型 $\mathsf{K}(X)$ 是小的。

证明。 设 X是一个具有小基的 locale $(B_i)_{i:I}$。引理 3.5.4中已证明，利用集合替换原理，拥有一个指定的小基意味着 像(B)是小的。我们刚刚在上面的推论4.2.5 中证明了

$$\mathsf{K}(X) \simeq \mathrm{image}(B),$$

因此，这意味着 $\mathsf{K}(X)$ 将 $\mathrm{image}(B)$ 作为一个小副本。 □

引理 4.2.7。 假设单值性公理，每个具有未指定小谱基的 *locale* 都是谱的。

证明. 首先，注意到结论是一个命题，因为根据引理 4.2.3 （其中用到了单值性），谱性是一个命题。这意味着我们可以应用命题截断的归纳原理，并假设给定了一个谱基 $(B_i)_{i:I}$。现在我们验证定义 4.2.1中的每个条件：

(SP1) 最大元是基元素，因此是紧的，所以条件 (SP1) 成立。(SP2) 给定两个紧开集 K_1 和 K_2，根据引理 4.2.4，它们必定是基元素，这意味着存在 k_1, k_2 使得 $K_1 = B_{k_1}$ 和 $K_2 = B_{k_2}$。由于基对二元交封闭，我们知道存在某个 k_3 满足 $B_{k_3} = K_1 \wedge K_2$，这意味着 $K_1 \wedge K_2$ 是紧的，因为 $(\mathrm{SP}_{\mathrm{b}}1)$ 说明基由紧开集组成。由此得证条件 (SP2) 成立。

(SP3) 考虑一个开集 $U :\ \mathcal{O}(X)$。我们知道，存在一个指定的小族 $(i_j)_{j:J}$，其指标满足 $U = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$。于是，子族 $(B_{i_j})_{j:J}$ 显然是一个小有向族，且其中每个 B_{i_j} 都是紧的，这正是我们所需要的。

(SP4) 直接由引理 4.2.6 得出。

□

引理 4.2.8 ( )。如果一个 *locale* X 是谱的，那么它有一个指定的小外延基。

证明。 设 X是一个谱 locale。我们声称，包含映射 $\mathsf{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$（形式上由第一投影给出）是一个外延的谱小基。根据条件 (SP4)，它是小的。由 (SP1) 和 (SP2)，我们知道这个基包含最大开集 $\mathbf{1}_X$，并且在二元交下封闭。

还需证明 $\mathsf{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ 构成一个强基。对于开集 $U :\ \mathcal{O}(X)$ 的基本覆盖族，我们取包含映射：

$$\left(\Sigma_{(K:\mathsf{K}(X))}(K \leq U)\right) \xhookrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathsf{K}(X),$$

根据(SP4) 以及框架 $\mathcal{O}(X)$ 的局部小性，它再次是小的。显然， U是这个族的一个上界，因此只需证明它是最小上界。考虑某个 V，它是这个族的一个上界。根据引理 4.2.2，只需证明 $K \leq U$蕴含 $K \leq V$，对每个紧开集 K均成立。根据构造，每个紧$K \leq U$都属于上述族，这意味着 $K \leq V$，因为 V被假定为该族的上界。 □

引理 4.2.9 ( )。对于 *locale* X上的任意未指定内涵谱基，我们都可以得到一个指定的外延谱基。

证明。 设 X 是一个具有未指定内涵谱基的 locale。根据引理 4.2.7，我们知道它是谱的，因此根据引理 4.2.8，它具有一个指定的外延基。 □

换句话说，内涵谱基的类型具有分裂支撑（采用 [KECA17]的术语）。若类型 X 满足 $\|X\| \to X$，则称其具有分裂支撑。基的纯粹存在性使我们能够得到唯一的典范基 $\mathsf{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$，可将其视为满足谱性条件的最大可能基。请注意，具有谱这一性质的命题性（我们在第4.2.2节讨论过）至关重要，因为证明用到了引理4.2.7。

我们还在此记录关于谱基对有限并封闭这一性质的以下事实：

引理 4.2.10。对于每个谱基 $(B_i)_{i:I}$，其对有限并的闭包也构成一个谱基。

证明。由引理3.3.8 可知，基本开集族的闭包也由紧开集组成。很容易看出，这同样构成一个基。 □

我们终于可以证明谱 locale 的主要刻画定理了，说明关于谱 locale 概念的若干看似不同的方法其实都彼此等价。

定理 4.2.11. 对于每个 *locale* X，以下命题逻辑等价：

1. X 具有未指定的内涵小谱基（定义*3.6.1*）。*2.* X 按照定义*4.2.1*的意义是谱的。*3.* X 具有未指定的外延小谱基。*4.* 包含映射 $\mathsf{K}(X) \hookrightarrow X$ 是一个外延谱基：对于开集 U，我们赋予它下方紧开集所构成的有向族，如引理*4.2.8*的构造所示。*5.* X 具有指定的内涵小谱基。*6.* X 具有指定的外延小谱基。

证明。首先，注意显然的蕴涵关系：有 (6) ~~⇔~~(3) ~~⇔~~(1)，并且有 (6) ~~⇔~~(5) ⇒ (1)。(5) ⇒ (1) 的逆向蕴涵已在引理 4.2.9 中给出，由此得到等价关系 (5) ⇔(1)。对于 (6) ⇔(4)，注意到每个外延小谱基都必然等价于 $\mathsf{K}(X)$，因为根据推论 4.2.5，$\mathrm{image}(B) \simeq \mathsf{K}(X)$。对于 (2) ⇔(6)，正向蕴涵已由引理 4.2.8 给出。对于逆向蕴涵，回顾一下，根据引理 4.2.9，我们知道 (1) ~~⇔~~(2)，并且 (6) ⇒ (5) ⇒ (1)。 □

注意，上述条件（1）–（4）都是命题，而条件（5）和（6）一般而言不一定是命题。

4.2.4 谱场所范畴

定义了谱 locale 的概念后，我们现在通过定义谱映射的概念来给出谱局部范畴：

定义 4.2.12. 连续映射 $f\colon X \to Y$称为谱映射，如果对于 的每个紧开集 K，$f^*(K)$都是紧的。

我们用$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$ 表示基宇宙 $\mathcal{U}$上的谱 locale 与谱映射构成的范畴。若上下文已明确基宇宙，则省略下标，简写为$\mathbf{Spec}$。

由于谱 locale 的定义保证了小基的存在，该范畴具有一些理想的性质。例如，我们有如下结论：

引理 4.2.13. 对于谱局部之间的任意映射 $f\colon X \to Y$，框架同态 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 的右伴随存在。

证明。 我们在定理 4.2.11 中证明了谱性蕴含具有小基。因此我们可以构造 f^* 的右伴随，其构造方式如定义 3.7.4。 □

基于完美映射的刻画

利用右伴随的存在性，可以将借助其右伴随对谱映射的刻画加以改写，以适应我们的设定。

定义 4.2.14 ( ). locale 之间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 称为 完美，如果其框架同态的右伴随是 Scott 连续的。

引理 4.2.15 ( ). 设 $f\colon X \to Y$ 为完美映射，其中 Y 是具有某个小基的 *locale*。框架同态 f^* 保持远小于关系，即 $U \ll V$ 蕴含 $f^*(U) \ll f^*(V)$，对每一对开集 U， $V\colon \mathcal{O}(Y)$。

这一事实的证明可见于 [Esc99] ，且该证明在我们的直谓设定中同样成立。

推论 4.2.16. 完美映射是谱的，因为它们保留紧开集。

引理 4.2.17. 对于谱 *locale* X和 Y 连续映射 $f\colon X \to Y$是谱的，当且仅当它是完美映射。

证明。正向由推论 4.2.16 给出。对于反向，假设 $f\colon X \to Y$ 为一个谱映射。我们必须证明，其定义框架同态的右伴随 $f_*\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ 是 Scott 连续的。令 $(U_i)_{i:I}$ 为 $\mathcal{O}(X)$ 中的一个有向族，我们证明 $f_*(\bigvee_{i:I} U_i) = \bigvee_{i:I} f_*(U_i)$。$\bigvee_{i:I} f_*(U_i) \le f_*(\bigvee_{i:I} U_i)$ 方向是容易的。对于 $f_*(\bigvee_{i:I} U_i) \le \bigvee_{i:I} f_*(U_i)$ 方向，我们诉诸引理 4.2.2。设 K 为满足 $K \le f_*(\bigvee_{i:I} U_i)$ 的紧开集。由

伴随 $f^* \dashv f_*$，我们有 $f^*(K) \leq \bigvee_{i:I} U_i$，并且由于 $f^*(K)$ 是紧的，由 f^* 的谱性假设，存在某个 $l\colon I$ 使得 $f^*(K) \leq U_l$。再次由伴随性，$K \leq f_*(U_l)$ 蕴含 $K \leq \bigvee_{i:I} f_*(U_i)$。 □

4.3 谱 locale 的例子

现在，我们逐一考察贯穿全文的 locale 例子，以确定哪些是谱的。

4.3.1 终端 locale

第一个谱 locale 的例子是终端 locale：

例 4.3.1. 终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 定义见例 3.1.16 是谱的。我们已在例 3.5.9中为它构造了一个基。这个基满足（定义 3.6.1）中的谱基定义：

($\mathrm{SP_b}1$) 它由紧开集组成，因为 $\top_{\mathcal{U}}$ 和 $\bot_{\mathcal{U}}$ 都是终端 locale 的紧开集（如例 3.3.5 和引理 3.3.8所示）。($\mathrm{SP_b}2$) 它包含最大开集 $\top_{\mathcal{U}}$。($\mathrm{SP_b}3$) 它对二元交封闭，因为任意一对布尔值的合取仍是布尔值。

4.3.2 离散 locale

离散 locale 是一个反例，因为它不满足条件 (SP1).

例 4.3.2。 幂集框架 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\mathbb{N})$ 不是谱的，因为它不紧，如例 3.3.6所述。

4.3.3 Sierpiński locale

Sierpiński locale 是谱 locale 的另一个例子。不过，要证明这一点稍微复杂一些。我们先做一些准备。

引理 4.3.3。 对于每个可判定命题 $B\colon \Omega_{\mathcal{U}}$，主滤子映射

$$\uparrow B : \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$$

根据定义 *3.5.11* 是 *Sierpiński locale* 的一个紧开集。

证明。 设 $B\colon \Omega_{\mathcal{U}}$是一个可判定命题，并设 $(S_i)_{i\colon I}$是一个 Scott 开子集的有向族，使得 $\uparrow B \subseteq \bigcup_{i\colon I} S_i$。我们对命题 B 进行分类讨论：

- 情形：$B = \bot$。由引理 3.5.13可知，主滤子 $\uparrow\bot$ 是顶

locale 的开集 $\mathbb{S}$，根据例3.3.7，我们知道它是 Sierpiński locale 的紧开集。

- 情形： $B = \top$。在这种情形下，对于每个命题 P，我们有 $P \in \uparrow\top$ 当且仅当 $P = \top$: $\Omega_{\mathcal{U}}$。这意味着存在某个 S_i，使得 $\top \in S_i$。因此，每个 $P \in \uparrow\top$ 都必定属于 S_i，因为 $P = \top$ 蕴含 $P \in S_i$。

□

例 4.3.4. Sierpiński locale $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$ 来自例 3.1.23 是谱的。回忆一下，在例 3.5.14 中，我们构造了 Sierpiński locale 的一个基，其为如下的族

$$(\uparrow\beta(b))_{b:2},$$

其中 $\beta\colon\ 2 \to \Omega_{\mathcal{U}}$是定义如下的函数 $\beta(0) :\equiv \top_{\mathcal{U}}$，而 $\beta(1) :\equiv \bot_{\mathcal{U}}$。注意，这个基满足定义 3.6.1中的条件：

(SP$_b$1) 我们在引理 4.3.3中证明了这个基由紧开集组成。(SP$_b$2) 最大开集属于这个基，因为它等于 $\uparrow\bot$，正如引理 3.5.13中所述。(SP$_b$3) 令 $b_1, b_2 :2$。交 $\beta(b_1) \wedge \beta(b_2)$属于这个基，因为 β 将布尔合取 $b_1 \wedge b_2$ 映射到它。

4.4 分配格及其谱

分配格是一个偏序集，具有有限交和有限并，并满足分配律 [DP02，定义 4。4]。文献中也称之为有界分配格 [DP02，定义 2。12]。本节将对小分配格上的理想框架给出一种直谓构造，为第4.7 节和4.8 节做准备。在这两节中，我们将发展谱 locale 与分配格之间 Stone 对偶的直谓版本。

4.4.1 分配格的定义

不同于我们在定义3.1.1中对框架概念的定义，出于我们将在注释4.4.5中说明的原因，我们通过交运算和并运算而非其序来定义分配格。下文给出的定义遵循 [Joh82，§I.1.4–§I.1。5]。

定义 4.4.1 (分配$\mathcal{U}$-格)。 一个 分配 $\mathcal{U}$-格 由以下部分组成

- 一个集合 $|L| : \mathcal{U}$,
- 一个元素**1**： $|L|$,
- 一个元素**0**： $|L|$,
- 一个运算 (-) $\wedge$ (-)： $|L| \to |L| \to |L|$ 使得

  – 具有结合律，–

  具有交换律,

– 以**1** 为单位元： $x \wedge \mathbf{1} = x$，对每个 x： $|L|$，– 是幂等的： $x \wedge x = x$，对每个 x： $|L|$，– 满足吸收律：

$$x \wedge (x \vee y) = x,$$

对于每一对元素 x， y： $|L|$，

- 一个运算 (-) $\vee$ (-) : $|L| \to |L| \to |L|$ ，满足
  – 满足结合律，– 满足交换律，– 以 **0** 为单位元： $x \vee \mathbf{0} = x$，对于每个 x： $|L|$，– 满足幂等律： $x \vee x = x$，对于每个 x： $|L|$，– 满足对偶吸收律：

$$x \vee (x \wedge y) = x,$$

对于每一对元素 x， y： $|L|$。

和往常一样，我们滥用记号，将承载集 $|L|$ 记作 L。

备注 4.4.2. 我们有时会谈到“类型 X上的分配格结构”。这里指的是分配格 L 的承载集 $|L|$ 所配备的代数结构。我们不对此另行给出正式定义，而请读者参阅第 2.10.3 节的讨论，以了解我们如何在类型论中正式实现这一结构。

引理 4.4.3. 对于每个分配格 $\mathcal{U}$ L，以下关系

$$x \leq_1 y :\equiv (x \wedge y) = x,$$
$$x \leq_2 y :\equiv (x \vee y) = y$$

构成等价的偏序，且具有 $\mathcal{U}$-小真值。

证明. 由 L 的承载集具有小性，可直接得出类型 $x \wedge y = x$和 $x \vee y = y$都是 $\mathcal{U}$-小的。这些类型等价是格论中的一个众所周知的事实 [DP02，引理 2。8], 不过，为了使论述自足，我们仍然给出证明。

设 x， y: L是满足 $x \wedge y = x$ 的一对元素。

$$\begin{aligned} x \vee y &= (x \wedge y) \vee y && \\ &= y \vee (y \wedge x) && \text{（交换性）} \\ &= y && \text{（对偶吸收律）} \end{aligned}$$

反过来，设 $x, y : L$ 是一对满足 $x \vee y = y$ 的元素。

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \wedge (x \vee y) \\ &= x && \text{（吸收律）} \end{aligned}$$

鉴于这一等价，我们只需证明 $(\leq_1)$ 是一个偏序。自反性正是运算 $(-) \wedge (-)$ 的幂等性。反对称性很容易看出，因为对于每个 $x, y : L$，如果我们有 $x \leq_1 y$ 和 $y \leq_1 x$，那么我们有 $x = (x \wedge y) = y$。最后，对于传递性，设 $x, y, z : L$，且有 $x \leq_1 y$ 和 $y \leq_1 z$。我们有

$$\begin{aligned} x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z \\ &= x \wedge (y \wedge z) \\ &= x \wedge y \\ &= x. \end{aligned}$$

□

备注 4.4.4。 请注意，集合性是上述分配格定义中的一项明确要求。不同于框架的情形，在此设置下，集合性不会自动由定义推出。这是因为我们依赖载体类型的集合性，来得出上面引理中定义的类型族 $(\leq_1)$、$(\leq_2)$ 是命题值的。

鉴于上述引理，我们交替使用这两种序。给定一个分配格 L，我们将其序记为 $(-) \leq_L (-)$；如果从上下文中可以清楚看出所考虑的格，也可以简记为 $(-) \leq (-)$。

备注 4.4.5。 请注意，这里与定义 3.1.1 中框架概念的定义有一个关键区别。我们本可以将分配 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-格定义为 $\mathcal{U}$ 是承载集的宇宙，而 $\mathcal{V}$ 是序的宇宙。然而，我们总能利用等价 $\mathcal{U}$ 将序重新缩放到宇宙 $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$，正如引理 3.1.3 中所解释的那样；这样便会得到一个与上述定义等价的分配 $\mathcal{U}$-格。也就是说，在处理小格时，这种表面上更一般的 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-格概念，实际上并不比上述 $\mathcal{U}$-格概念更一般。

引理 4.4.6. 对于每个分配格 L，运算 $(\wedge)$ 和 $(\vee)$ 分别是关于序 $(-) \leq_L (-)$的交运算和并运算。

证明. 格论中的众所周知的事实 [DP02，定理 2。10]. □

引理 4.4.7. 在每个分配格 L中，分配律的对偶形式成立：

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

对于每个 $x, y, z : L$。

证明。 格论中的一个众所周知的事实 [DP02，引理 4。3]。 □

定义 4.4.8 ( )。 函数 $h\colon K \to L$，从一个分配格 K 到一个分配格 L，称为分配格同态，如果它保持有限交和有限并。

若同态 $s\colon K \to L$ 具有一个同样是同态的拟逆 $r\colon L \to K$，则称其为分配格同构。

我们用$\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$表示分配 $\mathcal{U}$-格及其同态所构成的范畴。

我们可以借助 Escardó 在第 2.10.3 节讨论的结构恒等原理风格，简化对分配格同构的刻画。

引理 4.4.9 ( )。 两个分配格承载集之间的类型等价 $e\colon |K| \simeq |L|$，如果其两个方向都是单调映射，则称其为单调的。

分配格之间单调等价的类型与同构的类型等价。

证明。 每个等价都保持交和并，因为它既有右伴随，也有左伴随。 □

4.4.2 分配格的理想

我们在第 2.12.3 节解释过，在直谓设定中，子集的概念由宇宙参数化。换言之，我们处理由$\mathcal{U}$-命题描述的子集，并称之为 $\mathcal{U}$-子集。因此，可以考虑 $\mathcal{V}$-格上的广义 $\mathcal{U}$-理想。确实可能存在值得研究这类广义理想的情形，但就我们的工作而言，并不需要它。因此，我们定义如下的理想概念：

定义 4.4.10 (理想)。 分配 $\mathcal{U}$-格 L 的理想是一个子集 $I\colon \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(L)$，满足以下条件：

(I1) 它是可居留的，即 $\exists_{(x\colon L)} x \in I$。(I2) 它是向下封闭的，即 $y \in I$和 $x \leq y$ 推出 $x \in I$，对每一对元素 x， $y\colon L$。(I3) 若 $x \in I$和 $y \in I$，则($x \vee y) \in I$，对每一对元素 x， $y\colon L$。

引理 4.4.11. 成为理想是一个命题。

证明。 很容易验证，每个合取项都是一个命题。 □

我们定义

$$\mathsf{Ideal}(L) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(I\colon L \to \Omega_{\mathcal{U}})} \mathsf{is\text{-}ideal}(I).$$

我们通常会在固定基宇宙 $\mathcal{U}$ 的上下文中讨论理想。在此类上下文中，我们有时会说小理想，以特别强调我们的理想是 $\mathcal{U}$ 值的。不过，读者应谨记，我们从不处理大理想。最后，我们还明确指出，类型 Ideal(L) 是大的，因为 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 位于宇宙 $\mathcal{U}^+$ 中。

理想的性质

引理 4.4.12. 分配格上的每个理想 L 都包含 L的底元。

证明. 由(I2)即可得出。 □

引理 4.4.13. 对于每个理想 I，I 中元素列表的并属于 I。

证明. 通过列表归纳法即可直接得出。 □

主理想

引理 4.4.14. 对于每个分配 $\mathcal{U}$格 L 以及每个 $x : L$，如下定义的子集

$$\downarrow x : L \to \Omega_{\mathcal{U}}$$
$$\downarrow x :\equiv y \mapsto y \leq_L x$$

是一个理想。

证明。 设 L 是一个分配格，且令 $x : L$。

(I1) 子集 $\downarrow x$ 总是由底元 $\mathbf{0}_L$可居留。(I2) 向下闭包由序的传递性推出。(I3) 对于二元并下的封闭性，设 y、$z \in \downarrow x$。必有 $y \vee z \leq x$，因为 $y \vee z$是 y 和 z的最小上界。

□

定义 4.4.15 (主理想)。 理想 $\downarrow x$ 由上述引理得到，称为由元素 主理想 生成的 x。

引理 4.4.16. 主理想映射 $\downarrow(-) : L \to$ 理想(L) 是一个嵌入。

证明. 设 $x, y : L$ 满足 $\downarrow x = \downarrow y$。由于 $x \in \downarrow x$和 $y \in \downarrow y$，我们有 $x \leq y$和 $y \leq x$，因此根据反对称性可知 $x = y$。 □

理想的交

子集交在理想上特化为交运算，因为我们有：

引理 4.4.17 ( ). 对于任意一对小理想 $I, J\colon L \to \Omega_{\mathcal{U}}$，其交 $I \cap J$是一个小理想。

到目前为止，我们已得出结论： $\mathcal{U}$-理想的格关于包含序是一个交半格。在第4.4.3节中，我们将继续在这个交半格中构造并，从而证明它是一个框架。

Le引理 4.4.18 ( ) 对每一对元素 x， $y\colon$ L，我们有 $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow(x \wedge y)$。

证明。 这是显然的，因为我们有： $z \leq x \wedge y$ 当且仅当 $z \leq \downarrow x$ 且 $z \leq \downarrow y$，对每一个 $z\colon$ L。 □

推论 4.4.19. 两个主理想的交是一个主理想。

4.4.3 理想格中的并

我们先做一些准备工作，以便在理想框架中构造并。

定义 4.4.20 (有限覆盖)。 设 L 是一个小分配格。我们通过以下方式对列表进行归纳，定义有限覆盖类型族 $(\text{-}) \lhd (\text{-}) : \text{列表}(L) \to \mathsf{Fam}_{\mathcal{U}}(\text{理想}(L)) \to \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \epsilon \lhd I &:\equiv \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \\ xt \lhd I &:\equiv \left(\Sigma_{(n:N)} x \in I_n\right) \times (t \lhd I) \end{aligned}$$

从概念上说，类型 $(x_0 \dots x_{m-1}) \lhd I$可居留，表示 I对列表中的每个元素 x_i 都包含一个有限子覆盖。不过，这涉及非平凡的结构，并非一种性质，因此应将其视为所有可能方式构成的类型：理想族 I可以通过这些方式为所考虑的列表提供有限子覆盖。

引理 4.4.21 ()。 对于每个分配格 L、每个理想族 $(I_k)_{k:K}$，以及由 L 的元素构成的每个列表 $x_0 \dots x_{m-1}$，若有 $(x_0 \dots x_{m-1}) \lhd I$，那么对于每个$j$，只要 $0 \leq j < m$，就存在某个指标 $k\colon K$，使得 $x_j \in I_k$。

证明。 直接对列表进行归纳。 □

引理 4.4.22 ( ). 对于任意理想族 $(I_n)_{n:N}$以及任意一对列表 s， t，其元素属于 L，若 $s \lhd I$且 $t \lhd I$则 $st \lhd I$。

证明。 直接归纳即可。 □

引理 4.4.23. 对于每个理想族$(I_n)_{n:N}$以及每一对元素 x、 $y\colon$ L，若 $x \lhd I$则 $x \wedge y \lhd I$。

证明。 由理想的向下闭包直接可得（条件 (I2)）。 □

将此推广到列表，便得到：

推论 4.4.24 (). 对于每个理想族 $(I_n)_{n:N}$、每个元素 $x\colon L$以及每个列表 $y_0,\dots,y_{m-1}\colon$ 列表(L)，若 $(y_0,\dots y_{m-1}) \lhd I$则 $(x\wedge y_0)\dots,(x\wedge y_{m-1}) \lhd I$。

给定一个格的元素列表 $s :\equiv (x_0,\dots x_{m-1})$，我们将并 $(x_0\vee\cdots\vee x_{m-1})$ 非正式地简记为 $\bigvee_{x\in s} x$。

引理 4.4.25 (). 对于分配格 $(I_n)_{n:N}$ 上的每个小理想族，以下 子集 L 的 L 是一个小理想：

$$x \mapsto \exists(y_0\dots y_{m-1}) : \mathsf{List}(L).\ (y_0\dots y_{m-1} \lhd I) \times (x = y_0\vee\cdots\vee y_{m-1}).$$

证明。 设 L 是一个分配 $\mathcal{U}$-格，并设 $(I_n)_{n:N}$ 是其上的一个小理想族。首先注意，对于每个 $x\colon L$，类型 $\exists_{(s:\text{列表}(L))}(s \lhd I) \times (x = \bigvee_{y\in s} y)$ 是一个 $\mathcal{U}$-小命题，因为 $\mathsf{List}(L)$ 是一个小类型，且两个合取项都属于宇宙 $\mathcal{U}$。

我们现在检验成为理想的条件。

(I1) 上述子集总是被底元素 $\mathbf{0}_L$所可居留，它可以表示为空列表的并。空列表被每个理想族空洞地覆盖。

(I2) 考虑一个元素 $x\colon L$ 落入该子集，并设 $y\colon L$ 满足 $y \le x$。我们知道 $x = z_0\vee\cdots\vee z_{m-1}$，对某个列表$(z_0\dots z_{m-1}) \lhd I$。为了证明$y$ 也落入上述子集，我们选取列表$(y\wedge z_0,\dots,\ y\wedge z_{m-1})$。由推论4.4.24，我们有

$$(y\wedge z_0)\ \dots\ (y\wedge z_{m-1}) \lhd I.$$

尚需证明 $y = (y\wedge z_0)\ \vee\cdots\vee (y\wedge z_{m-1})$。这由如下事实得出：$y \le x$，即 $y\wedge x = y$，因为它蕴含：

$$\begin{aligned} y &= y\wedge x \\ &= y\wedge(z_0\vee\dots\vee z_{m-1}) \\ &= (y\wedge z_0)\vee\cdots\vee(y\wedge z_{m-1}). \end{aligned}$$

(I3) 设 x，$y\colon$ L 为落入上述子集的一对元素。我们知道存在列表 $a_0\dots a_{k-1}$ 与 $b_0\dots b_{l-1}$，使得

- $x = a_0\vee\cdots\vee a_{k-1}$ and $(a_0\dots a_{k-1}) \lhd I$; and also
- $y = b_0\vee\cdots\vee b_{k-1}$ and $(b_0\dots b_{k-1}) \lhd I$.

我们显然有

$$x\vee y \quad = \quad a_0\vee\cdots\vee a_{k-1}\vee b_0\vee\cdots\vee b_{l-1},$$

根据引理 4.4.22，我们知道 $(a_0\dots a_{m-1}b_0\dots b_{n-1}) \lhd I$.

