arXiv:2603.01312v1 [math.GT] 1 Mar 2026

链环-箭图对应的几何方法 II：有理链环

Jonathan A. Higgins

摘要。 [21, 22], 链环-箭图对应最初提出时预言，链环的对称（或反对称）着色 HOMFLY-PT 多项式的生成函数可以写成“箭图形式”，即将生成函数表示为一个二次型和两个线性形式。Stošić 和 Wedrich [39], 最初针对有理链环证明了这一点；而在本文中，我们从几何角度直接描述这些线性形式和二次型，并将其与三点穿孔平面的第一和第二构形空间联系起来。

目录

1. 引言 2 2. 背景 6 2.1. 量子代数 6 2.2. 有理缠结 7 2.3. 有理辫结的闭合 8 2.4. 有理链环的着色 HOMFLY-PT 多项式 10 2.5. 链环-箭图对应 12 3. 有理缠结的链环-箭图对应 14 3.1. 拉格朗日子流形的构造 14 3.2. 环与同态 17 3.3. 有理缠结的几何公式 19 4. 有理结 20 4.1. 建立纽结定理 20 4.2. Q 25的对称性 4.3. 步骤 1：线性形式 26 4.4. 步骤 2：二次型 31 4.5. 步骤 3：修正项 44 4.6. 示例：有理环面结 48 4.7. 示例：8字结， $K_{5/2}$ 495. 2分量有理链环 51 5.1. 建立链环定理 51

关键词与短语。着色 HOMFLY-PT 多项式、有理链环、Links-Quivers、构形空间。作者的研究部分得到美国国家科学基金会 DMS-2405402 项目资助。

5.2. 定理 5.4 的证明 56 5.3. 示例：有理环面链环 66 5.4. 示例：
$L_{8/3}$ 676. 对称着色多项式不变量 68 6.1. 对称着色 HOMFLY-PT 多项式 68 6.2. 着色琼斯多项式 70 6.3. 示例：8字结的着色琼斯多项式 71 参考文献 72

1. 引言

链环 L 的着色 HOMFLY-PT 多项式构成了一个无穷不变量族，被认为能够推广许多其他链环多项式。因此，计算这些多项式通常既繁琐又困难，但 Kucharski、Reineke、Stošić 和 Sułkowski 提出的链环-箭图对应 [21, 22] 预言，对称着色 HOMFLY-PT 多项式（或反对称着色 HOMFLY-PT 多项式）的生成函数可以用有限量的数据表示。顾名思义，对于任意链环 L，该猜想预言，我们可以将其与一个对称箭图 Q_L 联系起来，使得 L 对 L 的着色 HOMFLY-PT 多项式生成函数（记作 $P(L)$）可以用 Q_L 的生成函数表示。自该猜想提出以来，人们对这些箭图 [3, 6, 13, 20] 的结构进行了广泛研究，并证明了它适用于若干类纽结 [39, 40]。更多进展参见 [5, 12, 23, 32, 38] ，而 [4, 19] 则提出了将其推广到纽结补的方案。在 [39], 中，Stošić 和 Wedrich 证明了该猜想对有理链环成立；本文将为这一结果提供一种新的几何解释。我们将重点研究反对称着色 HOMFLY-PT 多项式，但我们的结果也适用于对称着色多项式。继 [11], 中我们对有理缠结所做的工作之后，本文将利用带孔平面的第一和第二构形空间中拉格朗日子流形的相交模型，确定有理链环对应的箭图。

HOMFLY-PT多项式（未着色）最初由 Hoste、Ocneanu、Millett、Freyd、Lickorish 和 Yetter 在 [7]以及 Przytcycki 和 Traczyk 在 [33], 提出，定义为 Jones 多项式和亚历山大多项式的二元推广。在其开创性论文[14], 中，Jones 将链环的 HOMFLY-PT多项式描述为一条辫在 Hecke代数中的像的 Ocneanu迹，其中该辫的闭合产生此链环。按杨图索引的着色 HOMFLY-PT 多项式（在最一般的情形下）随后可通过对链环的辫表示进行缆化、插入与杨图相关的“投影子”并取迹，从而精确定义。

在 [37], 中，Reshetikhin和Turaev证明，通过用与单李代数相关联的量子群的不可约表示对其股线着色，可以得到缠结的不变量。特别地，A型不变量可通过使用 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的不可约表示得到。就我们的目的而言，给定固定的 $N \in \mathbb{N}$，我们将链环 L 的 j着色 $\mathfrak{sl}_N$多项式理解为对 L 的所有股线用微小表示 $\Lambda^j V_N$着色所得到的多项式，其中 V_N是 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$的向量表示，并且 $0 \leq j \leq N$。

若将 L的这一多项式不变量记为 $P_L^{\bigwedge^j},_N(q)$，则已知它们对$N \gg 0$ 是稳定的，其意义在于

$$P_{L,N}^{\bigwedge^j}(q) = P_L^{\bigwedge^j}(q,a)\Big|_{a\mapsto q^N}$$

对于较大的 N 不会产生抵消，其中 $P_L^{\bigwedge^j}(q,a)$ 即我们所谓的 j-着色 HOMFLY-PT 多项式。就前一段而言，这是由含有 j 个方格的单列杨图所标记的着色 HOMFLY-PT 多项式。

给定一个具有 m 个顶点的对称箭图 Q，其上同调 Hall 代数的生成函数由下式给出

$$P_Q(x_1,...,x_m) = \sum_{\mathbf{d}=(d_1,...,d_m)\in\mathbb{N}^m} (-q)^{-\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle_Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_1^{d_1}...x_m^{d_m}}{(1-q^{-2})...(1-q^{-2d_i})}, \tag{1}$$

其中 Q 也表示其邻接矩阵，$\langle \mathbf{d},\mathbf{e}\rangle_Q = \sum_{i,j}(\delta_{ij} - Q_{ij})d_i e_j$ 是其欧拉形式，而 $x_1,...,x_m$ 是形式变量。链环-箭图对应将这种形式的生成函数与链环的着色 HOMFLY-PT 多项式的生成函数联系起来。若 L 是一个具有 $|L|$ 个分支的链环，我们可以定义生成函数

$$\widehat{P}(L) = \sum_{j\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{j}(1-q^{2i})\right)^{|L|-2} P_L^{\bigwedge^j}(q,a)x^j \tag{2}$$

它是标准着色 HOMFLY-PT 生成函数的一个重新标度版本，

$$P(L) = \sum_{j\geq 0} P_L^{\bigwedge^j}(q,a)x^j, \tag{3}$$

这也是本文主要研究的对象。不过，Links-Quivers 对应关系最好用 P（L）来表述。

猜想 1（Links-Quivers对应关系）。 对于任意链环 L，都存在一个对称箭图Q_L ，使得

$$\widehat{P}(L) = P_{Q_L}(\overline{x})\Big|_{x_i\mapsto(-1)^{Q_{ii}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x},$$

其中， S 和 A 是长度等于 Q_L 中顶点数量的向量，其邻接矩阵为 Q。

在本文中，我们将邻接矩阵 Q 视为二次型，并将向量S 和 A 视为定义在带有优选基的自由 $\mathbb{Z}$-模上的线性形式。对于既约分数 $u/v \in \mathbb{Q}^{\geq 1}$，若 u 为奇数，则得到一个有理结 $K_{u/v}$；若 u 为偶数，则得到一个二分支有理链环 $L_{u/v}$。与这些链环相关联的是带孔平面中的两类拉格朗日子流形，它们的交点为这些自由 $\mathbb{Z}$-模提供优选基。对于有理结 $K_{u/v}$，我们用 $\mathcal{D}(K_{u/v})$表示带孔平面中由这两个拉格朗日子流形构成的图示； $\mathcal{D}(L_{u/v})$的定义类似。见图1。现在，我们陈述本文的主要定理。

定理 1. 对于有理结 $K_{u/v}$，我们可以将 $P(K_{u/v})$ 表示为

$$P(K_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_u)\in\mathbb{N}^u} (-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中， S 和 A 由以 u 拉格朗日交点为基点的环路绕三个穿孔点的绕数计算得出，位于 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中。二次型 Q 也可以用类似的方法计算，但需转到三点穿孔平面的第二构形空间，此时还需要考虑环路绕对角线 Δ的绕数。

关于二分量链环的定理类似，但带色 HOMFLY-PT 不变量不再是 Laurent 多项式。

定理 2. 对于一个二分支有理链环 $L_{u/v}$，我们可以将 $P(L_{u/v})$ a表示为 s

$$P(L_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_{2u})\in\mathbb{N}^{2u}} \frac{(-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^T}}{\prod_{i=1}^{2u}(q^2;q^2)_{d_i}} x^{d_1+\ldots+d_{2u}}, \tag{5}$$

其中， S 和 A 由以 $2u$ 拉格朗日交点为基点的环路绕三个穿孔点的绕数计算得出，位于 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 中。二次型 Q也可以用类似的方法计算，但需转到三点穿孔平面的第二构形空间，此时还需要考虑环路绕对角线 Δ的绕数。

在 [39], Stošić 和 Wedrich 证明了有理链环的链环-箭图对应，方法是证明 $P(K_{u/v})$ 和 $P(L_{u/v})$ 可以写成式 (4) 和 (5) 的形式，并将其称为生成函数的“箭图形式”。本文的贡献在于探究箭图形式与链环几何之间的关系，从而给出一种“几何上优选”的箭图。

定理 1 和定理 2 的陈述将在第 4 节和第 5 节中分别形式化并证明。证明将主要依托于 [11], 本文的前篇，该文建立在 Wedrich [43] 关于有理缠结的工作之上。具体而言，遵循 Stošić 和 Wedrich 在 [39], 中的做法，我们将有理链环视为有理缠结的闭合；随后，通过对缠结的 skein 模求值 $\langle\tau_{u/v}\rangle_j$ 取闭合，可以计算有理缠结 $\tau_{u/v}$ 的闭合的j-着色 HOMFLY-PT 多项式，其中求值是在适当定义的“着色 HOMFLY-PT” skein 模中进行的。具体而言，这可以视为针对 $N \gg 0$ 的着色 $\mathfrak{sl}_N$ skein 模，其中通过设定$a = q^N$，消除了对 N 的依赖。更多细节见 [11] 。

对于当代结不变量研究而言，范畴化尤为重要。在 Khovanov 最初对琼斯多项式进行范畴化之后（ [15] 另见[2]），数学家们开始寻求对其他量子不变量的范畴化。Khovanov 的原始结果由 Bar-Natan 在 [1] 推广到缠结，并由 Khovanov 和 Rozansky 在 [17]推广到（未着色的）$\mathfrak{sl}_N$ 不变量。大约在同一时期，Khovanov 和 Rozansky 在 [16] 和 [18], 对 HOMFLY-PT 多项式进行了范畴化；随后，Makaay、Stošić 和 Vaz 在 [27] ，以及 Webster 和 Williamson 在 [42]将其推广为带色 HOMFLY-PT 同调。Rasmussen 在 [35] 对结多项式和范畴化作了出色的阐述。

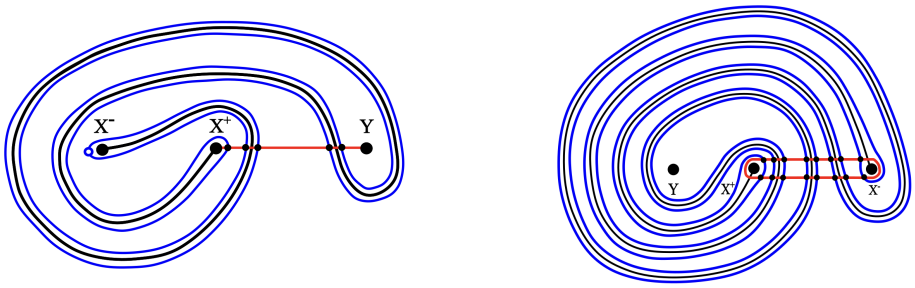


图1. 左： $\mathcal{D}(K_{5/2})$。右： $\mathcal{D}(L_{8/3})$。

带色 HOMFLY-PT 同调具有三重分次，因此，若令 $C\mathcal{H}_i^{\bigwedge^r,\ j,\ k}$ 表示 r-着色 HOMFLY-PT 链复形中（在同伦意义下定义的）部分，其（q， a， t）分次为（i， j， k），其中 t 为同调分次，那么庞加莱多项式为

$$\mathcal{P}_L^{\bigwedge^r}(q,a,t)=\sum_{i,j,k} q^i a^j t^k \dim(C\mathcal{H}_{i,j,k}^{\bigwedge^r}). \tag{6}$$

自然地，令 $t=-1$ 就对应于取分次欧拉示性数，从而得到 r 色HOMFLY-PT多项式 $P_L^{\bigwedge^r}(q,\ a)$。文献 [22]，还给出了猜想 1 关于庞加莱多项式的推广，该推广预言， L 的带色 HOMFLY-PT 同调可由一个链复形表示，其同调分次由 Q_L 的对角线确定。如果

$$\mathcal{P}(L)=\sum_{r\geq 0}\mathcal{P}_L^{\bigwedge^r}(q,a,t)x^j \tag{7}$$

是庞加莱多项式的生成函数，而

$$\widehat{\mathcal{P}}(L)=\sum_{r\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{r}(1-q^{2i})\right)^{|L|-2}\mathcal{P}_L^{\bigwedge^r}(q,a,t)x^j \tag{8}$$

是经过重缩放的版本，那么我们可以用下面的猜想 2 来表述 Links-Quivers 对应到庞加莱多项式的推广；这也是对文献 [22] 中猜想4.4的重新表述。特别地，我们对文献 [22] 中猜想里的四重分次庞加莱多项式进行变量替换，以得到适用于反对称着色HOMFLY-PT同调的形式。

猜想 2. 对于具有指数增长性质的链环 L，其着色 *HOMFLY-PT* 同调可以由满足以下条件的链复形表示：

$$\widehat{\mathcal{P}}(L)=\sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_m)\in\mathbb{N}^m}\frac{q^{S\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^T}a^{A\cdot\boldsymbol{d}}t^{T\cdot\boldsymbol{d}}}{\prod_{i=1}^{m}(q^2;q^2)_{d_i}}x^{d_1+\ldots+d_m} \tag{9}$$

对于某些 m，其中 $T=(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{Z}^m$ 满足 $t_i=-Q_{ii}$。

在 [39], 中，Stošić 和 Wedrich 证明，理性纽结的未染色 HOMFLY-PT 同调可以由一个链复形表示，其同调分次由 $-Q$ 的对角元给出。自然，要讨论这一猜想，就需要理解完整的带色 HOMFLY-PT 链复形，包括微分。我们不会在此探究这一点，但在条件允许时，将从我们的几何框架出发讨论这一猜想。

致谢作者谨向博士导师 Jacob Rasmussen 致以谢意，感谢他在撰写本文期间提供的宝贵意见与支持。作者还要感谢 Piotr Kucharski、Marko Stošić、Piotr Sułkowski 和 Paul Wedrich 对早期稿件提出的宝贵意见。

论文结构 第 2 节将介绍本文所需的一些背景知识，包括量子代数、有理缠结与链环、带色 HOMFLY-PT 不变量以及链环-箭图对应的更多细节。第 3 节将简要回顾本文前篇[11], 中的必要构造与结果。在第 4 节和第 5 节中，我们将分别把这些结果推广到纽结和链环，并在此过程中详细说明几何设置。第 4 节和第 5 节的末尾将给出示例，以展示刚刚介绍的理论。最后，我们将在第 6 节中简要讨论对称染色不变量。

2. 背景

2.1. 量子代数。 我们先介绍一些量子代数的基本定义和记号，后文将会用到。

定义 2.1. 最一般形式的*Pochhammer* 符号可定义为 $(x;y)_i = \prod_{j=0}^{i-1}(1-xy^j)$。

我们最常用的 Pochhammer 符号类型是 $x = y = q^2$，或

$$(q^2;q^2)_i = \prod_{j=1}^{i}(1-q^{2i}).$$

不过，我们也会遇到其他 Pochhammer 符号，包括

$$(a^2q^{2-2j-2k};q^2)_k = \prod_{i=1}^{k}(1-a^2q^{2i-2j-2k})$$

我们可以用 Pochhammer 符号来定义量子多项式系数。

定义 2.2。 设 d_1，...，$d_m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ 满足 $d_1 + ... + d_m = d$。那么，我们可以将量子多项式系数定义为多项式

$$\begin{bmatrix} d \\ d_1, ..., d_m \end{bmatrix} = \frac{(q^2;q^2)_d}{(q^2;q^2)_{d_1}...(q^2;q^2)_{d_m}} \in \mathbb{Z}[q^2].$$

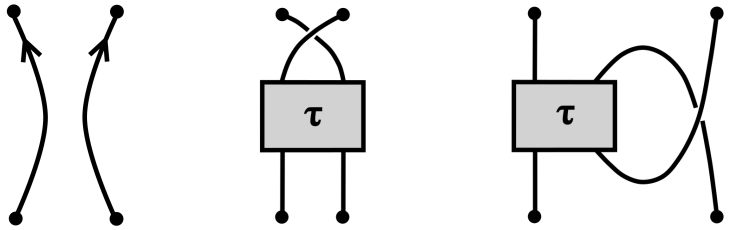


图 2. 左：平凡缠结，$\tau_{0/1}$。中：顶部扭转规则。右：右侧扭转规则。

自然地，当 $m=2$ 时，量子二项式就是这种情形，我们采用 [39] 的记号来表示

$$\begin{bmatrix} j \\ d_1 \end{bmatrix}_+ = \begin{bmatrix} j \\ d_1, j-d_1 \end{bmatrix} = \frac{(q^2;q^2)_j}{(q^2;q^2)_{d_1}(q^2;q^2)_{j-d_1}}.$$

最后，我们给出来自 [22], 的以下引理，它是量子代数中许多计算的有用工具。

引理 *2.3. </style}*对于 d_1，*.....*， $d_m \geq 0$，以下结论成立：

$$\frac{(x^2;q^2)_{d_1+\ldots+d_m}}{(q^2;q^2)_{d_1}\ldots(q^2;q^2)_{d_m}} = \sum_{\substack{\alpha_1+\beta_1=d_1 \\ \ldots \\ \alpha_m+\beta_m=d_m}} \frac{(-x^2q^{-1})^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} q^{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_m^2+2\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_{i+1}(d_1+\ldots+d_i)}}{(q^2;q^2)_{\alpha_1}\ldots(q^2;q^2)_{\alpha_m}(q^2;q^2)_{\beta_1}\ldots(q^2;q^2)_{\beta_m}}.$$

2.2. 有理缠结。 这些*(*正*)*有理缠结 是由两股线构成的定向缠结的无限族。它们可以通过归纳方式定义：从由两条未缠绕且方向朝上的股线组成的平凡缠结开始，记作$\tau_{0/1}$，然后依次施加有限次顶部和右侧扭转。见图 2。

与正有理缠结对应的是一个既约分数 $u/v \geq 0$，已知它是该缠结的同痕不变量。这个分数可以根据施加于$\tau_{0/1}$的顶部和右侧扭转序列计算得到。我们将$\tau_{u/v}$ 记作与 u/v对应的有理缠结；于是，扭转对 u/v 的影响可写为：

$$T\tau_{u/v} = \tau_{(u+v)/v} \qquad\qquad R\tau_{u/v} = \tau_{u/(u+v)},$$

其中， T 和 R 分别表示顶部和右侧扭转。

要构造一个有理缠结 $\tau_{u/v}$，我们总可以先施加一个顶部扭转 T to$\tau_{0/1}$ ，因为 $R\tau_{0/1} = \tau_{0/1}$。若 $u/v \geq 1$，那么最后一次扭转就是顶部扭转，因此我们可以写成 $T^{a_n}R^{a_{n-1}}\ldots R^{a_2}T^{a_1}\tau_{0/1} = \tau_{u/v}$，其中每个 $a_i > 0$和 n都是奇数，而 T和 R的规则给出

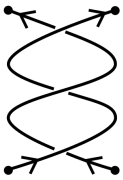
$$\frac{u}{v} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2}+\ldots+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}}.$$

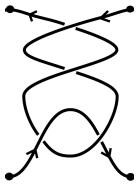
或者，如果 $0 < u/v < 1$，最后一次扭转就是右侧扭转，因此此时有 $R^{a_n}T^{a_{n-1}}...R^{a_2}T^{a_1}\tau_{0/1} = ^{\tau}u/v$ ，所以 n是偶数，并且

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1}+...+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}}.$$

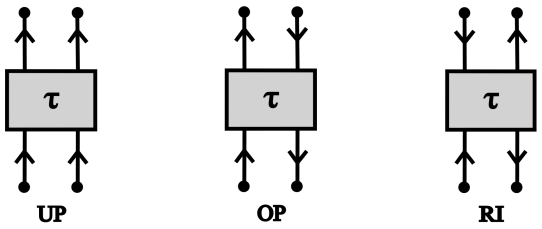
因此，给定一个非负有理数，我们可以用以下某种形式的连分数展开来表示它，进而确定获得 $^{\tau}u/v$ 所需的特定顶部和右侧扭转序列。特别是，当且仅当 $u/v \geq 1$ 时，连分数展开应具有奇数项；这一点总是可以保证。

下面给出几个例子。

$\tau_{3/1} = T^3\tau_{0/1} =$ 

$\tau_{5/2} = T^2RT\tau_{0/1} =$ 

这些例子展示了不同的顶部和右侧扭转序列如何导致边界处股线的定向不同。可能的定向只有三种，为遵循 Stošić 和 Wedrich [39] 的惯例，我们将它们记作 UP、OP，以及 RI。下图展示了这三种可能的定向。



因此，我们看到 $^{\tau}3/1$ 具有 UP 定向，而 $^{\tau}5/2$ 具有 OP 定向。关于有理缠结的更多细节，请参见 [11] 的第 2.2 节。

2.3. **有理辫结的闭合**。 有理缠结有两种闭合操作可以得到有理链环。第一种称为分子闭合，即将 NW/SW 点与 NE/SE 点粘合在一起。由于缠结端点在竖直方向上彼此连接，这种操作也称为*N/S*闭包。另一种闭合操作称为分母闭包，或*E/W*闭包，即将 NW/NE 端点与 SW/SE 端点粘合在一起。

定义2.4. （正）有理链环 是通过对（正）有理缠结取闭合而得到的链环。

自然地，定向会限制特定有理缠结可采用哪些闭合操作。具体而言，要进行$^{\tau}u/v$ 的分子闭合，其定向必须为 UP 或 OP

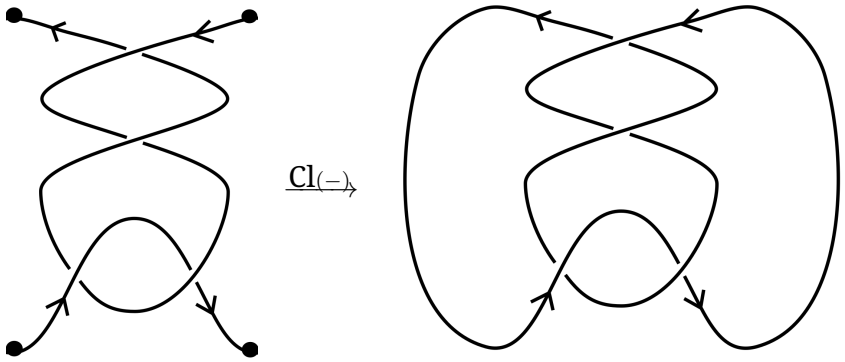


图3. 8字结， $K_{5/2}$，视为 Cl($\tau_{5/2}$)

；同理，要进行$\tau_{u/v}$ 的分母闭包，其定向必须为 RI 或 OP 。

此外，暂且忽略定向，可以很容易看出，对有理缠结取闭包常常会产生可约交叉。如果 $u/v > 1$，那么 $\tau_{u/v}$ 的最后一次扭转就是顶部扭转，此时对其取分母闭包会产生可通过第一类 Reidemeister 变换消去的可约交叉。类似地，如果 $u/v < 1$，那么取分子闭合会产生可约交叉。自然地，我们希望避免产生这些可约交叉；因此，只有在 $u/v \geq 1$ 时（如果定向允许），我们才取分子闭合；只有在 $u/v < 1$ 时（定向允许的情况下），我们才取分母闭包。

这一讨论说明，有理链环可以由许多不同有理缠结的闭包得到。我们暂且不再赘述，但感兴趣的读者可参阅[31] 了解更多。不过，我们需要以下关于有理链环的引理，该引理已在 [39] 中得到证明。

引理 2.5. 任何非平凡正有理链环都可通过取有理缠结$\tau_{u/v}$ 的分子闭合得到，其中 $u/v > 1$ 具有 UP 或 OP 定向。此外，该闭合为纽结当且仅当 u 为奇数；在此情形下，若 v为奇数，则$\tau_{u/v}$ 具有 UP 定向，若 v 为偶数，则具有 OP 定向。

该引理方便地限制了我们在处理有理链环时需要关注的缠结与闭包类型。

定义 2.6. 给定有理缠结$\tau_{u/v}$，其中 $u/v > 1$ 且 UP 或 OP 定向，令Cl($\tau_{u/v}$)表示其分子闭合。若Cl($\tau_{u/v}$)为纽结（从而 u 为奇数），则将Cl($\tau_{u/v}$)记为 $K_{u/v}$；否则， u 为偶数且该闭合为2分量链环，因此我们将Cl($\tau_{u/v}$)记为 $L_{u/v}$。

接下来，我们将讨论有理链环的着色 HOMFLY-PT 多项式，并确定处理这些多项式时所采用的约定。

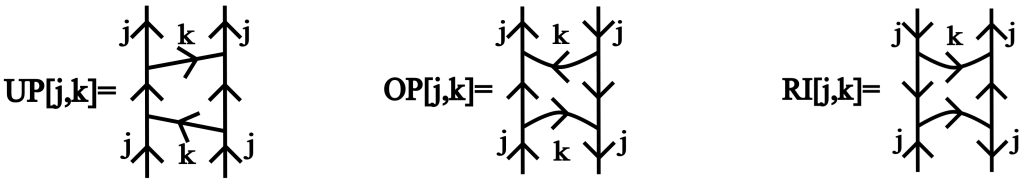


图 4. 三种类型的基底网

2.4. **有理链环的着色 HOMFLY-PT 多项式**。首先，我们需要简要回顾有理缠结的 skein 模评价。最终，我们将把着色 HOMFLY-PT 多项式视为在适当定义的“着色 HOMFLY-PT skein 模”中对 skein 模评价取闭合所得的结果。对于有理缠结$\tau_{u/v}$，我们将其 j-着色 HOMFLY-PT skein 模评价记为 $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$ ，因此，Cl($\tau_{u/v}$) 的着色 HOMFLY-PT 多项式将通过对$\langle \tau_{u/v} \rangle_j$取闭合来计算。最终，对于纽结，这将得到一个 Laurent 多项式；而对于具有多个分支的链环，则得到一个有理表达式。

skein 模的求值 $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$ 是基底网 $X[j,k]$在 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$ 上的线性组合，其中 $X \in \{UP, OP, RI\}$ 表示 $\tau_{u/v}$的定向。图 4 展示了每种 X对应的网的画法。我们有 $0 \leq k \leq j$ ，并且删除标记为 0 的边。

正如我们在 [11]中讨论的那样， $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$ 可以通过归纳应用 Wedrich 的扭转规则 [43]来计算。具体而言，可以从 $\langle \tau_{0/1} \rangle_j = UP[j,0]$开始，然后应用构造 $\tau_{u/v}$时使用的相同一系列顶部和右侧扭转，并在每一步应用以下规则：

(1) T向上$[j,k] = \sum_{h=k}^{j} (-q)^h q^{k^2} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+$向上$[j,h]$(2) TOP
$[j,k] = \sum_{h=k}^{j} (-q)^h a^k q^{k(k-2j)} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+RI[j,h]$(3) TRI
$[j,k] = \sum_{h=k}^{j} (-q)^h a^h q^{q^2-2hj} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}_+OP[j,h]$(4) R向上
$[j,k] = \sum_{h=0}^{k} (-q)^h a^h q^{k(2j-k)-2hj} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-OP[j,h]$(5)
ROP$[j,k] = \sum_{h=0}^{k} (-q)^h a^k q^{-k^2} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-$向上$[j,h]$(6) RRI
$[j,k] = \sum_{h=0}^{k} (-q)^h q^{-k(k-2j)} \begin{bmatrix} j-h \\ k-h \end{bmatrix}^-RI[j,h]$.