□

引理 4.4.26 ( )。对于每个小分配格 L，其上的小理想交半格 L 是小完备的。

证明。 设 $(I_n)_{n:N}$ 是一个小理想族。我们将并 $\bigvee_{n:N} I_n$ 定义为引理 4.4.25 中构造的理想。我们需要证明它是族 $(I_n)_{n:N}$的最小上界。

设 $n\colon N$。为了证明 $I_n \subseteq \bigvee_{n:N} I_n$，设 $x \in I_n$。显然， $x \lhd I$，因为 $x \in I_n$，并且 x 是由其自身构成的单元素列表的并。

设 J 是一个理想，并假设它是族 $(I_n)_{n:N}$ 的上界。为了证明 $(\bigvee_{n:N} I_n) \subseteq J$，设 $x \in \bigvee_{n:N} I_n$。这意味着

$$x = y_0 \vee \cdots \vee y_{m-1},$$

存在一个列表 $(y_0 \ldots y_{m-1}) \lhd I$。因此，只需利用理想对有限并的封闭性证明每个 $y_k \in J$。考虑某个 k 满足 $0 \leq k < m$。根据引理 4.4.21，我们知道存在某个 $n\colon N$ 使得 $y_k \in I_n$。由此可得 $y_k \in J$，因为根据假设， $I_n \subseteq J$ 是所考虑理想族的上界。 J □

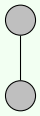
引理 4.4.27 ( )。对于每个小分配格 L，其上的小理想 L 构成一个框架。

证明。 我们已在引理 4.4.26 中证明 Ideal(L) 是一个小完备交半格。显然它是局部小的，因为（1）包含序只涉及对小集合 L的量化；（2）我们讨论的是小理想。

剩下只需证明二元交对并具有分配性。令 $I : \mathrm{Ideal}\,(L)$，并令 $(J_n)_{n:N}$为格 L上的一个小理想族。我们证明交 $I \wedge (\bigvee_{n:N} J_n)$ 是族 $(I \wedge J_n)_{n:N}$的最小上界。显然它是一个上界。取任意指标 $n\colon N$。每个满足 $x \in I \wedge J_n$的 $x\colon L$ 显然满足 $x \in I$和$x \in \bigvee_{n:N} J_n$。为证明它是最小上界，取一个理想 K，并假设它是族 $(I \wedge J_n)_{n:N}$的上界。我们需要证明 $I \wedge (\bigvee_{n:N} J_n) \subseteq K$。取 $x \in I \wedge (\bigvee_{n:N} J_n)$。我们知道$x = y_0 \vee \cdots \vee y_{m-1}$，其中某个列表 $(y_0 \vee \cdots \vee y_{m-1}) \lhd I$。由理想对有限并封闭，只需证明每个 $y_l \in K$（$0 \leq l < m - 1$）都满足要求。注意，每个 y_l都必须满足：（1）由理想的向下封闭性， $y_l \in I$，因为我们有 $y_l \leq x \in I$；（2）对于某个 $n\colon N$，有 $y_l \in J_n$（根据引理 4.4.21）。这意味着，对于某个 $n\colon N$，我们有 $y_l \in I \cap J_n$，因此 $y_l \in K$，因为 K是 $(I \wedge J_n)_{n:N}$的上界。 □

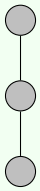
定义4.4.28 ( )。 由小分配格上的理想框架定义的 locale L，在引理 4.4.27中构造，称为 谱 ，对应于 L。下文将其记作 Spec(L)。

例4.4.29。 考虑二元链 2，其哈斯图如下：



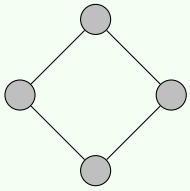
形式上，可以将其构造为类型 **2** ，其中交和并分别由布尔合取与析取给出。locale Spec(2) 恰好是例 3.1.16中的终端 locale。

例4.4.30。 考虑三元链 3，其哈斯图如下：



locale Spec(3) 恰好是例 3.1.23中的 Sierpiński locale。

例4.4.31。 考虑四元分配格 $\mathbf{M}_2$ ，其哈斯图如下：



这个格的谱是 2 上的离散 locale。更确切地说，当我们取这个格在宇宙 $\mathcal{U}$ 中的副本，并构造其 $\mathcal{U}$-理想框架时，得到的框架是 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\mathbf{2})$。

在第 4.7 节中，我们将证明 *每个谱 locale 都可以由这种方式得到*，即作为某个小分配格的谱。这正是“谱” locale 这一术语的由来。不过，我们首先需要证明谱本身就是一个谱 locale。我们将在第4.4.4节讨论这一点。

4.4.4 理想框架的谱性

现在我们验证，上一节中的 locale Spec(L) 满足谱 locale 的定义。我们先做一些准备。

谱的基构造

引理 4.4.32. *locale* Spec(L) 的最大开集是主理想 $\downarrow \mathbf{1}_L$，对每个小分配格 L都成立。

证明。 显然，理想 $\downarrow \mathbf{1}_L$ 包含 L的每个元素。因此，根据命题外延性，它等于 L 的全子集。 □

引理 4.4.33 ( )。对于小分配格 L上的任意有向理想族 $(I_n)_{n:N}$，以及 $x_0 \dots x_{m-1}$ 中元素的任意列表 L，若 $(x_0 \dots x_{m-1}) \lhd I$，则存在某个指标 $n : N$使得 $(x_0 \vee \cdots \vee x_{m-1}) \in I_n$。

证明概要。 设 $(I_n)_{n:N}$是某个小分配格 L 上的有向理想族，并设 $x_0 \dots x_{m-1}$ 是 L 中元素的一个列表。对于列表中的每个 x_k，我们知道存在某个指标 $n_k : N$ 满足 $x \in I_{n_k}$。根据族 $(I_n)_{n:N}$的有向性，对于列表中各个 x_k对应的理想，我们必定能找到一个上界。由于这个上界包含每个 x_k，根据引理 $\cdots x_0 \vee$，它必定包含并 4.4.13。 □

引理 4.4.34 ( )。对于每个小分配格 L 以及每个元素 $x : L$，主理想 $\downarrow x$ 都是 *locale* Spec(L)的紧开集。

证明。设 L 是一个小分配格，并设 $x : L$。为证明 $\downarrow x$ 是紧的，取由小理想组成的有向族 $(I_n)_{n:N}$，满足 $\downarrow x \subseteq \bigvee_{n:N} I_n$。我们需要证明存在某个指标 $n : N$，使得 $\downarrow x \subseteq I_n$。由于 $\downarrow x \subseteq \bigvee_{n:N} I_n$，必有 $x \in \bigvee_{n:N} I_n$，因为 $x \in \downarrow x$。也就是说，对于某个列表 $(y_0 \dots y_{m-1}) \lhd I$，有 $x = y_0 \vee \cdots \vee y_{m-1}$。根据引理 4.4.33，我们知道存在某个理想 I_n，使得 $(y_0 \vee \cdots \vee y_{m-1}) \in I_n$。这意味着 $x \in I_n$，正是我们所需要的。 □

引理 4.4.35( )。*locale* Spec(L) 是紧的。

证明。 由于 $\downarrow \mathbf{1}_L$ 是 Spec(L) 的最大开集（根据引理 4.4.32），只需证明它是紧的。这直接由引理 4.4.34得出。 □

引理 4.4.36( )。对于任意小分配格 L，主理想映射

$$\downarrow(\text{-}) : L \to \mathrm{Ideal}(L)$$

构成 *locale* Spec(L) 的一个小、外延且强的基。

证明。 我们已经在引理 4.4.16 中证明了该映射是一个嵌入，并且我们知道类型 L 是小的。接下来只需证明该映射构成一个强基。

令 I：理想（L）。我们将 I的基本覆盖族定义为

$$\left(\Sigma_{(x:L)} x \in I\right) \xhookrightarrow{\mathrm{pr}_1} L \xrightarrow{\downarrow(\text{-})} \mathrm{Ideal}(L).$$

很容易看出，这是 $\downarrow(\text{-}) : L \to$ 理想(L) 的一个小子族。很容易从理想的向下闭包（即条件 (I2)）看出，I是这个族的一个上界。要证明它是最小 上界，考虑某个理想J，并假设它是上述族的一个上界。对于每个 $x \in I$，根据假设 J 是一个上界，我们知道 $\downarrow x \subseteq J$。由此可得 $x \in J$，因为 $x \in \downarrow x$。因此我们有 $I \subseteq J$，这正是我们所需要的。 □

基的谱性

在引理 4.4.36 中构造出谱的一个基之后，我们现在继续证明这个基是谱的。

引理 4.4.37 ( )。对于每个小分配格 LSpec(L)，在引理 *4.4.36* 中构造出的 基是一个谱基。.

证明。

- (SPb1) 这个基由紧开集组成，这一点已在引理4.4.34中证明。
- (SPb2) 这个基包含最大开集，因为最大开集等于 $\downarrow \mathbf{1}_L$，如引理 4.4.32所示。
- (SPb3) 设 x，y：L。由引理 4.4.18，我们知道 $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow(x \wedge y)$，这意味着交集 $\downarrow x \cap \downarrow y$ 属于该基。

□

因此，我们已经证明 Spec(L) 满足定理 4.2.11中的等价条件。还要注意，我们有如下结论：

引理 4.4.38( )。存在一个等价

$$\mathrm{K}(\mathrm{Spec}(L)) \quad \simeq \quad \Sigma_{(I:\mathrm{Ideal}(L))} \exists_{(x:L)} (I = \downarrow x).$$

换句话说，Spec(L) 的紧开集类型等价于其主理想类型。

证明。 根据推论 4.2.5， $\downarrow(\text{-}) : L \to$ 理想(L) 的像与Spec(L)的紧开集类型等价，因为如引理4.4.36所示，它是由紧开集构成的基。 □

4.5 零维与正则 locale

现在我们来考察零维和正则locale 的类别，为第 4.6 节发展 Stone locale 理论做准备。我们将证明的一些关于 Stone locale 的结果可以推广到正则 locale，而零维 locale 是其特例（引理 3.6.6）。虽然我们对零维和正则 locale 理论本身并不感兴趣，但在第 4.6 节，汇总这些 locale 类别的一些关键性质会很有用。

4.5.1 正则 locale

我们曾在定义3.6.5中简要提及正则 locale 的概念，并在那里将其定义为这样一个 locale X：它具有一个未指定的基 $(B_i)_{i:I}$，满足如下条件：对每个 U：$\mathcal{O}(X)$，U 的基本覆盖族由良内于 U 的开集组成。

我们首先回顾：在正则 locale 中，远小于关系蕴含内含关系：

引理 4.5.1 ().在每个正则 *locale* 中 X，若 $U \ll V$则 $U \leqslant V$，对每一对开集 U，V：$\mathcal{O}(X)$。

证明。设 X 是一个正则 locale。由于结论是一个命题，我们可以运用命题截断的归纳原理，并假设给定了一个基 $(B_i)_{i:I}$，它满足正则性的条件。设 U和 V 是满足 $U \ll V$的一对开集，并设 $(B_{i_j})_{j:J}$是 V的基本覆盖族。由于$V = \bigvee_{j:J} B_{i_j}$，根据 $U \ll V$这一假设，存在某个 $j:J$使得 $U \leq B_{i_j}$。因此我们有 $U \leq B_j \leqslant V$，由此根据引理 3.4.7可得 $U \leqslant V$。 □

由于开集 U是紧的当且仅当 $U \ll U$，且既开又闭当且仅当 $U \leqslant U$，我们立即得到下面的推论。

推论 4.5.2 ()。 在每个正则 *locale* 中，紧开集都是既开又闭的。

结合推论 3.4.9，可得：

引理 4.5.3. 在每个紧正则*locale*中，紧开集与闭开集重合。

证明。 由推论 3.4.9可知，在紧局部中，闭开集是紧的。推论 4.5.2 表明，反向蕴涵在正则 locale 中成立。由于表达既开又闭与紧的类型都是命题，这一逻辑等价蕴涵我们有类型等价 $\mathsf{K}(X) \simeq \mathsf{C}(X)$。 □

4.5.2 零维locale

一个零维空间，在点集拓扑的语境下，是指其开闭子集类构成其拓扑的一个基的拓扑空间 [DP02，练习 11。1] [HW41，

第二章]。这里涉及的维数概念是归纳维数，其源头可追溯至 Urysohn [Ury25] 和 Menger [Men28]。我们不讨论拓扑空间归纳维数的一般概念，读者可参阅 [HW41，第三章] 以进一步了解这一主题。

我们已在第 3.6 节提到零维性这一概念的无点类比，并将零维 locale 定义为具有某个由闭开集组成的小基的 locale。现在我们重新审视零维 locale 概念的直谓体现，并对其进行详细考察。

在定理 4.2.11 中，我们证明了谱 locale 概念的若干种另一种刻画彼此等价。上述定义引出了一个问题：是否可以为零维 locale 得到类似的刻画？然而，与谱 locale 的情形不同，结果表明，零维性并不存在类似的定义 4.2.1（我们很快将在例 4.5.7 中说明这一点）。这表明，定理 4.2.11 依赖于所考虑 locale 的紧致性。

受将零维 locale 非构造性地定义为闭开集构成基的 locale 这一做法启发，我们可以考虑下面的定义，将其作为直谓定义的候选。我们不将这一概念称为零维，原因很快就会解释。

定义 4.5.4. 如果一个 locale X

（CB1）包含映射 $\mathrm{C}(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}}{}^{1}\!\!\hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ 构成一个弱基，且
（CB2）类型 $\mathrm{C}(X)$ 是小的。

例 4.5.5. 终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 是以既开又闭集为基的：注意，例 3.5.9 中的基包含两个可判定命题 $\top_{\mathcal{U}}$ 和 $\bot_{\mathcal{U}}$。此外，类型 $\mathrm{C}(\mathbf{1}_{\mathcal{U}})$ 是小的，因为可判定命题的类型等价于类型 $\mathbf{2}$。

容易看出，以既开又闭集为基这一性质强于零维性：

引理 4.5.6. 每个以既开又闭集为基的 *locale* 都是零维的。

证明。 设 X 是一个以既开又闭集为基的 locale。我们证明，包含映射 $\mathrm{C}(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}}{}^{1}\!\!\hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ 构成一个小的、内涵的且强的基。按构造，该族由闭开集组成。对于每个开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$，其覆盖族由以下包含映射给出

$$\left(\Sigma_{(C\,:\,\mathrm{C}(X))} C \leq U\right) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1}{}\!\!\hookrightarrow \mathcal{O}(X), \tag{†}$$

借助局部小性，容易看出它是一个小族。显然 U 是该族的一个上界。为了看出它是最小上界，设 V 是该族的一个上界。我们需要证明 $U \leq V$。根据弱基假设，我们知道存在一个未指定的闭开集族覆盖 U。由于结论是一个命题，我们可以诉诸命题截断的归纳原理，并处理一个指定的基本覆盖族 $(C_i)_{i:I}$。由于我们知道 $U = \bigvee_{i:I} C_i$，

我们只需证明 V 高于每一个 C_i（在该族中）。这由我们的假设得出，即 V 是该族的一个上界（†）。 □

鉴于以闭开集为基的性质强于零维性质，自然会想知道，我们应选择前者还是后者作为零维性的直谓表现。我们通过以下例子来回答这个问题[2]：

例4.5.7。 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$是零维的，但除非满足$\Omega_{\neg\neg}$-重定大小，否则不是以闭开集为基。

证明。 例3.5.9 中的基 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$也构成 $\Omega_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$的一个基，但闭开集的类型是一个大类型，因为 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$中的每个命题都是一个闭开集（locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$的闭开集）。换言之，尽管 $\Omega_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$的闭开集 $\mathcal{U}$确实构成一个基，但它不是一个小集合。要求它是小的，相当于要求 $\Omega_{\neg\neg}$是-小的，因此很容易看出，这个locale以闭开集为基意味着-重定大小。 □

零维性的定义理应满足locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}^{\neg\neg}$，这是一个合理的要求。因此我们得出结论：在直谓语境下，以既开又闭集为基的locale这一概念限制过于严格，应采用定义 3.6.2 作为这一概念的恰当定义。当所考虑的locale是紧locale时，这两个概念相同：

引理 4.5.8. 紧*locale* X 是以既开又闭集为基的，当且仅当它是零维的。

证明。 我们已在引理 4.5.6 中证明了正向蕴含，且这一结论不依赖于紧致性。对于反向蕴含，考虑一个紧且零维的locale X。根据引理 4.5.3，我们知道存在类型等价 $\mathrm{K}(X) \simeq \mathrm{C}(X)$，因为 X的零维性意味着它是正则的。这意味着，零维基 $(B_i)_{i:I}$由 X的紧开集组成，因此我们知道存在一个等价

$$\mathrm{K}(X) \simeq \mathrm{image}(B) \simeq \mathrm{C}(X),$$

由于 $\mathrm{K}(X) \simeq$像(B)根据推论 4.2.5。这意味着 $\mathrm{C}(X)$是一个小类型，因此我们完成了证明。 □

4.6 Stone locale

在第 4.5.1 节确定了零维 locale 的恰当概念后，我们现在可以定义 *Stone locale* 类：

D定义 4.6.1 ( )。 locale X称为 *Stone*，如果它是紧且零维的。

[2]这个例子由 Igor Arrieta 通过私人通信向作者提出。

尽管这一定义对我们的目的已经完全足够，但考察另一种刻画仍具说明性，正如我们对谱局部在定理4.2.11中所做的那样。我们还必须论证上述定义等价于 Stone locale 的定义，其来自定义3.6.3。

引理 4.6.2 ( ) 在每个 *Stone locale* 中，紧开集与闭开集重合。

证明。 显然，每个 Stone locale 都是紧且正则的，因为零维性蕴含正则性（见引理 3.6.6）。因此，由引理 4.5.3，我们知道紧开集与闭开集重合。 □

4.6.1 Stone 基是谱的

我们回顾定义 3.6.3，其中我们将 Stone locale 定义为带有某个未指定 Stone 基的 locale。locale X的一个*Stone* 基 是一个基 $(B_i)_{i:I}$满足

- 每个基本开集 B_i 既紧又既开又闭，并且
- 最大开集 $\mathbf{1}_X$ 是基中的一个元素。

显然，拥有某个未指定的 Stone 基意味着是 Stone：

引理 4.6.3. 如果 *locale* X 拥有某个未指定的 *Stone* 基，那么 X 就是上述定义中的 *Stone*，也就是说，它是紧且零维的。

证明. 零维性显而易见。对于紧致性，注意到最大开集 $\mathbf{1}_X$属于基，这意味着它是紧的，因为规定基由紧开集组成。 □

引理 4.6.4. 在每个拥有某个未指定 *Stone* 基的 *locale* X 中，每个既开又闭集都是紧的。

证明. 设 X 是一个拥有某个未指定 Stone 基的 locale。由引理 4.6.3，我们知道 X 是紧的。推论 3.4.9 指出，在每个紧locale中，闭开集都是紧的。 □

引理 4.6.5. 每个 *Stone* 基都是谱的。

证明。设 X是一个 locale，并设 $(B_i)_{i:I}$是它的一个指定 Stone 基。根据构造，定义 3.6.1 中的条件 (SP_b1) 和 (SP_b2) 显然成立。接下来只需证明条件 (SP_b3)，即基 $(B_i)_{i:I}$在二元交下封闭。考虑两个指标 $i, j\colon I$。基本开集 B_i和 B_j都是既开又闭的，因此根据引理 3.4.4，它们的交 $B_i \wedge B_j$ 也必定既开又闭。由引理 4.6.4 可知，在存在 Stone 基的情况下，闭开集是紧的，因此交 $B_i \wedge B_j$必定是紧的，进而必定属于该基，因为在每个具有基的 locale 中，紧开集都是基本开集（引理 4.2.4）。 □

引理 4.6.6. 对于每个 *locale* X以及每个基 $(B_i)_{i:I}$（其中 X），以下命题等价：

1. 基 $(B_i)_{i:I}$是 *Stone* 基，*2.* 基 $(B_i)_{i:I}$是谱的并且也是零维的，
3. locale X是紧的，且基 $(B_i)_{i:I}$是零维的。

证明。 我们已经确立了 (1) ⇔(3) 于引理 4.6.3 和 4.6.5。反过来，首先观察到最大开集 $\mathbf{1}_X$ 必定落入该基，因为在每一个配备了基的 locale 中，紧开集都是基本的（由引理4.2.4）。此外，推论 3.4.9 表明，在每一个紧locale中，闭开集都是紧的，这意味着每一个B_i 除既开又闭外还必须是紧的。

蕴涵 (2) ⇔(3) 是直接的。此外，我们还有 (1) ⇔(2)，因为由构造立即可知每一个 Stone 基都是零维的，并且我们已经在引理 4.6.5中证明，Stone 基是谱的。 □

4.6.2 另一种刻画

在第 4.2 节讨论谱 locale 时，我们提到，定义 4.2.1 中对谱 locale 概念的表述，是将标准的非谓词性谱 locale 概念直接翻译到我们的直谓设定中的结果。此外，我们还特别强调，定义 3.6.1 与定义 4.2.1 的等价性对我们的论述至关重要。

自然会有人问，对于 Stone locale，是否存在类似于定义 4.2.1 的定义。事实上，我们已经在引理 4.5.8 中给出了这样的定义，其中证明了：当所讨论的 locale 是紧的时，零维性与以闭开集为基相一致。后者可以视为类似于定义 4.2.1的定义，因为它归结为以下条件：

(ST1) 紧致性。(ST2) 包含映射 $\mathrm{C}(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathcal{O}(X)$ 构成一个弱基。(ST3) 类型 $\mathrm{C}(X)$ 是小的。

引理 4.6.7. 每一个满足条件 (ST1)–(ST3) 的 *locale* 都是定义 *4.6.1* 中的 *Stone*。

证明。 这直接由引理 4.5.8 得出。 □

引理 4.6.8( )。~~每~~一个 *Stone locale* 都是谱的。

证明。 由引理4.6.7可知，每个 Stone locale 都是紧的，并且有一个指定的零维基。由引理 4.6.6可知，这个指定的基必定也是谱的。 □

定理 4.6.9。 对于每个 *locale* X，在假设单值性和集合替换原理的前提下，以下各项逻辑等价。

1. locale X 具有一个未指定的 *Stone* 基。*2. locale* X 是紧且零维的。*3. locale* X 是紧且以闭开集为基的。*4. locale* X 是紧的，并且具有一个未指定的闭开集外延小基。*5. locale* X 是紧的，并且包含映射 $\mathrm{C}(X) \hookrightarrow X$ 是闭开集的外延基，其中对开集 U 我们指派其下方所有闭开集所构成的族，如同引理 4.5.6 的构造那样。*6. locale* X 是紧的，并且具有一个指定的闭开集内涵小基。*7. locale* X 是紧的，并且具有一个指定的闭开集外延小基。

证明。 我们利用定理 4.2.11。我们已经证明，陈述中的每一个条件都蕴含定理 4.2.11 的等价条件之一：

- 条件（1）和（2）都蕴涵谱性，这一点已在引理4.6.6中证明。
- 条件（3）等价于定理 24.2.11 中的条件 4.5.8，如引理 4.5.8所示。
- 条件（5）、（6）和（7）显然分别蕴涵定理 1）、（2）和（4 中的条件 4.2.11。

由推论 4.2.5 可知，对每个具有由紧开集构成的基 X $(B_i)_{i:I}$的 locale，$\mathrm{K}(X) \simeq$ 像(B)。容易看出，陈述中的每个条件都蕴涵零维性，也就是说，根据引理 $\mathrm{K}(X) \simeq \mathrm{C}(X)$ 4.5.3，。由此可见，陈述中的每个条件，都是相应的条件（如上述蕴涵关系所示）再加上由闭开集构成这一要求。

□

另请注意，上述条件中的前五个是命题，但最后两个通常不是。

4.6.3 Stone 局部范畴

现在我们可以定义 Stone 局部范畴。与谱 locale 的范畴 **Spec** 不同，得益于以下引理，Stone locale 没有特殊的态射概念：

引理 4.6.10. 每个连续映射都会反映闭开集。

证明。 设 $f\colon X \to Y$ 是 locale 的连续映射，并考虑一个既开又闭的 $F\colon \mathcal{O}(\mathbf{)}$。我们用 F 表示 F 的补。映射 $f^*(F)$ 也必定既开又闭，因为它的补是 $f^*(F_{\prime})$：

$$f^*(F) \wedge f^*(F') = f^*(F \wedge F') = f^*(\mathbf{0}_Y) = \mathbf{0}_X,$$
$$f^*(F) \vee f^*(F') = f^*(F \vee F') = f^*(\mathbf{1}_Y) = \mathbf{1}_X.$$

□

由于在 Stone locale 中，闭开集与紧开集重合，因此我们得到以下推论：

C推论 4.6.11. *Stone locale* 之间的每个连续映射 $f\colon X \to Y$ 都是谱映射。

我们用 $\mathbf{Stone}_{\mathcal{U}}$ 表示基宇宙 $\mathcal{U}$ 上 Stone locale 与连续映射构成的范畴。如果上下文已清楚说明基宇宙，我们就省略下标，直接写作 **Stone**。

引理 4.6.12. 范畴 $\mathbf{Stone}_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$ 的满子范畴。

证明. 我们已在引理4.6.8 中证明，每个 Stone locale 都是谱的，因此它构成一个子范畴。推论 *4.6.11*说明它是满的 。 □

4.6.4 例子与反例

终端 locale

例 4.6.13。 例 3.1.16 中的终端 locale 是 Stone。在例 3.3.5 中已证明它是紧的，在引理4.5.6 中已证明它是以闭开集为基的，因此根据引理 4.5.6，它是零维的。

离散 locale

例 4.6.14。 离散 locale 一般不是 Stone。正如例 4.3.2 中所解释的，幂集框架 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\mathbb{N})$ 不是谱的，因此不可能是 Stone。

Sierpiński locale

Sierpiński locale 是一个说明性例子：它虽然是谱的，却 不是 Stone。

例 4.6.15. Sierpiński locale $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$ 不是 Stone。

证明。 我们在例 4.3.4 中解释过，Sierpiński locale 恰有一个非平凡紧开集：主滤子 $\uparrow\top$。这是单元素集 $\{\top\}$，因为一个命题属于该子集当且仅当它是可居留的。反设单元素集 $\{\top\}$ 有补，即存在某个$F\colon \mathcal{O}(\mathbb{S}_{\mathcal{U}})$ 满足

$$\{\top\} \cap F = \emptyset, \tag{†}$$
$$\{\top\} \cup F = \mathcal{O}(\mathbb{S}_{\mathcal{U}}). \tag{‡}$$

根据（‡），我们知道每个命题 $P\colon \Omega_{\mathcal{U}}$ 都满足 $P = \top$ 或 $P \in F$。将此与（†）结合起来，我们得到 $P \in F$当且仅当 $\neg(P = \top)$，即 $P = \bot$。这

就是说，F 是单元素子集 $\{\bot\}$。不过请注意，子集 F 的 Scott 开集性意味着我们也有 $\top \in F$，因为 Scott 开子集是向上封闭的。因此 $\bot = \top$，这就产生了矛盾。□

例 4.6.16. Sierpiński locale 是谱的，但不是 Stone。它的谱性已在例 4.3.4中给出，而我们在上面的引理中证明了它不是 Stone。

4.7 谱 locale 的 Stone 对偶

我们在引理 4.4.37 中证明，每个小分配格都对应一个谱 locale L。这是谱 $\mathrm{Spec}(L)$，其定义框架是 L上的小理想框架。本节将推广这一结果，证明：

1. 每个谱 locale 都满足这一性质，也就是说，每个 谱 locale 都同胚于某个小分配格的谱，具体而言，是其紧开集构成的小分配格的谱；2. 每个分配格都同构于其谱中紧开集构成的小格。

因此，我们将在定理4.2.11中的条件列表里再增加一个等价条件：同胚于某个小分配格(L) 的谱 L。由此我们将得到映射

$$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \underset{\mathrm{Spec}(\text{-})}{\overset{\mathrm{K}}{\rightleftarrows}} \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}},$$

其中$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$表示大、局部小且小完备的谱 locale 的类型，而$\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$表示小分配格的类型（基于基宇宙 $\mathcal{U}$），然后证明这些映射构成一个等价。

虽然我们在第 4.8 节将这些映射扩展为函子，并证明它们构成范畴等价，但我们注意到，本节所呈现的类型等价本身在单值基础的语境中就非常有用，因为它意味着这两个类型在强意义下是相同的。例如，可以证明，对于任意一对 X和 Y 谱 locale，我们都有一个等价

$$(X \cong Y) \simeq (\mathrm{K}(X) \cong \mathrm{K}(Y)),$$

即 $X \cong Y$locale 同胚的类型与 $\mathrm{K}(X) \cong \mathrm{K}(Y)$ 分配格同构的类型之间的等价，并利用这一点，通过证明两个 locale 的紧开集分配格同构，来证明这两个 locale 同胚。

4.7.1 沿等价传输格结构

在定义 2.13.1中，我们定义了 $\mathcal{V}$-小性：类型 X： $\mathcal{U}$称为 $\mathcal{V}$-小的，如果它在宇宙 $\mathcal{V}$ 中有一个等价的副本。考虑一个配备了某种 X 的类型

代数结构。如果我们有一个等价 $e : X \simeq Y$ 就可以通过 e 传输代数结构，从而在 Y 上得到该代数结构的一个等价副本。如果这里的等价是在一个较大的宇宙和一个较小的宇宙之间建立的，那么我们就可以通过在较小的宇宙中构造一个同构副本，来调整所考虑代数结构的大小。

引理4.7.1 ( )。对于任意分配 $\mathcal{U}$-格 L 以及任意 $\mathcal{V}$-类型 X，若存在一个等价 $|L| \simeq X$，则存在一个分配格结构 σ，定义在 X 上，使得有一个同构 $L \cong (X, \sigma)$。

证明。 设 L 是一个分配 $\mathcal{U}$-格，并设 $A : \mathcal{V}$ 是一个类型，且给定一个等价 $e : |L| \simeq A$。记 $s : |L| \to A$ 和 $r : A \to |L|$ 为该等价的两个方向。我们在 A 上定义如下格结构：

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_A &:\equiv s(\mathbf{0}_L) \\ \mathbf{1}_A &:\equiv s(\mathbf{1}_L) \\ a \wedge_A b &:\equiv s(r(a) \wedge_L r(b)) \\ a \vee_A b &:\equiv s(r(a) \vee_L r(b)) \end{aligned}$$

容易验证，这些定义在 A 上构成一个分配格结构。我们将这个分配 $\mathcal{V}$-格记为 L'。 L 与 L' 之间的同构由等价 e 本身给出。接下来只需证明，该等价的两个方向都是分配格同态。映射 s 依定义保持 $\mathbf{0}_L$ 和 $\mathbf{1}_L$ 。为证明它保持交和并，取 $x, y : L$。由于 r 是 s 的截面，我们有：

$$\begin{aligned} s(x \wedge_L y) &= s(r(s(x)) \wedge_L y) \\ &= s(r(s(x)) \wedge_L r(s(y))) \\ &\equiv s(x) \wedge_A s(y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s(x \vee_L y) &= s(r(s(x)) \vee_L y) \\ &= s(r(s(x)) \vee_L r(s(y))) \\ &\equiv s(x) \vee_A s(y) \end{aligned}$$

反过来， r 是格同态这一事实直接源于它是 s 的截面。

□

4.7.2 谱 locale 的紧开集分配格

现在，我们明确地定义谱 locale 的紧开集分配格。

引理 4.7.2 ()。对于每个谱 *locale* X，类型 $\mathsf{K}(X)$ 构成一个分配格（其先验上是大的）。

证明。 $\mathcal{O}(X)$ 上的框架结构可以限制为以下运算：

$$\begin{aligned} (\text{-}) \wedge_K (\text{-}) &: \mathsf{K}(X) \to \mathsf{K}(X) \to \mathsf{K}(X) \\ (\text{-}) \vee_K (\text{-}) &: \mathsf{K}(X) \to \mathsf{K}(X) \to \mathsf{K}(X) \\ \mathbf{1}_K &: \mathsf{K}(X) \\ \mathbf{0}_K &: \mathsf{K}(X) \end{aligned}$$

这要归功于以下几点：

- 底开集 $\mathbf{0}_X$ 根据引理，始终是紧的3.3.8，
- 紧开集在二元并下总是封闭的（同样根据引理3.3.8），
- 在谱 locale 中，两个紧开集的交是紧的，这由 (SP2)，
- 在谱 locale 中，最大开集是紧的，这由 (SP1)。

□

在定义 4.2.1 中，我们要求谱 locale X 的类型 $\mathsf{K}(X)$ 是小的，这意味着对于每个谱 locale X，我们都有 $\mathsf{K}(X)$ 等价于一个小类型。这意味着我们可以将上面引理中的紧开集分配格缩小。

引理 4.7.3 ()。对于每个谱 *locale* X，上面引理中的大分配格 $\mathsf{K}(X)$ 都有一个与之同构的小副本。

*Pr*证明。 我们运用引理4.7.1，并采用条件 (SP4)中规定的等价。

□

注 4.7.4。 在形式化过程中，我们仔细区分紧开集分配格的大副本和小副本。不过，在这里的阐述中，我们略去这一技术细节，因为它会使表述相当繁琐。下文将默认使用这样一个事实：分配格 $\mathsf{K}(X)$ 有一个 $\mathcal{U}$-小副本。

总而言之，条件 (SP1)–(SP4) 结合起来，确保类型 $\mathsf{K}(X)$ 构成一个小分配格。我们将其记为

$$\mathsf{K} : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$$

将谱 locale 映射到其紧开集小分配格的映射，正如上述引理中所构造的那样。

严格来说，上述映射是通过以下复合得到的：

$$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}^+} \longrightarrow \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}},$$

其中，第一个映射 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}^+}$ 将谱 locale 映射为其先验上大的紧开集分配格，而第二个映射则将该分配格映射为它的小副本。

注 4.7.5。有时我们需要区分上述两个映射。在需要这种技术上的精确性时，我们将使用以下记号

- K^{+} 对于映射 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}^{+}}$，以及
- K^{-} 对于复合 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$。

建议读者牢记这一区别，它将在第 4.8 节中发挥尤为重要的作用。

4.7.3 Stone 对偶的对象部分

到目前为止，我们已经构造了以下函数：

$$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \underset{\mathrm{Spec}(\text{-})}{\overset{\mathrm{K}}{\rightleftarrows}} \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}},$$

在谱 locale 类型与分配格类型之间。现在我们来证明它们构成类型等价。

这里使用“等价”一词时需要谨慎，因为目前我们只构造了对象部分。具体来说，我们将证明以下两个结果：

1. 对于每个 $\mathcal{U}$-格 L，存在一个分配格同构 $L \cong \mathrm{K}(\mathrm{Spec}(L))$。2. 对于每个谱 locale X，存在一个景同胚 $X \cong \mathrm{Spec}(\mathrm{K}(X))$。

在单值性假设下，可以利用结构恒等原理将上述同构转化为相等，从而证明 K(-) 是 Spec(-) 的截面，反之亦然。这使我们能够将上述结果扩展为一个类型等价：

$$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \simeq \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}.$$

引理 4.7.6 ( )。每个小分配格 L 都同构于格$\mathrm{K}(\mathrm{Spec}(L))$。

证明。 令 L 为一个小分配格。回顾一下，我们有一个映射

$$\downarrow(\text{-}) : L \to \mathrm{K}(\mathrm{Spec}(L))$$

由于 L 的元素所生成的主理想在$\mathrm{Spec}(L)$ 中是紧的（根据引理4.4.34）。我们断言，此映射构成一个分配格同构。回顾一下，在引理4.4.38 中，我们证明了，对于每个紧开集 $K :\ \mathrm{Spec}(L)$，都存在一个元素 $x :\ L$ 满足 $K = \downarrow x$。由于主理想映射是嵌入（根据引理4.4.16），我们知道它的纤维是命题。这说明它是一个等价，因为它的纤维是可缩的。根据引理4.4.9，要建立同构，只需证明这个等价两侧的映射都是单调的。我们已经在引理4.4.18中证明，主理想映射保持交，因此它是单调的。另一方向则显而易见。

□

引理 4.7.7 ( )。每个谱 *locale* X 都与$\mathrm{Spec}(\mathrm{K}(L))$同胚。

证明。 设 X 是基宇宙 $\mathcal{U}$上的一个谱 locale。我们知道存在一个映射 $\phi\colon \mathcal{O}(X) \to$ 理想$_{\mathcal{U}}(\mathrm{K}(X))$，定义为（）如下：

$$\phi(U) \quad :\equiv \quad \{C : \mathrm{K}(X) \mid C \leq U\},$$

由于 $\mathrm{K}(X)$ 的小性，这是一个小集合。注意，这是限制在小集合 $\mathrm{K}(X)$ 上的主理想。我们声称这构成一个框架同构 $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(L))$。其逆映射就是将理想 $I \subseteq \mathrm{K}(X)$ 映射到族 $\left(\Sigma_{(K:\mathrm{K}(X))} K \in I\right) \hookrightarrow \mathrm{K}(X)$ 的并的映射。我们将此映射记作 $\vartheta\colon$ 理想$_{\mathcal{U}}(\mathrm{K}(X)) \to \mathcal{O}(X)$。只需证明 ϑ 和 ϕ 互为逆映射。

设 $I \subseteq \mathrm{K}(X)$ 是 $\mathcal{U}$-理想，它位于 X 的紧开集所构成的分配 $\mathcal{U}$-格上。我们首先证明 $I = \phi(\vartheta(I))$。我们使用反对称性。非平凡的方向是$\phi(\vartheta(I)) \subseteq I$。设 K_1 是一个紧开集，满足 $K_1 \leq \bigvee I$。由于理想是有向的，我们知道存在某个紧 $K_2 \in I$，使得 $K_1 \leq K_2$。根据 I 的向下闭包，我们有 $K_1 \in I$。对于另一个方向，考虑一个开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$。由定理 4.2.11 的条件 (4)，可直接得出 $U = \vartheta(\phi(U))$。

容易验证，框架同构给出了框架的标准结构概念，如第2.10.3节所述。因此，根据结构恒等原理，我们得到以下结果：

引理 4.7.8 ( )。对于任意一对 *locale* X和 Y 存在一个等价

$$(X \cong Y) \simeq (X = Y),$$

其中， $X \cong Y$表示 X与 之间同胚的类型。

对于分配格，同样可以证明：

引理 4.7.9 ( )。对于任意一对分配格 K和 L，存在一个等价

$$(K \cong L) \simeq (K = L),$$

其中， $K \cong L$ 表示 K 与 L之间同构的类型。

由此，我们得到一个类型等价：

定理 4.7.10 ( )。 类型 $\mathrm{Spec}_{\mathcal{U}}$ 等价于类型 $\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$。

证明。 我们利用引理 4.7.6 给出的同构以及引理 4.7.7 给出的同胚，并借助引理 4.7.8 和引理 4.7.9将其转化为相等。 □

在单值基础的语境中，上述结论是一个相当强的断言。它意味着这两个数学结构满足完全相同的性质。

4.8 Stone 对偶的范畴部分

到目前为止，我们已经证明这些映射

$$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\mathrm{K}}{\rightleftarrows}} \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}},$$

构成类型的等价。在本节中，我们将说明这可以扩展为范畴等价。不过，在开始证明之前，我们先讨论 HoTT/UF 中范畴等价这一概念的定义。

4.8.1 HoTT/UF 中的范畴等价

回顾一下，标准定义 [Awo10，定义 7。25] 范畴之间的等价 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是一个由函子组成的对

$$\mathbb{C} \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}$$

并配备自然同构 $\alpha\colon \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \to F \circ E$ 和 $\beta\colon \mathbf{1}_{\mathbb{D}} \to E \circ F$。这是范畴论中的一个众所周知的事实 [Awo10，命题 7。26]： 函子 $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$属于上述意义下的等价，当且仅当它是全忠实且本质满的。

在构造性基础框架中，对于本质满函子的概念应采用指定存在还是未指定存在来表述，需要格外谨慎。在 HoTT Book 中，采用指定存在的表述称为分裂本质满函子：

定义 4.8.1 ([Uni13，定义 9.4。4])。函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 称为 分裂本质满 ，如果对于每个对象 $D\colon \mathbb{D}$，都存在一个 指定的 对象 $C\colon \mathbb{C}$ 使得 $F(C) \cong D$。

为保证内容自足，我们也给出满函子和忠实函子的定义。

定义 4.8.2([Uni13，定义 9.4。4])。 设 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个函子。如果映射

$$F : \mathrm{Hom}(C_1, C_2) \to \mathrm{Hom}(F(C_1), F(C_2))$$

对于每一对对象 C_1 和 C_2，都是一个嵌入的函子 F称为忠实。类似地，如果对每一对对象 C_1和 C_2，该映射都是满射，则称 F为满 。如果 F既满又忠实，则称其为全忠实。

引理 4.8.3 ([Uni13，引理 9.4。5])。 对于每个函子 $E:\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，以下命题等价：

1. E 是范畴等价的一部分。*2.* E 是全忠实且分裂本质满的。

就我们的目的而言，在证明范畴 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$ 与 $\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 等价时，利用上述范畴等价的刻画将是方便的。更具体地说，我们将通过证明映射 $\mathsf{K} : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 可延拓为一个全忠实且分裂本质满的函子，来建立所关注的范畴等价。

4.8.2 K^{-}的函子作用

回顾一下，谱映射 $f\colon X \to Y$ 是一个连续函数，其定义所用的框架同态将 Y的紧开集映到 X的紧开集。更形式地说，连续映射 $f\colon X \to Y$ 的谱性由某个函数所见证

$$\varphi : \Pi_{(V:\mathcal{O}(Y))}\,(V \text{ is compact} \Rightarrow f^{*}(V) \text{ is compact}).$$

我们定义映射 $\mathsf{K}f :\equiv (K,\kappa) \mapsto (f^{*}(K)\ \varphi_K(\kappa))$，其中 (K,κ) 是由开集 $K\colon \mathcal{O}(Y)$ 以及表明其为紧的某个证明 κ 所组成的对。函数 $\mathsf{K}f$ 将这样的对映到对 $(f^{*}(K)\ \varphi_K(\kappa))$，其中 $\varphi_K(\kappa)$ 是结果 $f^{*}(K)$ 为紧的见证。这显然给出一个格同态

$$\mathsf{K}_f : \mathsf{K}(Y) \to \mathsf{K}(X).$$

因此，我们得到了一个从$\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$ 的 Hom 集到$\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}^{+}}$的 Hom 集的映射：

$$\mathsf{K}_{(\text{-})} : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathsf{K}(Y),\mathsf{K}(X)).$$

虽然从本质上说，这就是函子 $\mathsf{K} : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$在 $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}}$的态射上的函子作用的定义，但我们还需要考虑到这样一个事实：我们希望得到一个小的分配格范畴 $\mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 中的态射。回想一下我们在注释 4.7.5 中讨论过的 K^{+} 和 K^{-}之间的区别，此处的问题在于，上述定义针对的是映射 $\mathsf{K}^{+} : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}^{+}}$，而不是映射 $\mathsf{K}^{-} : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$。

给定谱 locale X和 Y 根据谱性的定义，我们知道存在等价 $e_X\colon \mathsf{K}^{+}(X) \simeq \mathsf{K}^{-}(X)$ 和 $e_Y\colon \mathsf{K}^{+}(Y) \simeq \mathsf{K}^{-}(Y)$，它们是分配格同态，正如我们在引理 4.7.3 中所证明的。我们将利用这些同构，把函子作用从 $\mathrm{Hom}(\mathsf{K}^{+}(Y),\mathsf{K}^{+}(X))$ 传输到 $\mathrm{Hom}(\mathsf{K}^{-}(Y),\mathsf{K}^{-}(X))$。

在本节余下部分中，我们将使用以下记号

$$\mathsf{K}^{+}(X) \underset{r_X}{\overset{s_X}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}^{-}(X) \qquad \mathsf{K}^{+}(Y) \underset{r_Y}{\overset{s_Y}{\rightleftarrows}} \mathsf{K}^{-}(Y),$$

用来指称这些等价的两个方向。图 4.1 概括了这一现状。

图 4.1：谱 locale X 和 Y，以及它们的紧开集分配格的重缩放映射。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\
\mathsf{K}^+(Y) & \xrightarrow[\mathsf{K}^+_f]{} & \mathsf{K}^+(X) \\
{\scriptstyle r_Y}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle s_Y} & & {\scriptstyle r_X}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle s_X} \\
\mathsf{K}^-(Y) & \xrightarrow[\mathsf{K}^-_f]{} & \mathsf{K}^-(X)
\end{array}$$

定义 4.8.4 （K^- 的函子作用）。设 $f\colon X \to Y$ 是一个谱映射，其谱性由一个证明形式化地见证

$$\varphi : \Pi_{(V:\mathcal{O}(Y))}\,(V \text{ is compact} \Rightarrow f^*(V) \text{ is compact}).$$

函子作用 $\mathsf{K}\bar{f}\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(X)$ 定义为 $\mathsf{K}\bar{f} :\equiv s_X \circ \mathsf{K}^+_f \circ r_Y$，这对应于映射 $K \mapsto s_X(f^*(\mathrm{pr}_1(r_Y(K))),\ \varphi(\mathrm{pr}_2(r_Y(K))))$。

尽管我们在上文给出了完全形式化的定义，但通常不会如此严谨。例如，为了便于阅读，我们常常省略投影的应用。

引理 4.8.5. 对于任意谱映射 $f\colon X \to Y$，若其定义域和值域分别为谱 *locale* X 和 Y，则映射 $\mathsf{K}\bar{f}\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(X)$ 是分配格同态。

证明。在引理 4.7.3中，我们证明了等价 $\mathsf{K}(Y) \simeq \mathsf{K}^-(Y)$ 和 $\mathsf{K}(X) \simeq \mathsf{K}^-(X)$ 都是分配格的同态。结合 f^* 是框架同态这一事实，即可得出所需结果。□

至此，我们完成了函子 K^- ： $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 的定义。

4.8.3 函子K^- 给出范畴等价

现在，我们可以通过证明函子 K^- （1）全忠实，且（2）分裂本质满，来建立所需的范畴等价。

引理 4.8.6。函子 K^- ： $\mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 是分裂本质满的。

证明。我们需要证明，对于每个小分配格 L，都存在一个指定的谱 locale X，使得 $\mathsf{K}^-(X) \cong L$。这已在引理 4.7.6 中确立；其中我们证明了 $\mathrm{Spec}(L)$ 的紧开集分配格（它是小的）与 L同构。□

在继续证明所考虑的函子是全忠实之前，我们先记录下面的引理，以作准备。

引理 *4.8.7 ( )*。㊟*locale* X 上的单调自映射 $h\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，若满足以下条件，则为 *Scott* 连续：对于每个 $U\colon \mathcal{O}(X)$ 和紧 $K\colon \mathcal{O}(X)$，只要 $K \le h(U)$，就存在某个紧 $K' \le U$ 使得 $K \le h(K')$。

证明。只需证明关系 $h(\bigvee_{i:I} U_i) \le \bigvee_{i:I} h(U_i)$ 成立。由于 X 是谱的，取一小族紧开集 $(K_j)_{j\colon J}$，使得 $\bigvee_{j:J} K_j = h(\bigvee_{i:I} U_i)$。对于任意 $j\colon J$，我们有 $K_j \le h(\bigvee_{i:I} U_i)$，因此根据假设，存在一个紧开集 $K \le \bigvee_{i:I} U_i$ 使得 $K_j \le h(K)$。由 K 的紧致性，存在一个 $i\colon I$ 使得 $K \le U_i$，于是 $K_j \le h(K) \le h(U_i) \le \bigvee_{i:I} h(U_i)$，因此我们可以取 $K' :\equiv K_j$。 □

由于映射 (-) ∨ (-) 对两个参数显然都是 Scott 连续的，因此我们有以下有用的推论：

推论 4.8.8. 设 X 为谱 *locale*，并考虑两个开集 $U, V\colon \mathcal{O}(X)$。对于每个满足 $K \le U \vee V$ 的紧开集 K，都存在紧开集 K_1 和 K_2，使得 $K \le K_1 \vee K_2$，并且还有 $K_1 \le U$ 和 $K_2 \le V$。

引理 4.8.9. 设 X 和 Y 是两个谱 *locale*，并设 $h\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(X)$ 是一个分配格同态。映射

$$\mathrm{Spec}_h^*(V) :\equiv \bigvee \{ r_X(h(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\ r_Y(K) \le V \}$$

是一个框架同态 $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$。

证明。 容易看出，映射 Spec_h^* 保持有限交。我们重点讨论 (1) 保持并以及 (2) 谱性。

(1) 设 $(V_i)_{i:I}$ 是 Y 中的一个有向开集族。格论中有一个众所周知的事实：一个函数保持任意并，当且仅当它既保持有限并，也保持有向并。若假设该族是有向的，我们很容易看出

$$\bigvee \left\{ r_X(h(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\ r_Y(K) \le \left(\bigvee_{i:I} V_i \right) \right\} = \bigvee_{i:I} \mathrm{Spec}_h^*(V_i)$$

根据 $r_Y(K)$ 的紧致性。对于二元并的情形，考虑两个开集 V_1 和 V_2。我们需要证明 $\mathrm{Spec}_h^*(V_1 \vee V_2) = \mathrm{Spec}_h^*(V_1) \vee \mathrm{Spec}_h^*(V_2)$。该

$$\mathrm{Spec}_h^*(V_1) \vee \mathrm{Spec}_h^*(V_2) \le \mathrm{Spec}_h^*(V_1 \vee V_2)$$

这个方向很容易看出，因此我们着重讨论另一个方向。我们必须证明 $\bigvee \{ r_X(h(K)) \mid K\colon \mathsf{K}^-(Y)\ r_Y(K) \le V_1 \vee V_2 \}$ 小于等于该并

$$\left(\bigvee \{ r_X(h(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\ r_Y(K) \le V_1 \} \right) \vee \left(\bigvee \{ r_X(h(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\ r_Y(K) \le V_2 \} \right).$$

首先，注意到这与该并相同

$$\left(\bigvee \{r_X(h(K_1 \vee K_1)) \mid K_1, K_2 : \mathsf{K}^-(Y),\, r_Y(K_1) \leq V_1,\, r_Y(K_2) \leq V_2\}\right)$$

根据分配律。设 $K\colon \mathsf{K}^-(Y)$ 满足 $r_Y(K) \leq V_1 \vee V_2$。由推论 4.8.8 可知，存在紧的 K_1、K_2，使得 $r_Y(K_1) \leq V_1$ 且 $r_Y(K_2) \leq V_2$，并且 $r_Y(K) \leq K_1 \vee K_2$。这意味着 $r_X(h(K)) \leq r_X(h(K_1 \vee K_2))$，而且 $r_Y(K_1) \leq V_1$ 且 $r_Y(K_2) \leq V_2$，这正是我们所需要的。 □

引理 4.8.10. 设 X 和 Y 是两个谱 *locale*，并设 $h\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(Y)$ 是它们之间的分配格同态。那么我们有

$$\mathrm{Spec}_h^*(K) = r_X(h(s_Y(K))),$$

对每个 $K\colon \mathsf{K}^-(Y)$。

证明。 设 $h\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(Y)$ 是谱 locale 的紧开集分配格之间的分配格同态 X和 Y 并考虑某个 $K\colon \mathsf{K}^-(Y)$。我们首先证明 $\mathrm{Spec}_h^*(K) \leq r_X(h(s_Y(K)))$。设 $K'\colon \mathsf{K}^-(Y)$ 满足 $r_Y(K') \leq K$。由于我们有 $r_Y \dashv s_Y$，因此知道 $K' \leq s_Y(K)$，由此可得 $r_X(h(K')) \leq r_X(h(s_Y(K)))$，因为 $r_X \circ h$是单调的。对于

$$r_X(h(s_Y(K))) \leq \mathrm{Spec}_h^*(K)$$

这个方向，只需注意到我们有 $r_Y(s_Y(K)) \leq K$，因为 $r_Y(s_Y(K)) = K$。 □

推论 4.8.11。 对于每个分配格同态 $h\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(Y)$，其中 X和 Y是谱 *locale*，框架同态 Spec_h^* 保紧开集，因为对于每个紧开集 $K\colon \mathcal{O}(Y)$， $r_X(h(s_Y(K)))$ 都是紧开集。这意味着 Spec_h 是谱映射。

引理 *4.8.12*。映射 $Spec_{(-)}\colon Hom(K^-(Y), K^-(X)) \to Hom(X, Y)$ 是映射 $K^-(-)\colon Hom(X, Y) \to Hom(K^-(Y), K^-(X))$ 的拟逆

证明。 我们先证明 $\mathrm{Spec}_{(-)}$ 是 $\mathsf{K}^-{}_{(-)}$的截面。设 $f\colon X \to Y$ 是一个谱映射，并设 $V\colon \mathcal{O}(Y)$。我们需要证明 $\mathrm{Spec}^{\mathsf{K}_f^-}(V) = f^*(V)$。首先，注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}_{\mathsf{K}_f^-}(V) &\equiv \bigvee \left\{r_X(\mathsf{K}_f^-(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\, r_Y(K) \leq V\right\} \\
&\equiv \bigvee \{r_X(s_X(f^*(r_Y(K)))) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\, r_Y(K) \leq V\} \\
&= \bigvee \{f^*(r_Y(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y),\, r_Y(K) \leq V\}
\end{aligned}$$

我们知道， V可以分解为一个并 $\bigvee\{K \mid K\colon \mathcal{O}(Y),\, K \leq V\}$，并且

很容易验证

$$f^*\left(\bigvee\{K \mid K : \mathcal{O}(Y), K \le V\}\right) = \bigvee\{f^*(r_Y(K)) \mid K : \mathsf{K}^-(Y), r_Y(K) \le V\}.$$

我们现在证明 $\mathsf{Spec}^{(\text{-})}$ 是 $\mathsf{K}^-_{(\text{-})}$ 的一个截面。设 $h\colon \mathsf{K}^-(Y) \to \mathsf{K}^-(X)$ 为分配格的同态。我们需要证明，对每个 $K\colon \mathsf{K}^-(Y)$，有 $\mathsf{K}^-_{\mathsf{Spec}_h}(K) = h(K)$。首先，观察定义等同性

$$\begin{aligned}\mathsf{K}^-_{\mathsf{Spec}_h}(K) &\equiv s_X(\mathsf{Spec}^*_h(r_Y(K)))\\ &\equiv s_X\left(\bigvee\{r_X(h(K')) \mid K' : \mathsf{K}^-(Y), r_Y(K') \le r_Y(K)\}\right) \qquad (\dagger)\end{aligned}$$

我们首先证明 (†) 中的并低于 $h(K)$，为此只需证明

$$\left(\bigvee\{r_X(h(K')) \mid K' : \mathsf{K}^-(Y), r_Y(K') \le r_Y(K)\}\right) \le r_X(h(K)),$$

因为 r_X 是 s_X 的右伴随。只需证明，对每个满足 $r_Y(K') \le r_Y(K)$ 的 $K'\colon \mathsf{K}^-(Y)$，有 $r_X(h(K')) \le r_X(h(K))$。考虑这样一个满足 $r_Y(K') \le r_Y(K)$ 的 $K'\colon \mathsf{K}^-(Y)$。由于 r_Y 是序嵌入，我们有 $K \le K$，并且由于 $r_X \circ h$ 显然是单调映射，从而有 $r_X(h(K')) \le r_X(h(K))$。我们现在处理所考虑的等同性的另一个方向，即，

$$h(K) \le s_X\left(\bigvee\{r_X(h(K')) \mid K' : \mathsf{K}^-(Y), r_Y(K') \le r_Y(K)\}\right).$$

由于 s_X 是 r_X 的右伴随，只需证明

$$r_X(h(K)) \le \bigvee\{r_X(h(K')) \mid K' : \mathsf{K}^-(Y), r_Y(K') \le r_Y(K)\},$$

这显然成立。 □

推论 4.8.13. 函子 $\mathsf{K}^- : \mathbf{Spec}_{\mathcal{U}} \to \mathbf{DLat}_{\mathcal{U}}$ 是全忠实的。

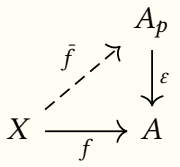
第5章

补丁 locale

我们在第 **Spec** 和 **Stone** 章 4中定义了这两个范畴，并说明后者是前者的一个全子范畴。在本章中，我们将深入探讨这两个范畴之间的关系，并考察在直谓设定下，如何将谱 locale 普遍地变换为 Stone 范畴中的对象。

在非直谓基础设定中，众所周知，范畴 **Stone** 是范畴的余反射子子范畴 Spec [Esc99；Esc01]。这里涉及的余反射意味着，每个谱 locale 都可以以泛性质变换为一个 Stone locale。这里的余反射子就是所谓的谱局部的补丁局部：谱空间上补丁拓扑的 locale 化体现（文献中也称为可构造拓扑 [DST19，§1.3。11]）。可以将它看作一个泛 locale，在其中，谱 locale 的所有紧开集都会变为既开又闭集。形式上，这由下面的泛性质刻画。

定义 5.0.1 (补丁 locale 的泛性质）。设 A 是一个谱 locale。若存在一个指定的谱映射 A_p，则称 Stone locale A_p 是 A_p 的补丁 *locale*， A 并且存在一个指定的谱映射 ε : $A_p \to A$，使得对于每个连续映射 f : $X \to A$，从一个 Stone locale X 到 A，都存在一个连续映射 $\bar{f}$: $X \to A_p$，且该映射满足性质即 $f = \varepsilon \circ \bar{f}$。这可用下图概括：



乍看之下，并不明显每个谱 locale 的补丁 locale 都能在构造性、直谓的基础框架中构造出来，因为文献中关于这一余反射的所有证明似乎都用到了某种形式的非直谓性。本章重点说明，每个谱 locale 都可以余反射到一个 Stone locale，如

上文给出的泛性质所述。为此，我们沿用 Escardó [Esc99；Esc01], 提出的一个思路：补丁 locale 可以通过谱 locale 上 Scott 连续核的框架来定义。事实证明，这种对补丁 locale 的描述适用于构造性和直谓推理。尽管我们的构造大体相同，Escardó 关于补丁 locale 泛性质的证明 [Esc99] 依赖于所有核之框架的存在性，而在非直谓基础设定中，这个框架很容易构造出来。在我们的直谓设定中，所有核的框架似乎并不可用，因此泛性质的证明是新的，而且结果也更加复杂。

本章的组织结构如下：
节5.1：我们给出所有核组成的偏序集，并证明它构成交半格。此外，我们讨论这样一个问题：若不采用某种形式的命题缩放，这个偏序集似乎并非局部小。第5.2节：我们说明，可以证明第 5.1节中所有核构成的交半格在非谓词性设定下是完备的，并概述在这个格中构造并的非谓词方法。此外，我们讨论这样一个问题：这些并的构造似乎无法通过直谓方式实现。第5.3节：我们讨论核的交半格中的一个子交半格，即由*Scott* 连续核组成的子格。此外，我们说明，Escardó 构造并的方法 [Esc98]可以轻松地转化为我们这里的直谓设定。因此，我们得出结论：即使在直谓设定下，这个子格也是小完备的，并且构成一个框架。第5.4节：我们证明，由第 5.3节中的 Scott 连续核构成的框架所定义的 locale 满足定义5.0.1中的补丁 locale 泛性质，从而证明在直谓设定下，**Stone** 是**Spec**的余反射子范畴。第5.5节：我们给出补丁 locale 的若干例子，并通过 Stone 对偶讨论其格论解释。

5.1 locale 上核的交半格

5.1.1 核的逐点序

设 X 是基宇宙 $\mathcal{U}$ 上的一个 locale，并考虑类型 Nucleus(X)，它属于宇宙 $\mathcal{U}^+$。按逐点序排列时，此类型构成一个偏序集：

引理 5.1.1. 对于每个 *locale* X（在基宇宙 $\mathcal{U}$ 上），逐点序，

$$j \leq k \quad :\equiv \quad \Pi_{(U:\mathcal{O}(X))}\, j(U) \leq k(U),$$

是一个带有大真值的偏序，即生活在宇宙 $\mathcal{U}$ 中的真值。

定义 5.1.2. locale X 上的核的偏序集是类型 Nucleus(X)，其偏序由上述序给出。

注记 5.1.3. 尽管上述序似乎必然具有大真值，但截至撰写本文时，我们尚无缩放禁忌来确立这一点。我们猜想，此偏序集的局部小性给出了一种重定大小形式。

5.1.2 核的交

引理 5.1.4。 对于每个 *locale* X，X 上的核的偏序集都有有限交。

证明。 设 X 是一个 locale。最大核定义为取值为 $\mathbf{1}_X$ 的常值映射，而两个核的交定义为 $j \wedge k :\equiv U \mapsto j(U) \wedge k(U)$。容易看出，$j \wedge k$ 是核 j 和 k 的最大下界，因此只需证明 $j \wedge k$ 满足作为核的条件。

由 j 和 k 的膨胀性，以及 $j(U) \wedge k(U)$ 是 $j(U)$ 和 $k(U)$ 的最大下界这一事实，可知膨胀性成立。为证明交保持性，设 U，$V : \mathcal{O}(X)$。

$$\begin{aligned}
(j \wedge k)(U \wedge V) &\equiv j(U \wedge V) \wedge k(U \wedge V) \\
&= j(U) \wedge j(V) \wedge k(U) \wedge k(V) && \text{[meet-preservation]} \\
&= (j(U) \wedge k(U)) \wedge (j(V) \wedge k(V)) && \text{[commutativity]} \\
&\equiv (j \wedge k)(U) \wedge (j \wedge k)(V)
\end{aligned}$$

对于幂等性，令 $U : \mathcal{O}(X)$。

$$\begin{aligned}
& (j \wedge k)((j \wedge k)(U)) \\
\equiv\ & j(j(U) \wedge k(U)) \wedge k(j(U) \wedge k(U)) \\
=\ & j(j(U)) \wedge j(k(U)) \wedge k(j(U)) \wedge k(k(U)) && \text{[meet-preservation]} \\
\leq\ & j(j(U)) \wedge k(k(U)) \\
=\ & j(U) \wedge k(U) && \text{[idempotency]} \\
\equiv\ & (j \wedge k)(U)
\end{aligned}$$

□

5.2 非谓词性的核框架

在非谓词性基础中 locale理论的传统发展里，核算子框架是一种标准构造。Johnstone [Joh82，§II.2。5] 表明，核的偏序集通过在其中构造任意下确界和 Heyting 蕴涵而构成一个框架。他顺便指出，“ [核算子框架] 中的并更难以显式描述”[Joh82，第 51]页。在考察 Johnstone 构造的细节之前，让我们先审视显式描述这些并时所涉及的这一困难。

仿照交的情形，人们可能会尝试将一族核的并 $(k_i)_{i:I}$ 定义为逐点并，即

$$\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(x) \quad :\equiv \quad \bigvee_{i:I} k_i(x).$$

然而，一般而言，这并不满足幂等性；当所考虑的族为空时，也不具有扩张性。文献中有几种构造这些并的方法，但都涉及某种形式的非直谓性。我们首先讨论前面提到的 Johnstone 方法。

假设我们考虑完备小局部，其理论可按第 3.1.4 节所述，以非谓词方式发展。设 L 是一个完备小框架。若 L 交完备，则 L 也并完备，因为我们可以轻易地将并构造如下：

$$\left(\bigvee_{i:I} x_i\right) \quad :\equiv \quad \bigwedge \{y : L \mid y \text{ is an upper bound of } (x_i)_{i:I}\},$$

当所考虑的承载集为小时，这将是一个小集合。因此，在完备小格的语境下，证明交完备便足以确立并完备性。请注意，要使其成为小集合，我们还必须满足局部小性。如引理 3.1.3 所述，在完备小格的语境下，局部小性由承载集的小性自动推出。在直谓基础设定中，似乎无法通过交来构造并，因为上述构造似乎从根本上依赖于对整个载体集取交。即使设法使这个集合变小，我们仍会遇到一个问题：一般而言，该序不具有小真值（见注记 5.1.3）。