在 [11], 中，我们以略有不同的形式呈现了这些信息。特别是，我们主要关注与有理缠结相关的庞加莱多项式 $\langle\langle - \rangle\rangle_j$ ，它们是 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, a^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$上的 $X[j,k]$ 的线性组合。然而， $\langle \tau_{u/v} \rangle_j = \langle\langle \tau_{u/v} \rangle\rangle_j|_{t=-1}$，因此，上述扭转规则可通过代入 $t = -1$从 [11] 中的规则推出。有关 skein 模评价的更多详情，请参阅 [11] 。

关于链环的着色 HOMFLY-PT 多项式，可说的内容很多，但我们在此只陈述必要的部分。尽管它们可以直接用表示论来定义，我们将通过取 skein 模评价的闭包来计算它们

对于有理缠结，正如我们已经提到的。特别地，如果

$$\langle \tau_{u/v} \rangle_j = \sum_{k=0}^{j} C_k \, X[j,k], \qquad\qquad C_k \in \mathbb{C}[q^{\pm 1}, a^{\pm 1}],$$

那么，对 $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$ 取闭合意味着

$$\mathrm{Cl}(\langle \tau_{u/v} \rangle_j) = \sum_{k=0}^{j} C_k \mathrm{Cl}(X[j,k]),$$

其中，$\mathrm{Cl}(X[j,k]) \in \mathbb{C}(q)[a^{\pm 1}]$ 是利用 skein 模结构计算的。因此，根据引理 2.5，要计算有理链环（含一个或两个分支）的 j-着色 HOMFLY-PT 多项式，只需知道 $\langle \tau_{u/v} \rangle_j$、$\mathrm{Cl}(UP[j,k])$ 和 $\mathrm{Cl}(OP[j,k])$。在 [39], 中，作者给出了这些量的公式，但事实证明，考虑诸如 $\mathrm{Cl}(TX[j,k])$ 这样的公式在计算上更有帮助；由于 $u/v \geq 1$，我们可以这样做。如果 $\tau_{u/v}$ 具有 UP定向，那么消去最后一个顶部扭转后得到$\tau_{(u-v)/v}$，其定向也为 UP。另一方面，如果$\tau_{u/v}$ 具有 OP 定向，那么消去最后一个顶部扭转后得到$\tau_{(u-v)/v}$，其定向为 RI。于是，我们得到以下闭合公式，这些公式在 [39],中得到证明，其中 $\sim$ 表示“相差一个框架平移”（ [39] 中的公式写法不同，但通过 ± 1的框架平移即可与这些公式对应），这相当于将 j-着色 HOMFLY-PT 多项式乘以 $(-q)^{\mp j} a^{\mp j} q^{\pm j^2}$。

引理 2.7. 我们有如下结论：

$$Cl(TUP[j,k]) \sim (-q)^k q^{2k^2} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_+ \frac{(a^2 q^{2-2j-2k}; q^2)_k}{(q^2; q^2)_k} \tag{10}$$

$$Cl(TRI[j,k]) \sim (-q)^{k-j} a^{2(k-j)} q^{2(k-j)^2} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_+ \frac{(a^2 q^{2-2j-2(j-k)}; q^2)_{j-k}}{(q^2; q^2)_{j-k}}. \tag{11}$$

现在，我们已经具备了在此背景下定义有理链环的着色 HOMFLY-PT 多项式所需的一切。

定义 2.8. 给定一个有理缠结 $\tau_{u/v}$，其定向为 $u/v > 1$ 和 UP，或为 OP，则其分子闭合的j-着色 ***HOMFLY-PT*** 多项式 记为 $P^{\bigwedge^j}_{u/v}(q,\ a)$，定义如下：

$$P^{\bigwedge^j}_{u/v}(q,a) := \mathrm{Cl}(\langle T\tau_{(u-v)/v} \rangle_j).$$

需要强调的是，尽管这并非定义这些不变量的标准方式，但它仍与标准定义一致（相差某个框架平移）。我们将其写作定义，是为了确立记号，也因为我们将按此方式计算它们。此外，$\bigwedge^j$ 中的 $P^{\bigwedge^j}_{u/v}$ 表示我们使用的是反对称着色 HOMFLY-PT 多项式，而非对称着色 HOMFLY-PT 多项式。

现在，我们需要介绍用于这些带色 HOMFLY-PT 不变量生成函数的记号。

定义 2.9. 给定一个有理结 $K_{u/v}$，我们用 $P(K_{u/v})$ 表示其着色 HOMFLY-PT 多项式的生成函数:

$$P(K_{u/v}) = \sum_{j\geq 0} P^{\bigwedge^j}_{u/v}(q,a)x^j.$$

类似地，对于二分支有理链环 $L_{u/v}$，定义 $P(L_{u/v})$。

2.5. **链环-箭图对应**。 给定一个链环 L，链环-箭图对应预测可以找到一个对称箭图 Q_L ，使得 L 的着色 HOMFLY-PT 多项式的生成函数（可能需用 Pochhammer 符号重新缩放）与和 Q_L相关的生成函数相联系。如引言中所述，对于任意对称箭图 Q，其上同调 Hall 代数的生成函数（即我们所需要的生成函数）具有如下形式

$$P_Q(x_1,...,x_m) = \sum_{\mathbf{d}=(d_1,...,d_m)\in\mathbb{N}^m} (-q)^{-\langle \mathbf{d},\mathbf{d}\rangle_Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_1^{d_1}...x_m^{d_m}}{(1-q^{-2})...(1-q^{-2d_i})}, \tag{12}$$

其中 $\langle \mathbf{d}、\mathbf{e}\rangle_Q = \sum_{i、j}(\delta_{ij} - Q_{ij})d_ie_j$ 以及 x_1，..... x_m 均为形式变量。

在第2.4节中，我们介绍了一种理解有理链环的（反对称）着色 HOMFLY-PT 多项式的方法，但正如前文所暗示的，这些不变量对任意链环都存在。设 $P_L^{\bigwedge^j}(q、a)$ 表示链环 L的 j-着色 HOMFLY-PT 多项式。若 L 具有$|L|$ 个分支，回顾如下用 Pochhammer 符号表示的（重新缩放后的）着色 HOMFLY-PT 多项式生成函数。

定义 2.10. 我们将 $\widehat{P}(L)$ 定义为生成函数

$$\widehat{P}(L) = \sum_{j\geq 0} (q^2;q^2)_j^{|L|-2} P_L^{\bigwedge^j}(q,a)x^j. \tag{13}$$

现在我们可以陈述链环-箭图对应猜想。

猜想 2.11 (链环-箭图对应 [22]). 给定一个链环 L，存在一个对称箭图 Q_L ，其邻接矩阵为 Q，使得

$$\widehat{P}(L) = P_{Q_L}(\overline{x})|_{x_i\mapsto(-1)^{Q_{ii}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x}, \tag{14}$$

其中 S 和 A 可以视为线性形式， Q 则是定义在适当定义的自由 $\mathbb{Z}$-模上的二次型，该模的维数由 Q 中顶点的数量给出。

重要的是，链环-箭图对应预言，仅凭有限数量的数据，就能描述链环 L 的无穷多个着色 HOMFLY-PT 多项式。具体而言，只需要两个线性形式和一个二次型。如果要计算着色 HOMFLY-PT 链复形的庞加莱多项式，而不只是着色 HOMFLY-PT 多项式，预期只需再增加一个线性形式（正如 Gorsky、Gukov 和 Stošić 提出的“精细指数增长”猜想 [9, 10]所预言的那样）。

在 [39], 中，Stošić 和 Wedrich 通过证明 $P(K_{u/v})$ 与 $P(L_{u/v})$ 可以写成“箭图形式”，从而证明了有理链环的链环-箭图对应。

定义 2.12. 对于有理结 $K_{u/v}$， $P(K_{u/v})$ 处于箭图形式，如果它可以写成

$$P(K_{u/v}) = \sum_{\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_u)\in\mathbb{N}^u} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}} a^{A\cdot\mathbf{d}} q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t} \begin{bmatrix} j \\ d_1,\dots,d_u \end{bmatrix} x^j, \tag{15}$$

其中， S 和 A 可视为线性形式，而 Q 可视为维数为 u的自由$\mathbb{Z}$-模上的二次型。类似地，对于二分支有理链环 $L_{u/v}$，如果 $P(L_{u/v})$可以写成箭图形式，那么它就是

$$P(L_{u/v}) = \sum_{\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_{2u})\in\mathbb{N}^{2u}} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}} a^{A\cdot\mathbf{d}} q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^t} \frac{x^j}{\prod_{i=1}^{2u}(q^2;q^2)_{d_i}}, \tag{16}$$

其中， S 和 A 可视为线性形式，而 Q 可视为维数为 $2u$的自由$\mathbb{Z}$-模上的二次型。

因此，可以将 [39] 的主要定理陈述如下。

定理 2.13 ([39])。 对于 $K_{u/v}$ 有理结和 $L_{u/v}$ 二分支有理链环，$P(K_{u/v})$ 和 $P(L_{u/v})$ 均可表示为箭图形式。

本文将提供一种几何方法来计算 S， A，以及 Q。证明主要定理所需的一项事实是，箭图形式中使用的二次型 Q 并非唯一，且不唯一性很大。

定义 2.14。 给定一个对称矩阵 Q ，它在方程 (15) 或 (16) 中起二次型的作用。若将 Q 替换为 Q' 后得到相同的生成函数，则称 $Q \sim Q'$，其中 Q' 是一个与其尺寸相同的对称矩阵。用链环-箭图对应的术语来说，这意味着

$$P_Q(x_1,\dots,x_u)\Big|_{x_i\mapsto(-1)^{Q_{i,i}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x} = P_{Q'}(x_1,\dots,x_u)\Big|_{x_i\mapsto(-1)^{Q'_{i,i}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x}. \tag{17}$$

重要的是， S 和 A 被假定为固定的。

在本文后续的证明中，我们需要对二次型中的某些项进行置换，并将二次型视为对称矩阵。Jankowski、Kucharski、Larraguível、Noshchenko 和 Sułkowski 在 [13]中的以下定理给出了置换 Q 中的项的一些条件，使得这些置换的结果 Q'满足$Q \sim Q'$。此外，我们将使用记号 $\Lambda_i = (-1)^{Q_{i,\ i}-S_i} q^{S_i-1} a^{A_i}$和 $Q_0 = \{1,\dots,|Q|\}$，其中 $|Q|$ 表示 Q中的行数（或列数）。

定理 2.15. （定理 *6, [13]*）如果 Q 和 Q' 是两个大小相同的对称矩阵，并且对所有 $i \in Q_0$都附有数据 $\Lambda_i = \Lambda'_i$，那么若 Q 和 Q' 通过一系列互不相交的非对角线元素换位相关

$$Q_{ab} \leftrightarrow Q_{cd}, \qquad Q_{ba} \leftrightarrow Q_{dc}$$

对于两两不同的 a、b、c、$d \in Q_0$，满足

$$\Lambda_a\Lambda_b = \Lambda_c\Lambda_d$$

and

$$Q_{ab} = Q_{cd} - 1, \qquad Q_{ai} + Q_{bi} = Q_{ci} + Q_{di} - \delta_{ci} - \delta_{di}, \qquad \forall i \in Q_0,$$

or

$$Q_{cd} = Q_{ab} - 1, \qquad Q_{ci} + Q_{di} = Q_{ai} + Q_{bi} - \delta_{ai} - \delta_{bi}, \qquad \forall i \in Q_0,$$

则 $Q \sim Q'$。

因此，定理 2.15 给出了在 Q 中对成对非对角元进行置换、同时仍得到相同生成函数的若干充分条件。

3. 有理缠结的 Links-Quivers

本文以 [11], 的工作为基础，因此我们现在回顾本文其余部分所需的构造与结果。更多细节请参阅 [11] 。

3.1. 拉格朗日子流形的构造。 首先，我们描述 [11] 中所用的几何构造。为了计算缠结的线性形式与二次型，我们研究了三点穿孔平面 $M = \mathbb{C} \setminus \{X^+, X^-, Y\}$ 的第一和第二构形空间中沿拉格朗日子流形定义的环路。

第一类拉格朗日子流形是穿孔 X^+ 与 X^- 之间的一条弧。对于有理缠结 $\tau_{u/v}$ ，我们将该拉格朗日子流形记为 $\alpha_{u/v}$。在 [11], 中，我们给出了构造 $\alpha_{u/v}$ 的几种不同方法，此处将回顾其中两种。第一种方法是直接的，第二种则是归纳的。自然，能够对任意 u/v 直接构造 $\alpha_{u/v}$ 十分方便，但理解归纳方法同样有益，因为本文证明的一个重要部分将涉及撤销最后一次顶部扭转，并考察这如何影响这些拉格朗日子流形。

现在，我们以引理的形式介绍第一种方法。这实质上是对 [43] 第 4.1 节开头内容的改写，以符合我们的约定。

引理 3.1. 在同痕意义下，$\alpha_{u/v}$ 可以按如下方式构造：在实轴上画出区间 $[-2, -1]$和 $[1, 2]$，并将它们划分为 u 个等长部分。若 $u \geq v$，从点 ± 1出发，按照顺时针方向将两条线段上各划分部分的端点标记为 0、1、...、$2u - 1 \in \mathbb{Z}/(2u)\mathbb{Z}$，如左侧图5所示。从标记为 0 的点 $par(u) \in \{\pm 1\}$出发，根据 u的奇偶性，画出弧 $\alpha_{u/v}$：先到达对侧标记为 v 的点，再到达起始侧上的 $2v$ （模 $2v$），并如此继续，直到再次到达 $\{-2, -1, 1, 2\}$。平面上的三个穿孔点是实轴上位于 $x = \pm 1$、2 处的点。若 $u < v$，则交换 u 和 v的角色，按逆时针方向标记各划分点，并像前一种情形那样继续操作，但从标记为 0 的点 $-par(v) \in \{\pm 1\}$ 开始。（等价地，将 $\tau_{v/u}$ 对应的图形关于虚轴反射。）此时，平面上的三个穿孔点位于实轴上的 $x = \pm 1$、-2 处。

现在我们已经知道如何构造 $\alpha_{u/v}$，接下来需要定义其他类型的拉格朗日子流形。正如引理 3.1 所述，我们可以将三个穿孔点 $X^+, X^-,$ 和 Y 视为 $\mathbb{C}$ 实轴上的点，因此可以从左到右排列。令 l_A 为一条竖直拉格朗日子流形（平行于虚轴），连接左侧和中间的穿孔点，

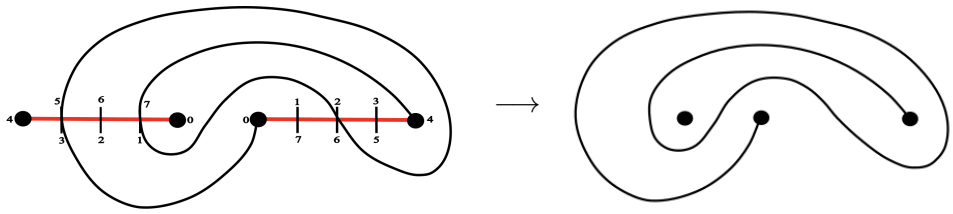


图5. 引理 3.1 在 $\tau_{4/3}$ 上的应用

并令 l_I 为一条连接中间和右侧穿孔点的竖直拉格朗日子流形，使得 l_A 和 l_I 与 $\alpha_{u/v}$的交点数最少。然后可以验证

$$|\alpha_{u/v} \cap l_A| = u \qquad \text{and} \qquad |\alpha_{u/v} \cap l_I| = v.$$

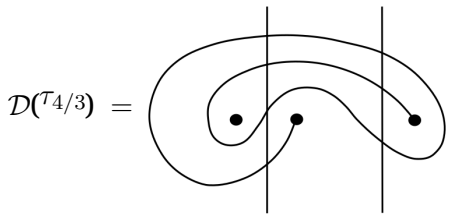
接下来，我们为这些拉格朗日子流形及其与 $\alpha_{u/v}$· 的交点提供一些名称。

定义3.2。 我们将 l_A 称为活跃轴，将 l_I 称为非主动轴。$\alpha_{u/v} \cap l_A$ 中的点称为活动交点，$\alpha_{u/v} \cap l_I$ 中的点称为非活跃交点。

在 [11], 中，我们需要使用由这些拉格朗日子流形组成的三点穿孔平面中的图，因此引入了以下记号。

定义3.3. 给定一个有理缠结 $\tau_{u/v}$，令 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 为 $M = \mathbb{C} \setminus \{X^+, X^-, Y\}$ 中由拉格朗日子流形 $\alpha_{u/v}, l_A,$ 和 l_I 组成的图。

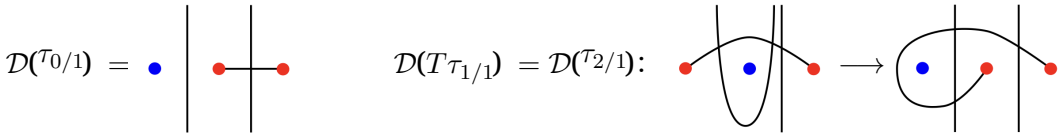
示例见下图。本文将对纽结和链环采用类似的方法，但拉格朗日子流形将有所不同。



接下来，我们介绍用于获得 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 的归纳过程，该过程同样取自 [43]。在下面的图中，蓝点是 Y，红点是 X^+ 和 X^-，它们的确切位置由具体的扭转序列决定。不过需要特别注意的是，对于$\tau_{0/1}$，中间的点是 X^-，右侧的红点是 X^+。

引理 3.4 （引理 4.1, [43]）。 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 可按如下方式利用 l_A 和 l_I 归纳构造。从对应于$\tau_{0/1}$的图（如下所示）出发，通过将 l_A弯向 l_I 并将其拉直来施加顶部扭转，如右下方所示。右侧扭转的实施

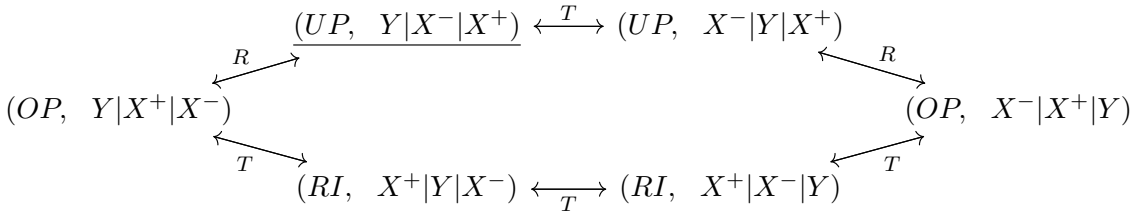
以类似方式进行，即将 l_I 弯向 l_A ，然后拉直。



已知 $\tau_{4/3} = TR^2T\tau_{0/1}$，不难验证，引理 3.4 得到的$\mathcal{D}(\tau_{4/3})$与引理 3.1 在添加 l_A 和 l_I 后得到的结果相同（相差一个同痕）。

文献 [11], 中的计算以及本文中的计算，都需要追踪这三个穿孔点。继续以 $\tau_{4/3}$ 为例，$\mathcal{D}(\tau_{4/3})$中的三个穿孔点从左到右分别是Y， X^-，和 X^+。我们用记号 $Y|X^-|X^+$来编码这些信息。除了知道命名穿孔点的排序外，我们还想知道$\tau_{u/v}$的定向。我们将由$\tau_{u/v}$ 的定向和穿孔点的排序组成的数据对称为$\tau_{u/v}$的状态，并记作（X， $A|B|C$），其中 X 表示定向，而 A， B，和 C 是穿孔点的名称。例如，$\tau_{4/3}$ 的状态为（UP， $Y|X^-|X^+$），这与$\tau_{0/1}$的状态相同。下面的引理说明顶部和右侧扭转如何影响状态。

引理 3.5 (推论 4.3, [43])。 下图展示了顶部和右侧扭转对弧的定向以及点 X^-、X^+ 和 Y 的配置所产生的影响（从左到右阅读）。带下划线的状态表示平凡缠结$\tau_{0/1}$的状态。



接下来，我们需要为拉格朗日交点引入记号。

定义 3.6。 给定一个有理缠结 $\tau_{u/v}$，令 $\xi_1, ..., \xi_u$ 表示活动交点， $\xi_{u+1}, ..., \xi_{u+v}$ 表示 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中的非活动交点。我们用 $\mathcal{G}^T_{u/v}$ 表示交点集，即 $\mathcal{G}^T_{u/v} = \{\xi_1, ..., \xi_{u+v}\}$。

在继续定义 [11], 中使用的环与同态之前，我们先给出 ξ_i的一个重要排序。

定义 3.7。 令 $\mathbf{r}: [0, 1] \to \alpha$ 为 α 的匀速参数化，且无临界点，并满足 $\mathbf{r(0)} = X^-$ 且 $\mathbf{r(1)} = X^+$。给定两个交点 ξ_i 和ξ_j，若 $\xi_i = \mathbf{r}(t_0)$ 且 $\xi_j = \mathbf{r}(t_1)$，其中 $t_0 < t_1$，则称 $\xi_i \prec \xi_j$。

稍后将利用 ξ_i 的这一排序来帮助定义有理链环的拉格朗日交点排序。

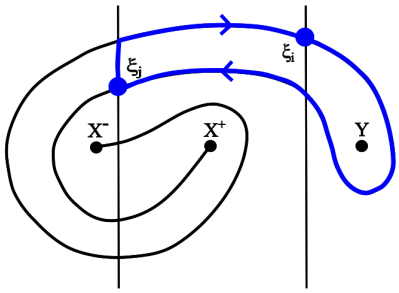


图 6. 一个环路示例 $\gamma_{i,j}^{T}$ for $\tau_{5/2}$

3.2. **环与同态。** [11] 中有两种不同类型的环路：一种定义在 M 中，另一种定义在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中。不过，这两种类型都由 $\mathcal{G}_{u/v}^{T}$ 中的交点对来索引。首先，我们将描述 M 中的环路。在接下来的讨论中，需要注意的是，当我们说一条路径是唯一的，我们指的是它在同伦意义下唯一。

给定两个交点 ξ_i 和 ξ_j，从 ξ_i 到 ξ_j 沿着 α存在唯一一条路径。将这条路径记为 $\eta_{i,j}$。如果 ξ_i 和 ξ_j 都是活跃或非活跃交点，那么沿着相应的活跃或非活跃轴，存在一条从 ξ_j 返回到 ξ_i 的唯一一条路径。否则， ξ_i 和 ξ_j 位于不同的竖直拉格朗日子流形上。如果 $\xi_i \in l_A$ 和 $\xi_j \in l_I$，那么我们可以确定一条从 ξ_j 返回到 ξ_i 的唯一一条路径：先沿着 l_I 走到顶部交点，沿着 α滑动到 l_A上的顶部交点，然后沿着 l_A向下返回到 ξ_i 。如果 $\xi_j \in l_A$ 和 $\xi_i \in l_I$，我们也可以用类似的方式定义从 ξ_j 到 ξ_i 的唯一一条路径。令 $\bar{\eta}_{j,i}$ 表示刚才描述的从 ξ_j 到 ξ_i 的路径，具体取决于 ξ_i 和 ξ_j 各自是活跃还是非活跃。

定义 3.8. 给定 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中的拉格朗日交点 ξ_i 和 ξ_j，令 $\gamma_{i,j}^{T}\colon [0,1] \to M$ 表示环路 $\gamma_{i,j}^{T} = \eta_{i,j} \cdot \bar{\eta}_{j,i}$。

与 [11]，相比，我们加入上标 T，以表明这是为有理缠结定义的环路。稍后我们将使用上标 K 和 L，表示纽结和 2分量链环对应的环路。

相对于 $\prec$， $\mathcal{G}_{u/v}^{T}$ 中存在一个最大元，即紧邻 X^+ 之前的交点。 [11] 中使用的许多环路具有如下形式：$\gamma_{i,j}^{T}$，其中 ξ_j 是这个特定交点，因此我们采用以下记号。

定义 3.9. 给定一个有理缠结 $\tau_{u/v}$，令 ξ_ω 表示相对于 $\prec$ 的 $\mathcal{G}_{u/v}^{T}$ 的最大元。现在定义 $\gamma_i^T := \gamma_{i,\omega}^{T}$。

接下来，我们必须考虑 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路。回想一下，环路 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$ 由一对 (σ^1, σ^2) 给出，其中 σ_1 与 σ_2 都是在 M 中交换起点/终点的环路或路径，使得对所有 $t \in [0,1]$， $\sigma^1(t)$ 与 $\sigma^2(t)$ 互不相同。