利用并的这种可定义性，Johnstone 构造交以建立并完备性。他定义 [Joh82, §II.2.5]逐点定义交：

$$\left(\bigwedge_{i:I} k_i\right) \quad :\equiv \quad x \mapsto \bigwedge_{i:I} k_i(x).$$

此外，为了证明这个并完备格是一个框架，Johnstone 继续构造海廷蕴涵。海廷蕴涵的存在性意味着框架分配律成立，即

$$x \wedge \left(\bigvee_{i:I} y_i\right) \quad = \quad \bigvee_{i:I} x \wedge y_i,$$

对每一个 $x:\ L$ 以及每一个小族 $(y_i)_{i:\ I}$。这是因为 $x \wedge (\text{-})$ 是 $x \leftarrow (\text{-})$ 的左伴随，并且左伴随总是保持余极限。因此，$x \wedge (\text{-})$ 的右伴随的存在性蕴涵它保持 L 的余极限。在论证的此处第二次使用了非直谓性，因为 Johnstone 对 Heyting 蕴涵的构造 [Joh82，第 52] 页也使用了对一个大集合的交。他把 Heyting 蕴涵定义为

$$(j \Rightarrow k)(x) \quad :\equiv \quad \bigwedge \{(j(y) \Rightarrow k(y)) \mid y : L, x \leq y\},$$

利用底层框架 L的 Heyting 蕴涵。在直谓语境中，一般没有理由认为这个集合是小的。

文献中还有若干其他构造核的并的方法。然而，这些构造似乎都使用了某种形式的非直谓性（或经典原理）：

- Banaschewski [Ban88] 与 Wilson [Wil94] 都使用了涉及大交的构造，类似于上文讨论的 Johnstone 的构造。
- Simmons [Sim81] 使用序数与超限归纳，其证明似乎依赖于经典推理（尽管我们尚未仔细分析）。
- Escardó [Esc03] 使用了 Pataraia 不动点定理，该定理似乎同样无法以直谓方式得到。de Jong 与 Escardó 表明 [dJE21，定理 52]：Pataraia 不动点定理的证明中所使用的主要引理蕴含某种形式的命题缩放。

鉴于上述所有构造都涉及某种形式的非直谓性，我们猜想，除非某种形式的命题缩放成立，否则在我们的设定中无法证明核的交半格是小完备的。

在下一节中，我们将开始着手以直谓方式构造补丁 locale，其定义框架即为前面提到的 Scott 连续核算子框架。

5.3 Scott 连续核算子框架

我们现在将注意力限于 Scott 连续的核，并证明，尽管 所有核构成的格中的并似乎不可避免地涉及非直谓性，但这个子格中的并完全可以用直谓方式构造。此外，这个由 Scott 连续核构成的子格也不存在局部小性问题；我们曾在备注 5.1.3中讨论过这一问题。

如前所述，我们构造 Scott 连续核算子框架的动机，是为了定义谱 locale 的补丁 locale；其泛性质已在本章引言中给出（定义 5.0.1）。能够以这种方式构造补丁 locale，要归功于 Escardó [Esc99；Esc01]。

5.3.1 Scott 连续核的交半格

现在，我们将第 5.1 节中的交半格细化为 Scott 连续核。

定义 5.3.1。核 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 称为 *Scott 连续* 的，若它保持小有向族的并。

例 5.3.2。对于任意开集 $U\colon \mathcal{O}(X)$locale X，闭核 $\mathbf{c}(U)$（来自例 3.2.2）是 Scott 连续的，因为映射 $U \vee (\text{-})$ 保持所有并，特别是有向并。

例 5.3.3 ()。 对于谱 locale X中的任意紧开集 K： $\mathsf{K}(X)$，开核 $\mathbf{o}(K)$ 是 Scott 连续的。

证明。设 K: K(X) 是某个谱 locale X 的一个紧开集。我们需要证明映射 $K \Rightarrow$ (-) 是 Scott 连续的。由于我们知道这是一个核，因此它是单调的，因为核总是单调的（引理 3.2.7）。我们通过证明该映射满足引理 4.8.7 中的充分条件，来说明它是 Scott 连续的。设 V和 K_1 是 X的两个开集，并假设 K_1 满足$K_1 \leq K \Rightarrow V$。我们需要证明存在某个紧的 $K_2 \leq K$，使得$K_1 \leq K \Rightarrow K_2$。取 $K_2 :\equiv K \wedge K_1$。我们知道它是紧的，因为在谱 locale 中，紧开集对二元交封闭。接下来只需验证 $K_2 \leq V$和$K_1 \leq K \Rightarrow K_2$。前者由假设 $K_1 \leq K \Rightarrow V$直接得出，因为这蕴含 $K_1 \wedge K \leq V$。后者显然成立。 □

Scott 连续核的偏序集

现在我们证明，与所有核的情形相反，谱 locale 上 Scott 连续核的偏序集的序是小的。

引理 5.3.4。 对于某个 *locale* X 上的每一对核 j、k： $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，如果

1. locale X 是谱 *locale*，并且 *2.* 核 j 和 k 是 *Scott* 连续的，

那么逐点序 $\Pi_{(U:\ \mathcal{O}(X))}\ j(U) \leq k(U)$ 是 $\mathcal{U}$-小的。

证明。 设 X 是一个谱 locale，并设 j、k: $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 是 X 上的一对 Scott 连续核。我们定义如下的逐点序小版本：

$$j \leq_s k \quad :\equiv \quad \Pi_{(K:\mathsf{K}(X))}\, j(K) \leq k(K),$$

由于紧开集的类型具有小性，这里只涉及小量化。我们声称， $j \leq k$ 当且仅当 $j \leq_s k$。正向显然成立，因此只需证明 $j \leq_s k$ 蕴含 $j \leq k$。假设 $j \leq_s k$。为证明 $j \leq k$，取 U： $\mathcal{O}(X)$。由于我们有一个由紧开集构成的基，因此知道存在一个针对 U的有向基本覆盖族（B_n）$_{n:N}$。因此，我们只需证明

$$j\left(\bigvee_{n:N} B_n\right) \quad \leq \quad k\left(\bigvee_{n:N} B_n\right).$$

根据核 j 和 k的Scott连续性，只需证明

$$\bigvee_{n:N} j(B_n) \quad \leq \quad \bigvee_{n:N} k(B_n).$$

由我们的假设 $j \leq_s k$ 可直接推出，对于每个 n： N，都有 $j(B_n) \leq k(B_n)$，因此证明完毕。 □

总之，我们现在已经证明：

推论 5.3.5. 对于每个谱 *locale* X，X上的 *Scott* 连续核偏序集都是大且局部小的。

Scott 连续核的交

引理 5.3.6. 任意 *locale* 上的 *Scott* 连续核偏序集构成一个交半格。

证明。 设 X 是一个 locale。构造与引理 5.1.4中的相同。最大元是取值为 $\mathbf{1}_X$的常值映射，它显然是 Scott 连续的，因此只需证明两个 Scott 连续核的交仍然是 Scott 连续的。设 j和 k 是一对 Scott 连续核，并考虑一个小有向族 $(U_n)_{n:N}$。于是有：

$$\begin{aligned}
(j \wedge k)\left(\bigvee_{i:I} U_i\right) &\equiv j\left(\bigvee_{n:N} U_n\right) \wedge k\left(\bigvee_{n:N} U_n\right) \\
&= \left(\bigvee_{n:N} j(U_n)\right) \wedge \left(\bigvee_{n:N} k(U_n)\right) && \text{[Scott continuity of } j \text{ and } k\text{]} \\
&= \bigvee_{(m,n):N\times N} j(U_m) \wedge k(U_n) && \text{[distributivity]} \\
&= \bigvee_{n:N} j(U_n) \wedge k(U_n) && [\dagger] \\
&\equiv \bigvee_{n:N} (j \wedge k)(U_n) && \text{[meet preservation]}
\end{aligned}$$

对于上面的步骤（†），我们使用反对称性。（≥）方向是显然的。对于（≤）方向，我们需要证明

$$\bigvee_{(m,n):N\times N} j(U_m) \wedge k(U_n) \quad \leq \quad \bigvee_{n:N} j(U_n) \wedge k(U_n),$$

只需证明 $\bigvee_{n:\ N} j(U_n)\ \wedge k(U_n)$ 是该族的上界

$$\{j(U_m) \wedge k(U_n)\}_{(m,n):N\times N}.$$

令 $m, n\colon N$为一对指标。由于 $(U_n)_{n:N}$是一个有向族，必然存在某个 $o\colon N$，使得 U_o 是 U_m和 U_n的上界。利用核 j和 k的单调性，我们得到 $j(U_m)\ \wedge k(U_n)\ \leq j(U_o)\ \wedge k(U_o) \leq \bigvee_{n:N} j(U_n)\ \wedge k(U_n)$，这正是我们所需要的。 □

5.3.2 并

不同于所有 核所构成的框架，Scott 连续核的交半格在直谓设定下确实存在小并。现在我们来考察这些并的构造，这是补丁框架构造中非平凡的部分。

设 $(k_i)_{i:I}$ 是 Scott 连续核的一个小族。逐点并

$$U \mapsto \bigvee_{i:I} k_i(U)$$

不是幂等的，这一点我们在第 5.2 节讨论过，在 Scott 连续核的情形下也同样存在。不过，当所考虑的族是有向的时，逐点并是幂等的，因此它给出了 Scott 连续核偏序集中的并：

引理 5.3.7 ()。*对于每个由 Scott 连续核构成的有向族 $(k_i)_{i:I}$，其并按逐点方式计算，也就是说，*

$$\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U) \quad = \quad \bigvee_{i:I} k_i(U),$$

对每个开集 U。

证明。 前一段中给出的论证 [Esc98，引理 3.1。8] 在我们的情形中同样适用。 □

关于任意并的情形则更为复杂。

核族的有向化

Escardó 提出的一种并的构造 [Esc98], 基于这样一个想法：如果我们从一个核族 $(k_i)_{i:I}$ 出发，就可以考虑指标类型为 List(I) 的族，将其有向化，定义如下：

$$(i_0 i_1 \cdots i_{n-1}) \mapsto k_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ k_{i_1} \circ k_{i_0}.$$

容易看出，这个族是有向的。我们称之为有限复合族，并定义下列函数 $(\text{-})^*$ 来实现它：

定义 5.3.8 (有限复合族)。 给定某个 locale X 上的一个小核族 $(k_i)_{i:I}$，其有限复合族是族 k^*，定义如下：

$$k^*(i_0 \cdots i_{n-1}) \quad :\equiv \quad k_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ k_{i_0}.$$

有限复合 k_s^* 一般不是核。然而，它始终是预核：

引理 5.3.9 (). 对于 *locale* 上核的每一族 $(k_i)_{i:I}$，有限复合 k_s^*都是预核，对每个 s：列表(I)。

*Pro*关于。 设 $(k_i)_{i:I}$是某个 locale X上的一族核。我们通过列表归纳法进行证明。基础情形： 空列表 ε。由于 $k_\varepsilon \equiv \mathrm{id}$，我们已经完成证明；并且不难看出，恒等函数 id 是一个预核。

归纳步骤： 考虑一个列表 is，其中某个 i满足： I， s：List(I)，并归纳假设有限复合 k_s 是一个预核。我们需要证明 $k_s \circ k_i$ 是一个预核。对于交保持性，令 U， V： $\mathcal{O}(X)$。

$$\begin{aligned}
(k_s \circ k_i)(U \wedge V) &\equiv k_s(k_i(U \wedge V)) \\
&= k_s(k_i(U) \wedge k_i(V)) && [k_i \text{ preserves meets}] \\
&= k_s(k_i(U)) \wedge k_s(k_i(V)) && [\text{inductive hypothesis}] \\
&\equiv (k_s \circ k_i)(U) \wedge (k_s \circ k_i)(V)
\end{aligned}$$

对于膨胀性，考虑某个 U： $\mathcal{O}(X)$。我们知道 k_i和 k_s都是预核，因此它们具有膨胀性。由此可得 $U \le k_i(U) \le k_s(k_i(U))$。

□

引理 5.3.10。 对于每个核 j以及每个小族 $(k_i)_{i:I}$，若 j是该族 $(k_i)_{i:I}$的上界，那么它也是其有限复合所成族 $(k_s^*)_{s:\mathrm{List}(I)}$ 的上界。

证明。 令 j和 $(k_i)_{i:I}$分别为某个 locale 上的一个核和一族核，并假设 j是 $(k_i)_{i:I}$的一个上界。我们通过列表归纳证明， j是 $(k_i)_{i:I}$的有限复合族的上界。

基础情形： 空列表 ε。我们有 $k_\varepsilon^*(U) \equiv \mathrm{id}(U) \equiv U \le j(U)$。

归纳步骤： 考虑一个列表 is，其中 i: I, s:列表(I)。归纳地假设 $k_s \le j$。我们需要证明 $k_{is}^* \le j$。我们知道 k_s^*是单调的，因为根据引理 5.3.9 它是一个预核，而根据引理 3.2.7预核是单调的。因此，由于我们有：

$$\begin{aligned}
k_s^*(k_i(U)) &\le k_s^*(j(U)) && [k_s^*\text{的单调性}] \\
&\le j(j(U)) && [\text{归纳假设}] \\
&= j(U) && [j\text{的幂等性}]
\end{aligned}$$

□

引理 5.3.11 (). 对于 *locale* 上任意一族 $(k_i)_{i:I}$*Scott* 连续核，预核 k_s^* 对每个 s：列表(I) 都是 *Scott* 连续的。

证明。 Scott 连续函数的有限复合是 Scott 连续的。 □

引理 5.3.12。 对于 *locale* 上任意一族 $(k_i)_{i:I}$核，其有限复合族是有向的。

证明。 有限复合族 $(k_s^*)_{s:\mathsf{List}(I)}$ 总是可居留的，因为恒等核由 k_ε^* 给出。对于任意一对有限复合 k_s^*和 k_t^*，上界由核 k_{st}^* 给出，它等于 $k_t^* \circ k_s^*$。它是 k_s^*和 k_t^* 的上界这一事实，源于 k_t^*的单调性和 k_s^*的膨胀性。 □

引理 5.3.13 ()**.** 设 j和 $(k_i)_{i:I}$分别是 *locale* X上的一个核和一个核族。考虑核族 $(j \wedge k_i)_{i:I}$上的有限复合族。对于每个 s:列表(I)，每个有限复合 $(j \wedge k)_s^*$都是 k_s和 j的下界。

并的构造

在汇集了有限复合族的一些关键性质之后，我们现在可以构造 Scott 连续核偏序集上的并运算。此处的构造归功于 [Esc98]。

定理 5.3.14 (Scott连续核的并)**.** 对于谱 *locale* X 上的任意小族$(k_i)_{i:I}$*Scott* 连续核，其并可计算为

$$\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U) \quad :\equiv \quad \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U).$$

证明。 设 $(k_i)_{i:I}$是 locale X 上的一个小核族。需要验证：(1) 这确实是并；(2) 它是一个 Scott 连续核，也就是说，它具有膨胀性、保持二元交、幂等且 Scott 连续。

我们先验证 (2)。膨胀性是显然的。为了验证保持交，考虑某个 U, V: $\mathcal{O}(X)$。我们有：

$$\begin{aligned}
\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U \wedge V) &\equiv \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U \wedge V) \\
&= \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) \wedge k_s^*(V) && \text{[Lemma 5.3.11]} \\
&= \bigvee_{s,\, t:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) \wedge k_t^*(V) && [\dagger] \\
&= \left(\bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U)\right) \wedge \left(\bigvee_{t:\mathsf{List}(I)} k_t^*(V)\right) && \text{[distributivity]} \\
&\equiv \left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U) \wedge \left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(V)
\end{aligned}$$

T上述步骤 (†) 使用了反对称性。(≤) 方向是直接的，而对于

(≥) 方向，我们证明 $\bigvee_{s:\ \text{列表}(I)} k_s^*(U) \wedge k_s^*(V)$ 是族 $(k_s^*(U) \wedge k_t^*(V))_{s,\ t:\ \text{列表}(I)}$ 的一个上界。考虑任意的 $s,\ t:$ 列表(I)。由有限复合族的有向性可知，存在某个 $u:$ 列表(I)，使得预核 k_u^* 是预核 k_s^* 与 k_t^* 的一个上界。于是我们有：

$$k_s^*(U) \wedge k_t^*(V) \quad \leq \quad k_u^*(U) \wedge k_u^*(V) \quad \leq \quad \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) \wedge k_s^*(V).$$

对于幂等性，令 $U: \mathcal{O}(X)$.

$$\begin{aligned}
\left(\bigvee_i k_i\right)\left(\left(\bigvee_j k_j\right)(U)\right) &\equiv \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s\left(\bigvee_{t:\mathsf{List}(I)} k_t(U)\right) \\
&= \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} \bigvee_{t:\mathsf{List}(I)} k_s^*(k_t^*(U)) && \text{[Lemma 5.3.11]} \\
&\leq \bigvee_{s,t:\mathsf{List}(I)} k_s^*(k_t^*(U)) \\
&\leq \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) && [\ddagger] \\
&\equiv \left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U)
\end{aligned}$$

对于上面的步骤（‡），只需证明 $\bigvee_{s:\ \text{列表}(I)} k_s^*(U)$ 是族 $(k_s^*(k_t^*(U)))_{s,\ t:\ \text{列表}(I)}$ 的上界。预核 k_{ts}^* 是 k_s^* 和 k_t^* 的上界（如引理 5.3.12 所示）。我们有 $k_s(k_t(U)) \equiv k_{ts}(U) \leq \bigvee_{s:\ \text{列表}\ (I)} k_s(U)$.

对于 Scott 连续性，令 $(U_n)_{n:N}$ 是 X 的开集有向族。我们有：

$$\begin{aligned}
\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)\left(\bigvee_{n:N} U_n\right) &\equiv \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*\left(\bigvee_{n:N} U_n\right) \\
&= \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} \bigvee_{n:N} k_s^*(U_n) && \text{[Lemma 5.3.11]} \\
&= \bigvee_{n:N} \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U_n) && \text{[joins commute]} \\
&\equiv \bigvee_{n:N} \left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(U_n).
\end{aligned}$$

现在我们来验证，上述并的定义给出了族 $(k_i)_{i:I}$ 的最小上界。容易验证，$\bigvee_i k_i$ 是族 $(k_i)_{i:I}$ 的一个上界。为证明它是最小上界，考虑一个 Scott 连续核 j，并假设它是 $(k_i)_{i:I}$ 的一个上界。令 $U: \mathcal{O}(X)$。我们需要证明 $(\bigvee_i k_i)(U) \leq j(U)$。由于 j 是族 $(k_i)_{i:I}$ 的一个上界，根据引理 5.3.10，它也是有限复合族 $(k_s^*)_{s:\mathsf{List}(I)}$ 的一个上界。也就是说，对于每个 $s: \mathsf{List}(I)$，都有 $k_s^*(U) \leq j(U)$。因此，$(\bigvee_{i:I} k_i)(U) \equiv \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) \leq j(U)$。

□

由此我们已经证明，谱 locale 上核的交半格是小完备的。要得出它是一个框架，只需再证明分配律成立。

分配律

我们借助引理 5.3.13来证明分配律。

引理 5.3.15 (分配律)。 对每个核 j 以及每个小族 $(k_n)_{n:N}$的 *Scott* 连续核，我们有等同性：

$$j \wedge \left(\bigvee_{n:N} k_n \right) \quad = \quad \bigvee_{n:N} j \wedge k_n.$$

证明。 设 j 与 $(k_n)_{n:N}$ 分别为一个核和一个 Scott 连续核的小族。为了看出 $j \wedge \bigvee_{n:\ N} k_n$ 与并 $\bigvee_{n:\ N} j \wedge k_n$外延相等，设 $U:\ \mathcal{O}(X)$。

$$\begin{aligned}
\left(j \wedge \left(\bigvee_{i:I} k_i \right) \right)(U) &\equiv j(U) \wedge \left(\bigvee_{i:I} k_i \right)(U) \\
&\equiv j(U) \wedge \left(\bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} k_s^*(U) \right) \\
&= \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} j(U) \wedge k_s^*(U) && \text{[分配律]} \\
&\equiv \bigvee_{s:\mathsf{List}(I)} (j \wedge k_s^*)(U) \\
&\equiv \left(\bigvee_{i:I} j \wedge k_i \right)(U) && [\dagger]
\end{aligned}$$

对于标记为 (†) 的步骤，我们需要证明族 $s \mapsto j(U) \wedge k_s^*(U)$ 的并等于该族的有限复合族的并

$$s \mapsto (j \wedge k_{(\text{-})})_s^*(U).$$

这一结论的一个方向可由引理 5.3.13 推出，另一方向则可通过直接归纳法证明。 □

由此我们得证：

引理 5.3.16 ( )。 对于每个谱 *locale* X，其上的 *Scott* 连续核偏序集 X 构成一个框架。

证明。 有限交的构造见引理 5.3.6，局部小性见推论 5.3.5。并的构造见定理 5.3.14。有限交对小并的分配性已在上面的引理 5.3.15 中得到证明。 □

注记 5.3.17。 这一框架的构造事实上可以从谱局部推广到所有locale，只不过所得的 Scott 连续核算子框架并不总是局部小的。为确保局部小性，一个指定的小基似乎是必要的。既然我们无论如何都将注意力限制在谱局部的情形上，为求简洁，我们不在最高的一般性层面上陈述这些结果。谱性假设变得绝对必要的点，是在证明 Scott 连续核算子框架满足补丁框架的泛性质之时，我们将在下一节处理这一点。

5.4 补丁 locale

在上一节中，我们给出了谱 locale X 上 Scott 连续核算子框架的构造。现在我们进而证明，由该框架定义的 locale 满足 X 上补丁 locale 的泛性质。

定义 5.4.1 （谱局部的补丁局部）。 设 X 为一个谱 locale。我们用 $\mathrm{Patch}(X)$ 表示由 X 上的 Scott 连续核算子框架所定义的 locale。

尽管我们要到第5.4.3节才能证明泛性质，但我们现在就采用$\mathrm{Patch}(X)$ 这一记号，表示由 Scott 连续核构成的框架所定义的 locale。此外，在此提醒读者，补丁 locale 是大、局部小且小完备的，这与本论文中研究的所有 locale 一样。也就是说，对范畴 X 中的每个谱 locale $\mathbf{Loc}_{\mathcal{U}}$，locale $\mathrm{Patch}(X)$ 也是$\mathbf{Loc}_{\mathcal{U}}$中的一个对象。

5.4.1 补丁 locale 的基构造

现在我们利用闭核和开核的概念，为补丁 locale 构造一个小基。先简要回顾这两个概念。设 U 是一个 locale 的开集。

1. 由 U 诱导的闭核是映射 $V \mapsto U \vee V$(例 3.2.2)；2. 由 U 诱导的开核是映射 $V \mapsto U \Rightarrow V$(定义 3.7.7)。

引理 5.4.2。 *locale* 上的最大核 X，我们在引理 *5.1.4* 中将其定义为映射 $U \mapsto \mathbf{1}_X$，它等于以下各项中的每一项：

- 闭核 $\mathbf{c}(\mathbf{1}_X)$，
- 开核$\mathbf{o}(\mathbf{0}_X)$。

证明。 由恒等式 $\mathbf{1}_X \vee U = \mathbf{1}_X$ 和 $(\mathbf{0}_X \Rightarrow U) = \mathbf{1}_X$ 可直接得出；这些恒等式对每个开集 U 都成立： $\mathcal{O}(X)$。 □

利用闭核和开核，我们通过考虑以下族，为 Patch(X) 构造一个基

$$\mathsf{K}(X) \times \mathsf{K}(X) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(X)),$$

定义如下

$$\gamma(K_1, K_2) :\equiv \mathbf{c}(K_1) \wedge \mathbf{o}(K_2).$$

容易看出，这个族是小的。现在我们做一些准备，以证明它构成一个基。

引理 5.4.3 ( ). 对于 *locale* j 上的每个 Scott 连续核 $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$，我们有$X$

$$j \quad = \bigvee_{K:\mathsf{K}(X)} \mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K) \quad = \bigvee_{\substack{K_1,K_2:\mathsf{K}(X) \\ K_1 \le j(K_2)}} \mathbf{c}(K_1) \wedge \mathbf{o}(K_2).$$

证明。 命题中的第二个等式显然成立，因此我们来证明第一个等式。我们利用 Joh82 中证明的事实：对于任意 locale 上的每个核， [Joh82，引理 II.2。7], j

$$j = \bigvee_{U:\mathcal{O}(X)} \mathbf{c}(j(U)) \wedge \mathbf{o}(U).$$

再假设 X 是谱的，且核 j 是 Scott 连续的。不等式 $\bigvee_{K:\mathsf{K}(X)} \mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K) \le \bigvee_{U:\mathcal{O}(X)} \mathbf{c}(j(U)) \wedge \mathbf{o}(U) = j$显然成立，因此我们来证明反向的不等式。令 $K : \mathsf{K}(X)$，并注意到

$$(\mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K))\,(K) = (j(K) \vee K) \wedge (K \Rightarrow K) = j(K).$$

因此

$$j(K) = (\mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K))\,(K) \le \left(\bigvee_{K':\mathsf{K}(X)} \mathbf{c}(j(K')) \wedge \mathbf{o}(K') \right)(K),$$

所需关系由引理5.3.4得出。 □

引理 5.4.4 ( )。对于每个谱 *locale* X，上述族

$$\mathsf{K}(X) \times \mathsf{K}(X) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(X)),$$

构成一个小的强基。

Proof. 设 j 是 locale X 上的一个 Scott 连续核。对于基本覆盖

j 的覆盖族，我们选取族

$$\left(\Sigma_{(K_1,K_2:\mathrm{K}(X))}(K_1 \le j(K_2))\right) \xrightarrow{\gamma\circ\mathrm{pr}_1} \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(X)),$$

很容易看出它是小的。事实 $j = \bigvee\{\mathbf{c}(K_1) \wedge \mathbf{o}(K_2) \mid K_1 \le j(K_2)\}$已在引理5.4.3中得到证明。这些基本覆盖族似乎并非有向的，因此我们按照第3.5.3节的说明，使用它们的有向化。 □

5.4.2 Patch 是 Stone

我们通过证明（1）补丁 locale 是紧的，以及（2）引理5.4.4中构造的基是零维的，来证明补丁 locale 是 Stone locale。

引理 5.4.5 ( )。对于谱 *locale* X中的每个开集 U，开核 $\mathbf{o}(U)$ 都是闭核 $\mathbf{c}(U)$的布尔补。

证明。 文献 [Esc99，第 6] 页中的论证适用于我们的情形，只要确保总存在海廷蕴涵，如定义3.7.5中所述。为确保内容自足，此处给出完整证明。

设 X是一个 locale，并考虑一个开集 $U\colon\ \mathcal{O}(X)$。我们断言，$\mathbf{o}(U)$ 既是 $\mathbf{c}(U)$ 的交补，也是其并补。要证明它是交补，需要证明对于每个 $V\colon\ \mathcal{O}(X)$，都有 $(\mathbf{c}(U)\wedge\mathbf{o}(U))\,(V) = \mathbf{0}(V) \equiv V$。注意到

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}(U) \wedge \mathbf{o}(U))(V) &\equiv \mathbf{c}(U)(V) \wedge \mathbf{o}(U)(V)\\ &= (U \vee V) \wedge (U \Rightarrow V)\\ &= (U \wedge (U \Rightarrow V)) \vee (V \wedge (U \Rightarrow V))\\ &\le V \vee V\\ &= V.\end{aligned}$$

要证明它是并补，需要证明

$$(\mathbf{o}(U) \vee \mathbf{c}(U))(V) = \mathbf{1}(V) \equiv \mathbf{1}_X,$$

对于每个 $V\colon\ \mathcal{O}(X)$。令 $V\colon\ \mathcal{O}(X)$。根据定理 5.3.14 中并的构造可知，逐点二元并满足

$$\mathbf{o}(U)(V) \vee \mathbf{c}(U)(V) \le (\mathbf{o}(U) \vee \mathbf{c}(U))(V).$$

因此，只需证明 $\mathbf{1}_X \le \mathbf{o}(U)\,(V) \vee \mathbf{c}(U)\,(V)$，如下所示。

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_X &\le U \Rightarrow (U \vee V)\\ &= \mathbf{o}(U)(U) \wedge \mathbf{o}(U)(V)\\ &= \mathbf{1}_X \wedge \mathbf{o}(U)(V)\\ &\le \mathbf{o}(U)(V)\\ &\le \mathbf{o}(U)(V) \vee \mathbf{c}(U)(V).\end{aligned}$$

□

推论 5.4.6。 对于谱 *locale* X 的每个紧开集 $K\colon \mathcal{O}(X)$，闭核 $\mathbf{c}(K)$ 和开核 $\mathbf{o}(K)$ 互为补集，因此都是闭开集 。

在引理 5.4.8中，我们证明，逆像将开集映为 U 闭核 $\mathbf{c}(U)$ 的映射是完美的。在引理 5.4.8之前，我们先记录一个辅助结果：

引理 5.4.7。 设 X 是一个谱 *locale*。闭核生成运算 $\mathbf{c}(\text{-})$ 的右伴随 $\varepsilon_*\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(X)) \to \mathcal{O}(X)$ 由 $\varepsilon_*(j) = j(\mathbf{0})$ 给出，对每个 X 上的 *Scott* 连续核 j 均成立。

引理 5.4.8 ( )。闭核生成运算是一个完美的框架同态

$$\mathbf{c}(\text{-}) : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(X)).$$

证明。 容易看出这是一个框架同态，因此我们证明它是完美的。我们需要证明闭核生成运算 ε_* 的右伴随 $\mathbf{c}(\text{-})$ 是 Scott 连续的。设 $(k_i)_{i:I}$ 为一族 Scott 连续核，且该族有向。根据引理 5.4.7，只需证明

$$\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(\mathbf{0}) = \bigvee_{i:I} \varepsilon_*(k_i).$$

由引理 5.3.7，我们有 $\left(\bigvee_{i:I} k_i\right)(\mathbf{0}) = \bigvee_{i:I} k_i(\mathbf{0})$。 □

引理 5.4.9 ( )。对每个谱 *locale* $\mathrm{Patch}(X)$，*locale* X 都是紧的。

证明。 回忆一下，$\mathrm{Patch}(X)$ 的最大开集 $\mathbf{1}$ 是定义为如下的最大核：

$$\mathbf{1} :\equiv U \mapsto \mathbf{1}_X.$$

由于 ε^* 是框架同态，我们知道 $\mathbf{1} = \varepsilon^*(\mathbf{1}_X)$，这意味着只需证明 $\varepsilon^*(\mathbf{1}_X) \ll \varepsilon^*(\mathbf{1}_X)$。由引理 4.2.15，只需证明 $\mathbf{1}_X \ll \mathbf{1}_X$，这由以下假设可立即得出： X 是谱的。 □