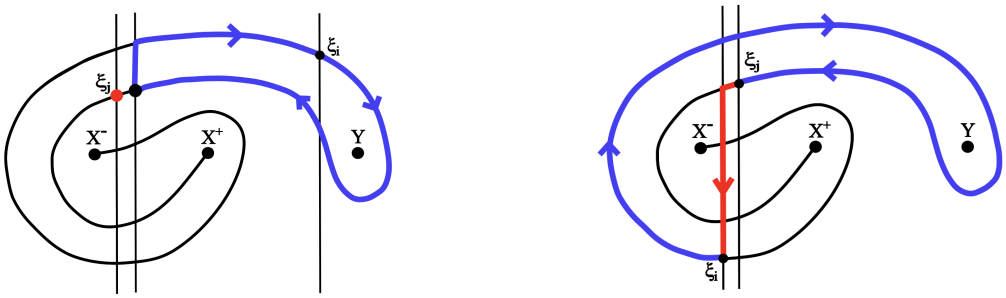


图 7. 两个示例环路 $\tilde{\gamma}_{i,j}^{T}$ （对于 $\tau_{5/2}$）

尽管 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路与 M 中的环路相似，但要仔细定义它们需要多得多的工作，因此我们请读者参阅[11] 中第 3.1 节末尾对它们的细致处理。在此，我们只陈述关于这些环路的几点事实。它们由拉格朗日交点的（有序）对 ξ_i 与 ξ_j 索引，使得与这些交点相关联的$\tilde{\gamma}_{i,j}^{T} = (\sigma_{i,j}^1, \sigma_{i,j}^2) : [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$ 满足$\gamma_{i,j}^{T} = \sigma_{i,j}^1 + \sigma_{i,j}^2$ 于 $H_1(M)$ 中。$\tilde{\gamma}_{i,j}^{T}$ 的基点通过取竖直拉格朗日子流形的平行副本来确定，并将 ξ_i 或 ξ_j 中位于另一个下方者（若两者均为活跃或非活跃交点），或其中的活跃者（若一个为活跃而另一个为非活跃），置于最左侧的竖直拉格朗日子流形上。图 7 中给出了两个例子，但详细解释可见于 [11]。

我们还必须定义 [11] 中所用的同态。这些与我们稍后在本文中需要用到的同态相同。设 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$。我们所需的第一类同态是根据 Ψ_V^1 定义的：$\pi_1(M) \to \mathbb{Z}$，它由如下复合给出

$$\Psi_V^1 : \pi_1(M) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathbb{C} \setminus V) \to \pi_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_2 \xrightarrow[\sim]{\mathrm{ab}} \mathbb{Z},$$

其中第二个映射将环路 $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus V$ 映为 $(\gamma, c_V) \subset \mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$，其中 c_V 是位于 V 处的常值环，其余映射均为显然的映射（除了对特定同构 $\pi_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_2$ 的选取之外）。然后，对于 $W \subseteq \{X^+, X^-, Y\}$，我们将 Ψ_W： $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ 定义为

$$\Psi_W := \frac{1}{2} \sum_{V \in W} \Psi_V^1.$$

不难验证，除以 2 后结果仍为整数。另一类同态是 Φ： $\pi_1(\mathrm{Conf}^2(M)) \to \mathbb{Z}$，它由如下复合给出

$$\Phi : \pi_1(\mathrm{Conf}^2(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_2 \xrightarrow[\sim]{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}.$$

对于刚才描述的所有同态，通过选择观察 $\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})$ 中环路的视角，可以定义同构 $\pi_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_2$。[11] 中的约定以及本文的约定是：应将页面顶部朝向自己倾斜来观察环路，使

页面的印刷面朝下。换句话说，你是从上方观察环路；当环路在页面上向左或向右移动时，从这一视角看，它也会向相同方向移动。示例请参见 [11] 中第2.4节的末尾。

3.3. **有理缠结的几何公式**。 在陈述主要结果之前，我们需要先回顾 [11],中的一些其他记号约定。

定义 3.10。 给定一个有理缠结 $\mathcal{T}_{u/v}$，令 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 表示$\mathcal{T}_{u/v}$的着色 HOMFLY-PT skein 模评价的生成函数，即

$$P(\tau_{u/v}) = \sum_{j\geq 0}\langle \tau_{u/v}\rangle_j.$$

此外，下面的公式会用到某些 δ 项。例如，$\delta_{i,A}$ 应读作

$$\delta_{i,A} = \begin{cases} 1, & \xi_i \text{ is an active intersection point} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

而$\delta_{i,I}$ 的读法类似，但在定义中用“非活动”代替“活动”。此外，我们用 Z 表示三个穿孔点中的中间一个，因此δ_{Z,X^+} 应读作克罗内克δ函数：当 $Z = X^+$ 时取 $\mathbf{1}$，否则取 $\mathbf{0}$。

现在，我们可以陈述将要用到的第一个主要结果，它来自 [11]。

命题 3.11。我们可以将 $P(\mathcal{T}_{u/v})$ 表示为

$$\sum_{\mathbf{d}=(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{u+v}})\in\mathbb{N}^{\mathbf{u+v}}} (-q)^{S\cdot\mathbf{d}} a^{A\cdot\mathbf{d}} q^{\mathbf{d}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{d^t}} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{u+1}+\ldots+d_{u+v} \\ d_{u+1},\ldots,d_{u+v} \end{bmatrix} \times X[d_1+\ldots+d_{u+v}, d_1+\ldots+d_u], \tag{18}$$

其中， S、 A和 Q 定义在自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^T_{u/v}$ 上，该模的基由 $\mathcal{G}^T_{u/v}$ 给出，并通过以下公式计算：

$$\begin{cases} S_i = \Psi_{\{X^\pm,Y\}}([\gamma_i]) + \delta_{i,A}\delta_{\omega,I} - \delta_{i,I}\delta_{\omega,A} \\ A_i = 2\Psi_{X^+}([\gamma_i]) + \delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{\omega,I} - \delta_{i,I}\delta_{\omega,A}) \\ \begin{cases} Q_{ii} = (\Psi_{\{X^-,Y\}} - 3\Psi_{X^+})([\gamma_i]) + 2\delta_{Z,X^+}(\delta_{i,I}\delta_{\omega,A} - \delta_{i,A}\delta_{\omega,I}) \\ Q_{ij} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}]) + \delta_{Z,X^+}(\delta_{i,A}\delta_{j,I} - \delta_{j,A}\delta_{i,I}). \end{cases} \end{cases}$$

我们从 [11] 得到的另一个结果涉及减少求和中的指标数量。具体来说，我们可以用一种特殊方式将 $\mathcal{G}^T_{u/v}$ 分拆为 $\mathcal{G}^T_{u/v} = \mathfrak{X}\sqcup\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$，这样只需计算 S，A，和 Q 在 $\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$ 上的值。我们可以将此视为把 S，A，和Q 限制到一个自由的 $\mathbb{Z}$-子模上，其基由 $\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$ 给出。完成这一步后，我们需要在这个较小的 $\mathbb{Z}$-模上引入一个新的线性形式，记作 K，使得

$$K_i = K(\xi_i) = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathfrak{Y} \\ 0, & \xi_i \in \mathfrak{Z}. \end{cases} \tag{19}$$

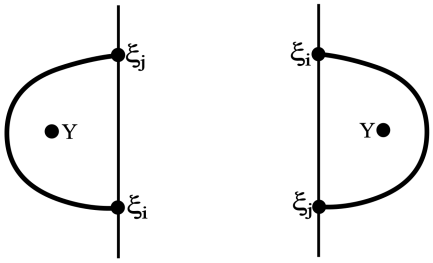


图 8. </style}连续的 , $\xi_j \in \alpha \cap l$（针对 $l \in \{l_A, l_I\}$）绕着 Y 的两种情形。

我们按照由弧连接、并环绕Y 的交点对来对交点进行分拆，如图 8 所示。如果考虑所有以这种方式相连的交点对，我们令 $\mathfrak{X}$ 表示标记为 ξ_i 的点的类型，并令 $\mathfrak{Y}$ 表示图 8 中标记为 ξ_j 的点的类型。集合 $\mathfrak{Z}$ 由所有其余交点组成。示例见 [11]。在此设置下，我们有以下命题。

命题 3.12. 给定如上所述的 $\tau_{u/v}$ 和 $\mathcal{G}^T_{u/v} = \mathfrak{X} \sqcup \mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$， $P(\tau_{u/v})$ 可表示为

$$P(\tau_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N}^{m+n}} (-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} (q^2;q^2)_{K\cdot\boldsymbol{d}} \begin{bmatrix} d_1+...+d_m \\ d_1,...,d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{m+1}+...+d_{m+n} \\ d_{m+1},...,d_{m+n} \end{bmatrix} \times X[d_1+...+d_{m+n}, d_1+...+d_m],$$

其中， $m \le u$、 $n \le v$、 $m+n = |\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}|$、 K 由方程 *(19)* 给出，而 S、A 和 Q定义在自由 $\mathbb{Z}$ 模上，其基由 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$ 给出；它们通过与命题 *3.11* 中相同的公式计算，但限制在 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$上。

4. 有理结

4.1. 结的定理设定。 现在我们将给出一种以几何方法计算有理结箭图的方法。因此，本节将专门用于证明第 1 节中的定理 1。在下一节中，我们将讨论关于二分量链环的定理 2；尽管公式本质上相同，但那里的几何设定会有所不同。

回顾第 2 节，所有有理结都可以通过对一个满足 u 为奇数且定向为 UP 或 OP 的有理缠结 $\tau_{u/v}$ 取分子闭合得到。正如 Wedrich 和 Stošić 在 [39], 中指出的，这也可以通过先施加一次顶部扭转 T，再对一个满足 $u-v$ 为偶数、 v 为奇数且定向为 UP 的有理缠结 $\tau_{(u-v)/v}$ 取分子闭合来实现；或者，也可以令 $u-v$ 为奇数、 v 为偶数且定向为 RI。这将在很大程度上贯穿本节定理的证明。不过，在陈述该定理之前，我们需要更精确地构建几何框架。

给定一个有理结 $K_{u/v}$ =Cl($\tau_{u/v}$)，例如图 9 左侧的 $K_{5/2}$，我们可以从 $\tau_{u/v}$的弧拉格朗日子流形 $\alpha_{u/v}$ 开始。处理纽结而非缠结时，

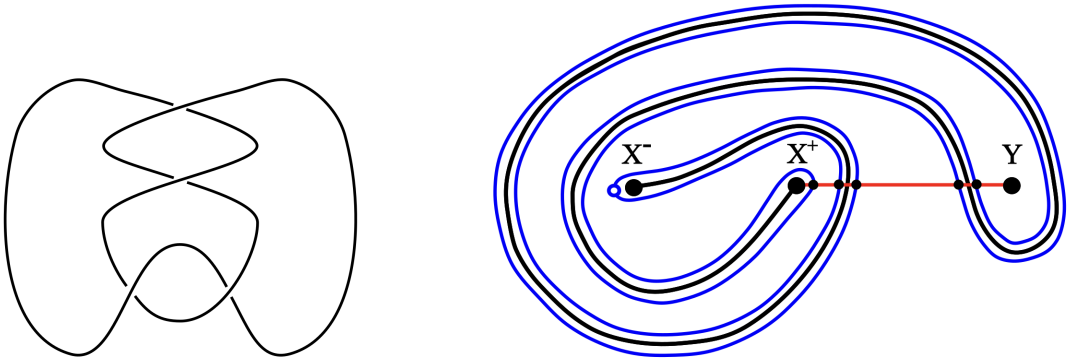


图 9. 左：将 8字结画作 $K_{5/2} = \mathrm{Cl}(\tau_{5/2})$。右：$\mathcal{D}(K_{5/2})$。

我们需要修改所用的拉格朗日子流形，但 $\alpha_{u/v}$ 可作为我们所需图示的“骨架”。具体来说，其中一个拉格朗日子流形可以看作一条紧紧缠绕在弧 $\alpha_{u/v}$ 周围的带。我们将其记为 $\overline{\alpha_{u/v}}$，并在本文余下部分用蓝色绘出。我们还需要另一类拉格朗日子流形，用来替代 $\mathcal{D}(\tau_{u/v})$ 中使用的竖直拉格朗日子流形 l_A 和 l_I。这个新的拉格朗日子流形由一条连接 Y 与 X^+ 的水平弧构成（可将它们想象成两端系在这两个点上的线）。我们将此拉格朗日子流形记为 β，并用红色绘出。当然，这些“水平”弧以及围绕 α 的带都可以通过同痕进行摆动；在定理的证明中，我们正是这样做的。不过，我们可以将这种图示（见图 9）视为“标准”图示。

定义4.1. 给定一个有理结 $K_{u/v}$，令 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 表示三点穿孔平面 M 中的图形，它由 $\overline{\alpha_{u/v}}$、$\alpha_{u/v}$ 和 β 组成。

虽然 $\overline{\alpha_{u/v}}$ 在此处并非必需，但我们仍将其纳入，因为这使得后续的 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 更容易绘制。不过重要的是，我们所需的生成函数 $P(K_{u/v})$ 的箭图形式中的线性形式和二次型，将定义在一个自由的 $\mathbb{Z}$-模上，其优选基由 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中的拉格朗日交点 $\alpha_{u/v} \cap \beta$ 给出。对于 $\tau_{u/v}$ 的分子闭合，注意到 $\alpha_{u/v} \cap \beta$ 由 u 个点组成。

定义4.2. 令 $\kappa_1, \ldots\ldots, \kappa_u$ 表示 $\alpha_{u/v} \cap \beta$ 中的交点 u。此外，令 $\mathcal{G}^K_{u/v}$ 表示这些点在 $\alpha_{u/v} \cap \beta$ 中组成的集合，即 $\mathcal{G}^K_{u/v} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_u\}$，并令 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^K_{u/v}$ 为以 $\mathcal{G}^K_{u/v}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$-模。

正如处理有理缠结时所做的那样，我们将几何公式中使用的环路定义在 $M = \mathbb{C}\backslash\{X^+, X^-, Y\}$ 或 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中，后者仅在计算 Q 的非对角元时才有必要。因此，若我们将 $\beta_1, \ldots, \beta_j$ 写作 M 中 β 的平行副本，那么我们只需考虑它们之间的交点

$$\mathbb{L}^j_{u/v} := \mathrm{Sym}^j(\overline{\alpha_{u/v}}) \setminus \Delta \subset \mathrm{Conf}^j(M)$$

and

$$\mathbb{L}^j := \pi(\beta_1 \times ... \times \beta_j) \subset \mathrm{Conf}^j(M)$$

对于 $j \in \{1,2\}$，其中 π: $M^j \setminus \Delta \to$Conf$^j(M)$ 是显然的映射。再一次，我们将环路定义为这些拉格朗日子流形的交点；而 Conf$^2(M)$ 中的环路，则通过取 β 的平行副本 β_1 和 β_2，绘制在平面上。为将它们区分开来，需要特别小心，因此我们将上方的一个称为 β_1，下方的一个称为 β_2。

定义 4.3. 令 $\mathcal{D}^2(K_{u/v})$ 表示 Conf$^2(M)$ 中由 $\mathbb{L}^2_{u/v}$ 和 $\mathbb{L}^2$组成的拉格朗日子流形构形。在 M中，可通过取 $\alpha_{u/v}, \beta_1$ 和 β_2 对其进行建模，其中 Conf$^2(M)$ 中的点由拉格朗日子流形上的不同点对表示，而环路则由带有基点 (x_1, x_2) 的不交路径对给出，且 $x_1 \in \alpha_{u/v} \cap \beta_1$ 和 $x_2 \in \alpha_{u/v} \cap \beta_2$。

最后，我们可以定义定理中将要用到的环路。事实上，这些环路比缠结中的环路更容易定义，因为我们不再需要区分活动与非活动。在纽结和链环的情形下，我们将使用与缠结中相同的同态 Ψ_W（对于$W \subset \{X^+, X^-, Y\}$）和 Φ（定义见第 3.2 节）；唯一不同之处在于环路。与第 3.2 节中一样，在下面的讨论中，“唯一”应理解为“在同伦意义下唯一”。

目前，这些点的具体排序并不重要，但稍后我们会更仔细地标记它们。给定其中两个交点 κ_i 和κ_j，沿蓝色曲线 $\alpha_{u/v}$，从 κ_i 到 κ_j 有两条不同的路径；令 $\eta_{i,\ j}$ 表示不经过 $\alpha_{u/v}$ 紧紧缠绕在 X^-周围那一段的路径。从κ_j 沿 β 返回κ_i 的路径唯一，我们将其记为 $\bar{\eta}_{j,\ i}$。

定义 4.4. 我们将环路 $\gamma_i^{K,\ j}$: $[0,1] \to M$定义为路径 $\eta_{i,\ j} \cdot \bar{\eta}_{j,\ i}$的拼接；该定义在同伦意义下是良定义的。

此外，在 X^+附近，由$\alpha_{u/v}$ 和 β 产生的交点唯一；在 UP 情形下，它总是最右侧的交点，而在 RI 情形下，它总是最左侧的交点（因此它是图 9 右侧图像中最左侧的交点）。我们将这个交点记为 κ_ω。

定义 4.5. 定义 γ_i^K: $[0,1] \to M$ 为环路 γ_i^K: $= \gamma_i^{K,\ \omega}$。

见Figu re 10，作为8字结情形下这些环路之一的例子 , $K_{5/2}$。接下来，我们将在 Conf$^2(M)$ 中定义环路。如上所述，我们将在平面中通过绘制 β 的两个平行副本来构造图形。要在 $\mathcal{D}^2(K_{u/v})$ 中绘制 $\tilde{\gamma}_i^{K,\ j} = (\gamma_{i,\ j}^1,\ \gamma_{i,\ j}^2)$: $[0,1] \to$ Conf$^2(M)$，首先判断 κ_i 和 κ_j 中哪一个在 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中更靠左。应将它放在 β_1 上相应的交点处，另一个则放在 β_2 上。换句话说，$\tilde{\gamma}_i^{K,\ j}$ 的基点在 β_1 和 β_2 的邻域中总是如下图所示；这里我们只画出了 $\alpha_{u/v}$ 中形成 κ_i 和 κ_j 的部分。



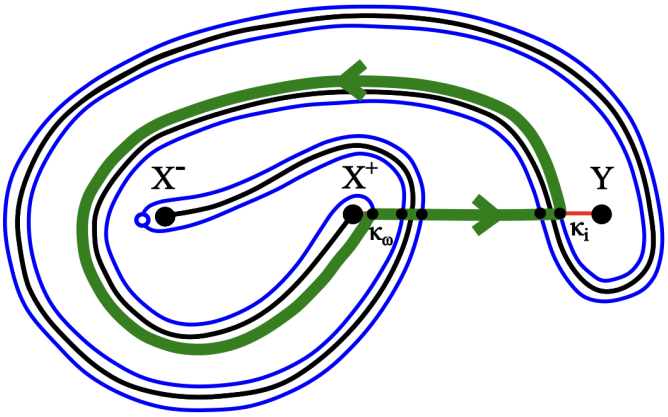


图10. 一个示例路径 γ_i^K在 $\mathcal{D}(K_{5/2})$中

为了便于下面的定义，我们用 β_i 表示放置 κ_i 点的水平线，并类似地用 β_j 表示 κ_j 的水平线。分支路径 $\gamma_{i,\,j}^1$ 的定义如下：先沿着 $\alpha_{u/v}$ 前进（从 X_- 一端绕开），直到它在 κ_j 对应的交点处返回 β_i。如果路径没有经过 β_j 上的 κ_j 点，那么 $\gamma_{i,\,j}^1$ 接着沿 β_i 回到 κ_i，而 $\gamma_{i,\,j}^2$ 是以 κ_j 为基点的常值环；如果它先经过 β_j 上的 κ_j 点，那么 $\gamma_{i,\,j}^1$ 在此处停止，而 $\gamma_{i,\,j}^2$ 则沿着 $\alpha_{u/v}$ 朝同一方向从 β_j 移动到 β_i，然后沿 β_i 返回 κ_i。图 11 展示了这两种情况的示例。注意，我们也可以在仔细定义额外记号后，用路径拼接来定义这些环路。

注。 我们偶尔会滥用记号，将$\gamma_{i,j}^K$ 同时用于$\gamma_{i,j}^K \subset M$ 和$\tilde{\gamma}_{i,j}^K \subset \mathrm{Conf}^2(M)$。从上下文可以清楚地看出我们所指的是哪些环路。

由于我们所有的环路都被定义为避开$\alpha_{u/v}$ 紧邻 X^-的部分，我们将在图中用一个小空心圆来表示环路的孔或“禁止穿越区域”。事实上，我们将把这个孔包含在图 $\mathcal{D}^j(K_{u/v})$中。例如，在前面几幅关于 $K_{5/2}$的图中就可以看到这一点。有鉴于此，我们的环路沿$\alpha_{u/v}$可以取哪些路径已不再有任何选择，因此我们也可以根据这幅修改后的图来定义这些环路——加入该孔便在同伦意义下确定了我们的环路，而这正是基本群上的同态所需的全部。

现在我们已经定义了环路，可以陈述本节余下部分将要证明的定理。请注意，这些公式与缠结的公式完全相同，只是修正项对应于 S、A 和 Q 的整体平移，而不是 δ 项。我们会在下一节看到链环也有同样的现象，但需要再次修改拉格朗日子流形。

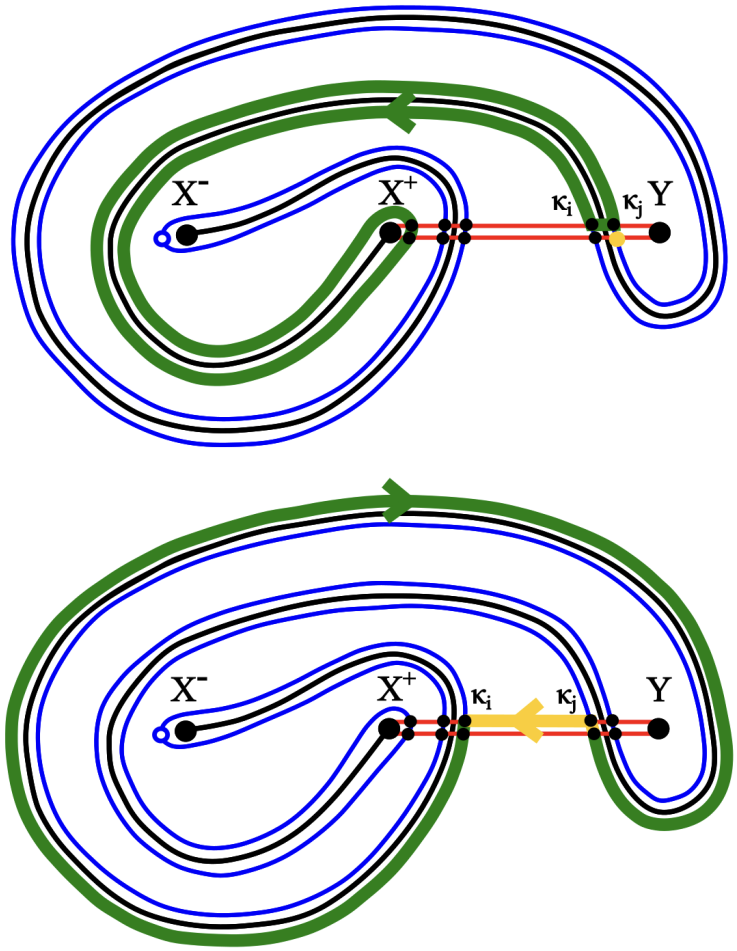


图11. 两种类型的 $\tilde{\gamma}_{i,j}$ 路径在 $\mathcal{D}^2(K_{5/2})$ 中的示例

定理 4.6。 对于有理结 $K_{u/v}$， $P\left(K_{u/v}\right)$ 可写为

$$P(K_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_u)\in\mathbb{N}^u} (-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}} a^{A\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} \begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_u \\ d_1,\ldots,d_u \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中， S、 A 和 Q定义在自由的 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^K_{u/v}$ 上，并由以下公式计算：

$$\begin{cases} S_i = \Psi_{\{X^{\pm},Y\}}([\gamma_i^K]) + \mu_1(K_{u/v}) \\ A_i = 2\Psi_{X^+}([\gamma_i^K]) + \mu_2(K_{u/v}) \\ \begin{cases} Q_{ii} = (\Psi_{\{X^-,Y\}} - 3\Psi_{X^+})([\gamma_i^K]) + \mu_3(K_{u/v}) \\ Q_{ij} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}^K]), \end{cases} \end{cases}$$

其中， $\mu_i(K_{u/v})$ 是整数，其取值取决于构造该纽结时所使用的扭转类型。它们定义于第 *4.5* 节。

$\mu_i(K_{u/v})$用作修正项，以确保一切都得到适当的缩放。根据Rasmussen [36], 的工作，我们知道$K_{u/v}$ 的（未着色）HOMFLY-PT同调应当满足

$$2\mathrm{gr}_t - 2\mathrm{gr}_a - \mathrm{gr}_q = \sigma(K_{u/v}), \tag{21}$$

或者等价地说， $K_{u/v}$ 的HOMFLY-PT同调集中在由该纽结的符号差所确定的 δ分次中。此外，Stošić 和 Wedrich在 [39]中利用这一事实证明，同调分次由 $-Q$的对角线决定，这意味着我们应当有

$$S_i - Q_{ii} - 2A_i = \sigma(K_{u/v}) \tag{22}$$

对所有 $1 \le i \le u$成立。若没有定理 4.6中的 $\mu_i(K_{u/v})$项，则对任意 $K_{u/v}$，我们显然对所有 i 都有 $S_i - Q_{ii} - 2A_i = 0$ 。

定理 4.6的证明将由三个主要步骤组成。前两步分别证明，除 μ_i所给出的平移外，线性型与二次型均正确。此后，我们将确定这些平移必须取何值，以确保方程（22）成立。

4.2. 的对称性 Q。在继续证明定理 4.6 之前，还应指出，正如我们对缠结所做的那样，在 [11], 中也可以写出一个计算 Q 的公式，该公式只涉及 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路。定理 4.6 中的写法，是为了简化计算，尽可能考虑 M 中的环路（而非 $\mathrm{Conf}^2(M)$）。与缠结的情形一样，若取 $\Phi^2 = \Phi$ 以及之前定义的同一个同态 $\Psi^2_{X^+} : \mathrm{Conf}^2(M) \to \mathbb{Z}$，它由以下复合给出

$$\Psi^2_{X^+} : \pi_1(\mathrm{Conf}^2(M)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Conf}^2(\mathbb{C} \setminus X^+)) \to \pi_1(\mathrm{Conf}^3(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Br}_3 \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z},$$

那么我们可以用以下公式计算 Q

$$Q_{ij} = (2\Phi^2 - \Psi^2_{X^+})([\gamma^{2,K}_{j,i}]), \tag{23}$$

其中 $\gamma^{2,\ K}_{j\ i}$ 的定义方式与第 3.2 节 [11], 中的环路 $\gamma^2_{j,\ i}$ 类似，但采用了新的拉格朗日子流形。特别地， $\gamma^{2,\ K}_{j\ i}$ 可以用三种不同类型的路径依次拼接来定义。第一条路径是将 κ_j （在 β'_j 上）沿着 $\alpha_{u/v}$ 滑动，直到到达 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中 κ_i 位于 β' 的两个副本上的点。第二条路径是沿着 $\alpha_{u/v}$ 将两个 κ_i 点滑到一起，直到到达 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中两个点分别位于 β' 的两个副本上的 $\overline{\kappa_\omega}$ 处的点。第三条路径是沿着 β'_1 和 β'_2 返回起点。这与文中对缠结给出的更详细构造类似，[11]，但适用于新的拉格朗日子流形。