引理 5.4.10 ( )。对每个谱 *locale* X，*locale* $\mathrm{Patch}(X)$ 都是 *Stone*。

证明。设 X 是一个谱 locale。我们在引理 5.4.9 中证明了 $\mathrm{Patch}(X)$ 是紧的。只需证明它是零维的；为此，我们证明引理 5.4.4 中构造的基由闭开集组成。对于 X 的任意一对 K_1、K_2 紧开集，根据推论 5.4.6，闭核 $\mathrm{c}(K_1)$ 和开核 $\mathrm{o}(K_2)$ 都是闭开集。由引理 3.4.4 可知，交 $\mathrm{c}(K_1) \wedge \mathrm{o}(K_2)$ 是闭开集，因此结论成立。 □

5.4.3 补丁 locale 的泛性质

我们终于可以证明 locale $\mathrm{Patch}(X)$ 满足定义5.0.1中补丁 locale 的泛性质。

引理 5.4.11. 对于每个从 *Stone locale* X 到谱的 *locale* A的谱映射 $f\colon X \to A$，定义映射 $f^*\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A)) \to \mathcal{O}(X)$ 如下：

$$\bar{f}^*(j) \quad :\equiv \quad \bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} f^*(j(K)) \wedge \neg f^*(K).$$

接着，由下式定义的映射 $f_*\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A))$

$$\bar{f}_*(V) \quad :\equiv \quad f_* \circ \mathbf{c}(V) \circ f^*$$

是 f^* 的右伴随。

证明。首先注意，$f_* \circ \mathbf{c}(V) \circ f^*$ 确实是一个 Scott 连续核，并且 f^* 和 f_* 显然都是单调的。我们先证明正向蕴涵。假设对于 $j\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A))$ 和 $V\colon \mathcal{O}(X)$，关系 $f^*(j) \leq V$成立。根据引理 5.3.4，为了证明 $j \leq f_*(V)$，只需证明对每个紧开集 $K\colon \mathrm{K}(A)$，不等式 $j(K) \leq f_*(V)\,(K)$ 成立。因此，取 $K\colon \mathrm{K}(A)$，并注意到

$$f^*(j(K)) \wedge \neg f^*(K) \leq \bar{f}^*(j) \leq V$$

注意到 $f^*(K)$是既开又闭的，因为 f^*是谱映射，且由引理 4.5.8可知。因此，它在格 $\mathcal{O}(X)$中有补，于是有

$$f^*(j(K)) \leq V \vee f^*(K) = \mathbf{c}(V)(f^*(K)),$$

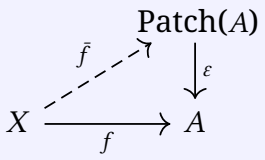
由伴随关系可得

$$j(K) \leq f_*(\mathbf{c}(V)(f^*(K))) = \bar{f}_*(K),$$

如所要求。

现在我们来证明反向蕴涵。设 $j\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A))$ 且 $V\colon \mathcal{O}(X)$，并且假设 $j \leq f_*(V)$。再次根据 $\mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A))$ 上序的定义，对所有 $K\colon \mathrm{K}(A)$，都有 $j(K) \leq f_*(V \vee f^*(K))$，由伴随关系等价地可得 $f^*(j(K)) \leq V \vee f^*(K)$。由于 $f^*(K)$ 是既开又闭的，因而在格 $\mathcal{O}(X)$ 中有补，所以 $f^*(j(K)) \wedge \neg f^*(K) \leq V$。因此，$f^*(j) \leq V$。 □

定理 5.4.12 ( )。 对于每个谱映射 $f\colon X \to A$ 从 *Stone locale* 到一个谱 *locale*，存在唯一的连续映射 $f\colon X \to \mathrm{Patch}(A)$ 满足 $\varepsilon \circ f = f$，如下图所示，图表位于 **Spec**：



证明。 设 locale 映射 $f\colon X \to \mathrm{Patch}(A)$ 满足定理中的条件。那么，对于每个 $j\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A))$，我们有

$$\begin{aligned}
\bar{f}^*(j) &= \bar{f}^*\left(\bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} \mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K)\right) \\
&\qquad \text{[Lemma 5.4.3]} \\
&= \bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} \bar{f}^*\left(\mathbf{c}(j(K)) \wedge \mathbf{o}(K)\right) \\
&\qquad [\bar{f}^* \text{ preserves small joins}] \\
&= \bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} \bar{f}^*\left(\mathbf{c}(j(K))\right) \wedge \neg \bar{f}^*\left(\mathbf{c}(K)\right) \\
&\qquad [\bar{f}^* \text{ preserves meets and complements}] \\
&= \bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} f^*\left(j(K)\right) \wedge \neg f^*\left(K\right) \\
&\qquad \text{[commutativity of the diagram]}
\end{aligned}$$

*，因此 $\bar{f}$ 是唯一确定的。现在，如果我们定义一个单调映射 $f\colon \mathcal{O}(\mathrm{Patch}(A)) \to \mathcal{O}(X)$，使得

$$\bar{f}^*(j) \quad :\equiv \quad \bigvee_{K:\mathrm{K}(A)} f^*(j(K)) \wedge \neg f^*(K),$$

it 容易证明它保留最大元（即常值为

值 $\mathbf{1}_A$ 的最大核），因为 $\mathbf{0}_A$ 是紧的。它也保留二元（逐点）交，

$$
\begin{aligned}
& \bar{f}^*(j_1) \wedge \bar{f}^*(j_2) \\
= & \bigvee_{K_1,K_2:\mathsf{K}(A)} f^*(j_1(K_1)) \wedge \neg f^*(K_1) \wedge f^*(j_2(K_2)) \wedge \neg f^*(K_2) \\
& \text{[distributivity]} \\
= & \bigvee_{K_1,K_2:\mathsf{K}(A)} f^*(j_1(K_1) \wedge j_2(K_2)) \wedge \neg f^*(K_1) \wedge \neg f^*(K_2) \\
& [f^* \text{ preserves binary meets}] \\
\leq & \bigvee_{K_1,K_2:\mathsf{K}(A)} f^*(j_1(K_1 \vee K_2) \wedge j_2(K_1 \vee K_2)) \wedge \neg f^*(K_1) \wedge \neg f^*(K_2) \\
& \text{[monotonicity]} \\
= & \bigvee_{K_1,K_2:\mathsf{K}(A)} f^*((j_1 \wedge j_2)(K_1 \vee K_2)) \wedge \neg f^*(K_1) \wedge \neg f^*(K_2) \\
= & \bigvee_{K_1,K_2:\mathsf{K}(A)} f^*((j_1 \wedge j_2)(K_1 \vee K_2)) \wedge \neg f^*(K_1 \vee K_2) \\
& \text{[De Morgan law]} \\
= & \bar{f}^*(j_1 \wedge j_2) \\
& [\mathsf{K}(X) \text{ closed under } (\text{-}) \vee (\text{-})]
\end{aligned}
$$

此外，引理 5.4.11 和定理 3.7.3 保证 f^* 保小并，因此它是一个框架同态。

最后，我们来证明 f 使图表交换。由于紧开集构成 A 的一个小基，只需证明对于每个 $K\colon \mathbf{K}(A)$，$f^*(\mathbf{c}(K)) = f^*(K)$。令 $K : \mathbf{K}(A)$，并注意到

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^*(\mathbf{c}(K)) &= \bigvee_{K':\mathsf{K}(A)} f^*(K \vee K') \wedge \neg f^*(K') \\
&= \bigvee_{K':\mathsf{K}(A)} f^*(K) \wedge \neg f^*(K') && [f^* \text{ preserves binary joins}] \\
&= f^*(K) \wedge \bigvee_{K':\mathsf{K}(A)} \neg f^*(K') && \text{[distributivity]} \\
&= f^*(K) \wedge \mathbf{1}_X && [\mathbf{0}_X \text{ is compact}]
\end{aligned}
$$

正如所需。 □

5.5 补丁的例子

为了让事情更具体一点，我们现在来看补丁变换的一些例子。

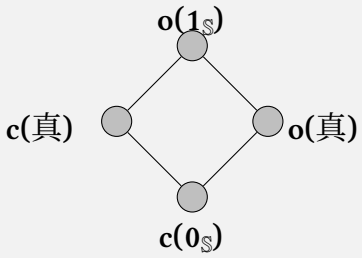
终端 locale 的 Patch

例 5.5.1. 终端 locale 的补丁 locale Patch($\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$) 与终端 locale 本身同胚，因为 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 是 Stone。

Sierpiński 的 Patch

例 5.5.2. locale Patch($\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$) 与类型 $\mathbf{2}_{\mathcal{U}}$ 上的离散 locale 同胚。

证明。 例 4.4.31 中给出了 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(2)$ 是格 $\mathbf{M}_2$上的理想框架。由对偶性（定理 4.7.10），只需证明格 K(Patch($\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$)) 与 $\mathbf{M}_2$同构。根据Patch($\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$)的基构造，以及谱 locale 中紧开集与基本开集重合这一事实（推论 4.2.5），可知 K(Patch($\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$)) 是如下分配格：



其中 true： $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ 是命题 3.1.25 中构造的 Sierpiński 非平凡开集。这显然是与 $\mathbf{M}_2$ （例 4.4.31）相同的格。 □

第6章

Scott 域的拓扑

在本章中，我们研究域 [GHK+03] 的无点拓扑，特别关注一类称为 *Scott* 域 的域。我们对此的动机有两方面：

1. Scott 域通过其*Scott* 拓扑为谱 locale 提供了丰富的例子，而这些拓扑总是谱的。2. Scott 域的 Scott 拓扑上的补丁拓扑，是补丁构造的一个特别有说明性的例子；它通过与域理论中所谓的计算直觉之间的关系，为补丁拓扑提供了*Lawson* 拓扑方面的理解 [GHK+03，定义 III-1。5]。

除此之外，鉴于 de Jong 和 Escardó 的最新研究成果，域的拓扑是否能够以直谓方式构造出来，也是一个自然的问题 [dJon21b；dJon23], 表明，域理论中的许多非平凡构造都可以在构造性、直谓的单值基础中发展出来。

The organization of this chapter is as follows：第6.1节：我们简要概述 de Jong 与 Escardó 在单值基础中对域理论的构造性与谓词性发展。第6.2节：我们定义有向完备偏序集的 Scott 拓扑，并证明当所考虑的有向完备偏序集为代数的时，它是一个大的、局部小的且小完备的框架。第6.3节：我们概述 de Jong 关于尖锐元素在 Scott 域语境中的概念，并随后借助所考虑的 Scott 域的 Scott 拓扑给出其拓扑刻画。第6.4节：我们提出并讨论谱点在 Scott 拓扑语境中的概念。第6.5节：我们证明 Scott 域 D的 Scott locale 的谱点与 D的尖锐元素之间存在双射对应。第6.6节：推广第6.5节的结果，我们证明 Scott 域 D 的尖锐元素与这些点之间存在双射对应

即 D的 Scott locale 的补丁 locale 的点。这是因为，谱 locale X 的补丁的点恰好是 X的谱点。

6.1 单值基础中的 Primerondomain 理论

由于本章所呈现的工作建立在 de Jong 和 Escardó 在单值基础中发展构造性与谓词性域理论的工作之上，[dJon21b；dJE24]我们将简要概述他们的工作。

6.1.1 有向完备偏序集的定义

在定义3.1.1中，我们给出了一个将所有宇宙一般化的框架概念定义。之后，我们解释了 de Jong 和 Escardó 的结果（定理3.1.11）：若没有某种形式的命题缩放，就无法构造完备小框架；因此，我们采用了如下约定：只在固定基宇宙之上讨论大、局部小且小完备的框架。由于 DCPO 也完全面临同样的情况，我们完全省略其宇宙一般化的定义，而直接给出性质良好的情形，即大、局部小且有向小完备的有向完备偏序集的定义。

定义 6.1.1 (参见 [dJon23，定义 3.2。7])。 一个有向完备偏序集（基于基宇宙 $\mathcal{U}$）由以下部分组成：

- 一个类型 $|D|\colon \mathcal{U}^+$,
- 一个偏序 $(-) \sqsubseteq (-) : |D| \to |D| \to \Omega_{\mathcal{U}}$,
- 一个运算 $\bigsqcup(-) : \mathrm{Fam}^{\uparrow}_{\mathcal{U}}(D) \to D$，它为每个由 D 中元素构成的有向小族 $(x_i)_{i:I}$ 给出最小上界 $\bigsqcup_{i:I} x_i$ 。

与框架的情形一样，载体类型的集合性由偏序自动保证，这归功于引理3.1.2，因此无需明确规定。

我们约定使用不同的序符号 ($\sqsubseteq$)，以区分有向完备偏序集的底层偏序集与框架的底层偏序集。我们有时用术语*信息序* 来指有向完备偏序集的序。此外，我们采用通常的记号滥用，将承载集 $|D|$ 记作 D。

6.1.2 带底元有向完备偏序集

定义 6.1.2(带点有向完备偏序集 [dJon23，定义 3.2。11])。 有向完备偏序集称为*带底元的*，如果它有底元。

我们用 $\bot_D$ 表示带点有向完备偏序集 D 的底元，通常省略下标，简写为 $\bot$。

带点有向完备偏序集的典型例子是*平坦域* 自然数的，其经典的图示由哈斯图给出，见图 6.1。存在一个底元 $\bot$，并且除了 $\bot$ 之外的所有其他元素都不可比较。有助于

把这个有向完备偏序集的元素看作可能未定义的计算。底元表示一个未能产生值的计算，例如由于不终止。$\perp$ 之上的元素被称为已定义的，并被看作一个成功终止且在 $\mathbb{N}$中得到一个值的计算。

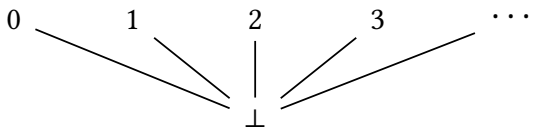


图 6.1：自然数平坦域的**经典的**图示。

更一般地，将底元添加到集合后得到的平坦有向完备偏序集 X 称为集合的提升 $X_\perp$。集合 X作为 $X + 1$的提升构造（如图6.1所示），除非有限全知原理成立，否则无法证明其是有向完备的 [dJon23，命题 3.4。1]。Escardó 和 Knapp [EK17] 给出了提升有向完备偏序集的一种构造，该构造适用于构造性（及直谓性）发展：

例 6.1.3 (参见 [dJon23，命题 3.4。14])。集合 X 的提升：$\mathcal{U}$ 是类型

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X) \quad :\equiv \quad \Sigma_{(P:\Omega_{\mathcal{U}})}(P \to X),$$

配备偏序 $(P,\ \varphi) \sqsubseteq (Q,\ \psi) :\equiv \Sigma_{(f:\ P \Rightarrow Q)}\ (\varphi \sim \psi \circ\ f)$。这构成一个带点有向完备偏序集。底元是假命题 $\perp_{\mathcal{U}}$，其对应的唯一函数为 $\perp \to X$。

对于每个元素 $x\colon X$，其在 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$ 中的提升由元组 $(\top,\ \star \mapsto x)$ 给出。这定义了一个映射，记作 $\eta_X\colon X \to \mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$。

于是，自然数的平坦域可以简单地定义为：

例 6.1.4 （$\mathbb{N}$的平坦域）。自然数的平坦域是有向完备偏序集 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}_0}(\mathbb{N})$。

例 6.1.5。平坦域 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1})$ 与作为有向完备偏序集的 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 同构。容易看出，其载体类型就是 $\Omega_{\mathcal{U}}$，因为对于每个命题 $P\colon \Omega_{\mathcal{U}}$，$(P \to \mathbf{1}) \simeq \mathbf{1}$。此外，由于任意两个函数 $\varphi,\ \vartheta\colon P \to \mathbf{1}$ 都彼此相等，因此序 $(P,\ \varphi) \sqsubseteq (Q,\ \psi)$ 等价于 $P \Rightarrow Q$。

6.1.3 域的有限元

远小于关系来自定义3.3.9，可以直接转移到DCPO的语境中。事实上，这一关系最初是在域的语境中提出的，随后被应用于无点拓扑（参见 [GHK+03，第 76] 页，以了解其百科全书式的历史）。

定义 6.1.6 （[dJon23，定义 4.2.1]）。 有向完备偏序集的元素 x 被称为远小于 元素 y，如果对每个由元素构成的小有向族 $(z_i)_{i:I}$，且满足 $y \sqsubseteq \bigsqcup_{i:I} z_i$，则存在某个 $i\colon I$，使得 $x \sqsubseteq z_i$。

与框架中的紧开集概念类似，紧开集被定义为远小于自身的开集；在 DCPO 中，我们也有紧元的概念。在定义域的语境下，我们遵循域论惯例，使用有限元这一术语。有限元概念的表述与引理3中的条件（3.3.3）完全相同：

定义 6.1.7 （[dJon23，定义 4.2。3]）。若 DCPO 中的元素 x 远小于自身，则称其为有限元。

我们用 $\mathrm{K}(D)$ 表示 DCPO D 中有限元的类型，这沿用了我们对 locale 使用的记号。这种轻微的记号滥用是合理的，因为 locale X 的开集 U是紧的，当且仅当它是框架 $\mathcal{O}(X)$ 的底层 DCPO 中的有限元。

需要注意的是，引理3.3.3 中关于框架紧致性的刻画并不适用于 DCPO。引理3.3.3中的一些等价表述甚至必须以所有小并的存在性为前提才能定义；即使所有并都存在，其中一些等价关系也关键地依赖于框架分配律。

引理 6.1.8 ([dJon23，例 4.2。4])。 对于每个带点有向完备偏序集 D，底元$\bot_D$ 都是有限的。

证明。 引理3.3.8中的论证在这里同样适用。 □

例 6.1.9 (参见 [dJon23，例 4.2。6])。 提升 DCPO $\eta(x)$中，每个元素 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$都相对于某个小集合 X是有限的。

在域理论中，连续 *DCPO* [GHK+03，定理 I-4。17] 这一类具有特殊意义。DCPO D 上的所谓连续性条件刻画了这样一种思想：每个元素 $x\colon D$都由相对于 x有限的元素决定。 代数 *DCPO* 是连续 DCPO 的一个子类，其中连续性条件更严格。代数性条件指出，DCPO D 中的每个计算都可以表示为其下方（全局）有限计算的并。

在我们的研究中，我们只关注代数域，尤其是其中更特殊的一类——Scott 域。因此，这里不介绍连续 DCPO，而只讨论代数 DCPO。对连续 DCPO 的直谓处理细节感兴趣的读者，请参阅 [dJon23，§4。4]。

6.1.4 代数有向完备偏序集

下面给出的代数 DCPO 定义与 [dJon23；dJon21b；dJE24]中的定义不同。我们采用 de Jong 和 Escardó 定义的一种等价改写，其动机有两点：

1. 为了贴近我们研究谱 locale 的方法；2. 为了在第 6.2 节构造 Scott 域的 Scott locale 时便于技术处理。

在近期的一项工作中 [dJE24, §5.3], de Jong 和 Escardó 讨论了我们在引理 4.2.9 中给出的分裂支撑结果也适用于代数 DCPO 的情形这一事实（de Jong 和 Tosun 已在 TypeTopology 中将其形式化） [dJT23]。事实上，de Jong 和 Escardó 证明了一个引理 [dJE24，引理 5。23]该引理表明，可以通过这一分裂支撑结果，得到一个类似于定理4中的条件（4.2.11 ）的表述，但他们并未据此给出明确的定义。这里，我们将 de Jong 和 Escardó 在同上文献中的引理 5.23 改写为一个明确的定义：

定义 6.1.10 （代数 DCPO）。 若一个 DCPO D（在基宇宙 $\mathcal{U}$ 上）满足以下两个条件，则称其为代数 *DCPO*：
(AD1) 对每个 $x\colon D$，族 $\left(\Sigma_{(c:\mathrm{K}(D))} c \sqsubseteq x\right) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} D$都是有向的，并且以 x 为其并。(AD2) 类型 $\mathrm{K}(D)$ 是 $\mathcal{U}$-小的。

条件 （AD1）表明，类型 K（D）构成一个基（带有某些类型的基本覆盖族）。我们可以通过为 DCPO 制定一个辅助的基概念来对此作出精确定义。不过，我们的目的只是概述我们所需的可构造域理论，因此不打算详细探讨这些问题。上面的定义 6.1.10 足以满足本文的需要。

注 6.1.11。 上述定义相当于 de Jong 的论文 [dJon23], 中的定义 4.8.1，再加上所考虑的基本族就是包含映射这一断言

$$\mathrm{K}(D) \xhookrightarrow{\mathrm{pr}_1} D.$$

然而请注意，de Jong [dJon23] 使用了更为一般的有向完备偏序集定义，允许其底层偏序集不是局部小的。因此，前引文献 中的定义还规定了基本元素的局部小性（[dJon23定义 4.8 的条件 (iii)。1]）。我们这里没有这样的条件，因为它已内建于定义 6.1.1。

例 6.1.12 （参见 [dJon23，例 4.9。4]）。 提升 DCPO $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$ 对每个集合 $X\colon \mathcal{U}$ 都是代数的。

在给出这个例子的证明之前，我们先证明一些辅助引理。

引理 6.1.13 (参见 [dJon23，例 4.9。2])。 对于任意小集合 X，以及 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$ 中的任意元素，都可分解为族 β 中元素的有向上确界： $1 + X \to \mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X)$，定义为

$$\begin{aligned}\beta(\mathsf{inl}(\star)) &:\equiv \bot,\\ \beta(\mathsf{inr}(x)) &:\equiv \eta(x).\end{aligned}$$

引理 6.1.14. 来自引理 β： $1+X \to \mathsf{K}(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X))$ 中的映射 *6.1.13*是一个等价，即我们有 $1 + X \simeq \mathsf{K}(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X))$。

推论 6.1.15. 对于每个小集合 X，提升中有限元的类型 $\mathsf{K}(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(X))$ 都是小的。

例 *6.1.12* 的证明。 设 X 是一个小集合。(AD1)
由引理 6.1.13直接得出。(AD2) 见推论6.1.15。

□

6.1.5 Scott 域

在经典的域理论发展中，*Scott* 域 被定义为有界完备的代数带点有向完备偏序集。现在，我们在 de Jong 和 Escardó 的构造性与直谓发展背景下阐述 Scott 域的概念。为了确保我们的 Scott 域定义适用于构造性推理，我们加入一个额外的可判定性条件，所有值得关注的例子都满足这一条件。

对于定义域 D 中的任意一对元素 x、 y: D，我们定义命题

$$x \uparrow y \quad :\equiv \quad \exists_{(u:D)}(x \sqsubseteq u \times y \sqsubseteq u),$$

表达元素 x和 y 有上界（或有上界）这一性质。

定义 6.1.16 （Scott域）。一个*Scott* 域是一个有指点的代数 DCPO D，满足以下两个条件：

(SD1) 有界完备性：每个有上界的小族都有最小上界；(SD2) 紧元有上界性的可判定性：对于任意一对紧元 c、 d: $\mathsf{K}(D)$，类型 $c \uparrow d$ 是可判定的。

引理 6.1.17 () 对于 *Scott* 域 D中的任意一对元素 x 和 y，若 x和 y不存在上界，则有 $\uparrow x \wedge \uparrow y = \emptyset$。

证明。 设 x, y: D 是某个 Scott 域 D 中的一对元素，并假设它们没有上界。考虑某个 z: D，满足 $z \in \uparrow x \cap \uparrow y$。也就是说， $x \sqsubseteq z$ 和 $y \sqsubseteq z$，这意味着 z 是 x 和 y 的上界。这与假设 x 和 y 没有上界相矛盾。

□

我们将看到，在不少例子中，这些条件因显然为真而满足可判定性条件。

引理 6.1.18。 每个小完备偏序集都自动满足条件 (SD1)和 (SD2)。

证明。 设 L 是一个小完备格。存在所有小族的上确界时，条件 (SD1) 显然成立。此外，小完备性意味着任意一对元素都有最小上界，也就是说，对于任意一对元素 c和 d，命题 $c \uparrow d$显然为真，因此可判定。 □

Scott 域的例子

例 6.1.19。 提升 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(1)$ 是一个 Scott 域，因为由例 6.1.5 可知， $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(1)$ 作为 DCPO 是初始框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$，因而是小完备的。由引理 6.1.18 可知，它是一个 Scott 域。

例 6.1.20。 定义域 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是一个 Scott 域，因为由例 3.1.20可知它是小完备的。

6.2 代数 DCPO 的 Scott locale

总结了单值基础中构造性和直谓域理论的预备知识后，我们现在开始发展域的拓扑。我们从定义 DCPO 上的*Scott* 拓扑开始。

定义 6.2.1 (Scott开). 设 D是一个 DCPO（基宇宙为 $\mathcal{U}$），并考虑一个子集 $S\colon D \to \Omega_{\mathcal{U}}$。若子集 S满足以下条件，则称其为 *Scott* 开集：

(SO1) 它是向上闭的，并且 (SO2) 它对小的有向族不可达，也就是说，

$$\bigsqcup_{i:I} x_i \in S \Rightarrow \exists_{(i:I)} x_i \in S,$$

对于 D 中元素的每个小的有向族 $(x_i)_{i:I}$，

注 6.2.2. 可以推广上述定义，以定义 $\mathcal{U}$-DCPO 的 Scott 开 $\mathcal{V}$-子集。然而，对我们的目的而言，这种推广并非必要，而且其数学含义也不明确。对宇宙推广感兴趣的读者可参阅 Agda 形式化，其中我们在更高层次的宇宙一般性下完成了本文所述的一些结果。

正如 Smyth [Smy93，§22],所解释的，通常将有向完备偏序集的 Scott 开子集 D 视为可有限验证的其元素的性质 D，这些性质

可以看作是对计算的表示。在这种解释下，

- 条件 (SO1) 表示，一旦某项计算 x 已被验证满足某个有限可验证性质 U，那么该计算的每个后续细化 x也会满足该性质 U。
- 条件 (SO2) 表示，如果一个由不断细化的计算构成的序列的极限满足某个有限可验证性质 U，那么该序列中必定存在某项计算 已经 满足该性质 U。换言之，我们应当总能依据该计算的有限近似，判断其极限计算是否满足该性质。

6.2.1 Frame结构

现在我们证明，Scott 开集的偏序集具有有限交和小并。

引理6.2.3。 *Scott 开子集对有限交封闭。换言之，全子集 $x \mapsto \top$ 是 Scott 开集，且两个 Scott 开子集的交也是 Scott 开集。*

证明。 这是域理论中平凡且众所周知的事实。在我们的设定中，该证明保持不变。 □

引理6.2.4。 *Scott 开子集的小族的并集是 Scott 开的。*

证明。 设 $(U_i)_{i:I}$是某个有向完备偏序集 D上的 Scott 开子集的小族。(SO1)：设 $x \in \bigcup_{i:I} U_i$，并考虑某个 $y \sqsupseteq x$。由子集并集的定义，存在某个 U_i 使得 $x \in U_i$。由 U_i 的向上封闭性可得 $y \in U_i$，从而我们有 $y \in \bigcup_{i:I} U_i$。(SO2)：设 $(x_j)_{j:J}$是 D 的元素的有向族，使得

$$\left(\bigsqcup_{j:J} x_j\right) \in \bigcup_{i:I} U_i.$$

我们知道存在某个 U_i 使得 $(\bigsqcup_{j:J} x_j) \in U_i$，从而由 U_i 对有向上确界的不可达性可知存在某个 $x_j \in U_i$。按定义，这意味着 $x_j \in \bigcup_{i:I} U_i$，这正是我们所需要的。

□

由此我们已经证明，每个有向完备偏序集上的 Scott 开子集偏序集都有有限交，且是小完备的。

6.2.2 局部小性

在例 3.1.20中，我们定义了集合 X 上的离散 locale，并讨论了如下问题：除非所考虑的集合 X 是小的，否则它不是局部小的。我们借助推论 3.1.22中给出的缩放禁忌正式证明了这一点，从而确立：若没有某种形式的命题缩放，幂集框架的局部小性一般并不成立。

在有向完备偏序集上的 Scott 开子集偏序集中也存在类似情形。尽管该偏序集是小完备的，但它一般似乎并不是局部小的。然而，当所考虑的有向完备偏序集是代数的时，它是局部小的。

引理 6.2.5 ( )。 对于任意 *DCPO* D *(在某个基宇宙* $\mathcal{U}$*上)，若* D 是代数的，则包含序具有 $\mathcal{U}$-小真值。

证明。 设 D 是一个代数 DCPO，并考虑两个 Scott 开集 U， V: $D \to \Omega_{\mathcal{U}}$。我们定义如下包含序的小版本:

$$U \subseteq_s V \quad :\equiv \quad \Pi_{(c:\mathrm{K}(D))}\, c \in U \Rightarrow c \in V.$$

我们需要证明 $U \subseteq_s V$ 蕴含 $U \subseteq V$。设 $U \subseteq_s V$，并令 $x \in U$。由于 DCPO D 是代数的，我们知道 $x = \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid c \sqsubseteq x\}$。事实 $(\bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid c \sqsubseteq x\}) \in U$ 蕴含，根据 (SO2)，存在某个 $c \in U$ 使得 $c \sqsubseteq x$。因此，由我们对 $S \subseteq_s V$ 的假设可得 $c \in V$，而根据 Scott 开子集的向上封闭性，这又蕴含 $x \in V$。 □

引理 6.2.6( )。 对于每个代数 *DCPO* D，其 *Scott* 开子集的偏序集 D构成一个 *aframe*。

证明。 有限交和小并的存在性已在引理6.2.3和 6.2.4中得到证明。我们刚刚在上面的引理6.2.5 中证明了局部小性。由于这是幂集框架的一个子框架，框架分配律自动成立。 □

定义 6.2.7( )。 上述引理中构造的框架称为代数 DCPO D 的 *Scott* 开子集框架，并记作 $\sigma(D)$。由此定义的 locale 称为代数 DCPO D 的 *Scott locale*，记作Scott(D)。

6.2.3 Scott locale 的初等性质

本节汇总 Scott locale 的一些关键性质。

引理 6.2.8。 对于每个带点有向完备偏序集 D，主滤子 $\uparrow \bot_D$ 是框架 $\sigma(D)$的最大元。

证明。 显然， D 中的每个元素都属于 $\uparrow \bot_D$，因为 $\bot_D$ 是底元。 □

引理 6.2.9( )。 对于任意一个 *Scott* 开子集 U: $D \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 属于带点有向完备偏序集 D，子集 U 包含底元 $\bot_D$ 当且仅当它是框架 $\sigma(D)$的最大元。

证明。 对于任意带点有向完备偏序集 D和 Scott 开子集 U，容易看出，若 U包含 $\bot_D$，那么根据向上封闭性， U包含 x的每个元素。 □

引理6.2.10 ( )。对于每个元素 $x : D$，代数有向完备偏序集 D中的元素 x是有限元，当且仅当主滤子 $\uparrow x$ 是 *Scott* 开集。

证明。 设 $x : D$是有向完备偏序集 D中的一个元素。容易看出， $\uparrow x$不能由有向上确界不可达，恰好就是 x的有限性，因为这意味着，对于每个有向族 $(y_i)_{i:I}$满足 $\bigsqcup_{i:I} y_i \in \uparrow x$，存在某个 $i : I$满足 $y_i \in \uparrow x$。（⇐）方向立即由此得到。对于（⇛ 方向，注意到 $\uparrow x$总是由构造满足条件 (SO1) 。 □

引理 6.2.11 ( )。每个 *Scott* 开子集 $U : D \to \Omega_{\mathcal{U}}$，代数有向完备偏序集 D的，都可以表示为其中所包含的有限元所生成的主滤子的并集。

证明。 设 D是一个代数 DCPO，并考虑一个 Scott 开子集 $U : D \to \Omega_{\mathcal{U}}$。我们断言

$$U = \bigcup \{\uparrow c \mid c \in U, c \text{ finite}\}.$$

容易看出，(⊇) 方向成立，因为 Scott 开子集的向上封闭性蕴含，对于每个 $x \in U$，都有 $\uparrow x \subseteq U$。

对于 (⊆) 方向，设 $x \in U$。我们需要证明存在一个有限 $c \in U$，使得 $x \in \uparrow c$。由于所考虑的 DCPO 是代数的，我们知道

$$x = \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid c \sqsubseteq x\}.$$

U对有向上确界的不相交性进而蕴含，存在某个有限 $c \in U$，使得 $c \sqsubseteq x$，也就是说 $x \in \uparrow c$。 □

引理 6.2.12( ). 对于 *DCPO* 的每个有限元 c，主滤子 $\uparrow c$ 是框架 $\sigma(D)$的紧开集。

证明。 设 D是一个 DCPO，并考虑一个有限元 $c : D$。要证明主滤子 $\uparrow c$是紧的，设 $(U_i)_{i:I}$是一个 Scott 开子集的有向族，且满足 $\uparrow c \subseteq \bigcup_{i:I} U_i$。由于 $c \in \uparrow c$，我们有 $c \in \bigcup_{i:I} U_i$，即对某个 $i : I$，有 $c \in U_i$。由 U_i的向上封闭性可知 $\uparrow c \subseteq U_i$，这正是我们需要证明的。

□

当所考虑的有向完备偏序集具有最小元时，主滤子 $\uparrow\bot$ 会给出最大的 Scott 开集，正如我们在引理 6.2.8 中所说明的。结合上述引理，我们得到：

引理 6.2.13( )。对于每个带点有向完备偏序集 D，*locale* $\mathrm{Scott}(D)$ 都是紧的。

证明。 由引理 6.2.8，Scott(D) 的 $\uparrow\bot_D$是最大开集，由于 $\bot_D$ 总是有限元（引理 6.1.8），根据引理 6.2.12 。 □

6.2.4 Scott 域上 Scott locale 的基构造

我们在引理 6.2.11 中证明了，每个 Scott 开子集都可以分解为其所包含的主滤子的并。现在我们推广这一结果，并证明紧元上的主滤子实际上构成了 Scott locale 的一个基。

引理 6.2.11 表明，Scott(D) 的基应由以下族给出：

$$\uparrow(\text{-}) : \mathsf{K}(D) \to \sigma(D)$$

D 的有限元上的主滤子。构造此基的主要动机，是为了证明对于每个 Scott 域 D，Scott(D) 都是谱 locale；而事实证明，为此使用这些主滤子的所有有限并会更加方便。

引理 6.2.14 ( )。对于每个 *Scott* 域 D，以下族 γ： 列表$(\mathsf{K}(D)) \to D$定义如下：

$$\gamma(c_0 \dots c_{n-1}) \quad :\equiv \quad \uparrow c_0 \cup \dots \cup \uparrow c_{n-1},$$

构成 *locale* Scott(D)的强有向基。

证明。 设 D是一个 Scott 域，并考虑一个 Scott 开子集 $U\colon D \to \Omega_{\mathcal{U}}$。作为 U的基本覆盖族，我们选取基本覆盖指标族

$$\left\{(c_0 \dots c_{n-1}) : \mathsf{List}(\mathsf{K}(D)) \mid \Pi_{(i:\mathbb{N})}\, 0 \le i < n \Rightarrow c_i \in U\right\},$$

其中包含所有属于 U的紧元列表。形式上，这给出了基本覆盖：

$$\left(\Sigma_{(s:\mathsf{List}(\mathsf{K}(D)))}\Pi_{(c:\mathsf{K}(D))}\, c \in s \Rightarrow \uparrow c \in U\right) \xhookrightarrow{\gamma\circ\mathrm{pr}_1} \mathcal{O}(\mathrm{Scott}(D))$$

由引理 6.2.11 可轻易得出，该族的并为 U。

也很容易看出这个族是有向的。它总是由空列表 ε可居留，而该列表给出 $\gamma(\varepsilon) = \emptyset$。此外，给定 D中有限元的两个列表 $s :\equiv c_0 \dots c_{m-1}$和$t :\equiv d_0 \dots d_{n-1}$，基本 Scott 开集 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(t)$ 的最小上界属于该族，因为它由 $\gamma(sl)$ 给出。 □

注意，上面构造的基是小的，因为（1）类型$\mathsf{K}(D)$是小类型，并且（2）小类型上的列表类型也是小的。

通过应用引理 4.2.4 关于上述基的结果，我们得到：

推论 6.2.15. 对于任意 *Scott* 域 D，每个紧 *Scott* 开集 K都等于某个有限元列表 $c_0 \dots c_{n-1}$ 的并集 $\uparrow c_0 \cup \dots \uparrow c_{n-1}$。

6.2.5 Scott locale 在 Scott 域上的谱性

既然我们已经为 Scott locale 构造了一个基，只需证明该基具有谱性，就能轻松确立其谱性，如定义3.6.1所示。

引理 6.2.16 ( ). 引理 *6.2.14* 中构造的基由紧开集组成。换言之，对于代数 *DCPO* $c_0 \dots c_{n-1}$ 的任意有限元列表 D，由并集 $\uparrow c_0 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$ 给出的 *Scott* 开子集是紧的。

证明。 由引理3.3.8 可知，紧开集在有限并下封闭。 □

现在我们希望证明基 $\gamma\colon \mathrm{List}(\mathrm{K}(D)) \to \sigma(D)$ 在二元交下封闭，而为此，所考虑的有向完备偏序集是一个 Scott 域这一点至关重要。

引理 6.2.17. 对于每个 *Scott* 域 D，主滤子映射

$$\uparrow(\text{-}) : \mathrm{K}(D) \to \mathcal{O}(\mathrm{Scott}(D))$$

是（*1*）反单调的；（*2*）在并存在的范围内反转并。

引理 6.2.18 ( ). 对于每个 *Scott* 域 D，引理Scott(D)中构造的基*6.2.14*在二元交下封闭。

证明概要。 设 D 是一个 Scott 域，并考虑两个由有限元组成的列表 $c_0 \dots c_{m-1}$ 和 $d_0 \dots d_{m-1}$。我们需要证明 $\gamma(c_0 \dots c_{m-1}) \cap \gamma(d_0 \dots d_{n-1})$ 属于 γ 的像。通过直接归纳法可以证明，

$$\gamma(c_0 \dots c_{m-1}) \cap \gamma(d_0 \dots d_{n-1}) = \gamma(c_0 \dots c_{m-1} d_0 \dots d_{n-1}).$$

□

定理 6.2.19 ( ). 对于每个 *Scott* 域 D，其 *Scott locale* Scott(D) 都是谱的。

证明。 设 D 是一个 Scott 域。

($\mathrm{SP_b}1$) 见引理6.2.16。($\mathrm{SP_b}2$) 我们知道，最大的 Scott 开集是 $\uparrow \perp_D$。因此很容易看出它属于基，因为 $\perp_D$总是紧的，所以 $\gamma(\perp) = \uparrow \perp = \mathbf{1}_{\sigma(D)}$。($\mathrm{SP_b}3$) 见引理 6.2.18。

□

6.2.6 Sierpiński的万有性质

在第 3.1.5节中，我们定义了 Sierpiński locale，并暂缓证明其泛性质。现在，代数有向完备偏序集所需的拓扑框架已经建立，我们将重新审视这个问题，并证明其泛性质

，即 Sierpiński locale 的泛性质。这也作为一个示例，展示如何通过 DCPO 来呈现一个 locale。

回顾一下，在例3.1.23 中，我们定义了 Sierpiński locale $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}$，它是由初始框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$上 Scott 连续自同态构成的框架所给出的 locale。对此框架的另一种描述是将其视为提升 DCPO $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1})$的 Scott locale。

引理 6.2.20。 框架 $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1}))$ 与初始框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 上 *Scott* 连续映射构成的框架同构。

证明。 类型 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1})$定义为 $\Sigma_{(P:\,\Omega_{\mathcal{U}})} P \to \mathbf{1}$，这显然等价于 $\Omega_{\mathcal{U}}$。现在我们证明，函数 $\Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 是 Scott 连续的，当且仅当它是 Scott 开的（定义 6.2.1的意义下）。令 $:$，并设 $():I$ 是一个命题的有向族。

(⇒)假设 S 是 Scott 连续的。域理论中有一个众所周知的事实：Scott 连续映射是单调的；对于视为 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 子集的 S而言，这恰好就是其向上封闭性。为证明 S 对有向上确界不可达，假设$S(\bigvee_{i:I} P_i)$成立。根据 S的 Scott 连续性，这意味着$\bigvee_{i:I} S(P_i)$成立，而这恰好表示某个 P_k 成立。

（⇐）反过来，假设 S 是 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 作为有向完备偏序集的 Scott 开集。我们需要证明

$$S\left(\bigvee_{i:I} P_i\right) = \bigvee_{i:I} S(P_i).$$

S的向上封闭性恰好说明它是单调的，由此立即得到 $\bigvee_{i:I} S(P_i) \leq S(\bigvee_{i:I} P_i)$。对于另一个方向，假设我们知道 $S(\bigvee_{i:I} P_i)$。根据 S 对有向上确界的不敏感性，我们知道存在某个 $k:I$，使得 $S(P_k)$，也就是说，我们有 $\bigvee_{i:I} S(P_i)$。

最后，容易验证这两个框架的序相同，因此我们可以得出它们是同构的框架。□

回想一下，我们用真表示 Sierpiński locale 的单点开集，它就是恒等映射 $\mathrm{truth}(P) :\equiv P$，断言给定命题为真。

引理 6.2.21. 映射 truth 是主滤子 $\uparrow\top$。

证明。 容易看出，命题 P 成立，当且仅当它小于真命题 $\top$。□

由于 DCPO 的有限元上的主滤子是 Scott locale 的紧开集（如引理 6.2.12 所示），因此：

推论 6.2.22。 单点开集 真是紧的。

引理 6.2.23。 *Sierpiński* 开集是紧的，当且仅当它是最大开集 $\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$、单点开集 真或底开集 $\mathbf{0}_{\mathbb{S}}$。

证明。 我们知道这三个开集都是紧的：底开集 $\mathbf{0}_{\mathbb{S}}$ 在每个 locale 中都是紧的，$\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$ 是紧的这一事实已在例 3.3.7中证明，而我们在推论 6.2.22 中证明了真 是紧的。现在我们来证明，每个Sierpiński locale 的紧开集都是上述开集之一。首先，根据推论 4.2.5 ，我们已经知道紧开集恰好是属于基的开集。因此，只需证明每个基本开集都是上述三个开集之一。回顾引理 6.2.14中 Scott locale 的基构造：Scott($\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1})$)的基由所考虑的有向完备偏序集的基本元素上的主滤子的有限并组成。我们知道， $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbf{1})$ 恰有两个有限元： $\top_{\mathcal{U}}$和 $\bot_{\mathcal{U}}$。现在我们通过归纳法证明，这些基本元素上的主滤子的每个有限并都是上述三个开集之一。

- 基础情形：空列表。空并集是 $\mathbf{0}_{\mathbb{S}}$。
- 归纳步骤，情形 (1)： $\uparrow\top \cup \uparrow c_1 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$。主滤子 $\uparrow\top$ 恰好是开集真，如推论6.2.22所证明的。根据归纳假设，我们知道 $\uparrow c_1 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$ 是三个相关开集之一。如果它是 $\mathbf{0}_{\mathbb{S}}$，那么并集就是真 $\cup\, \mathbf{0}_{\mathbb{S}}$ = 真。如果它是 $\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$，那么并集就是真 $\cup\, \mathbf{1}_{\mathbb{S}} = \mathbf{1}_{\mathbb{S}}$。如果它是真，那么并集就是真 $\cup$真 = 真。
- 归纳步骤，情形 (2)： $\uparrow\bot \cup \uparrow c_1 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$。由引理6.2.8可知 $\uparrow\bot = \mathbf{1}_{\mathbb{S}}$，因此并集就是 $\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$。

□

现在我们已经可以给出命题 3.1.25 的证明了。该命题陈述，我们对 Sierpiński locale 的构造具有 Sierpiński的万有性质（见定义 3.1.24）。

命题 *3.1.25* 的证明。 设 X 是一个 locale，并设 $U\colon \mathcal{O}(X)$。我们需要证明存在一个连续映射 $f\colon X \to \mathbb{S}$，它是唯一的，并满足 $U = f^*(\text{真})$。

我们按如下方式定义这个映射：首先，定义一个族

$$\alpha : \Pi_{(S:\mathcal{O}(\mathbb{S}))}\, S(\top) + S(\bot) \to \mathcal{O}(X),$$

当 $\top \in S$ 时，它给出 U；当 $\bot \in S$ 时，它给出 $\mathbf{1}_X$。形式上，这可以编码为函数：

$$\alpha_S(\mathsf{inl}(p)) :\equiv U$$
$$\alpha_S(\mathsf{inr}(q)) :\equiv \mathbf{1}_X.$$

然后，我们将所需的映射 $f\colon X \to \mathbb{S}$ 定义为 $f(S) :\equiv \bigvee\{\alpha_S(p) \mid p\colon S(\top) + S(\bot)\}$。显然， f满足 $U = f^*(\text{真})$所要求的性质：真$(\top)$ 总是成立，因此我们有 $\alpha_{\mathsf{truth}}(\mathsf{inl}(\star)) = U$。

此外，很容易看出， f^* 也保留 $\mathcal{O}(\mathbb{S})$ 的最大元以及并。我们重点讨论二元交的保留：设 S， $T\colon \Omega_{\mathcal{U}} \to \Omega_{\mathcal{U}}$是两个 Scott 连续映射。我们需要证明 $f^*(S \cap T) = f^*(S) \wedge f^*(T)$。由单调性可知， $f^*(S \cap T) \leq f^*(S) \wedge f^*(T)$ 这一方向显然成立，因此我们重点讨论 $f^*(S) \wedge f^*(T) \leq f^*(S \cap T)$ 这一方向。首先，注意到我们有如下

等同性，这归功于分配律：

$$\begin{aligned} & f^*(S) \wedge f^*(T) \\ \equiv\ & \left(\bigvee \{\alpha_S(p) \mid p : S(\top) + S(\bot)\}\right) \wedge \left(\bigvee \{\alpha_S(p) \mid p : T(\top) + T(\bot)\}\right) \\ =\ & \bigvee \{\alpha_S(p) \wedge \alpha_T(q) \mid p : S(\top) + S(\bot),\ q : T(\top) + T(\bot)\} \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

只需证明它小于等于 $f(S \cap T)$，展开后得到

$$\bigvee \{\alpha_{(S\cap T)}(p) \mid p : (S \cap T)(\top) + (S \cap T)(\bot)\} \qquad (\ddagger)$$

我们证明，(†) 中族的每个元素都小于等于 (‡) 中族的某个元素。令 $p\colon S(\top) + S(\bot)$ 且 $q\colon T(\top) + T(\bot)$。我们对证明 p 和 q 进行分类讨论。

- 情形：$p = \mathrm{inl}(p')$ 和 $q = \mathrm{inl}(q')$。这意味着有 $\top \in S$ 和 $\top \in T$，从而推出 $\alpha_S(\mathrm{inl}(p')) \wedge \alpha_S(\mathrm{inl}(q')) = U \wedge U = U$。在此上下文中，很容易证明 U 小于等于 (‡)，因为 $r :\equiv (p', q')$ 构成了 $\top \in S \cap T$ 的证明，也就是说，我们有 $U \leq \alpha_{(S\cap T)}(\mathrm{inl}(r)) \equiv U$。

- 情形：$p = \mathrm{inl}(p')$ 且 $q = \mathrm{inr}(q')$。这意味着我们有 $\top \in S$ 和 $\bot \in T$，从而推出 $\alpha_S(\mathrm{inl}(p')) \wedge \alpha_T(\mathrm{inr}(q')) = U \wedge \mathbf{1}_X = U$。由引理 6.2.9 可知，包含 $\bot$ 的 Scott 开子集也必须包含 $\top$。将其与 $p'\colon S(\top)$ 配对，我们得到证明 $r\colon \top \in S \cap T$，因此很容易得出结论 $U \leq \alpha_{(S\cap T)}(\mathrm{inl}(r)) \equiv U$。
- 情形：$p = \mathrm{inr}(p')$ 且 $q = \mathrm{inl}(q')$。此处同样适用前一种情形中的论证。

- 情形：$p = \mathrm{inr}(p')$ 且 $q = \mathrm{inr}(q')$。这意味着我们有 $\bot \in S$ 和 $\bot \in T$，从而推出 $\alpha_S(\mathrm{inr}(p')) \wedge \alpha_T(\mathrm{inr}(q')) = \mathbf{1}_X \wedge \mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X$。注意，$(p', q')$ 构成了一个证明，表明 $\bot \in S \cap T$。由于我们有 $\mathbf{1}_X \leq \alpha_{(S\cap T)}(\mathrm{inr}(p', q')) \equiv \mathbf{1}_X$，所需结果由此得出。

现在我们继续证明连续映射 f 是唯一的。设 $g\colon X \to \mathbb{S}$ 是满足性质 $g^*(\text{真值}) = U$ 的另一个连续映射。我们证明，对于每个 $S\colon \mathcal{O}(\mathbb{S})$，都有 $f^*(S) = g^*(S)$。显然，$f^*(S) \leq g^*(S)$ 这一方向很容易证明，因此我们着重证明 $g^*(S) \leq f^*(S)$ 这一方向。我们在引理 6.2.20 中证明了，Sierpiński locale 是 Scott($\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(1)$)；我们知道，当所考虑的有向完备偏序集是 Scott 域时，它总是谱的。因此，我们知道 S 可以分解为 $S = \bigvee_{i:I} B_i$，其中 $(B_i)_{i:I}$ 是一个紧 Scott 开集族。由于映射 g^* 是框架同态，因而是单调的，所以只需证明，对于每个 $i\colon I$，都有 $g(B_i) \leq f^*(S)$。我们借助引理 6.2.23，它表明每个基本开集 B_i 要么是最大开集 $\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$、单点开真值，要么是底开集 $\mathbf{0}_{\mathbb{S}}$。

- 情形：$B_i = \mathbf{1}_{\mathbb{S}}$。也就是说，$S = \mathbf{1}_{\mathbb{S}}$。所需结果随即得出，因为我们有 $g^*(B_i) = \mathbf{1}_{\mathbb{S}} = f^*(\mathbf{1}_X) = f^*(S)$。
- 情形：$B_i =$ 真。我们知道 $g^*(\text{真}) = U$，并且已经证明了 $U = f^*(\text{真})$。由此可得 $g^*(B_i) = g^*(\text{真}) = f^*(\text{真}) = f^*(B_i) \leq f^*(S)$。
- 情形：$B_i = \mathbf{0}_{\mathbb{S}}$。注意，我们有 $g^*(\mathbf{0}_{\mathbb{S}}) = \mathbf{0}_X \leq f^*(S)$。

□

6.3 尖锐元素

de Jong [dJon21a] 提出了一种尖锐元素的概念，置于他对域理论进行构造性发展的背景之下。尖锐元素 [dJon21a，定义 5。8] 代数 DCPO D 的一个元素 $x : D$ 其主理想 $\downarrow x$ 对有限元具有可判定成员关系。

虽然这一概念可以对一般的有向完备偏序集加以表述，但在代数有向完备偏序集的语境中，它的描述要具体、直观得多。由于代数有向完备偏序集是我们主要关注的对象，我们将直接在代数有向完备偏序集的语境中研究尖锐元素。

6.3.1 代数有向完备偏序集的尖锐元素

定义 6.3.1 (参见 [dJon21a，命题 5。11])。 元素 $x : D$ 代数有向完备偏序集中的 D 称为尖锐的 , 如果 $c \sqsubseteq x$ 对每个有限元 $c : D$ 都是一个可判定命题。换言之，如果一个元素在由有限元生成的主滤子中具有可判定成员关系，那么它就是尖锐的。

引理 6.3.2. 对于代数有向完备偏序集 D 中的每个元素 $x : D$, 断言 x 是尖锐的命题是小的。

证明。 直接由局部小性以及规定 $\mathrm{K}(D)$ 是小类型得出 □

尖锐元素的例子

例 6.3.3。 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 作为有向完备偏序集的尖锐元素恰好是 $\mathbb{N}$ 的可判定子集。

例 6.3.4。 Sierpiński DCPO $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(1)$ 的尖锐元素恰好是平凡命题 $\bot$ 与 $\top$。

证明。 设 P 是 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 作为有向完备偏序集的一个尖锐元素。由于 $\top_{\mathcal{U}}$ 是 $\Omega_{\mathcal{U}}$ 的有限元，故 $\top_{\mathcal{U}} \Rightarrow P$ 是可判定的。若 $\top_{\mathcal{U}} \Rightarrow P$，则 $P = \top$。否则，我们有 $\neg(P = \top)$，这意味着 $P = \bot$。 □

例 6.3.5。 平坦域 $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(\mathbb{N})$ 的尖锐元素是那些元素 (P, φ)，使得对每个 $n : \mathbb{N}$， $\eta(n) \sqsubseteq (P, \varphi)$ 是可判定的。

证明。根据引理 6.1.14，我们知道 $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ 的有限元是 $\bot$ 以及形如 $\eta(n)$ 的有限元，其中 $n : \mathbb{N}$。也就是说， $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ 的尖锐元素是满足 $x \bot \sqsubseteq x$ 且 $\eta(n) \sqsubseteq x$ 可判定的那些元素。前者显然成立，这意味着对于每个 $n : \mathbb{N}$， x 是尖锐的，当且仅当 $\eta(n) \sqsubseteq x$ 可判定。 □

6.3.2 尖锐元素的拓扑刻画

现在，我们用 D 的 Scott 开集来刻画代数 DCPO D 的尖锐元素。首先注意到，每个 $x : D$ 若在紧 Scott 开集中具有可判定成员关系，则它是尖锐的：

引理 6.3.6。对于代数 *DCPO* D 中的每个元素 $x : D$，只要命题 $x \in K$ 对每个紧 *Scott* 开集 $K : D \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 都是可判定的，x 就是尖锐的。

证明。设 $x : D$ 是一个在紧 Scott 开集中成员关系可判定的元素。设 c 是 D 的一个有限元。由引理 6.2.12 可知 $\uparrow c$ 是一个紧 Scott 开集，因此命题 $x \in \uparrow c$ 是可判定的，也就是说，x 是一个尖锐元素。 □

事实上，结果表明，反过来同样成立：

引理 6.3.7 ( )。代数 *DCPO* 中的一个元素 $x : D$ 是尖锐的，当且仅当它在紧 *Scott* 开集中的成员关系可判定。

证明。我们已在引理⇐的方向中证明了6.3.6。为了证明 (⇒)的方向也成立，令 $x : D$ 为一个尖锐元素，并令 $K : D \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 为一个紧 Scott 开集。在引理6.2.14中，我们证明了该族

$$(c_0 \ldots\ldots c_{n-1}) \mapsto \uparrow c_0 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$$

构成 $\mathrm{locale}_{\mathrm{Scott}}(D)$的一个基。由此，根据推论6.2.15，我们知道必定存在一个列表 $c_0 \ldots c_{n-1}$ 使得 $K = \uparrow c_0 \cup \cdots \cup \uparrow c_{n-1}$。由于命题 $x \in \uparrow c_i$对每个 i（其中 $0 \le i < n$）都是可判定的，因此 $x \in K$ 也是可判定的，因为可判定命题在有限并下封闭。 □

6.4 Scott locale 的谱点

点集拓扑中的空间概念定义为一个点的集合 X，并为其赋予一个拓扑，即幂集框架 $\mathcal{P}(X)$ 的一个子框架。换言之，开集是根据点来定义的。我们先前讨论过，在无点拓扑中，这种概念上的情况恰好相反：我们从开集出发，并在需要时以开集为基础定义点。到本节为止，我们还没有任何理由去研究 *locale* 的点。现在，我们开始讨论点，因为在构造性语境下研究 Scott 域的 Lawson 拓扑时，自然会遇到这些点。

在深入探讨技术细节之前，我们先对无点拓扑语境下的点这一概念作一番概念性概述。考虑拓扑空间 X 中的一个点 $x \in X$。我们可以汇集 x 的所有开邻域，并将其视为关于 x 的所有可观测性质的类。我们用 $\mathcal{F}_x$ 表示：

$$\mathcal{F}_x \quad :\equiv \quad \{U \in \mathcal{O}(X) \mid x \in U\}.$$

当我们将 $\mathcal{F}_x$ 视为按包含序排列的格时，可以把 $\mathcal{F}_x$ 看作关于 x 的一类观测，这些观测会逐渐变得更好，最终收敛到 x 附近。这满足三个性质：

1. 向上封闭性：对每个 $U \in \mathcal{F}_x$ 以及每个 $V \supseteq U$，我们有 $V \in \mathcal{F}_x$。2. 对二元交封闭：对每一对开集 U，$V \in \mathcal{F}_x$，交 $U \cap V$ 也属于 $\mathcal{F}_x$。3. 对并不可达性：若有 $(\bigcup_{i:I} U_i) \in \mathcal{F}_x$，对开集族 $(U_i)_{i:I}$ 而言，则存在某个 $i : I$，使得 $U_i \in \mathcal{F}_x$。

这三条性质定义了所谓的完全素滤子，即框架 $\mathcal{O}(X)$（X 的开子集框架）的滤子。若集合 X 的点与框架 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子类之间存在双射，则称空间 X 为 *sober*。在无点语境中，人们处理抽象的开集框架，并将完全素滤子作为 locale 的点的定义。关于无点拓扑中点的进一步阅读，我们建议读者参阅 [PP11，§II.3。1]。

6.4.1 locale理论中点的概念

在 locale 理论的文献中，locale 的点这一概念有三种常见定义 X [Joh82，§II.1。3]：

1. 作为框架 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子（我们已在上文详细讨论），2. 作为连续映射 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}} \to X$，以及 3. 作为框架 $\mathcal{O}(X)$ 的素元。

尽管条件（2）与（1）在构造性框架下等价，但条件（3）与另外两者等价，从根本上说依赖于经典推理。我们采用（2）作为点这一概念的主要表述：

定义 6.4.1。locale X（在基宇宙 $\mathcal{U}$ 上）的一个点是一个连续映射

$$\mathbf{1}_{\mathcal{U}} \to X,$$

这等同于一个框架同态 $\mathcal{O}(X) \to \Omega_{\mathcal{U}}$。

我们用 $\mathbf{Pt}(X)$ 表示 locale 的点类型。

点恰好是完全素滤子

定义 6.4.2（滤子）。框架 L 的子集 $F \subseteq L$ 称为滤子，如果它

- 向上封闭，且
- 对有限交封闭。

定义 6.4.3（完全素滤子）。框架 L 上的滤子 $F \subseteq L$ 称为完全素的，或（为更加明确，称为小完全素的），如果对于每个小族 $(x_i)_{i:I}$，满足 $(\bigvee_{i:I} x_i) \in F$，都存在某个 $i : I$，使得 $x_i \in F$。

引理 6.4.4。 *locale* X 的点对应于 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子。

证明。 设 X 是基宇宙 $\mathcal{U}$ 上的一个 locale。对于每个点 $p\colon \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \to X$，容易看出，其定义框架同态 $p^*\colon \mathcal{O}(X) \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 是一个完全素滤子，因为它保持有限交和小并。反过来，每个完全素滤子 $F\colon \mathcal{O}(X) \to \Omega_{\mathcal{U}}$ 都是一个框架同态。由于 F 包含最大元，我们有 $F(\mathbf{1}_X) = \top$。此外， F 的向上封闭性恰好表明，将其视为框架同态时它是单调的。 F 对二元交封闭，意味着 $F(U) \wedge F(U) \leq F(U \wedge V)$，由单调性可推出 $F(U \wedge V) = F(U) \wedge F(V)$。最后，完全素性条件恰好表明

$$F\left(\bigvee_{i:I} U_i\right) \leq \bigvee_{i:I} F(U_i),$$

由此可根据单调性推出

$$F\left(\bigvee_{i:I} U_i\right) = \bigvee_{i:I} F(U_i).$$

□

我们常用字母 p 表示在 locale X的点集 $\mathbf{1} \to X$ 上取值的变量。不过，根据上述等价，当我们将点仅视为子集 F时，也会使用变量字母 $F\colon \mathcal{O}(X) \to \Omega$。

6.4.2 谱点

在定义 4.2.14中，我们将谱映射定义为保持紧开集的映射。现在，我们来考察作为连续映射时具有谱性的点。

定义 6.4.5。 点 $\mathbf{1} \to X$ 称为谱的，如果它是 locale 的谱映射。

我们用$\mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(X)$表示 locale X的谱点类型。

引理 6.4.6。 点 $p\colon \mathbf{1}_{\mathcal{U}} \to X$ 是谱点，当且仅当框架同态$p^*\colon \mathcal{O}(X) \to \Omega_{\mathcal{U}}$是 X的紧开集的一个子集，并且该子集的成员关系可判定。