然后，按照证明命题3.17时所用的类似论证，可以得到关于纽结的下一个命题。

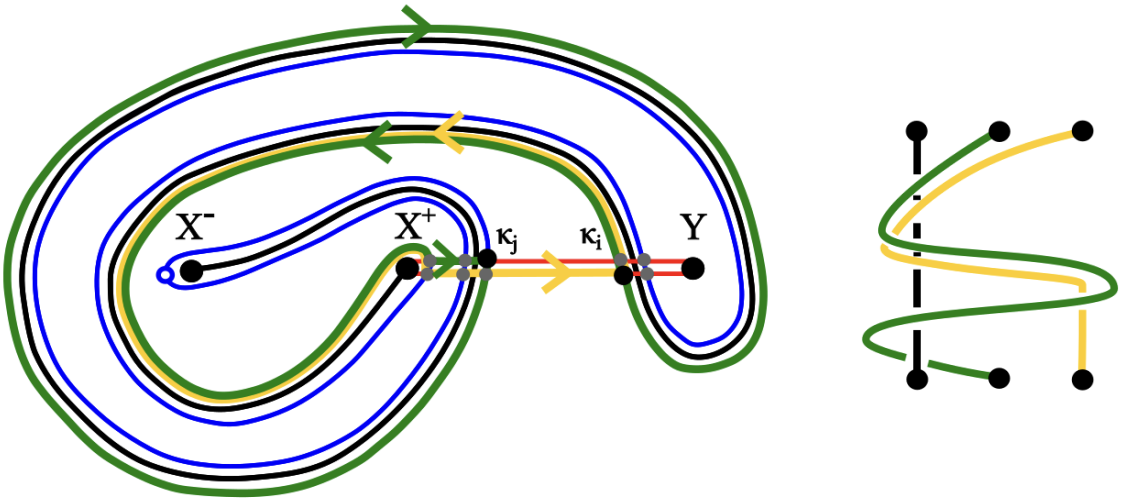


图12. 左：一个示例 $\gamma^{2,K}_{j,j\,i}$,针对 $K_{5/2}$的环路。右：对应于 $\gamma^{2,K}_{j,j\,i}$,的辫，其中黑色股来自点 X^+。注意，由此环路计算 Q_{ij} 得到 -2，这与定理 4.6一致。

命题 4.7. 定理 *4.6*计算出的矩阵 Q 与（*23*）一致。此外，Q 确实是对称的，即 $Q_{ij} = Q_{ji}$。

特别地，首先证明 $\gamma^{2,K}_{,i\,,j}$ 与 $\gamma^{2,K}_{,j\,i}$,在Conf$^2(M)$中同调，从而在用方程（23）计算时给出 $Q_{ij} = Q_{ji}$。这由类似于 [11]中引理3.18的证明所用的消去论证得出。然后，按照 [11], ，可以证明

$$\gamma^{2,K}_{j,i} = \gamma^{2,K}_{i,i} + \tilde{\gamma}_{j,i}$$

在 H_1(Conf$^2(M)$)中，此后只需证明

$$(2\Phi^2 - \Psi^2_{X^+})([\gamma^{2,K}_{i,i}]) = (\Psi_{\{X^-,Y\}} - 3\Psi_{X^+})([\gamma_i])$$

and

$$(2\Phi^2 - \Psi^2_{X^+})([\tilde{\gamma}_{j,i}]) = (\Phi_{\{X^-,Y\}} - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}]).$$

我们在此不给出这些陈述的完整证明，因为它们类似于 [11], 中第 3.2 节所用的证明，但已针对新的拉格朗日子流形作了调整。

现在我们将证明定理 4.6，从线性形式开始。

4.3. **步骤 1：线性形式**。为证明定理 4.6，我们将比较公式给出的结果与我们已知的、可从 [39] 得到的结果。这需要研究 S、 A 和 Q 中的各项彼此之间，以及它们与通过 [39], 的代数方法得到的各项（相差某个平移量）之间的关系。

正如我们在第4.1节第二段所述，与其将有理结 $K_{u/v}$ 看作 Cl($\tau_{u/v}$)，不如将其看作 Cl($T\tau_{(u-v)/v}$)；其中 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 或 RI 定向（前一种情况下， $u-v$ 为偶数且 v 为奇数；对于 RI 则相反）。下面的引理说明，如何利用 [39] 中的 Cl($T-$) 公式，以这些由命题 3.12 计算得到的 $\tau_{(u-v)/v}$ 的线性形式和二次型来表示 S， A，以及 Q（针对 $K_{u/v}$）。本小节和下一小节将比较定理 4.6 计算得到的 S， A，以及 Q 与下文给出的结果。

引理 4.8. 若 $K_{u/v} = Cl(T\tau_{(u-v)/v})$ 具有 $\tau_{(u-v)/v}$ 定向，则 $Cl(T-)$运算对生成函数数据的作用为

$$UP, \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & S_+ & A_+ \\ \hline 0 & S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} Q_{++} & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{--} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{Cl(T-)} \left[\begin{array}{c|c} S_+ + 1 & A_+ \\ \hline S_+ + 2 & A_+ + 2 \\ \hline S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{++}+2 & Q_{++}+L & Q_{+-} \\ \hline Q_{++}+U & Q_{++}-1 & Q_{+-}-1 \\ \hline Q_{-+} & Q_{-+}-1 & Q_{--} \end{array}\right],$$

其中， $\mathfrak{Y}$ 由 $\frac{u-v}{2}$ 个活跃交点组成， $\mathfrak{Z}$ 由非主动侧的 v 个交点组成。

若 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 RI 定向，则 $Cl(T-)$ 的作用为

$$RI, \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & S_+ & A_+ \\ \hline 1 & S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} Q_{++} & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{--} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{Cl(T-)} \left[\begin{array}{c|c} S_+ & A_+ \\ \hline S_- - 1 & A_- - 2 \\ \hline S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c} Q_{++} & Q_{+-} & Q_{+-}-1 \\ \hline Q_{-+} & Q_{--}+2 & Q_{--}+L \\ \hline Q_{-+}-1 & Q_{--}+U & Q_{--}-1 \end{array}\right],$$

其中， $\mathfrak{Y}$ 由 $\frac{v}{2}$ 个非活跃交点组成， $\mathfrak{Z}$ 由非主动侧的 $u-v$ 个交点组成。

在这两种情况下，活跃点总是排在非活跃点之前。

注意，我们利用了表示缠结的分数 $\frac{u-v}{v}$ 的分子或分母为偶数这一事实；应用命题 3.12 后，可以将主动侧或非主动侧的指标数量减半，代价是加入一个 Pochhammer符号 $(q^2;q^2)_{K\cdot\mathbf{d}}$。线性形式 K 是上述变换中缠结一侧第一个矩阵的第一列。此外，目前我们不关心块 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Z}$ 内部的排序，但之后需要固定这个基的排序。

引理 *4.8* 的证明。 在 [39],Stošić 和 Wedrich 的证明中

$$\mathrm{Cl}(TUP[j,k]) \sim (-q)^k q^{2k^2} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_+ \frac{(a^2q^{2-2j-2k};q^2)_k}{(q^2;q^2)_k} \tag{24}$$

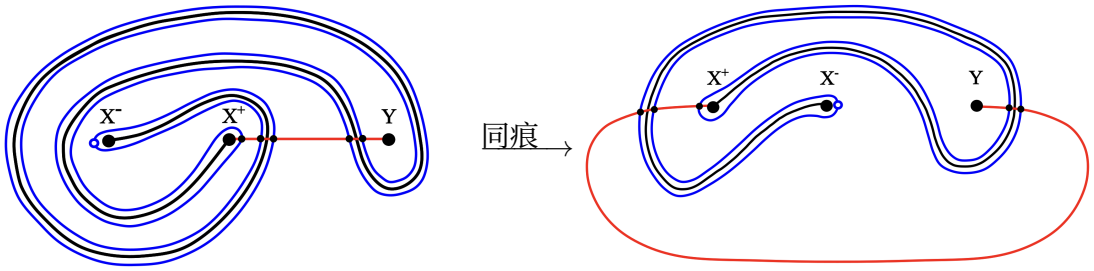


图 13. 将 $\mathcal{D}(K_{5/2})$ 变为“弯曲”版本的同痕结果。注意，蓝色拉格朗日子流形现在环绕着 $\alpha_{3/2}$。

and

$$\mathrm{Cl}(TRI[j,k]) \sim (-q)^{k-j} a^{2(k-j)} q^{2(k-j)^2} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_+ \frac{(a^2 q^{2-2j-2(j-k)}; q^2)_{j-k}}{(q^2;q^2)_{j-k}}, \tag{25}$$

a正如我们在引理 2.7 中所见。回想一下，我们用 $\sim$ 表示“在框架平移意义下 .”

给定 Cl(T–) 的这些公式，这条引理可由一些简单的代数运算以及应用引理 2.3 来处理分裂指标而得出。类似的计算可参见 [39] 中定理 4.1 的证明。□

证明定理 4.6 的下一个自然步骤，是证明 S、 A 以及 Q的对角线的公式正确（相差某个整体平移），因为它们只需要涉及 M 中环路的计算。为此，我们需要建立一种方法，将 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中的拉格朗日交点与 $\mathcal{D}(^{\tau_{(u-v)/v}})$ 中的拉格朗日交点配对。完成后，我们便可证明它们之间的关系如引理 4.8 所述。

首先，注意我们可以对 $K_{u/v}$ 的图形进行同痕，使其效果相当于撤销施加于 $^{\tau_{(u-v)/v}}$ 的最后一次顶部扭转，从而使蓝色拉格朗日子流形 $^{\alpha_{u/v}}$ 呈现为 $^{\alpha_{(u-v)/v}}$ ，而红色拉格朗日子流形 β 弯成“U”形。我们将此称为解扭同伦。见图 13。根据引理 4.8，我们通常会使用这类图形来证明定理 4.6。

现在，我们已将 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 弯成类似于 $\mathcal{D}(^{\tau_{(u-v)/v}})$ 的形状，也就是说，$^{\alpha_{u/v}}$ 被变换为 $^{\alpha_{(u-v)/v}}$，因此可以更轻松地将拉格朗日子流形的交点配对。虽然对于该纽结，我们没有“活跃”和“不活跃”的交点，但根据施加解扭同伦后的图形，将它们这样区分会很有帮助。特别是，有时可以方便地将与 $^{\tau_{(u-v)/v}}$ 的活跃交点配对的 κ_i 视为 $K_{u/v}$ 的活跃交点；不活跃的情形也类似。

注意，活跃轴 l_A 左侧的 $\mathcal{D}(^{\tau_{(u-v)/v}})$ 中，所有内容看起来都像同心半圆，其中可能有一条弧从 l_A 连到中间的 $^{\alpha_{(u-v)/v}}$ 的某个端点。 l_I右侧的所有内容也是如此。在我们需要考虑的两种情形中， X^- 始终是三个穿孔点中间的那个（或者说，按上一节的记号，是 $Z = X^-$），因此我们只需考虑如何将由半圆关联的交点与活跃轴和非活跃轴配对，以及如何将其中一条轴上的点通过一条弧配对

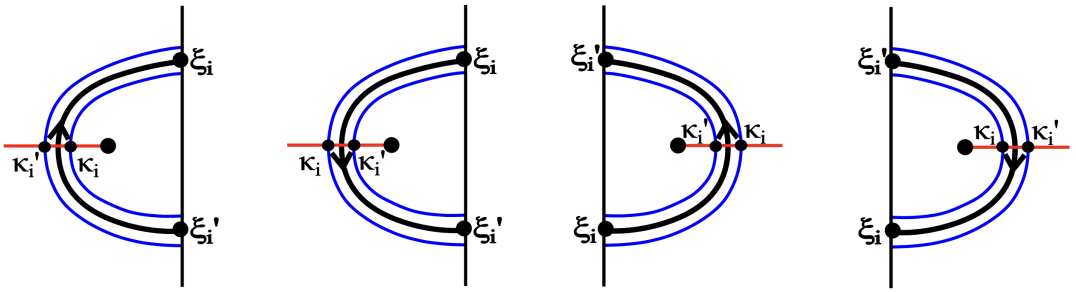


图14。在缠结图中的交点与纽结图中的交点之间进行配对时，来自一个半圆的情况有四种需要考虑。对于左侧最靠边的两幅图，垂直线是 l_A ；对于右侧两幅图，垂直线是 l_I 。自然地，预期的配对是 $\xi_i \leftrightarrow \kappa_i$ 和 $\xi_i' \leftrightarrow \kappa_i'$。

到 X^+ ，以此构成缠结$\tau_{(u-v)/v}$ 在 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中的拉格朗日交点。后一种情形显而易见——这条弧在 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中对应唯一一个交点，这就是我们称为 κ_ω 的点。对其他类型的交点进行配对时则需要格外小心。

请注意，对于$\tau_{(u-v)/v}$ ，由$\alpha_{(u-v)/v}$ 的一部分与 l_A 或 l_I 构成的半圆所产生的交点对，与 $K_{u/v}$ 的弯曲图相关：蓝色拉格朗日子流形在两侧都平行于$\alpha_{(u-v)/v}$ 延伸，而红色拉格朗日子流形 β 则如图14所示水平穿过中间。因此，我们可以将半圆两端与活跃轴或非主动轴的两个交点，与蓝色和红色拉格朗日子流形之间的两个交点对应起来。共有两种对应方式。为了确定采用哪一种，我们将对$\alpha_{u/v}$指定一个定向；具体而言，我们将其定向为从 X^- 到 X^+，正如我们在第 3.1 节中定义 $\prec$ 时所做的那样。图14展示了可能出现的四种不同情形，以及每种情形中点的对应方式。

现在我们已经匹配了交点，因此可以直接将针对 $\tau_{(u-v)/v}$ 的单次计算（如命题 3.11 或 3.12 中的计算）与相应的针对 $K_{u/v}$ 的计算（使用定理 4.6）联系起来。

在以下引理中，我们用 Q_+ 表示 Q_{++} 的对角线，用 Q_- 表示 Q_{--}的对角线。然后，我们可以用这个记号表示由 Q的对角线定义的线性形式；它由引理4.9陈述中矩阵的最后一列给出。

引理4.9。 根据定理 *4.6* 中的公式，如果$\tau_{(u-v)/v}$的定向为 UP，那么 $Cl(T-)$ 操作的效果为

$$UP, \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & S_+ & A_+ & Q_+ \\ \hline 0 & S_- & A_- & Q_- \end{array}\right] \xrightarrow{Cl(T-)} \left[\begin{array}{c|c|c} S_+ + 1 & A_+ & Q_+ + 2 \\ \hline S_+ + 2 & A_+ + 2 & Q_+ - 1 \\ \hline S_- & A_- & Q_- \end{array}\right],$$

而如果$\tau_{(u-v)/v}$ 的定向为 RI，那么 $Cl(T-)$ 的效果为

$$RI, \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & S_+ & A_+ & Q_+ \\ \hline 1 & S_- & A_- & Q_- \end{array}\right] \xrightarrow{Cl(T-)} \left[\begin{array}{c|c|c} S_+ & A_+ & Q_+ \\ \hline S_- - 1 & A_- - 2 & Q_- + 2 \\ \hline S_- & A_- & Q_- - 1 \end{array}\right].$$

这些公式与引理 4.8 中的公式相同，但其中一项计算来自 [11]，另一项则来自定理 4.6 中的公式。在该引理的陈述中，我们隐含地使用了$\tau_{(u-v)/v}$ 的交点与 $K_{u/v}$的交点之间的匹配。因此，该引理表明，若我们对$\tau_{(u-v)/v}$执行命题 3.12 中的计算，以得到左侧的数据（针对 UP 或 RI 情形），则定理 4.6 会计算 $K_{u/v} = \mathrm{Cl}(T\tau_{(u-v)/v})$右侧的数据，其中的块来自交点的配对。注意， $\mathfrak{Y}$ 中对应于$\tau_{(u-v)/v}$ 的点会加倍，以计入 $\mathfrak{X}$中的点。

证明 引理*4.9*。我们将证明 UP 情形，并将 RI 情形留给读者 .

若$\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP定向，且 $u-v$ 为偶数、 v 为奇数，则它具有状态 $(^{UP,\ Y}_{X^-|X^+})$，并将 κ_ω 作为非活动交点。$\tau_{(u-v)/v}$ 的活跃交点分拆为 $\mathfrak{X}\sqcup\mathfrak{Y}$；在应用命题 3.12 时，引入 K 向量时，我们只取 $\mathfrak{Y}$。从几何上看， $\mathfrak{Y}$ 由 $\alpha_{(u-v)/v}$ 和 l_A 之间最上方的 $\frac{u-v}{2}$ 个交点组成（即位于 Y“上方”的那些点，或图14前两幅图中的 ξ_i ）。非活跃交点构成集合 $\mathfrak{Z}$。

在主动侧，如果 κ_i 和 κ_i' 的关系如图14前两幅图之一所示，那么我们还需要将它们分别与 ξ_i 进行比较； ξ_i 是缠结在 $\mathfrak{Y}$ 中对应的点。因此，引理4.9中结的一侧的第一个块来自与 $\xi_i \in \mathfrak{Y}$ 配对的点 κ_i ，第二个块则来自与 κ_i 和 ξ_i 的关系如图14所示的 κ_i' ，也就是 $\mathfrak{X}$ 中的点。处理非活跃交点时不存在歧义，因为在 UP 情形下它们不会被压缩，而且非活跃指标的一一（几何）配对 $\xi_k \leftrightarrow \kappa_k$ 会自然转化为缠结与纽结的线性形式中相应项的一一配对。

如果 ξ_k 是缠结 $\tau_{(u-v)/v}$ 的非活动指标，很容易验证，对于任意 $W \subseteq \{X^+, X^-, Y\}$，都有 $\Psi_W([\gamma_k^K]) = \Psi_W([\gamma_k^T])$，因此我们接下来考察主动侧的情况。

注意到，纽结的 γ_i^K和 $\gamma_{i'}^K$环路与缠结的 γ_i^T环路之间的差异处处相同（它们彼此平行），只有起点和终点处例外，因此我们只需考虑这两部分。见图 15。为避免图示过于复杂，我们没有将所有不同的环路都添加到图中，但按照定义很容易将它们补充进去。画出所有环路后，结论便可由以下观察得到：

$$\begin{cases} \Psi_Y([\gamma_i^K]) - \Psi_Y([\gamma_i^T]) = 1 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_i^K]) - \Psi_{X^-}([\gamma_i^T]) = 1 \\ \Psi_{X^+}([\gamma_i^K]) - \Psi_{X^+}([\gamma_i^T]) = 0 \end{cases}$$

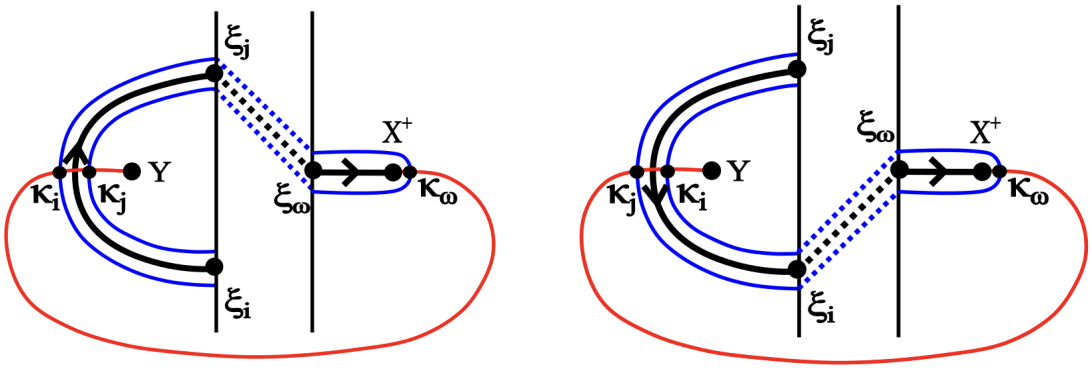


图 15. 引理4.9证明的图像。虚线部分标示拉格朗日子流形$^{\alpha_{u/v}}$ 和$^{\alpha_{u/v}}$ 中那些导致纽结与缠结的环路 γ_i 和γ_j 出现平行段的部分。

and

$$\begin{cases} \Psi_Y([\gamma_{i'}^K]) - \Psi_Y([\gamma_i^T]) = 1 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_{i'}^K]) - \Psi_{X^-}([\gamma_i^T]) = 1 \\ \Psi_{X^+}([\gamma_{i'}^K]) - \Psi_{X^+}([\gamma_i^T]) = 1, \end{cases}$$

注意到，在 S 的缠结公式中，我们缺少了$\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}$ 项。 □

因此，我们已经证明，定理 4.6 中所涉及的线性形式的公式（包括 Q的对角线）在相差某个整体平移的意义下是成立的，因为我们可以使它们与引理 4.8 所预期的结果完全吻合。现在，我们需要证明定理 4.6 中 Q 的非对角元公式同样成立；这将是下一小节的内容。

4.4. 第二步：二次型。 接下来，我们需要证明 Q的非对角元公式，即

$$Q_{ij} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}^K])$$

使人能够成功地计算 j-着色 HOMFLY-PT 多项式。稍后，我们将定义 κ_i 的一种精确排序，使得在 UP情形下，我们的公式所给出的 Q 矩阵的左上2×2 块与引理 4.8 中的相应块完全一致，并且在 RI 情形下，右下 2×2 块也同样如此。特别地，这一排序确保了 UP 的(1,2)-块以及RI的(2,3)-块中的 $+L$ 。然而，我们将发现，以这种方式固定排序并不足以使我们的公式结果与引理4.6完全吻合；对于其余的块，还需要做更多工作。

现在，我们固定 κ_i 的排序，其定义涉及三个块（对应于引理 4.8 中的三个块）。在 UP 情形下，来自 $^{\tau_{(u-v)/v}}$ 主动侧交点的交点构成两个块，而非主动侧的交点构成一个块

。再次将 $\alpha_{(u-v)/v}$ 从 X^- 定向到 X^+，由此得到缠结交点的 $\prec$ 排序。首先，我们按如下方式标记 $\kappa_1, ..., \kappa_{(u-v)/2}$，它们构成 UP 情形下的第一个块。若 $\mathfrak{Y}$ 中 $\tau_{(u-v)/v}$ 的 $\frac{u-v}{2}$ 个活跃交点（即位于 Y“上方”的交点）按 $\xi_1, ..., \xi_{(u-v)/2}$ 排序，且当且仅当 $i < j$ 时有 $\xi_i \prec \xi_j$，则前面的 $\frac{u-v}{2}$ κ_i 按照对应关系 $\kappa_i \leftrightarrow \xi_i$ 排序。对于 $\kappa_{(u-v)/2+1}, ..., \kappa_{u-v}$，我们采用类似的步骤，但使用 $\mathfrak{X}$ 中的 ξ_i（即位于 Y“下方”的交点）。

第三组交点（来自非主动侧） κ_{u-v+1}、……、 κ_p，按照 $\tau_{(u-v)/v}$ 中非活跃指标的排序 $\prec$ 以及 κ_i与 ξ_i的配对进行排列。下方的图16展示了 UP 情形的一个例子。

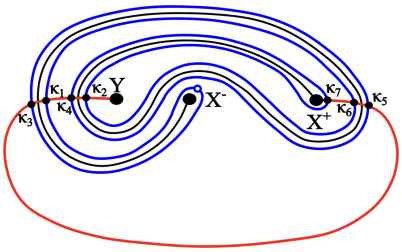


图16. $\mathcal{D}$（$K_{7/3}$）中 κ_i 的排序（解扭同伦之后）

RI 情形的排序方式类似。主动交点和非活跃交点的排序规则互换，而由主动交点组成的单个块仍排在最前。示例见图17。

注. 若 κ_i 和 κ_i' 如图14所示相关，则在 UP 情形下有 $i - i' = \frac{u-v}{2}$，而在 RI 情形下有 $i - i' = \frac{v}{2}$。

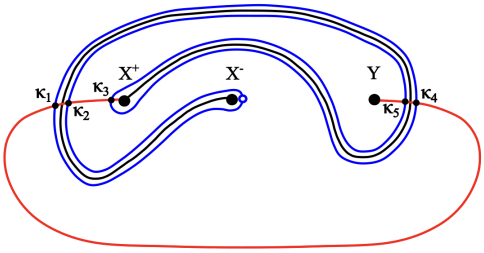


图17. $\mathcal{D}$（$K_{5/2}$）中 κ_i 的排序（解扭同伦之后）

定义4.10。令的标准排序 κ_i 为刚才描述的排序。

在本节余下部分中，我们需要处理由有序基确定的特定 Q，因此引入以下记号。

定义4.11. 令 $Q^K_{u/v}$ 表示由定理 4.6 通过 κ_i 的标准排序所给出的有序基计算得到的 $K_{u/v}$ 的特定 $u \times u$ 矩阵。

我们可以将 $Q^K_{u/v}$ 描述为一个由 $\mathcal{G}^K_{u/v}$ 的分拆 $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} \sqcup \mathfrak{C}$ 决定的 3×3分块矩阵（如引理 4.8 中"结的一侧"所写）。更具体地说，如果 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 定向，我们令 $\mathfrak{A} = \{\kappa_1, ..., \kappa_{(u-v)/2}\}$、$\mathfrak{B} = \{\kappa_{(u-v)/2+1}, ..., \kappa_{u-v}\}$ 和 $\mathfrak{C} = \{\kappa_{u-v+1}, ..., \kappa_u\}$。回想一下，$\mathcal{G}^T_{(u-v)/v} = \{\xi_1, ...\xi_u\}$ 由集合 $\mathfrak{X}$、$\mathfrak{Y}$、$\mathfrak{Z}$ 分拆而成；在这里，我们应用命题 3.12，将缠结的生成函数数据表示为限制在 $\mathbb{Z}\mathcal{G}_{(u-v)/v}$ 中由基 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$ 给出的子模上的线性形式和二次型。在UP定向的情形下，$\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{Y}$配对，$\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{X}$配对，$\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{Z}$配对。若分别按照 $\prec$ 对 $\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Z}$ 排序，并使 $\mathfrak{Y}$ 中的点排在 $\mathfrak{Z}$ 中的点之前，那么我们就为这个子模固定了一个有序基，因此命题 3.12 给出了$\tau_{(u-v)/v}$的一个特定矩阵 Q 。

定义4.12。 令$Q^T_{(u-v)/v}$ 表示在上述基 $\mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Z}$ 的排序下，由命题 3.12 计算得到的 $\frac{u+v}{2} \times \frac{u+v}{2}$ 矩阵 Q 。

因此，我们看到 $Q^T_{(u-v)/v}$ 可以表示为分块矩阵 2×2，如引理 4.8 所示；但现在各块由基的排序决定。将引理 4.8 应用于 $Q^T_{(u-v)/v}$后，会得到一个特定的 $u \times u$ 矩阵，该矩阵可表示为分块矩阵 3×3，并可与 $Q^K_{u/v}$进行比较。

定义4.13。 令 $Q_{u/v}$ 为将引理 4.8 应用于 $Q^T_{(u-v)/v}$后得到的 $u\times u$ 矩阵。

我们可以将 $Q_{u/v}$ 视为一个示例矩阵，它已知适用于 P（$K_{u/v}$）的箭图形式。

引理 4.14。 若 $K_{u/v} = Cl(T\tau_{(u-v)/v})$，其中$\tau_{(u-v)/v}$具有 UP定向，则 $Q^K_{u/v}$ 的左上2×2 块与 $Q_{u/v}$的这些相同块一致。若$\tau_{(u-v)/v}$ 具有 RI 定向，则右下 2×2 块同样成立。

证明。 我们再次证明 UP 情形，并将 RI 情形留给读者。

若我们像对X^-所做的那样，用 X^+ 切割$\alpha_{u/v}$ （例如在 κ_ω处），则得到两条彼此平行且与$\alpha_{(u-v)/v}$平行的弧，其中 $\mathfrak{A}$位于其中一条上，$\mathfrak{B}$位于另一条上。如将红色拉格朗日子流形滑动至在 Y处竖直，如图18所示，容易看出 $Q^K_{u/v}$的(1, 1)-块与(2,2)-块与 $Q_{u/v}$相匹配。特别地，该图说明了如何将 $\kappa_i, \kappa_j \in \mathfrak{A}$ 的$\gamma^K_{i,j}$同伦变形为与$\gamma^T_{i,j}$平行，从而对所有 $W \subseteq \{X^+, X^-, Y\}$ 有 $\Psi_W([\gamma^K_{i,j}]) = \Psi_W([\gamma^T_{i,j}])$，且 $\Phi([\gamma^K_{i,j}]) = \Phi([\gamma^T_{i,j}])$。对 $\mathfrak{B}$ 中的点对，可通过将红色拉格朗日子流形向另一方向弯曲来执行同样的步骤。因此，我们看到 $Q^K_{u/v}$ 的(1,1)-块与(2,2)-块是 $Q^T_{(u-v)/v}$的(1, 1)-块的平移，平移由对角线决定。我们知道对 $Q_{u/v}$ 同样成立，并且由引理4.9可知，这些相对于对角线的平移是相同的。

还需证明 $Q^K_{u/v}$ 的 (1,2) 块是 $Q_{++} + L$，其中 Q_{++} 表示 $Q^T_{(u-v)/v}$ 的 (1，1) 块。设 κ_i，$\kappa_j \in \mathfrak{A}$ 和 κ'_i，$\kappa'_j \in \mathfrak{B}$，使得 $i' - i = \frac{u-v}{2}$ 并且 —

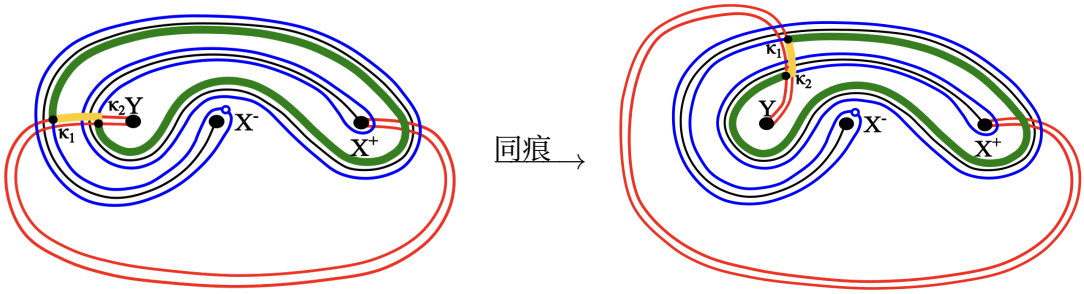


图18。 一个同痕，展示了如何使 $\gamma_{i,\ j}$ 对于 $i,\ j \in X$ 与 $\lambda_{i,\ j}$ 平行。图中所示为 $\gamma_{1,\ 2}$ 对于 $K_{7/3}$。如果 $i,\ j \in Y$，则在 Y 附近将红色拉格朗日子流形向另一侧弯曲。

对于 j 和 j' 也同样如此，因此，成对的 $(\kappa_i,\ \kappa_i')$ 与 $(\kappa_j,\ \kappa_j')$ 如图14或图15所示彼此相关。假设 $i < j$，这意味着 $\xi_i \prec \xi_j$。只需证明 Q 的 4×4 子矩阵（其行和列的索引为 $i,\ j,\ i'$ 和 j'）看起来像

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ i' \\ j' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & i' & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} X+2 & A+2 & X & A \\ A+2 & Y+2 & A+1 & Y \\ X & A+1 & X-1 & A-1 \\ A & Y & A-1 & Y-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

对于某个 $X,\ Y,\ A \in \mathbb{Z}$。等价地，鉴于我们已经得到的结果，只需证明

(1) $Q_{i,\ i'} = Q_{i,\ i} - 2 = Q_{i',\ i'} + 1$(
2) $Q_{j,\ j'} = Q_{j,\ j} - 2 = Q_{j',\ j'} + 1$
(3) $Q_{i,\ j'} = Q_{i,\ j} - 2 = Q_{i',\ j'} + 1$
(4) $Q_{j,\ i'} = Q_{i',\ j'} + 2 = Q_{i,\ j} - 1$。

（1）和（2）的证明相同，因此我们只证明（1）。为证明（1），我们只需考虑两种情况，它们分别对应于ξ_i 和 $\xi_{i'}$之间的弧上$\alpha_{(u-v)/v}$ 的两种可能定向。需要注意的是，在 M, $\gamma_{i}^{K}{}_{,i'}$ 和 $\gamma_{i'}^{K}{}_{,i}$ 中，它们围绕X^+ 形成的环路定向相反；而在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中，我们有 $\Phi([\gamma_{i',i}^{K}]) = 0$ 和 $\Phi([\gamma_{i,i'}^{K}]) = 1$。

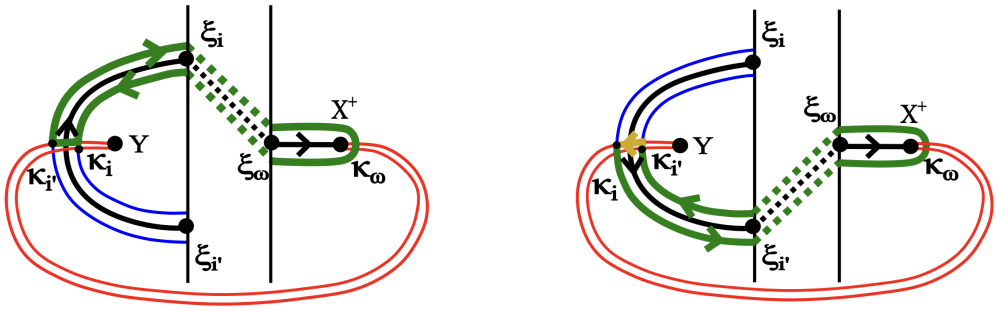


图 19. 用于证明引理 4.14 中 (1) 的一些环路

在图 19 中，我们只画出了第一种定向下的$\gamma^K_{i',i}$，以及第二种定向下的$\gamma^K_{i,i'}$，但很容易看出，其他情形都是对称的。由此还可得 $\Psi_{X^+}([\gamma^K_{i',i}]) = 1, \Psi_{X^+}([\gamma^K_{i,i'}]) = -1$，因此（1）由下式得出

$$\begin{aligned} Q_{ii'} &= Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma^K_{i',i}]) \\ &= Q_{i'i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma^K_{i,i'}]). \end{aligned}$$

要证明 (3) 和 (4)，只需证明 $Q_{ij'} = Q_{ij} - 2$ 和 $Q_{ji'} = Q_{i'j'} + 2$，因为我们已经知道 $Q_{ij} - Q_{i'j'} = 3$。考虑沿着与 $\alpha_{(u-v)/v}$定向相反的方向行进的环路，就能轻易得到这些结论。特别地，对于 $Q_{ij'} = Q_{ij} - 2$，我们使用

$$Q_{ij'} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma^K_{j',i}]),$$

并注意到 $\gamma^K_{j',i} \sim \sigma_{j',i} \cdot \gamma^K_{j,i}$，其中 $\sim$ 表示这些环路同调，且$\sigma_{j',i}\colon [0,1] \to \mathrm{Conf}^2(M)$ 是一个环路，其基点与 $\gamma_{j',i}$相同，后者现在定义如下。这个环路可以写成 (σ_1, σ_2)，其中 σ_1 是沿着蓝色拉格朗日子流形 $\alpha_{(u-v)/v}$ 从 $\kappa_{j'}$ 到 κ_j 行进的环路，它们位于 β（红色拉格朗日子流形）的同一个平行副本上，随后沿着 β返回$\kappa_{j'}$，因此它恰好绕 X^+ 一周；而 σ_2 则是位于 β另一副本上、以 κ_i 为基点的常值环。显然，我们有 $\Phi([\sigma_{j',i}]) = 0$。回想一下，$\Psi_{X^+}$ 是定义在 $\pi_1(M)$ 上的同态，而不是定义在 $\pi_1(\mathrm{Conf}^2(M))$ 上的同态；因此，使用这个同态时，我们需要稍作修改的 $\sigma_{j',i}$。自然的做法是将 β_1 和 β_2压缩到 β（如 $\mathcal{D}(K_{u/v})$ 中所示），并去掉位于 κ_i处的常值环 σ_2。根据相对于给定的 $\alpha_{(u-v)/v}$定向所定义的交点，不难看出 $\Psi_{X^+}([\sigma_{j',i}]) = 1$。因此，我们得到

$$Q_{ij'} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\sigma_{j',i} \cdot \gamma^K_{j,i}]) = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma^K_{j,i}]) - 2 = Q_{ij} - 2.$$

类似地，我们有

$$Q_{ji'} = Q_{i'i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma^K_{j,i'}]),$$

其中 $\gamma^K_{j,i'} \sim \sigma_{j,i'} \cdot \gamma^K_{j',i'}$，$\sigma_{j,i'}$ 的定义与前一种情况类似，但现在我们有 $\Phi([\sigma_{j,i'}]) = 0$ 和 $\Psi_{X^+}([\sigma_{j,i'}]) = -1$，因此

$$Q_{j,i'} = Q_{i',i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\sigma_{j,i'} \cdot \gamma_{j',i'}]) = Q_{i',i'} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j',i'}]) + 2 = Q_{i',j'} + 2,$$

由此完成证明。 □

下面的引理推广了引理 4.14 证明中的关键步骤，该步骤涉及以 κ_i、 $\kappa_{i'}$、κ_j、 和$\kappa_{j'}$为行列索引的 $Q^K_{u/v}$ 的 4×4 子矩阵的结构。

引理 4.15。 对于任意的 κ_i、 κ'_i、 κ_j 和 κ'_j，若点对 (κ_i,κ'_i) 和 (κ_j,κ'_j) 之间的关系如图*14*所示，且 $\xi_i \prec \xi_j$，则以这些点为行列索引的 $Q^K_{u/v}$ 的 4×4 子矩阵具有如下形式

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ i' \\ j' \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} i & i' & j & j' \end{array} \\
\begin{bmatrix} X+3 & X+1 & A+3 & A+1 \\ X+1 & X & A+2 & A \\ A+3 & A+2 & Y+3 & Y+1 \\ A+1 & A & Y+1 & Y \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{26}
$$

对于某些 X、Y、$A\in\mathbb{Z}$，在某个置换矩阵共轭下成立。

注意，该陈述允许标记为 i 和 j 的点都来自 $\tau_{(u-v)/v}$ 的主动侧或非主动侧，也允许其中一个来自主动侧、另一个来自非主动侧。我们必须注明“在共轭下成立”，因为 $Q^K_{u/v}$ 是按 κ 交点的标准排序定义的，而这种排序不能保证行和列索引按这一特定方式排列。特别是，带撇号的索引不一定排在不带撇号的索引之后。

引理 *4.15* 的证明。该引理可由定理 4.14 证明中使用的同一论证得出（对于纽结，活跃交点与非活跃交点之间并无实质区别）。□

引理 4.14 表明，对于 UP 情形， κ_i 的标准排序使 $Q^K_{u/v}$ 和 $Q_{u/v}$ 的左上 2×2 块完全一致（而对于 RI 情形，右下 2×2 块也完全一致）。遗憾的是，其他块并没有同样的结果。接下来，我们考察 UP 情形中 $Q_{u/v}$ 的 (3，3) 块，以及 RI 情形中的 (1，1) 块。这些块分别与 $Q^T_{(u-v)/v}$ 的 (2，2) 块和 (1，1) 块相等，且没有移位。我们将看到，可以对 $Q^T_{(u-v)/v}$ 这些块中的某些条目进行置换（置换方式符合定理 2.15），使其与 $Q^K_{u/v}$ 中相应的块一致。

引理 4.16. 给定带有 UP 定向的 $\tau_{(u-v)/v}$ ，则 $Q^T_{(u-v)/v} \sim \widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$，其中 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$ 是通过在 Q_{--} 的(2,2)-块中应用所有置换 $Q_{i,j'} \leftrightarrow Q_{i',j}$ 和 $Q_{j',i} \leftrightarrow Q_{j,i'}$ 从 $Q^T_{(u-v)/v}$ 得到的； ξ_i、 $\xi_{i'}$、 ξ_j 和 $\xi_{j'}$ 与图*20*中所示的关系相同，且 $\xi_i \prec \xi_j$。对于 RI 定向，结果类似，但在(1,1)-块中， Q_{++} 的各项互换。

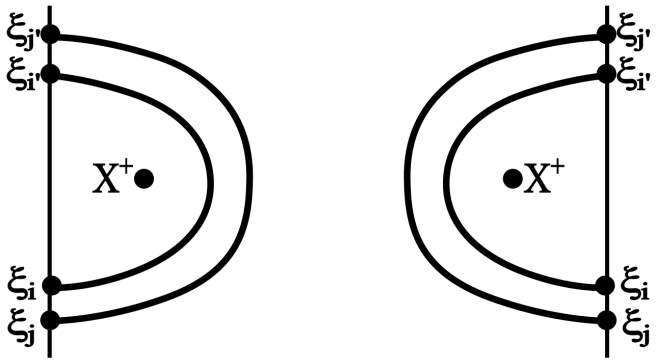


图20。引理 4.16 中箭图置换的交点标记。左： UP 情形；右： RI 情形

回顾第 2 节， $Q \sim Q'$ 表示

$$P_Q(x_1,...,x_u)\Big|_{x_i\mapsto(-1)^{Q_{i,i}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x} = P_{Q'}(x_1,...,x_u)\Big|_{x_i\mapsto(-1)^{Q'_{i,i}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}x},$$

也就是说， Q 和 Q' 经过适当的变量替换后，会得到相同的带色 HOMFLY-PT 不变量生成函数。为了证明引理 4.16，我们需要用到第2.5节中的定理 2.15；该定理由 Jankowski、Kucharski、Larraguível、Noshchenko 和 Sułkowski 在 [13]中证明。回想一下，如果 $\Lambda_i = (-1)^{Q_{i,\ i}-S_i}q^{S_i-1}a^{A_i}$，定理 2.15 表明， $Q \sim Q'$ 如果 Q' 可通过一系列非对角元的换位 $Q_{ab} \leftrightarrow Q_{cd}$ 和 $Q_{ba} \leftrightarrow Q_{dc}$ 与 Q相关，其中 $\Lambda_a\Lambda_b = \Lambda_c\Lambda_d$ 且 $|Q_{ab} - Q_{cd}| = 1$，则

$$Q_{ai} + Q_{bi} = Q_{ci} + Q_{di} - \delta_{ci} - \delta_{di}$$

对于所有 i，如果 $Q_{ab} = Q_{cd} - 1$。

因此，定理 2.15 给出了在 Q 中交换非对角元，同时保持生成函数不变的一些充分条件，所以我们只需证明存在一系列这样的合法置换。

引理*4.16*的证明。为简化记号，在整个证明中，我们将用 Q 代替 $Q^T_{(u-v)/v}$，并用 Q' 代替 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$。

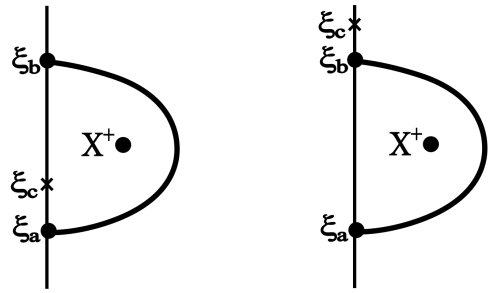
由于我们只置换 Q 的非对角元，而不对 S 和 A 做任何操作，因此显然，对于所有 $i \in Q_0$，条件 $\Lambda_i = \Lambda'_i$ 都成立。此外，根据这四个点在几何上的相互关系，很容易看出，对于我们想要交换的所有元素对， $\Lambda_i\Lambda_{j'} = \Lambda_{i'}\Lambda_j$。

现在，注意到一个一般事实：如果 ξ_a， ξ_b，并且 ξ_c 的关系如左下方的图所示（即 ξ_c 位于 l_I 上的 ξ_a 和 ξ_b 之间），那么

$$Q_{ac} - Q_{bc} = 1$$

如果它们的关系如右图所示（当 ξ_c 位于 l_I 上的 ξ_a 和 ξ_b 下方时，这一结论也成立），那么

$$Q_{ac} - Q_{bc} = 2.$$



这可由以下事实得出：$\Psi_{X^+}([\gamma^T_{b,c}]) - \Psi_{X^+}([\gamma^T_{a,c}]) = 1$ 在第一种情况下为 1，而 $\Phi([\gamma^T_{b,c}]) - \Phi([\gamma^T_{a,c}])$ 在第二种情况下为 0。

由此观察可知，对于所有按图20所示相关联的 ξ_i、$\xi_{i'}$、ξ_j 和 $\xi_{j'}$，都有 $Q_{i'j} = Q_{ij'} - 1$。因此，要应用交换 $Q_{ij'} \leftrightarrow Q_{i'j}$ 和 $Q_{j'i} \leftrightarrow Q_{ji'}$，我们需要证明

$$Q_{i'k} + Q_{jk} = Q_{ik} + Q_{j'k} - \delta_{ik} - \delta_{j'k} \tag{27}$$

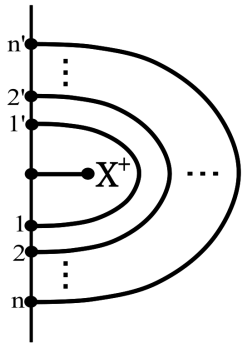
对所有 ξ_k 都成立。若 ξ_k 是活跃交点，这显然成立。因此，我们需要验证存在一系列所需的置换，使得每一步对所有非活跃的 ξ_k，方程27都成立。

对 $Q_{ac} - Q_{bc}$ 使用上述方程进行简单计算后，可以发现，Q_{--} 中行和列均由 i、i'、j、和 j' 编号的 4×4 子矩阵具有如下形式

$$\begin{array}{c} \\ i \\ i' \\ j \\ j' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & i' & j & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} X+3 & X+1 & A+3 & A+2 \\ X+1 & X & A+1 & A \\ A+3 & A+1 & Y+3 & Y+1 \\ A+2 & A & Y+1 & Y \end{bmatrix} \end{array} \tag{28}$$

对于某些 $X, Y, A \in \mathbb{Z}$。由此，当 $k \in \{i, i', j, j'\}$ 时，方程27 即可得出。

下图展示了$\tau_{(u-v)/v}$ 在 l_I右侧的样子，其中 $n = \frac{v-1}{2}$，并且我们只记录了 ξ_i的下标 i，按由内向外的顺序排列。



现在，由引理开头涉及 $Q_{ac}-Q_{bc}$ 的方程可知

$$Q_{ik}-Q_{i'k}=2-\delta_{|k|<i}-\delta_{ki'}, \tag{29}$$

其中，若 $|k|=k$ k 未加撇号；否则，它只去掉撇号（即 $|1|=|1'|=1$）。因此，假设 $j>i$，若取 $Q_{jk}-Q_{j'k}$ 对应的方程并从中减去方程 29，便得到

$$Q_{jk}+Q_{i'k}=Q_{j'k}+Q_{ik}-\delta_{i<|k|<j}-\delta_{kj'}-\delta_{ki}. \tag{30}$$

为进一步简化记号，将置换对 $Q_{j',i}\leftrightarrow Q_{j,i'}$ 和 $Q_{i,j'}\leftrightarrow Q_{i',j}$ 记作 (i,j)，其中 $i<j$。回想一下，我们希望将置换 (i,j) 应用于 Q_{--}，使得 $\xi_i\prec\xi_j$，因此我们将在每个 ξ_i 上标注上标，表示它相对于 $\prec$ 在其他（未加撇号的）非活跃交点中的排序，而 $\xi_{i'}$ 将带有相同的上标。特别地，i 与 ξ_i 的上标由集合 $[n]=\{1,...,n\}$ 上的双射函数 υ 联系起来，该集合由 $\prec$ 确定；例如，若对所有 $j\le n$ 都有 $\xi_i\prec\xi_j$，则将 ξ_i 和 $\xi_{i'}$ 分别写作 $\xi_i^{\upsilon(i)}=\xi_i^1$ 和 $\xi_{i'}^{\upsilon(i)}=\xi_{i'}^1$。若令 $\mu=\upsilon^{-1}$，我们也可以写成 $\xi_i^{\upsilon(i)}=\xi_i^1=\xi_{\mu(1)}^1$。因此，给定 ξ_i 和 ξ_j，$\upsilon(i)<\upsilon(j)$ 当且仅当 $\xi_i\prec\xi_j$；反过来，$\xi_{\mu(i)}\prec\xi_{\mu(j)}$ 当且仅当 $i<j$。

现在，我们描述所需的置换序列 $(i,\ j)$。注意，根据引理，我们要执行的置换可以写成 $(i,\ j)=(\mu(k),\ \mu(k)+l)$ 的形式，其中 $\mu(k)<\mu(k)+l\le n$（这是条件 $i<j$），且 $k<\upsilon(\mu(k)+l)$（这是条件 $\xi_i\prec\xi_j$）。这些 $(\mu(k),\ \mu(k)+l)$ 置换的序列由对 $(k,\ l)$ 上的一种“字典序”决定。下面我们将对此作进一步说明。

首先，从 $\xi_i^1=\xi_{\mu(1)}^1$ 开始。由于 $i=\mu(1)$，我们需要所有满足 $j>i$ 的置换 $(i,\ j)$，所需的序列为

$$(\mu(1),\mu(1)+1)\to(\mu(1),\mu(1)+2)\to...\to(\mu(1),n).$$

第一个置换 $(\mu(1),\ \mu(1)+1)$，在假定 $\mu(1)\neq n$ 的情况下，由定理 2.15 和方程 30 所允许，因为 $\delta_{i<|k|<j}=0$ 对所有 k 成立，随后该项在每一步都被先前的置换抵消。在所有此类带有 $i=\mu(1)$ 的 (i,j) 置换都已

执行之后，对 $\mu(2)$ 进行类似的步骤，但省略置换 $(\mu(2)\ \mu(2)+l)$，其中 $v(\mu(2)+l)<2$。注意，这只有在 $\mu(2)+k=\mu(1)$ 时才会发生。然后，对形如 (i,j) 且带有 $i=\mu(3)$ 的置换以类似方式继续，接着$i=\mu(4)$，直至 $i=\mu(n)$。在每一步，先前的置换都完美地抵消 $\delta_{i<|k|<j}$ 项，因此按此顺序它们由定理 2.15 所允许。为看出这一点，我们需要验证：当按照我们的规则执行这些置换时，无论 $\xi_i,\xi_j,$ 与 ξ_k 相对于 $\prec$ 如何排序，这种抵消都会发生。为此，只需考虑 $n=3$ 的情形。

举例来说，如果 $n=3$，我们有

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 1' \\ 2 \\ 2' \\ 3 \\ 3' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 1' & 2 & 2' & 3 & 3' \end{array} \\ \begin{bmatrix} X+3 & X+1 & A+3 & A+2 & B+3 & B+2 \\ X+1 & X & A+1 & A & B+1 & B \\ A+3 & A+1 & Y+3 & Y+1 & C+3 & C+2 \\ A+2 & A & Y+1 & Y & C+1 & C \\ B+3 & B+1 & C+3 & C+1 & Z+3 & Z+1 \\ B+2 & B & C+2 & C & Z+1 & Z \end{bmatrix} \end{array}.$$

在应用任何置换之前。如果我们假设 $\xi_2\prec\xi_1\prec\xi_3$ （或 $\xi_2^1\prec\xi_1^2\prec\xi_3^3$），那么所需的置换序列是 (2,3) $\to$(1, 3)；如果 $\xi_1^1\prec\xi_2^2\prec\xi_3^3$，那么我们会得到 (1,2) $\to$(1, 3) $\to$(2, 3)。对于由双射 $\mu:[3]\to[3]$ 指定的任意其他可能排序 $\xi_{\mu(1)}^1\prec\xi_{\mu(2)}^2\prec\xi_{\mu(3)}^3$ of$\xi_1,\xi_2,$ 以及 ξ_3，我们可以轻松写出置换序列，随后不难验证，每一步中 $\delta_{i<|k|<j}$ 项都为零。

□

现在我们有两个矩阵 $Q^T_{(u-v)/v}$ 和 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$，它们表示 $P(\tau_{(u-v)/v})$ 的箭图形式中的二次型，即 $Q^T_{(u-v)/v}\sim\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$。对 $Q^T_{(u-v)/v}$ 应用引理 4.8 得到 $Q_{u/v}$，对 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$ 应用该引理则得到另一个 $u\times u$ 矩阵 $\widetilde{Q}_{u/v}$。很容易看出 $Q_{u/v}\sim Q_{u/v}$，并且这些矩阵仅在UP情形下的 (3,3)-块以及在 RI 情形下的 (1, 1)-块有所不同。因此，如果我们用 $Q_{u/v}$ 替换 $Q_{u/v}$，引理 4.14 仍然成立。

这引出了定理 4.6 证明中的下一步：我们将证明，$Q_{u/v}$ 的 (3，3)-或 (1，1)-块（取决于 $\tau_{(u-v)/v}$ 的定向）与 $Q^K_{u/v}$ 中相同的块一致。

引理 4.17。若 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP定向，则 $K_{u/v}=Cl\ (T\tau_{(u-v)/v})$ 的 (3，3)-块经过对 $\mathfrak{C}$ 中各点重新排序后，等于 $Q^K_{u/v}$ 的 (3，3)-块。若 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 RI 定向，则对 (1，1)-块也有类似结论。

证明。和往常一样，我们考虑 UP 情形，因为 RI 情形的论证是相同的 .