证明。 设 $p\colon \mathbf{1} \to X$ 是一个点。回顾一下，映射 p 是谱的，意味着 $p^*(K)$是初始框架 $\Omega_{\mathcal{U}}$的紧开集，只要 K是 X的紧开集。由例 4.6.13 可知，终端 locale $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ 是 Stone locale，因此根据引理 4.6.2，我们知道它的紧开集与闭开集重合，因为该引理指出，在 Stone locale 中，紧开集与闭开集重合。因此不难看出， p^* 保持紧开集，当且仅当它将 X的紧开集映射到 $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$的闭开集，而这些恰好就是可判定命题。

□

6.5 尖锐元素与谱点

现在我们来讨论迄今为止所探讨的两个概念之间的关系：尖锐元素与谱点。事实证明，Scott 域 D 的尖锐元素与谱点 $\mathbf{1} \to \mathrm{Scott}(D)$重合。不过，在证明这一点之前，我们还需要做一些准备。

6.5.1 Scott 域的 Scott locale 的点

我们将需要以下辅助引理。

引理 6.5.1 ( ). 设 D 是一个 *Scott* 域。对于 *Scott* F 上的点 $\mathrm{Scott}(D)$，族

$$\{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}$$

是小的且有向的。

证明。 令 D 为一个 Scott 域，并考虑 $\mathrm{Scott}(D)$ 的一个点 F。容易看出，族 $\{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}$ 是小的，因为对 $\mathrm{K}(D)$ 的量化以及命题 $\uparrow c \in F$ 都是小的。

现在我们证明这个族是有向的。定义域的底元 $\bot_D$ 是一个有限元（引理 6.1.8），并且总是属于上述族，因为我们总有 $\uparrow \bot_D = \mathbf{1}_{\sigma(D)}$；我们还知道 $\mathbf{1}_{\sigma(D)} \in F$，因为 F 是一个滤子。为证明这个族是有向的，令 b， $c : \mathrm{K}(D)$，满足 $\uparrow b \in F$ 和 $\uparrow c \in F$。

我们需要证明存在某个紧 d，它高于 b 和 c，并且满足 $\uparrow d \in F$。我们利用 $b \uparrow c$ 是一个可判定命题这一假设（定义 (SD2) 中的条件 6.1.16），并进行分类讨论。

(情形 1) 存在一个 b 和 c的上界 u。根据有界完备性， b 和 c 的最小上界必定存在，记作 $b \vee c$。由于有限元对二元并总是封闭的，因此它是有限元。接下来只需证明 $\uparrow(b \vee c) \in F$。主滤子运算 $\uparrow$(-)反转并，因此我们有$\uparrow(b \vee c) = \uparrow b \wedge \uparrow c$。接下来只需证明$(\uparrow b \wedge \uparrow c) \in F$；根据 F保持交这一事实，当且仅当 $F(\uparrow b) \wedge F(\uparrow c)$时，该式成立。请注意，这意味着我们已经完成证明，因为我们已经知道两个合取项 $F(\uparrow b)$和 $F(\uparrow c)$都成立。

(情形 2) 不存在 b 和 c的上界。根据引理 6.1.17，我们知道 $\uparrow b \wedge \uparrow c = \mathbf{0}_{\sigma(D)}$。由于我们知道 $\uparrow b \in F$和 $\uparrow c \in F$，因此必有 $F(\uparrow b \wedge \uparrow c)$成立，因为根据交保持性， $F(\uparrow b \wedge \uparrow c) = F(\uparrow b) \wedge F(\uparrow c)$。这意味着 $F(\mathbf{0}_{\sigma(D)})$成立，但这与我们知道 $F(\mathbf{0}_{\sigma(D)}) = \bot$ 相矛盾，因为 F是一个框架同态。 □

上述思路是：将所有与滤子 F 所表达的性质相符的有限元收集起来，就能得到一个有向族，其极限给出指定的计算。

L引理 6.5.2. 对于每个 *Scott* 域 D， 都有一个等价 $D \simeq \mathbf{Pt}(\mathrm{Scott}(D))$。

证明。 设 D 是一个 Scott 域。我们定义映射

$$D \underset{v}{\overset{\mathrm{pt}_{(-)}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Pt}(\mathrm{Scott}(D))$$

如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{pt}_x(U) &:\equiv x \in U \\ v(F) &:\equiv \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}. \end{aligned}$$

我们首先检查这些函数是否定义良好。上面的有向上确界存在，这是因为族 $\{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}$ 是有向的，而这一点已在引理 6.5.1 中得到证明。容易看出，对于每个 $x : D$，$\mathrm{pt}_x : \mathcal{O}(\mathrm{Scott}(D)) \to \Omega$ 都定义了一个框架同态。设 $x : D$。显然，它保留最大元，因为 $\mathrm{pt}_x(1) = x \in \mathbf{1} = \top$。给定 D 的两个 Scott 开子集 U 和 V，我们有 $\mathrm{pt}_x(U \cap V) \equiv x \in U \cap V$ 当且仅当 $\mathrm{pt}_x(U)$ 和 $\mathrm{pt}_x(V)$ 都成立，由此可知该映射也保留交。同理，容易看出它保留并。设 $(U_i)_{i:I}$ 是一个由 Scott 开子集构成的小族。我们有 $\mathrm{pt}_x(\bigvee_{i:I} U_i) \equiv x \in \bigvee_{i:I} U_i$ 当且仅当 $\exists i : I.\ x \in U_i$，当且仅当 $\exists i : I.\mathrm{pt}_x(U_i)$；这与 $\bigvee_{i:I}\mathrm{pt}_x(U_i)$ 相同。

我们现在证明 v 是 $\mathrm{pt}(\text{-})$ 的截面，反之亦然。设 $x : D$。我们需要证明 $v \circ \mathrm{pt}_x = x$。这直接由 D 是代数域这一事实得出：

$$\begin{aligned} v(\mathrm{pt}_x) &= \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in \mathrm{pt}_x\} \\ &= \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid x \in \uparrow c\} \\ &= \bigsqcup \{c : \mathrm{K}(D) \mid c \sqsubseteq x\} \\ &= x. \end{aligned}$$

为了看出 $\mathrm{pt}(\text{-})$ 是 v的收缩核，设 F 是 $\mathrm{Scott}(D)$ 的点。我们需要证明$\mathrm{pt}_{v(F)}(U) = F(U)$。根据引理 6.2.11，只需证明

$$\mathrm{pt}_{v(F)}(U) = F\left(\bigvee \{\uparrow c \mid c \in U, c \text{ finite}\}\right),$$

并且因为 F 是框架同态，剩下要证明

$$\left(\bigvee \{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}\right) \in U \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee \{F(\uparrow c) \mid c \in U, c \text{ finite}\}.$$

对于 $(\Leftarrow)$ 方向，假设存在某个有限的 $c \in U$，满足 $\uparrow c \in F$。由于

$$c \sqsubseteq \left(\bigvee \{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}\right),$$

我们知道 $(\bigvee \{c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F\}) \in U$，这是由 U 的向上封闭性得出的。对于 $(\Rightarrow)$方向，假设我们知道 $(\bigvee (c : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow c \in F)) \in U$。由于 U 不可达有向上确界，因此必定存在某个有限的 $c \in U$ 满足 $\uparrow c \in F$，这意味着命题 $\bigvee \{F(\uparrow c) \mid c \in U,\ c$有限$\}$ 成立。 □

6.5.2 Scott locale 的谱点

现在，我们将上述等价关系进一步细化为尖锐元素与谱点之间的等价关系。

引理 6.5.3. 设 D 是一个 *Scott* 域。对于每个有限元 $c : D$ 以及每个谱点$F : \mathcal{O}(\mathrm{Scott}(D)) \to \Omega$，我们有

$$\uparrow c \in F \quad \Leftrightarrow \quad c \sqsubseteq \nu(F).$$

证明. 设 c 是 D 的有限元，且 $F : \mathcal{O}(\mathrm{Scott}(D)) \to \Omega$ 是 $\mathrm{Scott}(D)$ 的一个谱点。（⇐）方向显然：若 $\uparrow c \in F$，则

$$c \sqsubseteq \nu(F) \equiv \bigsqcup \{b : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow b \in F\}.$$

Fo对于 (⇏方向，假设 $c \sqsubseteq \bigvee\{b : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow b \in F\}$ 成立，也就是说

$$\left(\bigsqcup \{b : \mathrm{K}(D) \mid \uparrow b \in F\}\right) \in \uparrow c.$$

由于 $\uparrow c$ 是 Scott 开集，因此对有向上确界不可达，所以我们知道存在某个紧 $b : D$ 使得 $\uparrow b \in F$ 且 $b \in \uparrow c$。点 F 是单调的（因为它是框架同态），这意味着 $F(\uparrow b) \Rightarrow F(\uparrow c)$，因此只需证明 $\uparrow b \leq \uparrow c$。由于我们已知 $c \sqsubseteq b$，可知 $\uparrow b \leq \uparrow c$ 成立，因为主滤子运算 $\uparrow(\text{-})$ 是反单调的（引理 6.2.17）。 □

定理 6.5.4 ( ). 对于每个 *Scott* 域 D，我们有一个类型等价

$$\mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(\mathrm{Scott}(D)) \simeq \#D.$$

证明。 该等价由引理6.5.2的构造所给出的双射给出。尚需证明：

1. 对每个尖锐元素 $x : D$，pt_x 是谱点，以及 2. 对 $\mathrm{Scott}(D)$ 的每个谱点 F，$\nu(F)$ 是尖锐元素。

对于 (1)，设 $x : D$ 为尖锐元素。我们需要证明pt_x 是谱点。由引理6.4.6，只需证明框架同态pt_x^* 是对紧开集具有可判定成员关系的子集。设 K 为 D的紧 Scott 开集。我们知道$\mathrm{pt}_x(K) \equiv x \in K$根据我们对尖锐元素的拓扑刻画（引理 6.3.7）是可判定的，该刻画指出，尖锐元素恰好是那些在紧 Scott 开集中具有可判定成员关系的元素。

对于 (2)，设 F是 $\mathrm{Scott}(D)$的一个谱点。为证明 $\nu(F)$ 是一个尖锐元素，取 $c : \mathrm{K}(D)$。根据引理 6.5.3，我们知道 $c \sqsubseteq \nu(F)$ 当且仅当 $\uparrow c \in F$成立；根据引理6.4.6，我们知道这是一个可判定命题。 □

6.6 尖锐元素与 Patch 的点

本节中，我们将定理 6.5.4 中的等价关系加以推广，以证明 $\#D$（Scott 域 D 的尖锐元素集合）与集合

$$\mathbf{1} \to \mathrm{Patch}(\mathrm{Scott}(D))$$

其补丁 locale 的点。

6.6.1 谱点与 Patch 的点重合

引理 6.6.1. 对于每个谱 *locale* X，我们都有一个类型等价

$$\mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(X) \simeq \mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(\mathrm{Patch}(X)).$$

证明. 设 X 是一个谱 locale。对于每个谱点 $p\colon \mathbf{1} \to X$，根据补丁 locale 的泛性质（定理 5.4.12），存在一个点 $\bar{p}\colon \mathbf{1} \to \mathrm{Patch}(X)$ 属于 Patch，且满足 $p = \varepsilon \circ \bar{p}$，并且该点是唯一的。反过来，对于补丁 locale 的每个点 $p\colon \mathbf{1} \to \mathrm{Patch}(X)$，映射 $\varepsilon \circ p$ 是 X 的一个谱点，因为根据引理 5.4.8，我们知道 ε 是谱的。因此我们得到映射

$$\mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(X) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(\mathrm{Patch}(X))$$

定义为 $\alpha :\equiv p \mapsto \bar{p}$ 和 $\beta :\equiv p \mapsto \varepsilon \circ p$。

Patch(X) 的泛性质直接推出这些映射构成一个双射。对于每个谱点 $p\colon \mathbf{1} \to X$，泛性质中的存在性部分恰好给出 $p = \varepsilon \circ \bar{p} \equiv \beta(\alpha(p))$。反过来，设 $p\colon \mathbf{1} \to \mathrm{Patch}(X)$ 是 X 的 Patch 的一个谱点。我们需要证明 $p = \varepsilon \circ p$，这由 $\varepsilon \circ p$ 的唯一性立即得出。 □

回顾推论 4.6.11 指出，每个 Stone locale 之间的连续映射都是谱的。结合以上结果，便得到下面的推论，因为终端 locale $\mathbf{1}$ 根据例 4.6.13，是 Stone。

推论 6.6.2。 对于每个谱 *locale* X，我们有一个类型等价

$$\mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(X) \simeq \mathbf{Pt}(\mathrm{Patch}(X)).$$

6.6.2 尖锐元素刻画总结

最后，我们将上述所有等价关系结合起来，推导出我们关注的主要结果：Scott 域 D 的尖锐元素与 Patch(Scott(D)) 的点之间存在双射。

定理 6.6.3 ( )。 对于每个 *Scott* 域 D，我们都有等价

$$\#D \simeq \mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(\mathrm{Scott}(D)) \simeq \mathbf{Pt}_{\mathrm{sp}}(\mathrm{Patch}(\mathrm{Scott}(D))) \simeq \mathbf{Pt}(\mathrm{Patch}(\mathrm{Scott}(D))).$$

证明。 我们已在定理 6.5.4 中证明了第一个等价，并在上文的引理 6.6.1 和推论 6.6.2 中证明了另外两个。 □

第7章

结论

我们通过简要总结我们的贡献并讨论进一步研究的途径来作结。此外，我们在第7.2节讨论相关工作；对我们而言，这主要是被称为形式拓扑的主题。因此，我们简要介绍形式拓扑，并将其与我们在本论文中提出的方法进行比较。

7.1 总结

我们提出了一种在单值基础中对无点拓扑进行构造性与谓词性研究的新方法。我们论证了，若在适当的大小假设下工作，相当一部分locale理论可以在不诉诸非谓词性原则的情况下展开。为支持这一情形，我们发展了locale理论中若干非平凡构造。更具体地说，我们给出了以下发展：

1. 我们发展了若干重要locale类的基本性质，包括谱的、Stone、零维和正则locale。我们特别关注前两类，并证明它们的理论在单值基础的构造性与直谓设定中表现良好。

2. 我们证明，locale 理论中各种传统上以非谓词方式构造的构造，在假设存在小基的直谓设定下也能够实现。一个主要例子是我们对框架同态的右伴随的构造；这一构造在我们的理论发展中发挥了关键作用。它的两个主要应用是海廷蕴涵和完美映射的概念。前者使我们能够使用开核的概念，而后者则用于若干证明。3. 我们给出了谱局部 Stone 对偶的一个精细化的直谓版本，

它以小分配格范畴以及大、局部小且小完备的谱局部范畴为表述对象。

4. 我们通过构造谱 locale 的补丁 locale 并证明其泛性质，展示了 Stone locale 范畴 **Stone** 是谱 locale 与谱映射范畴 **Spec** 的余反射子范畴。我们说明了在直谓设定中，泛性质的证明会变得更加复杂，因为此时无法使用所有核的框架——这种构造似乎本质上是非谓词性的。

5. 最后，我们研究了 Scott 域的无点拓扑，并运用我们的直谓框架，在构造性域理论中确立了一项新结果：Scott 域的尖锐元素集#D D 与 Patch(Scott(D)) 的点集双射，也就是说，它与 D的 Scott locale 的补丁 locale 的点集双射。

在我们所呈现的工作中，我们只研究了 locale，并且仅在有必要时才引入基这一假设。这与类型论中无点拓扑的谓词式处理的标准方法形成对比；在标准方法中，人们会将研究范围限制为 locale 的小表示，即以其基本开集来表示 locale，这些表示称为形式拓扑。在第7.2.1节中，我们将讨论并比较这种方法与我们的处理方式。

7.2 相关工作

本节简要回顾了关于无点拓扑构造性发展的相关工作。对我们而言，这一方向上最相关的研究领域是形式拓扑 [Sam87；Neg02；CSSV03]。

7.2.1 形式拓扑

正如 Negri 所解释的 [Neg02]：“形式拓扑由 Per Martin-Löf 于 1985年在一系列讲座中引入，旨在回答一个问题：能否推广 Scott 域的概念，使其涵盖所有可设想的拓扑空间？”此后，Giovanni Sambin 与马丁-洛夫合作，进一步发展了这一思想；详细的历史可参见 [Sam87] 。

Sambin 明确指出 [Sam00，第 1] 页，类型论中的拓扑发展是这一学科最初的动机之一：

> 什么是形式拓扑？一个较为贴切的答案是：形式拓扑就是在（马丁-洛夫的）类型论中发展起来的拓扑。

为使内容自成一体，我们简要介绍形式拓扑的核心思想。

形式拓扑简述

从 Stone 对偶中我们熟知这样一种思想：某些类的空间完全由其基所刻画，而这些基由某些类的开集组成，例如紧开集或闭开集。以谱空间为例，这使我们能够得到对

所考虑空间的描述，并以紧开集构成的有限代数来表述；在实际应用中，这通常是一个小集合。这种技术对于直谓发展非常便利；当我们使用生成所考虑谱空间的基本开集小代数时，理论会更适合进行直谓推理。例如，尽管直谓地描述两个 locale 的积仍是一个未解决问题，但谱 locale 的积却很容易描述，因为只需构造所考虑谱 locale 的紧开集分配格的余积即可。

形式拓扑是这一技术的一种推广：它将基本开集的小代数这一概念公理化，并借此呈现一个 locale。尽管文献中有各种定义，通常它是一个配备覆盖关系的交半格 B

$$(\text{-}) \lhd (\text{-}) \subseteq B \times \mathcal{P}(B),$$

满足某些公理（参见 [Neg02，定义 2。1]，其中给出了完整定义）。给定一个基本开集 $b \in B$，满足 $S \subseteq B$ 的子集 $b \lhd S$ 意在表示所呈现框架中包含 $b \leq \bigvee S$ 的基本开集族。这样，覆盖关系便支配着如何组合基本开集以生成拓扑。

更形式地说，形式拓扑 所呈现的框架是所谓的形式拓扑的饱和子集框架 [Neg02，第 23] 页。我们取 $\downarrow B$ 的向下封闭子集类 B，并考虑其中相对于核 $\mathcal{C}$ 为不动点的集合子类 $\downarrow B \to \downarrow B$，其定义为

$$\mathcal{C}(U) :\equiv \{b \in B \mid b \lhd U\}.$$

从直谓的角度来看，这里的拓扑是大拓扑，因为所考虑的 B 子集构成了一个大集合。不过，由于这个大集合是由一个小的基本开集集合生成的，因此能够避开许多大小问题。总而言之，形式拓扑是无点拓扑的一个分支，在其中，人们研究由基本开集代数这一广义概念给出的框架的小表示。

归纳生成的形式拓扑

尽管形式拓扑使无点拓扑在很大程度上能够得到相当深入的可断言性发展，但它并未解决所有大小问题。历史上，形式拓扑中最受关注的未解决问题之一，一直是如何直谓地构造两个形式拓扑的积。为了解决这一问题（以及出于其他动机），Coquand、Sambin、Smith 和 Valentini [CSSV03] 提出了归纳生成的形式拓扑这一概念。在文献中，“形式拓扑”一词既指归纳生成的形式拓扑，也指不一定是归纳生成的形式拓扑。

归纳生成的形式拓扑的核心思想是要求覆盖关系 (-) $\lhd$ (-) 成为一个归纳类型族。尽管有多种技术机制可以实现这一点，这一规定通常借助带索引的W-类型的一种变体来作出（我们在第2.3节中简要提及过）。

在处理归纳生成的形式拓扑时，例如，描述两个形式拓扑的积就变得容易。然而，其代价是限制了能够由形式拓扑这一概念所表示的空间类。在 [CSSV03, §4.7], 作者给出了一个并非归纳生成的形式拓扑的例。

据 Coquand（私人通信）所述，在撰写本文时，如何定义任意两个形式拓扑的积这一问题仍未解决。在我们的基础框架中，或许可以借助足够强大的高阶归纳类型来完成这一构造，值得进一步研究。

我们的方法与形式拓扑的比较

在本文中，我们采用了一种不同于形式拓扑研究方向的替代方法，来开展无点拓扑的可断言性发展。我们没有界定一个形式拓扑范畴，以体现 locale 概念的直谓形式，而是在满足某些大小要求的前提下直接研究 locale，以确保其具有良好的直谓性质。具体而言，我们在假设存在小基的条件下，研究了大、局部小且小完备的框架（见第3.5节），并从 de Jong 和 Escardó 的工作中汲取灵感 [dJon21b；dJE24；dJon23]。

然而，我们并未要求所有 locale 都配备小基，而是假定只有在必要时才存在合适的小基。换言之，我们只在需要时才将小基引入理论，而不是用由基本开集代数给出的某种表示来取代空间的概念。显然，每个由小形式拓扑表示的框架都满足这些大小要求（见 [Tos20，§4。4]）。

与归纳生成的形式拓扑相比，这种方法有若干优点和缺点：

- 我们的理论在直谓性方面不如归纳生成的形式拓扑理论表现良好。最突出的是，我们对带小基的 locale 的概念也面临同样的问题：两个 locale 的积能否以直谓方式定义尚不清楚。
- 由于我们采用 locale 的一般概念，因此可以研究那些无需任何限制便能良好成立的一般构造。
- 在发展谱 locale 理论时，我们利用单值性公理给出了谱性的定义（定义4.2.1），其中小基的概念自然产生。因此，我们得到的定义等价于采用形式拓扑进行研究（容易看出，定义4.4.20中的覆盖是形式拓扑意义下归纳生成的覆盖），但从非谓词性定义出发，这种做法有充分的动机。

- 最后，由于单值类型论带来的新颖之处，我们也选择从第一原理出发，对无点拓扑展开直谓研究。可以想见，在单值基础中，促使形式拓扑发展的某些问题或许能通过其他方式解决，例如借助恰当的高阶归纳类型来给出某些重缩放原理。Coquand 与作者的工作 [Tos20；CT21] 表明，在单值基础中，

要处理归纳生成的形式拓扑，首先需要某些高阶归纳类型。因此，高阶归纳类型对 locale 理论的类型论式直谓发展的影响值得进一步研究；过早地将注意力局限于形式拓扑，可能会缩小这类研究的范围。

形式拓扑相关工作的回顾

Cederquist 的类型论形式化 最早的形式拓扑形式化工作之一由 Cederquist 在其博士论文中完成 [Ced97]。Cederquist 的工作尤其关注无点拓扑在构造性分析中的应用 [CN96；CCN98]。在他的 Licentiate 学位论文中 [Ced94]（该论文是博士论文的一部分 [Ced97]），Cederquist 在形式拓扑框架下研究 Scott 域的 Scott 拓扑中的点，这项工作是其形式拓扑形式化库的一部分。这与我们在第 6.5.1 节中的研究有相似之处，与形式拓扑框架的确切关系仍有待进一步研究。Cederquist 的形式化是在ALF证明助手 [Mag94]中开发的。

单值基础中的形式拓扑 单值基础 在单值基础的背景下，最早的形式拓扑形式化由作者的硕士研究完成 [Tos20；CT21]。作者提出了对归纳生成的形式拓扑的完全直谓描述，并对其进行了完整的形式化 [Tos21]。

Coquand 和 Zhang 对补丁的描述 Coquand 和 Zhang [CZ03] 给出了稳定紧locale的补丁拓扑的一种直谓描述，该描述以呈现此 locale 的蕴涵关系为依据。他们处理呈现的方法与形式拓扑密切相关，尽管他们并未明确研究形式拓扑。

在我们的工作中，我们仅将补丁构造呈现为 Stone locale 到谱 locale 范畴（及谱映射）的余反射子。我们将把这一结果扩展为紧正则 locale 到稳定紧locale范畴的余反射，留待后续工作。另一方面，Coquand 和 Zhang 描述了更一般的稳定紧locale情形下的补丁 locale，并以此推导出谱 locale 的补丁，将其作为一个特例。

他们的工作为 Escardó 对补丁 locale 的直谓描述提供了另一种方案；我们在第 5.4 节中采用了后者。将这一方法调整到我们的框架中，将是未来研究的一个有前景的方向。我们相信，可以采用本论文提出的方法，而非 [CZ03] 所采用的形式拓扑方法。

7.2.2 其他相关研究

locale理论的构造性但非谓词性发展

Johnstone 对 [Joh82] 中的无点拓扑所作的发展是经典的。尽管他谨慎地用星号标记了选择公理的使用之处，却在其论述中随意使用排中律。不过，与 [Joh82], 不同，Johnstone 在 [Joh02, §C] 中以完全构造性的方式发展了一些 locale 理论。其他值得注意的

locale 理论的发展中，还有一些是按照拓扑斯内语言意义上的构造性方式进行的，例如 Manuell 的博士论文 [Man19] 及其讲义 [Man22], , 以及 Wrigley 的博士论文 [Wri24, §A.II]。

其他构造性与谓词性发展

在第 7.2.1 节中，我们说明了在类型论的语境下，形式拓扑是发展构造性与谓词性 locale 理论的标准方法。然而，在构造性集合论的语境下，存在一条关于构造性与谓词性[1] 拓扑的研究路线，其源自 Aczel 的工作 [Acz06]；此处我们不打算提供综述。在这一语境下，研究者使用一种称为集合生成的locale 的概念 [Acz06，定义 11], , 它与我们称为大完备 locale 和小完备 locale 的概念非常相似。集合生成的 locale 与我们所研究的 locale 的谓词性概念之间的确切关系，值得进一步探究。

7.3 后续工作

7.3.1 推广到稳定紧 locale

在我们的工作中，我们仅将补丁构造展示为 Stone 局部范畴到谱场所范畴（以及谱映射）的余反射子。正如 Escardó [Esc99 所示；Esc01], , 同一补丁构造也展示了紧正则 locale 范畴 **CReg** （以及连续映射）到SC 稳定紧 locale 范畴（以及完美映射）的余反射子。在我们论文所描述的框架中发展这一余反射，是一个很有前景的后续研究方向。事实上，我们已经在定义 3.6.5 中给出了正则 locale 概念定义的一个候选方案。

我们相信，余反射的这一扩展在直谓意义上是可能的，尽管与谱局部的情形相比，它可能会带来进一步的困难。对于稳定紧locale X，开集 U的基本覆盖族由并非全局紧、而仅紧相对于 U的开集组成。这意味着不存在单一类型（例如所有紧开集的类型）来给出基。因此，这一方向上的情形将类似于 de Jong 对连续格的研究 [dJon23，§4。4]

7.3.2 补丁 locale与Lawson 拓扑

我们在第6 章中对域的拓扑的研究主要集中于 Scott 域的 Scott 拓扑。在域理论文献中，域上还考虑另一种关键拓扑：*Lawson* 拓扑 [GHK+03，定义 III-1。1]。

在经典环境中，Lawson 拓扑与 Scott 拓扑的 Patch 之间的关系很直接：空间 Lawson(D) 与 Patch(Scott(D)) 同胚。然而，在构造性语境中，情况则更为复

[1]我们再次提醒读者，集合论学者使用“构造性”这一项来指称我们在本论文中所称的“构造性且直谓”。

杂。在构造性语境中，一般而言不可能出现这样的情况：

$$\mathsf{Lawson}(D) \cong \mathsf{Patch}(\mathsf{Scott}(D)) \tag{※}$$

这是因为 Lawson(D) 被定义为一个拓扑空间，它由点集 D 以及赋予该点集的拓扑构成，而该拓扑是 D 的某个子集类。由此，上述同胚将意味着 Patch(Scott(D)) 总是一个 空间 *locale*，因为它断言该对象与一个点集拓扑空间同胚。

考虑幂集 DCPO $\mathcal{P}(\mathbb{N})$，它是一个 Scott 域。对其 Scott locale 取 Patch 后，我们得到 Cantor locale $2^{\mathbb{N}}$：

$$2^{\mathbb{N}} = \mathsf{Patch}(\mathsf{Scott}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))).$$

因此，(※) 中的同胚立即给出了 Cantor 空间空间性的一个特例。然而，遗憾的是，构造性数学中有一个由 Fourman 和 Grayson 提出的著名结果 [FG82]，指出 *Cantor* 空间的空间性 等价于 Fan定理，而众所周知，Fan定理独立于构造性数学。因此我们知道，(※) 一般情况下不成立。

我们猜想，上述同胚的类似结果可以构造性地（且直谓地）得到，只要将 Lawson 拓扑定义在集合 $\#D$，即 D的尖锐元素上，而非其全部元素。我们在定理 6.6.3 中证明的结果是朝这一方向迈出的第一步，因为它表明Patch(Scott(D)) 的点恰好就是尖锐元素。我们相信，有可能证明这种点的等价相对于集合 $\#D$ 上 Lawson 拓扑的适当定义而言是一个同胚。然而，Lawson 拓扑的构造相当复杂，在撰写本文时我们尚未给出适当的定义。因此我们将此留作进一步的工作。

参考文献

[Acz06] Peter Aczel.《构造性集合论中一般拓扑学的若干方面》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》137.1–3（2006年）：第二届形式拓扑研讨会（2WFTop 2002）上宣读的论文。Bernhard Banaschewski、Thierry Coquand 与 Giovanni Sambin 编，第3–29页。doi: 10.1016/j.apal.2005.05.016（引用于第157页）。[AdMKU+] Jeremy Avigad、Leonardo de Moura、Soonho Kong、Sebastian Ullrich 等。《Lean 4 中的定理证明》。网址：https://leanprover.github.io/ theorem_proving_in_lean4/title_page.html（引用于第2页）。[AET25] Igor Arrieta、Martín H. Escardó 与 Ayberk Tosun.《单值基础中的 Patch 拓扑》。载于：《计算机科学中的数学结构》35（2025年），e18。doi: 10.1017/S0960129525000088（引用于第4–6页）。[AR10] Peter Aczel 与 Michael Rathjen.《构造性集合论笔记》。书稿。2010年8月。网址：https://www1.maths.leeds.ac.uk/~rathjen/book.pdf（引用于第46页）。[AR94] Jiří Adámek 与 Jiří Rosický.《局部可呈示与可及范畴》。伦敦数学会讲义丛书。剑桥大学出版社，1994年。doi: 10.1017/CBO9780511600579（引用于第50、66、70页）。[AW09] Steve Awodey 与 Michael A. Warren.《恒等类型的同伦论模型》。载于：《剑桥哲学学会数学汇刊》。第146卷，第1期。剑桥大学出版社，2009年，第45–55页（引用于第2页）。[Awo06] Steve Awodey.《高维范畴的类型论》。恒等类型——拓扑与范畴结构（乌普萨拉，瑞典）。2006年11月13日。网址：http://www2.math.uu.se/~palmgren/itt/（访问于2024年11月20日）（引用于第2页）。[Awo10] Steve Awodey.《范畴论》。第2版。第52卷。牛津：牛津大学出版社，2010年（引用于第102页）。

[Ban88] Bernhard Banaschewski。“再论局部化 Tychonoff 定理”。载于：Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 29.4（1988），第 647–656 页（引文见第 112 页）。[Bee24] Michael Beeson。“构造性数学”。载于：《斯坦福哲学百科全书》（2024）。Edward N. Zalta 编。网址：https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/（引文见第 2 页）。[Bis67] Erret Bishop。《构造性分析基础》。麦格劳-希尔图书公司，1967（引文见第 2 页）。[Bro08] Luitzen E. J. Brouwer。《逻辑原则的不可靠性》。第 2 卷。P. Noordhoff，1908年，第 152–158 页（引文见第 2 页）。[CAB+86] Robert L. Constable、Stuart F. Allen、H. M. Bromley、W. R. Cleaveland、J. F. Cremer、Robert W. Harper、Douglas J. Howe 等。《使用 NuPRL 证明开发系统实现数学》。Prentice Hall，1986（引文见第 2 页）。[CCHM18] Cyril Cohen、Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders Mörtberg。“立方类型论：单值性公理的一种构造性解释”。载于：第21届证明与程序类型国际会议（TYPES 2015）。Tarmo Uustalu 编。第 69 卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2018，5:1–5:34。doi: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5（引文见第 3 、 10 、 40 、 42 页）。[CCN98] Jan Cederquist 、 Thierry Coquand 和 Sara Negri。“类型论中的 Hahn-Banach 定理”。载于：《构造型类型论二十五年》。Giovanni Sambin 和 Jan M. Smith 编。第 36 卷。牛津：牛津大学出版社，1998年。isbn: 0198501277（引文见第 156 页）。[CD13] Thierry Coquand 和 Nils Anders Danielsson。“同构即相等”。载于：Indagationes Mathematicae。纪念 N.G. (Dick) de Bruijn（1918–2012）24.4（2013年11月15日），第 1105–1120 页。issn: 0019-3577。doi: 10.1016/j.indag.2013.09.002（引文见第 31 页）。[Ced94] Jan Cederquist。“类型论中无点拓扑的机器辅助形式化”。Licentiate 学位论文。博士论文。查尔姆斯理工大学和哥德堡大学，瑞典，1994（引文见第 156 页）。[Ced97] Jan Cederquist。“类型论中构造性分析的无点方法”。博士论文。瑞典哥德堡：查尔姆斯理工大学，1997年5月30日。网址：https://www.cse.chalmers.se/~coquand/cederquistPhD.pdf（引文见第 156 页）。

[CH88] Thierry Coquand 和 Gérard Huet。“构造演算”。载于：《信息与计算》76.2–3（1988），第 95–120 页。doi: 10.1016/0890-5401(88)90005-3（引文见第 2、14、39 页）。[CN96] Jan Cederquist 和Sara Negri。“形式实数的海涅–博雷尔覆盖定理的一个构造性证明”。载于：《证明与程序的类型》。Stefano Berardi 和 Mario Coppo 编。《计算机科学讲义》。柏林，海德堡：施普林格，1996，第 62–75 页。isbn: 978-3-540-70722-6。doi: 10.1007/3-540-61780-9_62（引文见第 156 页）。[Com24] Agda 社区。Cubical Agda 库。版本 0.7。2024年2月。网址：https://github.com/agda/cubical（引文见第 3 页）。[Coq03] Thierry Coquand。“紧空间与分配格”。载于：《纯粹与应用代数杂志》184.1（2003），第 1–6 页。issn: 0022-4049。doi: https://doi.org/10.1016/S0022-4049(03)00088-4。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404903000884（引文见第 1 、 43 页）。[CSSV03] Thierry Coquand 、 Giovanni Sambin 、 Jan Smith 和 Silvio Valentini。“归纳生成的形式拓扑”。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》124.1（2003），第 71–106 页。issn: 0168-0072（引文见第 153–155 页）。[CT21] Thierry Coquand 和 Ayberk Tosun。“形式拓扑与单值基础”。载于：《证明与计算 II》。2021。第 6 章，第 255–266 页。doi: 10.1142/9789811236488_0006。网址：https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789811236488_0006（引文见第 4、155–156 页）。[Cur10a] Giovanni Curi。“无点空间构造性理论的一些独特方面”。载于：《数学逻辑季刊》56.4（2010），第 375–387 页。doi: 10.1002/malq.200910037（引文见第 46 页）。[Cur10b] Giovanni Curi。“论斯通–切赫紧化的存在性”。载于：《符号逻辑杂志》75.4（2010），第 1137–1146 页。doi: 10.2178/jsl/1286198140（引文见第 46 页）。[CZ03] Thierry Coquand 和 Guo-Qiang Zhang。“稳定紧空间及其补丁拓扑的一种表示”。载于：《理论计算机科学》。计算机科学中的拓扑学 305.1（2003），第 77–84 页。issn: 0304-3975。doi: 10.1016/S0304-3975(02)00695-3（引文见第 156 页）。

[dJE21] Tom de Jong 和 Martín H. Escardó。《单值基础中序理论的构造性方面》。载于：第六届形式结构与计算演绎国际会议（FSCD 2021）。Naoki Kobayashi 编。第 195 卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2021年，8:1–8:18。doi: 10.4230/LIPIcs.FSCD.2021.8（引于第 39–40、46、112 页）。[dJE23] Tom de Jong 和 Martín H. Escardó。《单值基础中的小类型》。载于：《计算机科学中的逻辑方法》第 19 卷第 2 期（2023年5月）。doi: 10.46298/lmcs-19(2:8)2023。网址：https://lmcs.episciences.org/11270（引于第 46–47 页）。[dJE24] Tom de Jong 和 Martín H. Escardó。《单值基础中的域理论 II：连续域与代数域》。预印本。2024年7月18日。电子印本：2407.06956。网址：https://arxiv.org/abs/2407.06956（引于第 129、132、155 页）。[dJon21a] Tom de Jong。《域中的锐元素与可分离性》。载于：《第37届程序语义数学基础会议论文集》，MFPS 2021，混合形式：奥地利萨尔茨堡及线上，2021年8月30日至9月2日。Ana Sokolova 编。第 351 卷。EPTCS。2021年，第 134–151 页。doi: 10.4204/EPTCS.351.9。网址：https://doi.org/10.4204/EPTCS.351.9（引于第 6、143 页）。[dJon21b] Tom de Jong。《单值类型论中的 PCF Scott 模型》。载于：《计算机科学中的数学结构》31.10（2021）：《同伦类型论 2019》，第 1270–1300 页。doi: 10.1017/S0960129521000153（引于第 70–71、128–129、132、155 页）。[dJon23] Tom de Jong。《构造性与构造性单值基础中的域理论》。博士论文。英国伯明翰 B15 2TT：伯明翰大学，2023年（引于第 4、37、41–42、46–47、70–71、128–133、155、157 页）。[dJT23] Tom de Jong 和 Ayberk Tosun。TypeTopology 模块 DomainTheory.BasesAndContinuity.CompactBasis。https://www.cs.bham.ac.uk/~mhe/TypeTopology/DomainTheory.BasesAndContinuity.CompactBasis.html。Agda 开发成果。2023年10月5日。
https://github.com/martinescardo/TypeTopology/blob/master/source/DomainTheory/BasesAndContinuity/CompactBasis.lagda（引于第 132 页）。[DP02] Brian A. Davey 和 Hilary A. Priestley。《格与序导论》。第 2 版。剑桥大学出版社，2002年。ISBN: 978-0-521-78451-1。doi: 10.1017/CBO9780511809088（引于第 56、79–82、90 页）。

[DST19] Max Dickmann、Niels Schwartz 和 Marcus Tressl。《谱空间》。剑桥大学出版社，2019年。doi: 10.1017/9781316543870.001（引于第 71、108 页）。[Ec23] Martín H. Escardó 及贡献者。《TypeTopology》。Agda 开发成果。2023年。网址：https://github.com/martinescardo/TypeTopology（引于第 2–3 页）。[EK17] Martín H. Escardó 和 Cory M. Knapp。《通过单值类型论中的支配性处理部分元素与递归》。载于：第 26 届欧洲计算机科学逻辑协会计算机科学逻辑年会（CSL 2017）。Valentin Goranko 和 Mads Dam 编。第 82 卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2017年，21:1–21:16。doi: 10.4230/LIPIcs.CSL.2017.21（引于第 130 页）。[Eng89] Ryszard Engelking。《一般拓扑学》。修订增补版。第 6 卷。Sigma 数学丛书。柏林：Heldermann Verlag，1989年。ISBN：3-88538-006-4（引于第 61 页）。[Esc01] Martín H. Escardó。《稳定局部紧 locale 的正则局部紧余反射》。载于：《纯粹与应用代数杂志》157.1（2001），第 41–55 页。ISSN：0022-4049（引于第 5、108–109、112、157 页）。[Esc03] Martín H. Escardó。《核算子框架中的并》。载于：《应用范畴结构》11.2（2003），第 117–124 页（引于第 112 页）。[Esc12] Martín H. Escardó。TypeTopology 模块 UF.Hedberg。https://www.cs.bham.ac.uk/~mhe/TypeTopology/UF.Hedberg.html。Agda 开发成果。2012年。
h
t
t
p
s://
github.com/martinescardo/TypeTopology/tree/master/source/UF/Hedberg.lagda（引于第 21、45 页）。[Esc18] Martín H. Escardó。《沃埃沃茨基单价公理的自包含、简明且完整表述》。2018年。电子印本：1803.02294。网址：https://arxiv.org/abs/1803.02294（引于第 7 页）。[Esc19] Martín Hötzel Escardó。《使用 Agda 介绍数学的单值基础》。2019年11月。arXiv：1911.00580 [cs.LO]（引于第 4、10、26–27、31–32、39–41 页）。[Esc20] Martín H. Escardó。TypeTopology 模块 MGS.Equivalence-Induction。
https://
martinescardo.github.io/TypeTopology/MGS.Equivalence-Induction.html。Agda 开发成果。2020年5月1日（引于第 38 页）。[Esc98] Martín H. Escardó。《真内射空间与函数空间》。载于：《拓扑学及其应用》。域理论 89.1（1998），第 75–120 页。ISSN：0166-8641。doi: 10.1016/S0166-8641(97)00225-3（引于第 5、109、115、117 页）。

[Esc99] Martín H. Escardó。《稳定紧locale的紧正则余反射》。载于：《理论计算机科学电子笔记》，第20卷，1999年，第213–228页。doi: 10.1016/S1571-0661(04)80076-8（参见第5、77、108–109、112、122、157页）。[FG82] M.P. Fourman 和 R.J. Grayson。《形式空间》。载于：L. E. J. Brouwer 百年纪念研讨会。A.S. Troelstra 和 D. van Dalen 编。第110卷，《逻辑与数学基础研究》。爱思唯尔，1982年，第107–122页。doi: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70126-0。url: https: //www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X09701260（参见第158页）。[Fre64] Peter Freyd。《阿贝尔范畴：函子理论导论》。Harper & Row，1964年。后收入《范畴理论与应用重印集》第3卷，2003年。http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/tr3.pdf（参见第46页）。[GHK+03] G. Gierz、K. H. Hofmann、K. Keimel、J. D. Lawson、M. Mislove 和 D S. Scott。《连续格与域》。第93卷，《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，2003年。doi: 10.1017/CBO9780511542725（参见第128、130–131、157页）。[Hed98] Michael Hedberg。“Martin-Löf 类型论的相干定理”。载于：《函数式编程杂志》8.4（1998年），第413–436页。doi: 10.1017/S0956796898003153（参见第20–22页）。[How69] William A. Howard。“公式即类型的构造观念”。载于：To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism 44（1969年）。该文于1969年以私人传阅形式流通，直到1980年才正式发表，第479–490页（参见第2、13页）。[HS98] Martin Hofmann 和 Thomas Streicher。“类型论的群胚解释”。载于：《构造型类型论二十五年》（威尼斯，1995年）。第36卷，《牛津逻辑指南丛书》。纽约：牛津大学出版社，1998年，第83–111页（参见第2页）。[HW41] Witold Hurewicz 和 Henry Wallman。《维数论》（PMS-4）。第4卷，《普林斯顿数学丛书》。1948年修订版，2015年重印。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1941年。isbn: 9780691627748（参见第90–91页）。[Joh02] Peter T. Johnstone。《大象素描：拓扑斯理论纲要》。第1卷。牛津逻辑指南丛书第43册。英国牛津 OX2 6DP：牛津大学出版社，2002年。isbn: 0-19-853425-6（参见第49、54、61、156页）。

[Joh82] Peter T. Johstone。《Stone空间》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥，1982年。isbn: 978-0-521-33779-3（参见第1、54–59、61、69、71–72、79、110–111、121、145、156页）。[Joh83] Peter T. Johnstone。“无点拓扑的要点”。载于：美国数学学会通报（新系列）8.1（1983年），第41–53页。issn: 0273-0979（参见第1、71页）。[KECA17] Nicolai Kraus、Martín H. Escardó、Thierry Coquand 和 Thorsten Altenkirch。“马丁-洛夫类型论中匿名存在的概念”。载于：《计算机科学中的逻辑方法》13.1（2017年）。doi: 10.23638/LMCS-13(1:15)2017。url: https://doi.org/10.23638/LMCS-13(1:15)2017（参见第20–21、41、76页）。[Kel50] John L. Kelley。“Tychonoff 乘积定理蕴含选择公理”。载于：Fundamenta mathematicae 37（1950年），第75–76页。issn: 0016-2736（参见第1、43页）。[KL21] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。“单值基础的单纯形模型（据 Voevodsky）”。载于：欧洲数学学会杂志23.6（2021年），第2071–2126页。doi: 10.4171/jems/1050（参见第30页）。[Kna18] Cory M. Knapp。《单值类型论中的部分函数与递归》。博士论文。伯明翰大学计算机科学学院，2018年6月。url: https://etheses.bham.ac.uk/id/eprint/8448/（参见第4页）。[Mag94] Lena Magnusson。《ALF 的实现——基于 Martin-Löf 单态类型论与显式替换的证明编辑器》。博士论文。瑞典哥德堡：哥德堡大学，1994年（参见第156页）。[Man19] Graham Manuell。《半环的量子谱》。博士论文。英国爱丁堡：爱丁堡大学，2019年（参见第157页）。[Man22] Graham Manuell。《无点拓扑与构造性数学》。TACL 暑期学校课程讲义。米拉海滩，2022年6月。eprint: 2304.06000。url: https://arxiv.org/abs/2304.06000（参见第157页）。[Mar75] Per Martin-Löf。“直觉主义类型理论：直谓部分”。载于：《逻辑讨论会 ’73：逻辑讨论会论文集，布里斯托尔，1973年7月》。H. E. Rose 和 J. C. Shepherdson 编。第80卷，《逻辑与数学基础研究》。北荷兰出版公司和美国爱思唯尔出版公司，1975年，第73–118页。doi: 10.1016/S0049-237X(08)71945-1（参见第2、7页）。

[Mar82] Per Martin-Löf。《构造性数学与计算机编程》。载于：逻辑、方法论与科学哲学第六届会议：第六届国际逻辑、方法论与科学哲学大会论文集，汉诺威，1979年。L. Jonathan Cohen、Jerzy Łoś、Helmut Pfeiffer 与 Klaus-Peter Podewski 编。第104卷。逻辑与数学基础研究。北荷兰出版公司与 PWN 波兰科学出版社，1982年，第153–175页。doi: 10.1016/S0049-237X(09)70189-2（引用于第2、7页）。[Mar83] Per Martin-Löf。《论逻辑常项的意义与逻辑定律的正当性》。1983年4月在意大利锡耶纳所作三场讲座的笔记。1996年发表于《北欧哲学逻辑期刊》1(1):11-60（引用于第8页）。[Mar84] Per Martin-Löf。《直觉主义类型论》。第1卷。证明论研究。Giovanni Sambin 对1980年6月在帕多瓦所作系列讲座的记录。Bibliopolis，1984年。重新排版且可检索的版本见 https://raw.githubusercontent.com/michaelt/martin-lof/master/pdfs/Bibliopolis-Book-retypeset-1984.pdf（引用于第2页）。[Men28] Karl Menger。《关于一般度量的研究》。载于：《数学年刊》100（1928），第75–163页（引用于第91页）。[MM94] Saunders Mac Lane 与 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初步》。Universitext。纽约：施普林格，1994年。isbn: 9780387977102（引用于第49页）。[NDCA+07] Ulf Norell、Nils Anders Danielsson、Jesper Cockx、Andreas Abel 等。Agda。Agda 编程语言。2007年。url: https://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php（引用于第3、10页）。[Neg02] Sara Negri。《作为形式空间的连续域》。载于：《计算机科学中的数学结构》12.1（2002年），第19–52页。doi: 10.1017/S0960129501003450（引用于第153–154页）。[Nor09] Ulf Norell。《Agda 中的依赖类型编程》。载于：高级函数式编程：第六届国际学校，AFP 2008，海延，荷兰，2008年5月，修订讲义。Pieter Koopman、Rinus Plasmeijer 与 Doaitse Swierstra 编。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，2009年，第230–266页。isbn: 978-3-642-04652-0。doi: 10.1007/978-3-642-04652-0_5。url: https://doi.org/10.1007/978-3-642-04652-0_5（引用于第2–3、10页）。

[NPS90] Bengt Nordström、Kent Petersson 与 Jan M. Smith。《Martin-Löf 类型论编程：导论》。国际计算机科学专著丛书；7。牛津：牛津大学出版社，1990年。isbn: 0198538146（引用于第11页）。[PP11] Jorge Picado 与 Aleš Pultr。《框架与 locale：无点的拓扑》。数学前沿。Birkhäuser Basel，2011年10月21日。doi: 10.1007/978-3-0348-0154-6（引用于第1、145页）。[Rij17] Egbert Rijke。《并构造》。2017年1月。arXiv: 1701.07538 [math.CT]（引用于第37、42页）。[Rij22] Egbert Rijke。《同伦类型论导论》。2022年。arXiv: 2212.11082v1 [math.LO]。url: https://arxiv.org/abs/2212.11082v1（引用于第41页）。[Rus03] 伯特兰·罗素。《数学原理》。英国剑桥：剑桥大学出版社，1903年。url: https://archive.org/details/principlesofmath00russuoft（引用于第3页）。[Rus08] 伯特兰·罗素。《基于类型理论的数理逻辑》。载于：《美国数学杂志》30.3（1908年），第222–262页。issn: 0002-9327（引用于第3页）。[Sam00] Giovanni Sambin。《形式拓扑与域》。载于：《理论计算机科学电子笔记》。第四届域研讨会 35（2000年1月1日），第177–190页。issn: 1571-0661。doi: 10.1016/S1571-0661(05)80742-X（引用于第153页）。[Sam87] Giovanni Sambin。《直觉主义的形式空间——首次通报》。载于：数理逻辑及其应用。Dimiter G. Skordev 编。施普林格，1987年，第187–204页。doi: 10.1007/978-1-4613-0897-3_12（引用于第153页）。[Sim81] Harold Simmons。《康托尔-本迪克松分析的代数版本》。载于：拓扑学与分析的范畴论方面：在渥太华卡尔顿大学举行的国际会议论文集，8月11–15日。施普林格，1981年，第310–323页（引用于第112页）。[Smy93] Michael B. Smyth。《拓扑》。载于：《计算机科学逻辑手册》（第1卷）。牛津大学出版社，1993年，第641–761页。isbn: 0-19-853735-2（引用于第71、134页）。[Sto34] Marshall H. Stone。《布尔代数及其在拓扑中的应用》。载于：《美国国家科学院院刊》20.3（1934年），第197–202页（引用于第1、43、71页）。[Sto36] Marshall H. Stone。《布尔代数表示理论》。载于：《美国数学会会刊》40.1（1936年），第37–111页（引用于第1、43、71页）。

[Sto37] Marshall H. Stone. “分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示”。载于：Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 67 (1937)，第 1–25 页（引文见第 71 页）。[Str93] Thomas Streicher. “内涵类型论研究”。教授资格论文。慕尼黑路德维希-马克西米利安大学数学学院，1993年。网址：https://www2.mathematik.tu- darmstadt.de/~streicher/HabilStreicher.pdf（引文见第 17、23 页）。[TE23] Ayberk Tosun 和 Martín H. Escardó. “单值类型论中的谱 locale 的补丁 locale”。载于：MFPS XXXVIII 会议论文集。第 1 卷。《理论信息学与计算机科学电子札记》。2023年2月。doi: 10.46298/entics.10808。网址：https://entics.episciences.org/10808（引文见第 4–6 页）。[Tos20] Ayberk Tosun. “单值基础中的形式拓扑”。理学硕士论文。理学硕士论文。查尔姆斯理工大学，2020年。doi: 20.500.12380/301098。网址：https://odr.chalmers.se/handle/20.500.12380/301098（访问于2021年1月18日）（引文见第 4、55、155–156 页）。[Tos21] Ayberk Tosun. formal-topology-in-UF。GitHub 仓库。2021年。网址：https://github.com/ayberkt/formal-topology-in-UF（引文见第 156 页）。[Uem19] Taichi Uemura. “立方组装、单值且非谓词宇宙以及命题缩放的失败”。载于：第24届证明与程序类型国际会议（TYPES 2018）。Peter Dybjer、José Espírito Santo 和 Luís Pinto 编。第 130 卷。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2019年，7:1–7:20。doi: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2018.7（引文见第 3 页）。[Uni13] 单值基础项目。《同伦类型论：数学的单值基础》。高等研究院：https://homotopytypetheory.org/book，2013年（引文见第 2–4、7–8、10、18–19、21、24–31、33、36、39、102–103 页）。[Ury25] Pavel S. Urysohn. “关于康托尔多重性的论文”。载于：Fundamenta mathematicae 7 (1925)，第 30–137 页。ISSN：0016-2736（引文见第 91 页）。[Vic05] Steven J. Vickers. “通往吉洪诺夫定理的若干构造性途径”。载于：《从集合与类型到拓扑与分析》。牛津大学出版社，2005年。ISBN：9780198566519。doi: 10.1093/acprof:oso/9780198566519.003.0014（引文见第 1、43 页）。

[VMA19] Andrea Vezzosi、Anders Mörtberg 和 Andreas Abel. “Cubical Agda：一种具有单值性和高阶归纳类型的依赖类型编程语言”。载于：ACM 编程语言会议论文集 3.ICFP，第 87 篇（2019），第 1–29 页。doi: 10.1145/3341691（引文见第 3 页）。[Voe06] Vladimir Voevodsky. “关于同伦 λ 演算的一则极短札记”。载于：未发表札记（2006年10月27日）（引文见第 2 页）。[Voe11] Vladimir Voevodsky. “重缩放规则——其用途及语义依据”。在第18届证明与程序类型国际会议（TYPES）上作报告，地点：挪威卑尔根。2011年9月11日。网址：https://www.math.ias.edu/vladimir/sites/math.ias.edu. vladimir/files/2011_Bergen.pdf（引文见第 3、39 页）。[War06] Michael A. Warren. “内涵类型论的同伦模型”。《计算机科学基础方法》（加拿大阿尔伯塔省卡纳纳斯基斯）。2006年6月（引文见第 2 页）。[Wil94] J. Todd Wilson. “组装塔与框架理论的若干范畴论及代数方面”。博士论文。宾夕法尼亚州匹兹堡：卡内基梅隆大学计算机科学学院，1994年5月（引文见第 112 页）。[Wri24] Joshua L. Wrigley. “分类拓扑斯的教义式与群胚式表示”。博士论文。因苏布里亚大学，2024年（引文见第 157 页）。

索引

（−1）-范畴，46Ω-（$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$）-重定大小公理，40$\Omega_{\neg\neg}$-（$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$）-重定大小公理，40$\delta_{\mathcal{W}}$-完备，47λ-抽象，9 J规则，14$\mathcal{V}$-子集，36$\mathcal{W}$-有界完备，46$\mathcal{W}$-有向完备，46$\mathcal{W}$-上确界完备，46n-类型，28¬¬-稳定，54n-类型，19$\mathcal{V}$-族，38$\mathcal{V}$-小，37$\mathcal{V}$-小族，38$\mathcal{V}$-子类型，38$\mathcal{V}$-值子集，36 K公理，17

吸收律，**80**路径上的作用，15代数 DCPO，4，5，131，**132**，139代数性条件，131反经典，2公理，**10**，23选择公理，1，2，156可化归公理，3

基，50，**61**外延的，62，**62**内涵的，**62**谱的，66强的，**63**弱的，**62**，**63**locale的基，61基本覆盖族，**62**基本开集，**61**基，**61**为命题，14Bishop有限性，37有上界，**133**有界分配格，79

构造演算，14，39 Cantor 空间，158 收缩中心，18 圆，33 经典原理，2 既开又闭，60，67，90，123 以既开又闭集为基的locale，91 闭核，112，120 有限并下的闭包，57，64，76 相干locale，71 紧，56，58，131 紧locale，58，73 紧开，56，103，131 紧正则locale，157 紧致性，56，105 完备格，49 完全素的，145 完全素滤子，145 计算规则，8，14 可构造拓扑，108 构造性数学，2 构造子名称，12 连续性条件，131

连续 DCPO，131连续格，67连续映射，**49**，77可缩，**18**余反射子范畴，108累积性，11柯里-霍华德对应，2柯里-霍华德解释，13

可判定，20 可判定相等性，20 可判定命题，21、64 可判定类型，20 定义上相等，170 依赖函数类型，9 依赖积类型，9 依赖和类型，9 有向，46、52 有向族，46、52 有向上确界，47 有向化，64 离散类型，20 离散 locale，51、127 分配 $\mathcal{U}$-格，79 分配格同态，82 分配格同构，82 分配律，81、131 向下闭，82 对偶吸收律，80 消去规则，8 嵌入，25、26、38、62、100、102 空类型，9 枚举，37 等同性，9 相等判断，8 等价，24、25、30、32 类型等价，16 本质满，102 存在性，35 外延基，62、75 外延性公理，3、29 外延相等，23

忠实，**102**有限复合族，115，**115**纤维，**25**

滤子，145 有限，参见有限元 finitecovering，84 finiteelement，131，143 有限性，37 不动点集，55 flatdomain，129，130 形式拓扑，152，153 formationrule，8 框架，1，44，48 frame 分配律，69 框架同态，48 理想框架，84 核框架，5，110 Scott 连续核框架，5 Scott 开子集框架，136 自由生成，53 满，102 忠实且满，102，107 函数外延性，23，29 函数外延性公理，27 函数类型，9 函子作用，103，104 生成格，61 全局命题缩小，39 基础宇宙，11 happly，27 哈斯图，87 Heyting 蕴涵，49，69 高阶归纳类型，2，7，18，33，155 Hom 集，103 同胚，49 同伦层级，27 同伦集合，19 识别，9 恒等类型，14 非谓词数学，40 不可达的，134 指标化 W-类型，154 指标化 W-类型，13 不可分辨的同一者，15 归纳原理，33 归纳维数，91

归纳生成的形式拓扑，154归纳生成类型，11，32信息序，129初始框架，140内语言，157引入规则，8可逆，**24**，25，26

判断，8

Kuratowski 有限，37，**37**，56

排中律，2，20，36，41，156 Lawson 拓扑，6，128，157 左伴随，67 左可消去，25，25 集合 X 的提升，130 有限全知原理，2 列表，9 列表类型，9 locale，1，43，49 谱的，66 Stone，参见 Stone locale 局部 ν-小，37 局部可及，66 局部紧，67 局部可呈示，66，70 马丁-洛夫类型论，2，7 单子，56 幺半群，31 朴素函数外延性，24，27 朴素排中律，21，35 自然数，9 非平凡，47 核，154 Scott 连续，112 locale 上的核，55 可观测性质，144 开核，5，69，120，152 Pataraia 不动点定理，112 补丁 locale，108，150 补丁拓扑，108 路径，17 路径复合，17 路径归纳，17 路径求逆，17 完美映射，5，77，152 点，1,144，145 谱的，146 带点有向完备偏序集，129 逐点相等，23 核的偏序集，110 偏序的，46 正的，47 幂集，51 幂集框架，96 谓词，36 预测数学，3 谓词性，10，40 预核，56，115，116 主滤子，65，137，143 主理想，83，89 积类型，9 证明助手，2 证明无关，19 性质，19 命题，18 命题性的 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-重定大小公理，39 命题外延性，20，29，38 命题重定大小，112 命题重定大小公理，3 命题截断，34 拟逆，24，82 反射子，34 正则 locale，61，67，90，157 重定大小禁忌，46 右伴随，67，69 饱和子集，154 Scott 域，5，128，131，133 Scott locale，5，136，141 Scott 拓扑，5，128，134，157 Scott 连续，105，112 Scott 连续核，5 Scott 开，52，134 Scott 开子集，65 集合（同伦层级），19

集合替换原理，41, 74, 95 集合替换，62 集合生成的，157 锐的，143 尖锐元素，6, 128, 143 Sierpiński locale，52, 79,87, 96, 139, 140 单纯集合模型，30 单元素集，18 大小（类型的），10, 37 小（类型），39, 73 小基，50 小理想，83 小类型，37 小完全素，145 sober，71 参见 sober空间，145 解集条件，67 空间性的，43, 158 空间 locale，158 谱基，66, 72 谱 locale，1, 4, 5, 71, 72, 73, 89 谱映射，77, 103, 104 谱点，6, 128, 146 谱空间，71, 108 谱，86 分裂本质满，102, 102, 104 分裂支撑，76 稳定紧 locale，157 标准结构概念，32, 101 Stone，127 Stone 基，67, 93 Stone 对偶，1, 4, 71, 79 Stone locale，1, 4, 67, 92, 108 Stone空间，71 结构，19 结构恒等原理，31, 101 子族，38 子locale，54, 56 子对象分类器，36 子集，36 子单元素，18 子类型，36

后继宇宙，**11**和类型，**9**满射，102

禁忌，2终端 locale，**50**，78，87，127Fan 定理，158集合替换原理，4单值性公理，2，7内含关系，60类型论（Russell 风格），3薄（范畴），46超限归纳，112传输，15吉洪诺夫定理，1类型等价，29，100类型论，2类型判断，**8**

超滤子，71单位类型，**9**单值性公理，18，**30**，38，75，95单值数学，7单值类型论，7单值宇宙，**30**Sierpiński 的泛性质，**54**宇宙，**10**宇宙层级，11未指定存在，35，63上有界，**133**上闭集，**65**向上封闭，134

远小于，**59**，67，**131**远小于关系，59，77弱基，68，73，91弱常值，**22**良内，**60**内含关系，60

零维空间，90零维基，**67**零维 Locale，**67**，90，122