考虑 $Q^K_{u/v}$ 的一个 4×4 子矩阵，其行和列由 $\kappa_i,\kappa_i',\kappa_j,\kappa_j' \in \mathfrak{C}$索引。存在一个相应的 $Q_{u/v}$ 的 4×4 子矩阵，它来自 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$的 Q_{--} 块，该块由与 κ配对的点 $\xi_i,\xi_i',\xi_j,\xi_j'$索引；假设这些交点的关系如图20所示。由引理4.9可知，这两个4×4 矩阵的对角线相等，因此我们可以利用已经做过的计算轻松地将它们相互关联。由引理 4.15可知， $Q^K_{u/v}$ 的这个子矩阵形如

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ i' \\ j \\ j' \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} i & i' & j & j' \end{array} \\
\begin{bmatrix} X+3 & X+1 & A+3 & \underline{A+1} \\ X+1 & X & \underline{A+2} & A \\ A+3 & \underline{A+2} & Y+3 & Y+1 \\ \underline{A+1} & A & Y+1 & Y \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{31}
$$

如果 $\xi_i \prec \xi_j$，至多相差指标的某种重新排序。此外，由引理4.16的证明中的(28)可知，$Q^T_{(u-v)/v}$ 的相应子矩阵应形如

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ i' \\ j \\ j' \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} i & i' & j & j' \end{array} \\
\begin{bmatrix} X+3 & X+1 & A+3 & \underline{A+2} \\ X+1 & X & \underline{A+1} & A \\ A+3 & \underline{A+1} & Y+3 & Y+1 \\ \underline{A+2} & A & Y+1 & Y \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{32}
$$

相对于指标的同一（重新排序），并利用 ξ与κ之间的匹配。然而， $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$ 被定义为当 $\xi_i \prec \xi_j$时，由 $Q^T_{(u-v)/v}$ 施加该块中的所有置换（i,j）而得到的矩阵，这将(32)变为(31)。$\widetilde{Q}_{u/v}$ 的(3, 3)-块等于 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$中这个经过置换的 Q_{--} 块，因此 $Q^K_{u/v}$ 与 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 的(3,3)-块在行、列指标的某种置换之后相等。

□

现在，我们已经证明，只要 κ_i和 κ_j 都与$\tau_{(u-v)/v}$的活跃或非活跃交点配对， Q_{ij} of $Q^K_{u/v}$ 的所有条目就与一个已知可通过链环-箭图对应适用于 $K_{u/v}$ 的箭图的对应条目相匹配。因此，证明定理 4.6 所需的最后一步，是证明由我们的定理计算出的 $Q^K_{u/v}$其余条目，可通过某个“合法”（按定理 2.15 的意义）的置换序列，与引理 4.8 中的 Q_{+-} 块相关联。

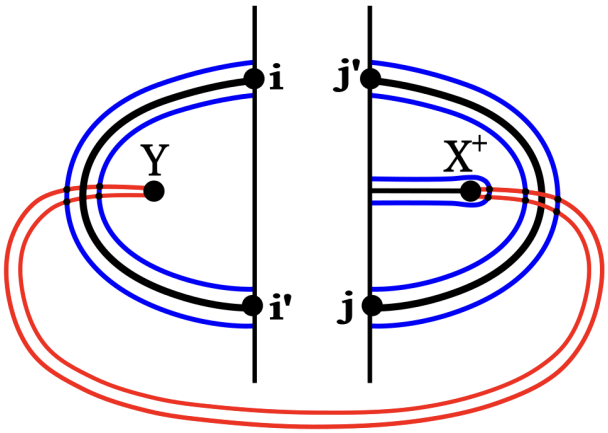
引理4.18. 这两个矩阵 $Q^K_{u/v}$ 和 $Q_{u/v}$ 满足 $Q^K_{u/v} \sim Q_{u/v}$.

证明。 我们已经证明， $Q_{u/v} \sim Q_{u/v}$ 其中 $Q_{u/v}$ 的左上角 2×2块和 (3,3) 块与 $Q^K_{u/v}$相同，只差一个置换矩阵的共轭。现在，我们需要证明，可以合法地置换 $Q_{u/v}$ 其余块中的元素，从而得到

$Q^K_{u/v}$。现在假设 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 已经经过共轭变换，使得 (3,3) 块与 $Q^K_{u/v}$的对应块相等。这意味着 $\mathfrak{Z}$ 的元素再次按照 $\prec$ 排序。

3×3 分块矩阵 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 可以看作定义在 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^K_{u/v}$ 上，或定义在$\mathbb{Z}\mathcal{G}^T_{(u-v)/v}$上、以 $\mathcal{G}^T_{(u-v)/v}=\mathfrak{X}\sqcup\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$为基的二次型（这是因为匹配关系 $\mathfrak{A}\sqcup\mathfrak{B}\sqcup\mathfrak{C}\leftrightarrow\mathfrak{X}\sqcup\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$）。矩阵 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 是对 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$应用引理 4.8 得到的； $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$定义在以 $\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}$为基的子模上，而对应 $\mathfrak{Y}$ 的块则加倍，以计入 $\mathfrak{X}$。在本证明中，我们还需要考虑其余的块，即 $(1,3)$-块和 $(2,3)$-块（$(3,1)$-块和 (3,2)-块可由对称性推出）；这些块关联的是 $\tau_{(u-v)/v}$的活跃交点与非活跃交点。

~我们需要考虑的其余 $Q_{u/v}$ 置换具有如下形式：$(i,\ j)$，其中 ξ_j不活跃且 ξ_i 活跃，并且 $\xi_j\prec\xi_i$。下面，我们说明 $\tau_{(u-v)/v}$中相关 ξ 的记号约定，其中我们只写出下标。请注意，由于每条黑弧都有两种可能的定向，纽结的交点与缠结的交点之间有四种不同的配对方式；因此，为避免不必要的繁杂，我们不标记 κ，但对每种定向，都可以根据图14轻松确定它们。



对于$\tau_{(u-v)/v}$，我们只有交点 $\xi_i\in\mathfrak{Y}$ 和 $\xi_j,\xi_{j'}\in\mathfrak{Z}$ 对$\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$有贡献。 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$的相应 3×3 子矩阵与 $\widetilde{Q}_{u/v}$的 4×4 子矩阵通过应用Cl$(T-)$相关联，从而给出

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ j' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} X & A+2 & A \\ A+2 & Y+2 & Y \\ A & Y & Y-1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{Cl(T-)} \begin{array}{c} \\ i \\ i' \\ j \\ j' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & i' & j & j' \end{array} \\ \begin{bmatrix} X+2 & X & A+2 & A \\ X & X-1 & A+1 & A-1 \\ A+2 & A+1 & Y+2 & Y \\ A & A-1 & Y & Y-1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{33}
$$

根据引理 4.8。再一次，我们可以利用引理 4.15，将右侧的矩阵与 $Q^K_{u/v}$ 中对应的 4×4 子矩阵进行比较，其行和列由κ_i，κ'_i，κ_j，和 κ'_j 编号。特别地，如果 $\xi_i \prec \xi_j$，它应当如图所示；如果 $\xi_i \succ \xi_j$，则应交换 A 和$A+1$ 项。这证实了我们所需的置换确实具有如下形式：$(i,\ j)$，其中 ξ_i 活跃、 ξ_j 不活跃，并且 $\xi_j \prec \xi_i$。

既然我们已经知道要应用哪些置换，就需要证明存在一个符合定理 2.15 要求的置换序列。换句话说，在序列的每一步，为了应用 (i,j)，我们需要

$$Q_{jk}+Q_{i'k}=Q_{j'k}+Q_{ik}-\delta_{kj'}-\delta_{ki} \tag{34}$$

对每个 k 都成立，因为根据定理 4.6 计算得出 $Q_{i'j}=Q_{ij'}-1$，而我们应用该置换是为了使 4×4 块与上方右侧的块一致。

通过与引理4.16的证明类似的论证，可以看出，置换的顺序可以由一条类似于字典序的规则确定：若 $i>j$，则应先执行置换 (i,k)，再执行 (j,l)；若 $i=j$，则 $k<l$。这~可以通过考虑 $Q_{u/v}$ 的 8×8 子矩阵来证明，该子矩阵的行和列由 ξ_i、ξ'_i、ξ_j、ξ'_j、ξ_k、ξ'_k、ξ_l 和 ξ'_l 标记，其中前四个点是活跃交点，后四个点是非活跃交点（因此 i、j、k 和 l 互不相同）。假设我们需要应用置换 (i,k) 和 (j,l)，其中 $\xi_i \prec \xi_j$ 且 $\xi_k \prec \xi_l$。在这种情况下，我们还必须有置换 (j,k)，而我们可能需要也可能不需要置换 (i,l)。根据引理 4.15，这个 8×8 矩阵必定具有如下形式

$$\begin{array}{c} \\ i \\ i' \\ j \\ j' \\ k \\ k' \\ l \\ l' \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} i & i' & j & j' & k & k' & l & l' \end{array} \\ \begin{bmatrix} W+2 & W & A+2 & \underline{A} & B+2 & \underline{B} & C+2 & \underline{C} \\ W & W-1 & \underline{A+1} & A-1 & \underline{B+1} & B-1 & \underline{C+1} & C-1 \\ A+2 & \underline{A+1} & X+2 & X & D+2 & \underline{D} & E+2 & \underline{E} \\ \underline{A} & A-1 & X & X-1 & \underline{D+1} & D-1 & \underline{E+1} & E-1 \\ B+2 & \underline{B+1} & D+2 & \underline{D+1} & Y+2 & Y & F+2 & \underline{F} \\ \underline{B} & B-1 & \underline{D} & D-1 & Y & Y-1 & \underline{F+1} & F-1 \\ C+2 & \underline{C+1} & E+2 & \underline{E+1} & F+2 & \underline{F+1} & Z+2 & Z \\ \underline{C} & C-1 & \underline{E} & E-1 & \underline{F} & F-1 & Z & Z-1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{35}$$

其中所有取值均在 $\mathbb{Z}$ 中。为考虑最一般的情形，我们假定必须施加全部四个置换，且被置换的项照例加上下划线。采用与引理4.16的证明中相同的记号来标明置换的次序，可以容易地算出

$$\begin{array}{ccc} (j,k) & \longrightarrow & (i,k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (j,l) & \longrightarrow & (i,l) \end{array}$$

这是为了保证带有适当指标的 (34) 在每一步都成立所必需的。我们可以自由选择先做 (j,l) 还是先做 (i,k)，并且可以通过选择先做 (j,l) 来确定上文所指定的排序。

引理成立的原因我们通过证明与 $Q^K_{u/v}$ 一致，因此 $Q_{u/v} \sim \widetilde{Q}_{u/v} \sim Q^K_{u/v}$。这也完成了定理 4.6 的证明。□

为了完成定理 4.6 的证明，我们现在必须考虑修正项，以确保

$$S_i - Q_{ii} - 2A_i = \sigma(K_{u/v})$$

对所有 $1 \le i \le u$都成立。

4.5. 步骤 3：修正项。定理 4.6 中的修正项通过考察构造 $K_{u/v}$的归纳过程来计算，即在 $T^{a_{2k+1}}R^{a_{2k}}...R^{a_2}T^{a_1}\tau_{0/1}$的 Cl 中进行 $K_{u/v}$ =扭转。特别是，对于 $X \in \{UP, OP, RI\}$，我们需要计算 TX型和 RX型扭转的次数。

在 [39], 中，Stošić 和 Wedrich 展示了如何通过先研究每一步归纳过程中扭转操作对 S、A以及 Q的 P（$^{\tau_{u'/v'}}$）所产生的影响，再在达到 P（$^{\tau_{(u-v)/v}}$）后应用 Cl（$T-$），将 P（$K_{u/v}$）写成箭图形式。重要的是，他们使用了经过适当缩放的扭转规则，以确保最终得到

$$S_i - Q_{ii} - 2A_i = \sigma(K_{u/v}).$$

我们首先需要做的是利用定理 4.6 在矩阵层面计算扭转规则。更确切地说，如果 $P(^{\tau_{u'/v'}})$ 由数据 $X, [K|S|A], Q$ 表示，那么我们需要确定在对 $^{\tau_{u'/v'}}$ 应用 T 或 R 时，这些数据如何变化。

在此之前，我们必须考虑一个额外的细节。命题 3.11 和 3.12 中的公式取决于 ξ_ω 是活跃的还是不活跃的。如果一个缠结具有 UP 定向，我们知道 ξ_ω 是不活跃的；如果它具有 RI 定向，我们知道 ξ_ω 必须是活跃的。然而，如果一个缠结具有 OP 定向，那么 ξ_ω 可能是活跃的或不活跃的，这取决于是否$u > v$ 或 $u < v$。

定义4.19. 如果 $^{\tau_{u/v}}$ 具有 OP 定向且 ξ_ω 是活跃的（即 $u > v$），我们称 $^{\tau_{u/v}}$ 具有 OP^+ 定向。类似地，如果 $^{\tau_{u/v}}$ 具有 OP定向且 ξ_ω是不活跃的（即 $u < v$），则 $^{\tau_{u/v}}$ 具有 OP^- 定向。

因此，在下面的引理中，我们需要考虑 TUP、TRI、 TOP^+、 TOP^-、 RUP、 RRI、ROP^+、以及 ROP^-的（矩阵层面的）扭转规则。我们已经知道如何在相差某个平移的意义下正确地计算一切，而 Q 中的平移由对角线决定，因此我们只需处理线性形式。

引理 4.20. 若 $P(^{\tau_{u'/v'}})$ 被写成（几乎）箭图形式，并由定向与线性形式数据给出

$$X, \left[\begin{array}{c|c|c|c} K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ \\ \hline K_- & S_- & A_- & Q_- \end{array}\right],$$

则应用 T 和 R的效果，根据命题 *3.11* 或 *3.12*，按下列规则取决于 X 。

$$TUP,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ + 1 & A_+ & Q_+ + 1 \\ K_- & S_- + 1 & A_- & Q_- \\ K_- & S_- & A_- & Q_- \end{bmatrix} \qquad TOP^+,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ \\ K_- & S_- & A_- - 1 & Q_- + 1 \\ K_- & S_- - 1 & A_- - 1 & Q_- + 1 \end{bmatrix}$$

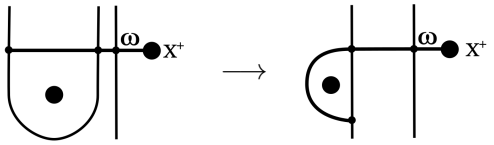
$$TRI,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ \\ K_- & S_- & A_- & Q_- - 1 \\ K_- & S_- - 1 & A_- - 1 & Q_- + 1 \end{bmatrix} \qquad TOP^-,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ & A_+ + 1 & Q_+ - 1 \\ K_- & S_- & A_- & Q_- \\ K_- & S_- - 1 & A_- & Q_- \end{bmatrix}$$

$$RUP,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ + 1 & A_+ + 1 & Q_+ - 1 \\ K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ + 1 \\ K_- & S_- & A_- & Q_- \end{bmatrix} \qquad ROP^+,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ + 1 & A_+ & Q_+ \\ K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ \\ K_- & S_- & A_- - 1 & Q_- + 1 \end{bmatrix}$$

$$RRI,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ + 1 & A_+ & Q_+ + 1 \\ K_+ & S_+ & A_+ & Q_+ + 1 \\ K_- & S_- & A_- & Q_- \end{bmatrix} \qquad ROP^-,\begin{bmatrix} K_+ & S_+ + 1 & A_+ + 1 & Q_+ - 1 \\ K_+ & S_+ & A_+ + 1 & Q_+ \\ K_- & S_- & A_- & Q_- \end{bmatrix}$$

证明。我们针对 TUP 情形证明该引理。其余情形的证明类似。

假设 ξ_i 是 $\tau_{u'/v'}$ 的一个交点，使得 S、A 和 Q 的对角线都由环路 γ_i 表示：$[0,1] \to M$。如果 ξ_i 是活跃的，那么施加顶部扭转 T 会将 ξ_i 变为 $\tau_{(u'+v')/v'}$ 的一个新的活跃交点 ξ_i'，并且我们很容易看出，$\Psi_V([\gamma_{i'}]) - \Psi_V([\gamma_i]) = 1$；当 $V = Z$ 是这三个点的中间那个点时（它是 X^- 或 Y），结果如此，否则结果为 0。如果 ξ_i 是非活跃的，那么施加 T 会使 $\tau_{(u'+v')/v'}$ 加倍为 ξ_i 和 ξ_i''，其中 ξ_i' 现在是活跃的，而 ξ_i'' 仍然是非活跃的（我们可以将 ξ_i'' 视为与 ξ_i 同一个点）。在这种情况下，对所有 $V \in \{X^+, X^-, Y\}$，$\Psi_V([\gamma_{i'}]) - \Psi_V([\gamma_i])$ 和 $\Psi_V([\gamma_{i''}]) - \Psi_V([\gamma_i])$ 均为 0。下图有助于说明我们刚才讨论的内容。



最后，由于 S_i中的$\delta_{i,A}\delta_{\omega,I}$项，对于由$\tau_{u'/v'}$ 的非活跃点在应用 T后得到的新活跃交点，我们在 $S_- + 1$ 块中得到 $+1$。

□

这些扭转规则公式可以直接与来自 [39]的命题 3.5进行比较。由此得到如下引理。

引理 4.21。设 $P(\tau_{(u-v)/v})$ 已通过两种方式置于箭图形式中：第一种遵循 *[39]* 的命题 *3.5*，并采用线性形式数据 $[K', S', A', Q']$；第二种遵循命题 *3.12*，并采用线性形式数据 $[K, S, A, Q]$。那么，除了一些对……的重新排序之外

$\mathcal{G}^T_{u/v}$,

$$\begin{aligned}
K' &= K \\
S' &= S + \#\{TOP^{\pm}, TRI\} - \#\{TUP, RUP, ROP^{\pm}\} \\
A' &= A + \#\{TRI, TOP^{+}\} - \#\{ROP^{-}, RUP\} \\
Q' &= Q + \#\{RUP, ROP^{-}\} - \#\{TOP^{+}, TRI, RRI\}.
\end{aligned}$$

显然，引理中的记号表示了构造 $\tau_{(u-v)/v}$ 所用的特定类型扭转的次数。此外，我们在上文用 Q 和 Q' 表示二次型对应矩阵的对角线，但我们知道，移动对角线会使整个矩阵随之移动。

引理 *4.21* 的证明。 只需将引理 4.20 与 [39] 中的命题 3.5 进行比较，即可轻易证明这一点。□

命题 3.11 和命题 3.12 保证了 $S_\omega = A_\omega = Q_{\omega\omega} = 0$，因此我们得到

$$S'_\omega - Q'_{\omega\omega} - 2A'_\omega = \#\{TOP^{-}, RRI\} - \#\{TUP, ROP^{+}\}$$

对于 $\tau_{(u-v)/v\cdot}$，如果将这个值记为 δ，那么对于与 ξ_ω 位于同一活跃（非活跃）轴上的所有 ξ_i，都有 $S'_i - Q'_{ii} - 2A'_i = \delta$；而另一条轴上的交点则给出 $S'_i - Q'_{ii} - 2A'_i = \delta \pm 1$，具体取决于 ξ_ω 是活跃还是非活跃。不过，容易验证，依照引理4.9应用 $\mathsf{Cl}(T-)$ 后，如果我们将 $S, A,$ 和Q （对应 $K_{u/v}$）分别移动与引理 4.21 中 $S, A,$ 和 Q （对应 $\tau_{(u-v)/v}$）相同的量，那么对于所有 κ_i，结果都是 $S'_i - Q'_{ii} - 2A'_i = \delta$。由此得到以下结论。

定义 4.22。 我们将定理 4.6 中的三个修正项定义如下：

$$\mu_1(K_{u/v}) = \#\{TOP^{\pm}, TRI\} - \#\{TUP, RUP, ROP^{\pm}\} \tag{36}$$

$$\mu_2(K_{u/v}) = \#\{TRI, TOP^{+}\} - \#\{ROP^{-}, RUP\} \tag{37}$$

$$\mu_3(K_{u/v}) = \#\{RUP, ROP^{-}\} - \#\{TOP^{+}, TRI, RRI\}, \tag{38}$$

其中，这些公式统计的是构造 $\tau_{(u-v)/v}$ 时所用的扭转次数，而不是 $\tau_{u/v}$。

现在，我们去掉带撇号的记号，并假设我们使用的是定理 4.6 中经过这些量平移的线性形式，使得

$$S_i - Q_{ii} - 2A_i = \#\{TOP^{-}, RRI\} - \#\{TUP, ROP^{+}\}.$$

因此，只需证明以下引理。

引理 4.23。 对于有理结 $K_{u/v} = \mathsf{Cl}(T\tau_{(u-v)/v})$，

$$\sigma(K_{u/v}) = \#\{TOP^{-}, RRI\} - \#\{TUP, ROP^{+}\},$$

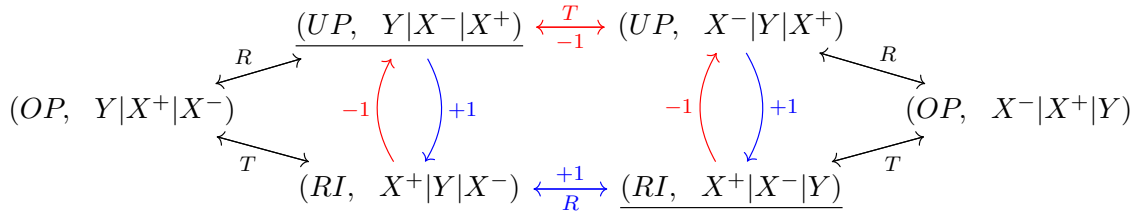
其中我们正在计算 $\tau_{(u-v)/v\cdot}$ 的扭转次数

Proof. 如 [39], 中所述，利用 [8] 和 [34]的方法可以很容易地证明 t

$$\sigma(K_{u/v}) = 1 + \#RRI - \#TUP, \tag{39}$$

其中，该公式计算的是缠结 $\tau_{u/v}$ 的扭转次数，这与 $\tau_{(u-v)/v}$ 相反。

不难看出， TOP^- 等价于 $(TR)UP$，而 ROP^+ 等价于 $(RT)RI$。回顾引理 3.5 中的状态六边形图。我们可以为 TOP^- 和 ROP^+ 添加竖直边，并根据这些边是否对表达式 $\#\{TOP^-, RRI\} - \#\{TUP, ROP^+\}$ 中的 $+1$ 或 -1 有贡献来标记它们，如下所示。



根据引理 2.5 的条件，我们还在 $\tau_{(u-v)/v}$ 的两个可能状态下方划了线，使得 Cl($T\tau_{(u-v)/v}$) 给出 $K_{u/v}$。

首先，假设 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 $(UP, Y|X^-|X^+)$ 状态，这与 $\tau_{0/1}$ 相同。我们可以认为，上面的六边形图由 UP 状态构成的“上层部分”和由 RI 状态构成的“下层部分”组成。用于构造 $\tau_{(u-v)/v}$ 的顶部和右侧扭转序列确定了图中的一条路径，其中对 $\#\{TOP^-, RRI\} - \#\{TUP, ROP^+\}$ 有贡献的边仅包括上层部分和下层部分内部的边，或连接两个层级的边。由于与 $\tau_{(u-v)/v}$ 相关的路径在上层部分从同一状态出发并回到该状态，所有竖直箭头都必须抵消。因此，我们有 $\delta = \#RRI - \#TUP$，这里我们计算的是用于构造 $\tau_{(u-v)/v}$ 的扭转次数。由于 $\tau_{u/v}$ 是对 $\tau_{(u-v)/v}$ 再施加一次类型为 TUP 的扭转得到的，而方程（39）计算的是用于构造 $\tau_{u/v}$ 的扭转次数，因此该引理在此情形下成立。

具有 $\tau_{(u-v)/v}$ has $(RI,\ X^+|X^-|Y)$ 状态的情况非常相似。主要区别在于，方程（39）中的 $+1$ 现在源于以下事实：与$\tau_{(u-v)/v}$ 对应的路径必须比向上多向下走一次。□

我们已经证明，一旦取自定理 4.6 的移位 S， A，以及 Q，就能得到所有项都是 δ-齐次的，且具有 $\delta = \sigma(K_{u/v})$，这正是所需的。按照 Stošić 和 Wedrich 在 [39], 中的做法，可得

$$\mathcal{P}^{\wedge^1}_{K_{u/v}}(q, a, t) = \sum_{i=1}^{u} q^{S_i + Q_{ii}} a^{A_i} t^{-Q_{ii}}$$

相差某种框架平移，其中 $\mathcal{P}^{\wedge^1}_{K_{u/v}}$ 是 $K_{u/v}$ 的（未着色）HOMFLY-PT同调的庞加莱多项式，而 t 表示同调分次。现在，我们可以将引言中的猜想2针对有理结重新表述如下。

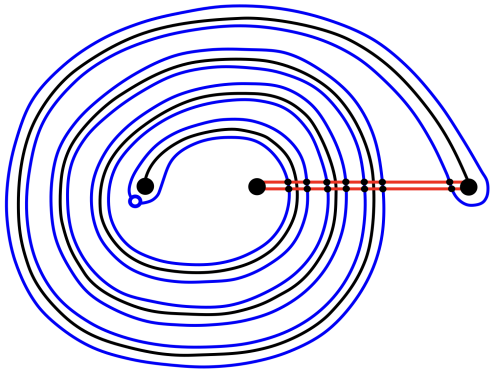


图 21. 在 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中关于 $K_{7/1} = T(2, 7)$ 的几何图示。请注意，从左到右排列的三个特定点分别是 X^-，Y，和 X^+。

猜想4.24。 对于一个有理结 $K_{u/v}$，若 S、A和 Q 由定理 *4.6*计算得出，则有

$$\sum_{j\geq 0}\mathcal{P}^{\bigwedge^j}_{K_{u/v}}(q,a,t)x^j = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\dots,d_u)\in\mathbb{N}^u} q^{S\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^T}a^{A\cdot\boldsymbol{d}}t^{T\cdot\boldsymbol{d}}\begin{bmatrix}d_1+\dots+d_u\\ d_1,\dots,d_u\end{bmatrix}x^{d_1+\dots+d_u} \tag{40}$$

其中 $\mathcal{P}^{\bigwedge^j}_{K_{u/v}}(q,a,t)$ 是 $\bigwedge^j$ 色 *HOMFLY-PT* 同调的庞加莱多项式，而 $T=(-Q_{11},\dots,-Q_{uu})\in\mathbb{Z}^u$。

4.6. 示例：有理环面纽结。 有理环面纽结 $K_{(2n+1)/1}=T(2, 2n+1)$ 是一类便于研究的纽结，只需很少的工作，我们就能为 $Q^K_{2n+1/1}$给出简洁的公式。事实上，根据引理 4.8 和示例6.3，公式可立即得出 [11]，因为对于这一特定的纽结族，不会出现任何与非活跃指标有关的复杂情况。

在 [11]，中，已证明当 n 为偶数时， $P(\tau_{n/1})$ 的生成函数数据由下式计算：

$$\begin{cases} K_i=\delta_{i\leq n/2}\\ S_i=n-2i+1\\ A_i=0\\ \begin{cases} Q_{ij}=n-2k, & \text{如果 } (i,\ j)\in\mathcal{I}_k,\quad 1\leq k\leq n/2\\ Q_{ij}=0, & \text{如果 } (i,\ j)\in\mathcal{I}_k,\quad k=n/2+1, \end{cases}\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{I}_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i=k \text{ and } j\leq k, \text{or } j=k \text{ and } i\leq k\}.$$

例如，$\tau_{6/1}$ 的数据为

$$\left[\begin{array}{c|c|c} K & S & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Q_{6/1}^{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

现在， $K_{7/1} = \mathsf{Cl}(T\tau_{6/1})$，且 $\mathcal{D}(K_{7/1})$如图 21 所示。若取 κ_i的标准排序，我们可根据定理 4.6 计算 $S, A,$ 以及 $Q_{7/1}^{K}$，结果如下。

$$\left[\begin{array}{c|c} S & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \\ \hline -6 & 0 \end{array}\right] \qquad Q_{7/1}^{K} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 6 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

在此情形下，我们有 $\mu_1(K_{7/1}) = -6$ 和 $\mu_2(K_{7/1}) = \mu_3(K_{7/1}) = 0$。一般而言，我们得到$\mu_1(K_{(2n+1)/1}) = -2n$ 和 $\mu_2(K_{(2n+1)/1}) = \mu_3(K_{(2n+1)/1}) = 0$，由此得到纽结的符号差 $\delta = -2n$。还应注意到， $Q_{7/1}^{K}$ 与 $Q_{7/1}$完全一致；后者是对 $Q_{6/1}^{T}$应用引理 4.8 后得到的矩阵。这一结论可推广到任意有理环面纽结。

命题 4.25. 对于有理环面纽结 $K_{(2n+1)/1}$，我们有 $Q_{(2n+1)/1}^{K} = Q_{(2n+1)/1}$。

适当平移 S 后，用这两种不同方法计算得到的线性形式自然也一致。考察定理 4.6 的证明可轻松推出命题 4.25；注意到我们无需应用任何置换（因为$\tau_{2n/1}$ 只有一个非活性交点）。此外，我们将在第 6 节中将矩阵计算结果与 [22] 中的结果进行比较，并在该节讨论对称着色 HOMFLY-PT 多项式。

4.7. 示例：8字结， $K_{5/2}$。8字结不仅值得研究，而且十分有趣；我们还将在此讨论它，因为它提供了一个 RI缠结闭合的示例。这个示例与定理 4.6 的证明中明确讨论的 UP缠结闭合示例相似，但并不相同。

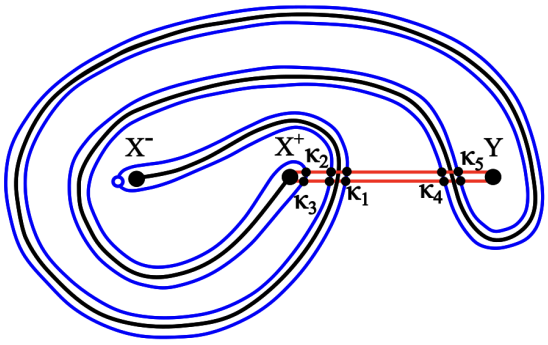


图22。 $\mathcal{D}^2(K_{5/2})$

回想一下 $K_{5/2}=\mathsf{Cl}(T\tau_{3/2})$，因此我们可以先根据定理3.11求出$\tau_{3/2}$ 的 S、A和 Q，再应用引理 4.8，从而计算该纽结的这些量。这样计算可得

$$\left[\begin{array}{c|c} S & A \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{array}\right] \qquad Q_{5/2}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

应用修正项之前。对于 $K_{5/2}$，我们计算 $\mu_1(K_{5/2})=\mu_2(K_{5/2})=-1$和 $\mu_3(K_{5/2})=1$，这对应于一次框架平移。由于我们只关心相差某个框架平移的 HOMFLY-PT 多项式，因此在这个例子中将忽略修正项。

根据引理4.9，定理 4.6 计算出的 S，A，以及 $Q^K_{5/2}$的对角线相同，但 $Q^K_{5/2}$ 的一些非对角元发生了置换。具体而言，定理 4.6 给出

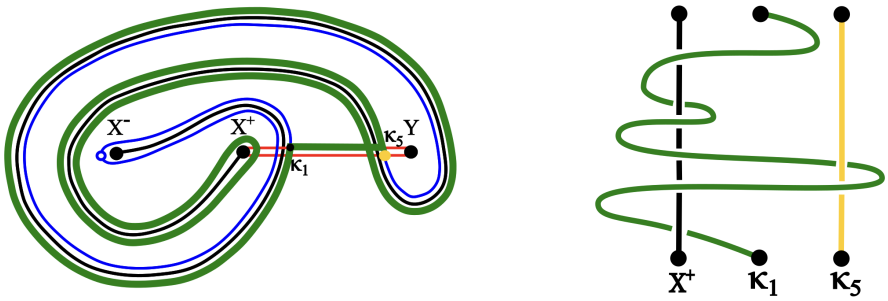
$$Q^K_{5/2}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 & \underline{0} \\ -1 & 1 & 0 & \underline{-1} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \underline{-1} & -1 & -1 & 0 \\ \underline{0} & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

不同的置换后元素已用下划线标出。注意，这些置换与定理 4.6 的证明中预测的置换相吻合。

给定 $Q_{55}=2$，我们将用公式证明 $Q_{51}=0$。我们使用

$$Q_{51}=Q_{55}+(\Phi-2\Psi_{X^+})([\gamma_{1,5}]); \tag{41}$$

环路 $\gamma_{1,\ 5}$ 如下图所示，同时还展示了相应的辫图，其中标出了用于计算 $(\Phi-2\Psi_{X^+})([\gamma_{1,5}])$ 的相关股线。



现在可以很容易地看出，通过观察对应于 κ_1和 κ_5的股线，有 $\Phi([\gamma_{1,5}]) = 2$；类似地，通过观察 X^+ 和 κ_1的股线，有 $\Psi_{X^+}([\gamma_{1,5}]) = 2$。因此，我们由方程 41 得到 $Q_{51} = 0$。

5. 2分量有理链环

本节将考虑 Cl($\tau_{u/v}$) 为 2分量链环的情形，这种情况出现在 u为偶数时。我们将其记为 $L_{u/v} = \text{Cl}(\tau_{u/v})$。尽管 2分量链环的“几何图示”与纽结不同，但本节的整体结构将与上一节，即第 4 节相似，因此我们会省略细节以避免过多重复，同时也会着重指出不同之处。

在本文的其余部分，我们将用“链环”指代二分支有理链环，用“纽结”指代单分量有理链环。

5.1. 为链环建立定理。 首先，我们需要仔细描述有理链环的几何图景。蓝色拉格朗日子流形的定义与纽结情形相同，我们将继续用$\alpha_{u/v}$表示它。然而，红色拉格朗日子流形与纽结情形不同：正如蓝色拉格朗日子流形可以看作紧紧缠绕在$\alpha_{u/v}$周围的一条带，链环的红色拉格朗日子流形可以看作缠绕在 X^- 与X^+之间的一条带。我们将这个新的红色拉格朗日子流形记为 β'。正如我们所预期的，对于 $L_{u/v}$.，$\alpha_{u/v}$ 与 β' 之间有 $2u$ 个交点。见图 23。我们将这些交点标记为 λ_i，其中 $1 \leq i \leq 2u$。我们将用 $\mathcal{G}^L_{u/v}$ 表示这组交点。

定义 5.1。 给定一个二分支有理链环 $L_{u/v}$，令 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 为三点穿孔平面 M 中由 $\alpha_{u/v}$、$\alpha_{u/v}$ 和 β' 组成的图形。

我们得到 $2u$ 个交点的一种理解方式是：可以将链环 $L_{u/v}$ 视为 Cl($T\tau_{(u-v)/v}$)，其中 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 或 RI 定向，这与我们对纽结的观察相同；从几何上说，我们可以应用解扭同伦，将 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 与 $\mathcal{D}(\tau_{(u-v)/v})$ 进行比较，由此便可以区分活跃交点和非活跃交点。接着，我们看到，主动侧贡献了 $2(u-v)$ 个交点，非活动侧贡献了 $2v$ 个，总计 $2u$ 个。图 24 有助于说明这一点。

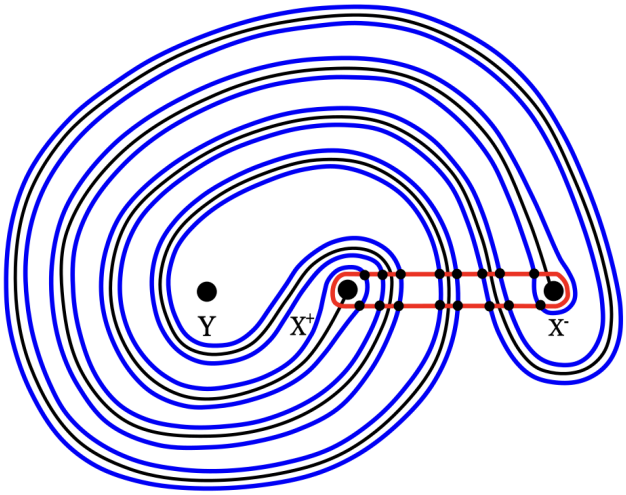


图 23. $\mathcal{D}(L_{8/3})$

根据 [39], , $L_{u/v}$ 的着色 HOMFLY-PT 生成函数的箭图形式为

$$P(L_{u/v}) = \sum_{\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_{2u})\in\mathbb{N}^{2u}} \frac{(-q)^{S\cdot\mathbf{d}}a^{A\cdot\mathbf{d}}q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^T}}{\prod_{i=1}^{2u}(q^2;q^2)_{d_i}}x^{d_1+\dots+d_{2u}}, \tag{42}$$

这与纽结的情形不同，因为它不再是 Laurent 多项式。然而， $S, A,$ 和 Q 的计算将被证明与第 4 节中的做法非常相似。正如我们在纽结中所见，为了计算箭图形式的线性形式和二次型，我们只需考虑 M 和 Conf^2(M) 中的环路。我们能够定义从 κ_i （对任意 i）到 κ_ω（紧接在 X^+之前的交点）的环路，但对于链环，这个点并没有显而易见的选择——它们有两个。因此，在继续之前，我们需要指定哪一个是我们的 $\lambda_\omega \in \mathbb{L}^1_{u/v}\cap\mathbb{L}^1$ 。

这将取决于 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 还是 RI 定向。如果 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 在未施加解扭同伦的情况下绘制，如图 23 所示，那么在紧邻X^+的两个交点中，在 UP 情形下取下方的一个作为 λ_ω ，在 RI 情形下取上方的一个。一旦施加解扭同伦，它们在图中就会互换。对于 $L_{8/3}$，由于 $\tau_{5/3}$ 具有RI 定向， λ_ω 是图 24 左图中左上方的交点；在撤销最后的顶部扭转 T之后， λ_ω 是紧邻 X^+的两个交点中较低的一个。

用于计算 S， A，以及 Q 的对角线的环路，是通过沿蓝色拉格朗日子流形$\alpha_{u/v}$ 连接指定交点之间的路径，再沿红色拉格朗日子流形 β' 返回基点的路径拼接而成的。由于现在两个拉格朗日子流形都是简单闭曲线，沿着每条曲线总有两个可能的行进方向。正如我们之前对纽结所做的那样，通过从蓝色拉格朗日子流形上移除一个点，可以唯一确定

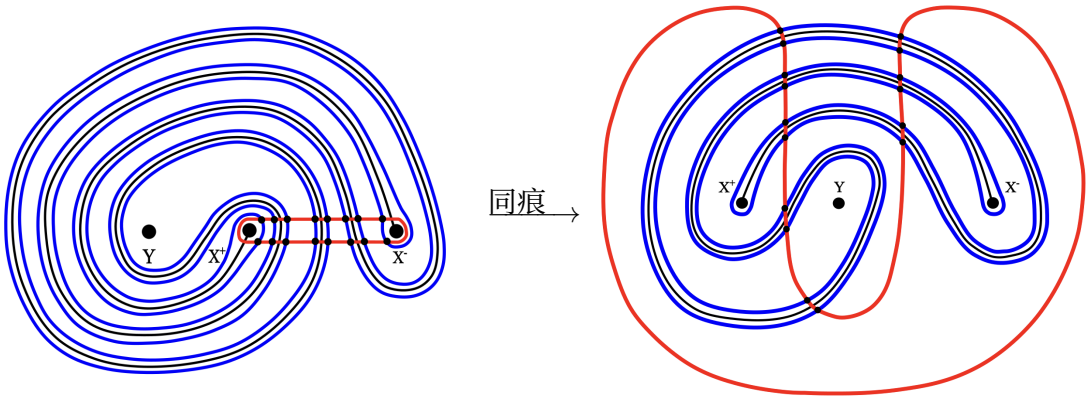


图 24. $L_{8/3}$的解扭同伦

同伦意义下的环路；现在，我们可以从蓝色和红色拉格朗日子流形上各移除一个点，从而唯一确定所需的环路（在同伦意义下）。具体来说，我们将从蓝色拉格朗日子流形上移除与纽结情形相同的点（即 X^- 旁边的点）；对于红色拉格朗日子流形，则移除它与底层弧 $\alpha_{u/v}$ 在 X^+ 旁边的交点。因此，我们可以将 $\eta_{i,\ j}$ 定义为沿 $\alpha_{u/v}$ 从 λ_i 到 λ_j、避开孔的路径（在同伦意义下唯一），并将$\eta_{j,\ i}$ 定义为沿 β' 从 λ_j 返回 λ_i、避开 β' 中的孔的路径（在同伦意义下唯一）。现在，我们可以定义 M 中的环路。

定义5.2. 给定 λ_i和 λ_j，定义$\gamma^L_{i,j}$： $[0,1] \to M$为$\gamma^L_{i,j} := \eta_{i,j} \cdot \eta_{j,i}$。此外，我们定义 $\gamma^L_i := \gamma^L_{i,\omega}$。

图25给出了一个环路 γ^L_i的示例，其中 $L_{8/3}$，空心圆表示拉格朗日子流形中的“孔”（即禁止通过区域），而 i 和 ω 表示交点 λ_i 和 λ_ω。

对于Conf$^2(M)$中的环路，我们将红色拉格朗日子流形 β' 取两个平行副本，并像处理纽结时那样，将环路视为一对路径，从而在平面中绘制所有内容。正如我们将 $\mathcal{D}^2(K_{u/v})$用作图示模型，以定义Conf$^2(M)$中的环路一样，我们也将为2分量链环定义 $\mathcal{D}^2(L_{u/v})$。设 β'_1 和 β'_2 为β'的两个平行副本，其中 β'_1 是内侧的一个。我们可以再次定义

$$\mathbb{L}^j_{u/v} := \mathrm{Sym}^j(\overline{\alpha_{u/v}}) \setminus \Delta \subset \mathrm{Conf}^j(M)$$

and

$$\mathbb{L}^j := \pi(\beta'_1 \times ... \times \beta'_j) \subset \mathrm{Conf}^j(M),$$

正如我们对纽结所做的那样。

定义5.3。 令 $\mathcal{D}^2(L_{u/v})$表示 Conf$^2(M)$ 中由$\mathbb{L}^2_{u/v}$和 $\mathbb{L}^2$组成的拉格朗日子流形构形。在 M中，这可通过取$\alpha_{u/v}$，β'_1以及 β'_2来建模，其中 Conf$^2(M)$ 中的点由拉格朗日子流形上的一对不同点表示，而环路由带有基点（x_1，x_2）的一对不交路径给出，满足$x_1 \in \alpha_{u/v} \cap \beta'_1$和 $x_2 \in \alpha_{u/v} \cap \beta'_2$。

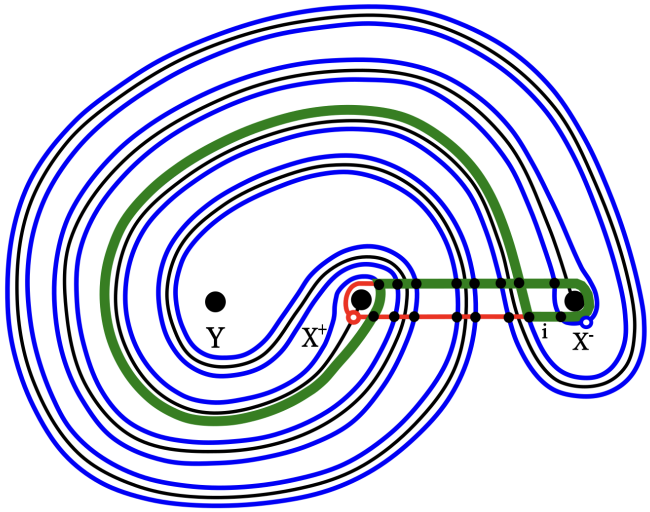
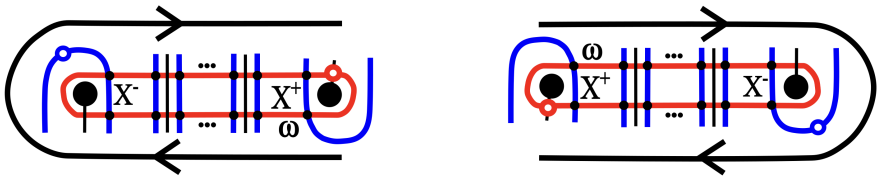


图25. 一个示例环路$\gamma_i = \gamma_{i,\omega}$ 位于 M中，以绿色绘制

现在，给定 λ_i 和 λ_j，为了定义环路$\tilde{\gamma}_{i,j}^{L} \subset \mathrm{Conf}^2(M)$，前一段中讨论的蓝色和红色拉格朗日子流形中的相同孔，在确定应将 λ_i 和 λ_j 放置在哪个 β' 副本上后，就确定了环路的同伦类。这由以下规则确定：在 M中 β' 的邻域内， $\mathcal{D}(L_{u/v})$（不进行解扭同伦）在同痕意义下，对于 UP 情形呈现为左侧下图，对于 RI 情形呈现为右侧下图； λ_ω 已标记，外侧的黑色箭头（不属于 $\mathcal{D}(L_{u/v})$）为 λ_i 给出排序，使得若按照此排序 λ_i 先于 λ_j ，则在定义 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路$\tilde{\gamma}_{i,j}^{L}$ 和$\tilde{\gamma}_{j,i}^{L}$ 时，将 λ_i放置在 β_2'上，即 β'的外侧副本上。因此，我们看到 λ_ω 总是放置在 β_2'上。



一旦我们确定了应将 λ_i 和 λ_j 放置在 β' 的哪一个副本上，就可以按照与纽结相同的规则，但使用我们新的拉格朗日子流形来定义$\tilde{\gamma}_{i,j}^{L}$ 。图 26 中给出了一个示例$\tilde{\gamma}_{i,j}^{L} \subset \mathrm{Conf}^2(M)$（绿色和黄色表示其两个路径分支，正如我们在上一节中所做的那样）。请注意，基点在红色拉格朗日子流形的外层副本上有 λ_i ，在内层副本上有 λ_j ，这与刚刚确立的结果一致。

现在，我们可以陈述关于链环的主要定理。注意， $S, A,$ 和 Q 的公式与纽结情形中的公式相同。当然， $2u$ 指标在几何上来自

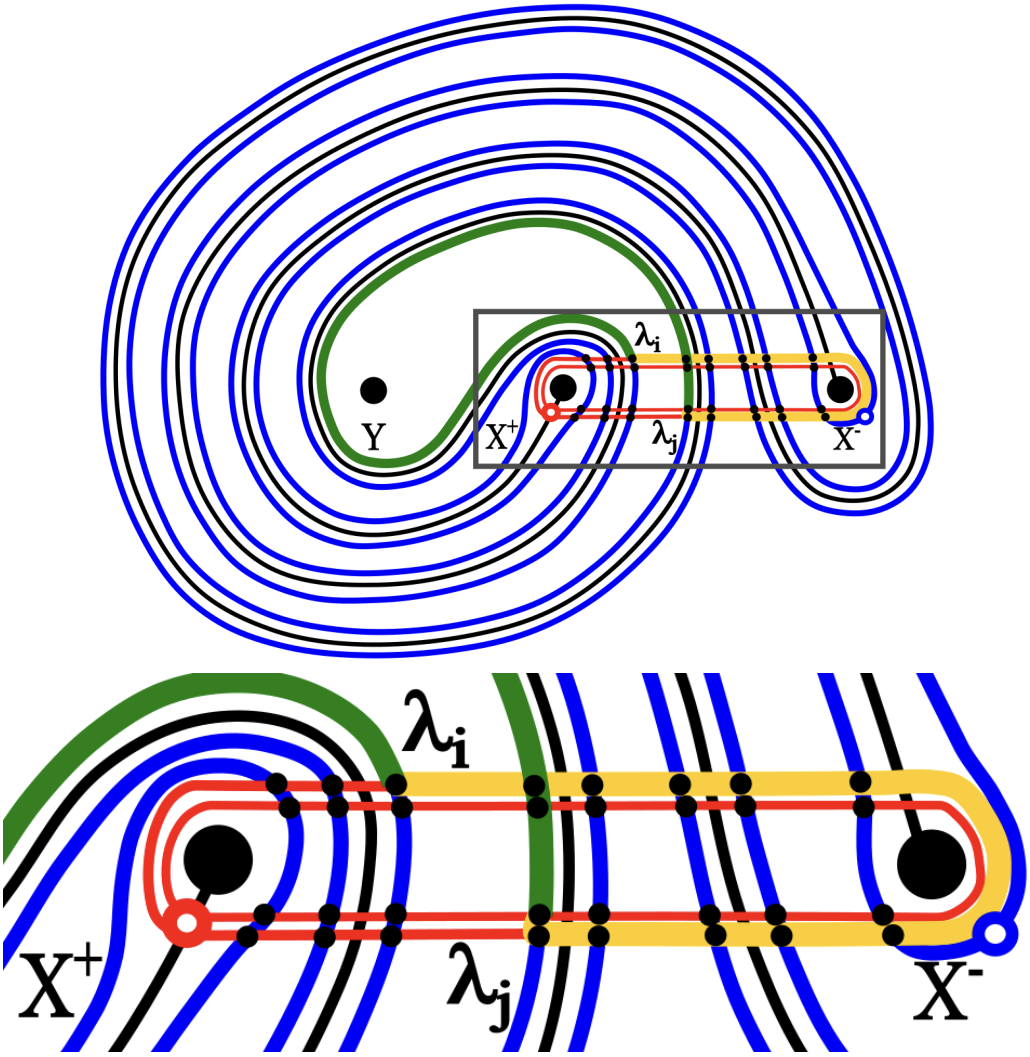


图 26. 上方：$\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路示例 $\gamma_{i,\ j}$ 下方：框选区域内环路的放大图

$2u$ 中拉格朗日子流形的交点；此时，我们无需说明这些交点的排序方式，因为生成函数在置换指标标签的 S_{2u} 作用下是不变的。不过，在证明定理时，固定排序会有所帮助，正如我们在第 4 节中所做的那样。

定理 5.4. 有理链环 $L_{u/v}$ =$Cl(^{\tau}{}_{u/v})$ 的着色 *HOMFLY-PT* 多项式生成函数可写为

$$P(L_{u/v}) = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_{2u})\in\mathbb{N}^{2u}} \frac{(-q)^{S\cdot\boldsymbol{d}}a^{A\cdot\boldsymbol{d}}q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^T}}{\prod_{i=1}^{2u}(q^2;q^2)_{d_i}}x^{d_1+\ldots+d_{2u}} \tag{43}$$

其中， S、 A 和 Q定义在自由 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^L_{u/v}$ 上（其基为 $\mathcal{G}^L_{u/v}$），并由以下公式计算:

$$\begin{cases} S_i = \Psi_{\{X^{\pm},Y\}}([\gamma_i]) + \mu_1(L_{u/v}) \\ A_i = 2\Psi_{X^+}([\gamma_i]) + \mu_2(L_{u/v}) \\ \begin{cases} Q_{ii} = (\Psi_{\{X^-,Y\}} - 3\Psi_{X^+})([\gamma_i]) + \mu_3(L_{u/v}) \\ Q_{ij} = Q_{ii} + (\Phi - 2\Psi_{X^+})([\gamma_{j,i}]). \end{cases} \end{cases}$$

修正项采用与纽结相同的步骤计算。

我们保留修正项，以便与 Stošić 和 Wedrich 在 [39] 中的计算相符（至多相差一个 ± 1 框架平移和矩阵元素的置换），但不再对此作进一步讨论。定理 5.4 的证明将使用忽略$\mu_i(L_{u/v})$项的公式，因为我们主要关注的是所有结果在某种平移下都成立。

在证明定理之前，需要再次指出，正如我们在定理 4.6 中所做的，这里的公式写成了最便于计算的形式，但我们仍然可以通过以下方式为 Q 的各项定义一个统一公式:

$$Q_{ij} = (2\Phi^2 - \Psi^2_{X^+})([\gamma^{2,L}_{j,i}]) + \mu_3(L_{u/v}).$$

对于链环，我们以类似于缠结中的做法（见 [11]）和纽结中的做法（见第 4 节）来定义 $\gamma^{2,L}_{j,i}$ 环路，只是针对新的拉格朗日子流形作了调整。我们还可以得到命题 4.7 的一个“链环类比”，它表明定理 5.4 中 Q 的公式给出了 $Q_{ij} = Q_{ji}$。

5.2. **定理 5.4 的证明**。和处理纽结时一样，我们将通过证明一系列引理来证明链环的主要定理——定理 5.4。这些引理与纽结情形中的引理十分相似，只是针对链环新的几何图示作了调整。与之前一样，第一步是考察 [39] 中的闭合公式如何预示：对于 $L_{u/v} = \mathrm{Cl}(T\tau_{(u-v)/v})$， $S, A,$和 Q 与 $^{\tau}{}_{(u-v)/v}$ 中的对应对象之间存在怎样的关系。

引理 5.5. 若 $L_{u/v}$ =$Cl(T\tau_{(u-v)/v})$ 针对具有 UP定向的$^{\tau}{}_{(u-v)/v}$，则 $Cl(T-)$运算的效果为

$$UP, \left[\begin{array}{c|c} S_+ & A_+ \\ \hline S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} Q_{++} & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{--} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{Cl(T-)} \left[\begin{array}{c|c} S_+ + 2 & A_+ + 2 \\ \hline S_+ + 1 & A_+ \\ \hline S_- + 1 & A_- \\ \hline S_- & A_- \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_{++} - 1 & Q_{++} + U & Q_{+-} & Q_{+-} - 1 \\ \hline Q_{++} + L & Q_{++} + 2 & Q_{+-} + 1 & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{-+} + 1 & Q_{--} + 1 & Q_{--} + L \\ \hline Q_{-+} - 1 & Q_{-+} & Q_{--} + U & Q_{--} \end{array}\right];$$

在$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$ 具有 RI 定向的情形下，则 $Cl(T-)$ 的效果为

$$RI,\left[\begin{array}{c|c} S_+ & A_+ \\ \hline S_- & A_- \end{array}\right],\left[\begin{array}{c|c} Q_{++} & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{--} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{Cl(T-)}\left[\begin{array}{c|c} S_+ + 1 & A_+ \\ \hline S_+ & A_- \\ \hline S_- & A_- \\ \hline S_- - 1 & A_- - 2 \end{array}\right],\left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_{++}+1 & Q_{++}+L & Q_{+-} & Q_{+-}+1 \\ \hline Q_{++}-1+U & Q_{++} & Q_{+-}-1 & Q_{+-} \\ \hline Q_{-+} & Q_{-+}-1 & Q_{--}-1 & Q_{--}+U \\ \hline Q_{-+}+1 & Q_{-+} & Q_{--}+L & Q_{--}+2 \end{array}\right].$$

注意，与引理 4.8 不同，我们不再对 K 使用$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$的线性形式。换言之，我们使用命题 3.11 而非命题 3.12 来计算$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$的生成函数数据。在下面引理的缠结一侧，我们将 $\mathcal{G}^{T}_{(u-v)/v}$ 视为 $\mathfrak{X}\sqcup\mathfrak{Y}$，其中 $\mathfrak{X}$ 由所有活跃交点组成，而 $\mathfrak{Y}$由$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$的所有非活跃交点组成。在没有 K的情况下， $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 都加倍，以对应应用 Cl$(T-)$ 后得到的四个块；这与 $\mathcal{D}$ $(L_{u/v})$中的拉格朗日交点数量是$\mathcal{D}(\mathcal{T}^{(u-v)/v})$中交点数量的两倍相一致。特别是，正如我们已经讨论过的，如果对$\mathcal{D}(L_{u/v})$应用解扭同伦，我们预期拉格朗日交点应与 $\mathcal{D}(\mathcal{T}^{(u-v)/v})$中的交点相关联，使得 $\mathcal{D}(\mathcal{T}^{(u-v)/v})$中的每个点都对应 $\mathcal{D}(L_{u/v})$中的两个点。

引理 *5.5* 的证明。 证明与引理 4.8 的证明类似。具体而言，它同样可由方程 (24) 和 (25) 推出，但由于 $(q^2;q^2)_{K\cdot \mathbf{d}}$ 项无法抵消，因此必须两次应用引理 2.3。

继续之前，值得说明一下为什么链环的箭图形式分母中会出现 Pochhammer 符号，而纽结的情况则不会。考虑UP情形。忽略各项中涉及 S、 A，和 Q的部分，可得到如下形式的表达式

$$\begin{bmatrix} d_1+\ldots+d_{u-v} \\ d_1,\ldots,d_{u-v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{u-v+1}+\ldots+d_u \\ d_{u-v+1},\ldots,d_u \end{bmatrix} UP[j,k]$$

在$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$的箭图形式各项中。接着应用方程 (24)，得到（再次忽略对 S 和 Q有贡献的部分）

$$\frac{(q^2;q^2)\prod_{i=1}^{u-v}\ q^2\ \ q^2\ _{d_i}\prod_{i=1}^{v}{}^{j}(\ ;\ )}{k}\frac{(q^2;\ q^2)_{d_{u-v+i}}(a^2q^{2-2j-2k};q^2)_k(q^2;q^2)_k}{j-k}=\frac{(a^2q^{2-2j-2k};q^2)}{\prod_{i=1}^{u-v}\ q^2\ \ q^2\ _{d_i}\ (\ ;\ )\ (q^{2+2k};q^2)\prod_{i=1}^{v}\ q^2\ \ q^2\qquad(\ ;\ )^{d_{u-v+i}}},$$

其中右侧的两个分式就是应用引理 2.3 的对象，这样分母中便留下了 Pochhammer 符号。 □

下一个引理是引理4.9在链环情形下的对应结果。

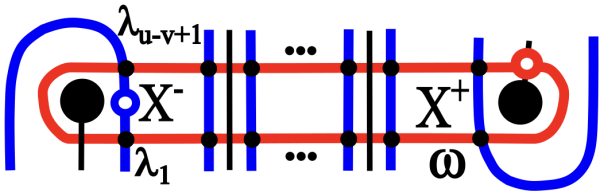
引理 5.6. 根据定理 *5.4* 计算时， S、 A以及 $L_{u/v}$ =$Cl(T\tau_{(u-v)/v})$ 的 Q 对角线与引理 *5.5* 一致。

为了理解引理 5.6，我们需要了解如何将 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 的拉格朗日交点划分为四个互不相交的集合。我们还需要确定这四个划分集合与用于$\mathcal{T}^{(u-v)/v}$ ($\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 的两个集合之间的关系，后者分别由活跃交点和

非活跃交点组成。除了确定这些划分之外，我们还将为 $L_{u/v}$ 的交点赋予一种新的“标准排序”，从而为定理 5.4 中定义 S，A，和 Q 所基于的自由 $\mathbb{Z}$-模提供一个有序基。

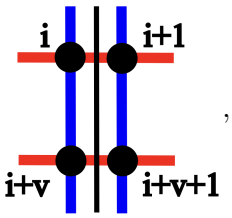
显然，$\tau^{(u-v)/v}$ 的活跃交点和非活动交点都会进行加倍，从而产生两个新的块。因此，如果 ξ_i 是一个活跃交点（$1 \le i \le u-v$），那么它会与 λ_i 和 λ_{u-v+i} 配对，形成链环；如果 ξ_i 是非活动的，那么它会与 $\lambda_{2(u-v)+i}$和 λ_{2u-v+i}配对。假设活跃和非活动的 ξ_i 分别按照 $\prec$ 排序（因此，若 ξ_i 是活跃的而 ξ_j 是非活动的，则 $i<j$；否则，若二者都活跃或都非活动，则若 $\xi_i \prec \xi_j$，$i<j$）。

对于 UP 的情形，β' 的一个邻域如下所示：



其中，λ_1 和 λ_{u-v+1} 标记为距离 X^-最近的两个点，因此它们自然与 ξ_1配对，其中 λ_1 是两者中较低的那个。蓝色拉格朗日子流形中的孔确定了沿其从 λ_1 和 λ_{u-v+1} 到 λ_ω的不同路径；块 $\mathfrak{A}=\{\lambda_1,...,\lambda_{u-v}\}$和 $\mathfrak{B}=\{\lambda_{u-v+1},...,\lambda_{2(u-v)}\}$ 是与$\tau^{(u-v)/v}$的活跃点配对的交点，并按照这条路径排序。

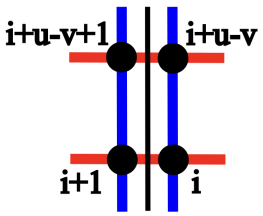
对于来自缠结非主动侧的块 $\mathfrak{C}=\{\lambda_{2(u-v)+1},...,\lambda_{2u-v}\}$ 和 $\mathfrak{D}=\{\lambda_{2u-v+1},...,\lambda_{2u}\}$，我们已经确定了 $\lambda_{2u}=\lambda_\omega$，而 λ_{2u-v} 是它正上方的点。$\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 中的其余交点由蓝色边和红色边构成的矩形分成四个一组。对于 UP，左侧各点的标号比右侧的标号小一，顶部两个点位于 $\mathfrak{C}$ 中，底部两个点位于 $\mathfrak{D}$ 中。因此，来自其中一个这样的矩形的四个交点之间满足关系



，

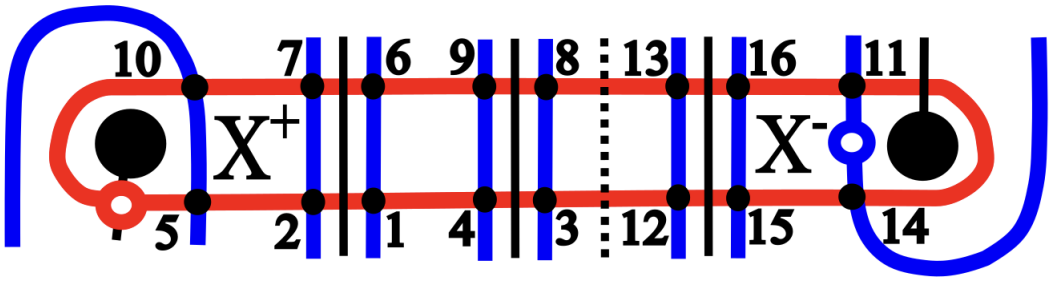
其中只写出了 λ的下标。这些方块随后可依据从 X^-到 X^+的底层弧$\alpha_{u/v}$ 的同一参数化彼此排序；特别地，若其中一个方块相对于该参数化位于另一个之前，则“较早”方块的标记低于“较晚”方块的标记。

对于 RI，该过程类似，但主动指标与非活跃指标的角色被交换。此外，主动侧矩形的标记方案（注意，在 UP 情形中这位于非主动侧）为



.

例如，如果我们考察 $L_{8/3}$ =Cl($T\tau_{5/3}$) 的交点邻域（注意，$\tau_{5/3}$ 具有 RI 定向），那么我们对 λ_i 进行排序的步骤会得到



,

其中，虚线将来自主动侧（块 $\mathfrak{A}$ 和$\mathfrak{B}$）的交点与来自非主动侧（块 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$）的交点分隔开。对照图 23 中 $L_{8/3}$ 的完整图像，可以看出上述规则如何得到这些标记。

定义 5.7。 将刚才描述的 λ_i 排序称为 $L_{u/v}$的 λ_i 的标准排序 。此外，令 $Q^L_{u/v}$ 为定理 5.4 根据这个有序基计算得到的 $2u \times 2u$ 矩阵。可以将其视为一个分块矩阵，其块由$\mathfrak{A}$、 $\mathfrak{B}$、 $\mathfrak{C}$、和 $\mathfrak{D}$索引。

现在，我们可以证明这个引理。

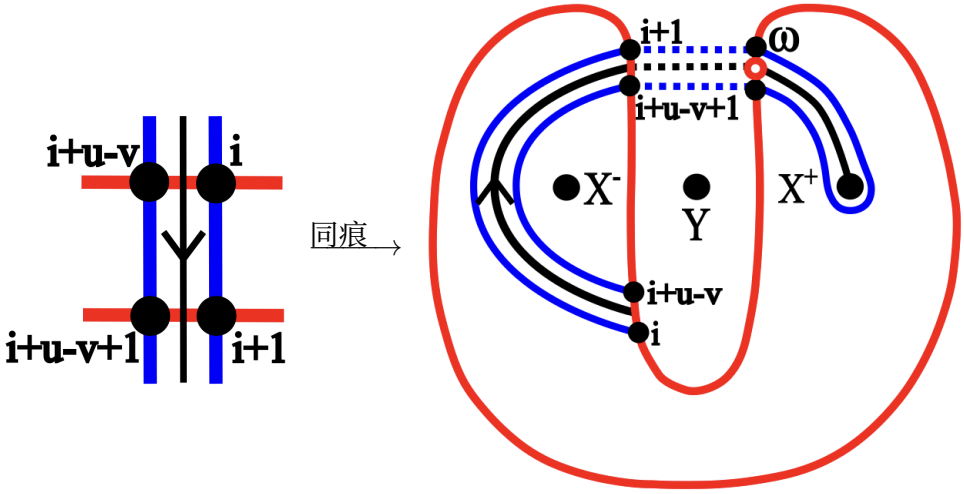
引理 *5.6* 的证明。 与第 4 节中的大多数证明一样，我们将详细证明UP 情形。

该引理的表述是，我们应有

$$UP, \left[\begin{array}{c|c|c} S_+ & A_+ & Q_+ \\ \hline S_- & A_- & Q_- \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{Cl}(T-)} \left[\begin{array}{c|c|c} S_+ + 2 & A_+ + 2 & Q_+ - 1 \\ \hline S_+ + 1 & A_+ & Q_+ + 2 \\ \hline S_- + 1 & A_- & Q_- + 1 \\ \hline S_- & A_- & Q_- \end{array}\right],$$

此处的读法应与引理4.9中的相同。首先，我们证明这对 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 块（与活跃交点配对的块）成立，然后再考虑 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 块（与非活跃交点配对的块）。

考察施加解扭同痕后 $\mathcal{D}(L_{u/v})$ 的样子将很有帮助，因为这样更容易看出 $L_{u/v}$ 的标记交点与$^{\tau^{(u-v)/v}}$的标记交点之间的关系。若$^{\alpha_{u/v}}$ 的定向是从 X^- 指向 X^+，那么下图展示了对 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$中的一个交点矩形施加解扭同痕后会发生什么；该交点矩形由$^{\alpha_{u/v}}$ 向下穿过 β'形成。我们还画出了 X^+ 附近的蓝色拉格朗日子流形部分以及交点 λ_{ω}。



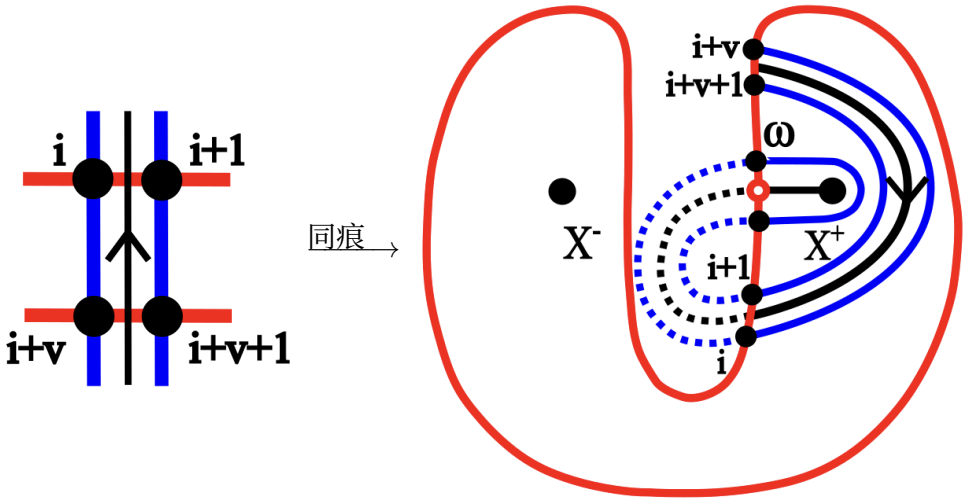
不难看出，先前给出的交点标记规则会得到图示的标记方式，其中，β' 左侧中间的竖直部分与 l_A 类似：它与底部的$^{\alpha_{(u-v)/v}}$ 的交点对应 ξ_i，而顶部的交点对应 ξ_{i+1}。因此，对于 $k \in \{i, i+1\}$，不难看出

$$\begin{cases} \Psi_{X^+}([\gamma_k^L]) - \Psi_{X^+}([\gamma_k^T]) = 1 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_k^L]) - \Psi_{X^-}([\gamma_k^T]) = 1 \\ \Psi_Y([\gamma_k^L]) - \Psi_Y([\gamma_k^T]) = 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \Psi_{X^+}([\gamma_{k+u-v}^L]) - \Psi_{X^+}([\gamma_k^T]) = 0 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_{k+u-v}^L]) - \Psi_{X^-}([\gamma_k^T]) = 1 \\ \Psi_Y([\gamma_{k+u-v}^L]) - \Psi_Y([\gamma_k^T]) = 1. \end{cases}$$

按照相同的步骤处理$^{\alpha_{u/v}}$ 沿相反方向穿过其中一个矩形的情形，会得到相同的结果。当 $k = 1$时，也不难看出我们会得到相同的方程。这就证明了 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 块的引理（回想一下缠结的 S 公式中的$\delta_{i,\ A}\delta_{\omega,\ I}$ 项）。

现在，我们考虑块 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$——也就是来自 $^{\tau^{(u-v)/v}}$非主动侧的块。我们将采用相同的步骤。在这种情况下，如果 $^{\alpha_{u/v}}$ 向上穿过一个来自非主动侧的矩形，那么我们通过解扭得到的图形

同痕的样子



这里请注意，红色拉格朗日子流形的右侧中间部分模仿了 l_I ，因此其顶部与 $\alpha_{(u-v)/v}$ 的交点对应于某个 ξ_j ，而底部与 ξ_{j+1} 的交点（使用由 $\prec$诱导的定向）也与之对应。稍微滥用一下记号，我们将 j称为“i”，这样就能写出与主动侧相同类型的方程。于是，对于 $k \in \{i, i+1\}$，我们看到

$$\begin{cases} \Psi_{X^+}([\gamma_k^L]) - \Psi_{X^+}([\gamma_k^T]) = 0 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_k^L]) - \Psi_{X^-}([\gamma_k^T]) = 1 \\ \Psi_{Y}([\gamma_k^L]) - \Psi_{Y}([\gamma_k^T]) = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \Psi_{X^+}([\gamma_{k+v}^L]) - \Psi_{X^+}([\gamma_k^T]) = 0 \\ \Psi_{X^-}([\gamma_{k+v}^L]) - \Psi_{X^-}([\gamma_k^T]) = 0 \\ \Psi_{Y}([\gamma_{k+v}^L]) - \Psi_{Y}([\gamma_k^T]) = 0 \end{cases}.$$

再一次，如果 $\alpha_{(u-v)/v}$ 向下穿过矩形，且当 $k = 2u - v$时，也可以轻松确定这一点；这就证明了关于 $\mathfrak{C}$ 块和 $\mathfrak{D}$ 块的引理。□

现在我们要证明的只剩下 Q 的非对角元与引理 5.5 中的相同，或者可以根据定理 2.15 通过置换使其相同。我们将采用与第 4.3 节中处理纽结时类似的一系列步骤。

与我们在第 4 节中的做法类似，我们需要比较由 λ_i 和 ξ_i的固定排序所确定的矩阵。我们将重用上一节中的一些记号，以突出纽结与链环之间的相似之处，但需要注意的是，我们的新矩阵与第 4 节中的矩阵有何不同。

定义 5.8. 对于有理链环 $L_{u/v} = \mathrm{Cl}(T\tau_{(u-v)/v})$，令 $Q^T_{(u-v)/v}$ 表示由命题 3.11 计算得到的 $\tau_{(u-v)/v}$ 的 $u \times u$矩阵，其中 $\mathfrak{x}$和 $\mathfrak{y}$ 分别按照$\prec$ 排序，且 $\mathfrak{x}$ 中的元素排在 $\mathfrak{y}$中的元素之前。

因此，$Q^T_{(u-v)/v}$ 是引理 5.5 中来自缠结一侧的矩阵，此时我们已经确定了 $\mathfrak{x}$和 $\mathfrak{y}$的块。接下来可以应用引理 4.8，得到如下$2u \times 2u$ 矩阵。

定义 5.9. 令 $Q_{u/v}$ 为将引理 5.5 应用于$Q^T_{(u-v)/v}$后得到的 $2u \times 2u$ 矩阵。

注意到 $Q_{u/v}$与 $Q^L_{u/v}$具有相同的 4×4 分块结构，因此我们可以像在第 4 节中处理 $Q_{u/v}$ 和 $Q^K_{u/v}$ 那样比较各块。

引理 5.10。 若 $L_{u/v} = Cl(T\tau_{(u-v)/v})$，且 $\tau_{(u-v)/v}$具有 UP定向，则 $Q^L_{u/v}$和 $Q_{u/v}$左上方的 2×2个块相同。若 $\tau_{(u-v)/v}$具有 RI定向，则右下方的 2×2 个块也同样相同。

证明。 考虑 UP的情形—— RI 的情形本质上相同，一如往常。(1,1) 块和 (2,2) 块显然成立。具体来说，应用解扭同伦后，用于计算非对角元的 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中的环路，与用于计算 (1,1) 块中相同元素的对应环路完全平行；对于 $\tau_{(u-v)/v}$，则对应于 Q_{++}。因此，这些块的情形已经得证，因为我们已知对角元具有适当的平移。

关于 $Q^L_{u/v}$ 与 $Q_{u/v}$ 的(1，2)-块和(2，1)-块也相一致的论证，类似于引理 4.14的证明中所用的论证。□

现在，尚需证明其余的块矩阵可按照定理 2.15进行置换，从而与定理 5.5相一致。回顾引理 4.16：若$\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 定向，则我们对 $Q^T_{(u-v)/v}$ 中的 Q_{--} 块应用了置换。在本节中，我们将需要使用同一结果。上一节所用的 $Q^T_{(u-v)/v}$ 与此处所用者不同，但在 $Q^T_{(u-v)/v}$ 中被置换的块是相同的，并且引理 4.16的证明中所用的同一论证适用于我们的新矩阵。

定义 5.11。 设 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$ 为将引理 4.16的置换应用于 $Q^T_{(u-v)/v}$所得的结果。此外，设 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 为将引理 5.5的$\mathrm{Cl}(T-)\widetilde{\ }$运算应用于 $Q_{(u-v)/v}$所得的 $2u\times2u$矩阵。

需要注意的是，在这一新情形下， Q_{--} 的 $Q^T_{(u-v)/v}$ 块分解为 $Q_{u/v}$右下角的 2×2 个块，因此 $Q_{u/v}$ 在这些块中的每一块内都具有相同的置换。

引理 5.12。 若 $L_{u/v} = Cl(T\tau_{(u-v)/v})$，其中$\tau_{(u-v)/v}$具有 UP定向，则 $Q^L_{u/v}$ 和 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 中矩阵的右下角 2×2 块相同，至多相差指标的整体重排。若$\tau_{(u-v)/v}$具有 RI定向，结论也类似，只需将矩阵块换成左上角的 2×2块。

证明。 考虑 UP的情形，若 λ_i， λ_{i+1}， λ_{i+v}， 和 λ_{i+v+1}如引理 5.6 证明中的第二幅图所示相关联，则简单计算可知， $Q^L_{u/v}$ 中相应的 4×4子矩阵与 $\widetilde{Q}_{u/v}$中的同一子矩阵相同，而与$\alpha_{(u-v)/v}$上的定向无关。特别地，我们有

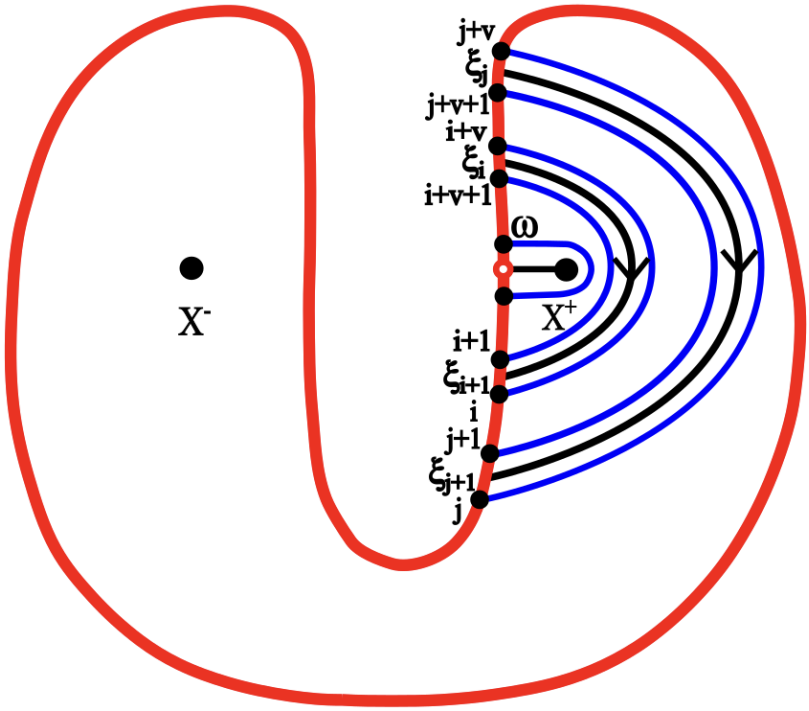


图 27. 证明引理 5.12 时考察 Q 的非对角线项的几何图示（采用特定的定向）

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ i+1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A+2 & A \\ A & A-1 \end{bmatrix} \end{array}
\xrightarrow{Cl(T-)}
\begin{array}{c} \\ i \\ i+1 \\ i+v \\ i+v+1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & i+1 & i+v & i+v+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A+3 & A+1 & A+2 & A \\ A+1 & A & A+1 & A-1 \\ A+2 & A+1 & A+2 & A \\ A & A-1 & A & A-1 \end{bmatrix} \end{array}
\tag{44}
$$

or

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ i+1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A-1 & A \\ A & A+2 \end{bmatrix} \end{array}
\xrightarrow{Cl(T-)}
\begin{array}{c} \\ i \\ i+1 \\ i+v \\ i+v+1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & i+1 & i+v & i+v+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A & A+1 & A-1 & A \\ A+1 & A+3 & A+1 & A+2 \\ A-1 & A+1 & A-1 & A \\ A & A+2 & A & A+2 \end{bmatrix} \end{array}
\tag{45}
$$

取决于 $\alpha_{(u-v)/v}$ 沿着缠结交点 ξ_i 与 ξ_{i+1} 之间的弧的定向，此时定理 5.4 的计算结果与右侧的矩阵一致。

我们仍需考虑 $Q^L_{u/v}$ 的这个子矩阵中那些无法通过这种简单方式在几何上关联起来的元素。容易验证， $Q^L_{u/v}$ 中任何行或列由 $\widetilde{\ }$、ω 或其旁边的配对点 X^+ 索引的元素，都与 $Q_{u/v}$ 中相应的元素一致。其他类型的元素都属于一个 8×8 子矩阵，其几何图示如图 27 所示。两条平行弧的定向共有四种可能，但这里只明确讨论其中一种。

为了确保 Q 的 $(3,4)$-块中出现“$+L$”（或 $(4,3)$-块中出现“$+U$”），我们需要对 λ_i 重新排序，使其不同于标准排序。实际上，λ_i 的重新排序可以通过对非活跃的 ξ_i 重新排序来定义，因为我们希望在 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 中采用相同的排序。具体而言，如果数对 (ξ_i,ξ_{i+1}) 和 (ξ_j,ξ_{j+1}) 满足第二对之间的弧绕过连接第一对的弧，那么我们就对这些指标重新排序，使 j 和 $j+1$ 排在 i 和 $i+1$ 之前。通过将 $\mathfrak{Y}$ 加倍为 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$，这一重新排序也扩展到 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 内部。

假设我们已经固定了这一排序，就可以计算出我们预期的 8×8 Q 子矩阵，其行和列由 λ_j、λ_{j+1}、λ_i、λ_{i+1}，以及这些指标加上 v 后的结果进行索引。这个矩阵的具体形式取决于相关两条弧的定向，但在两条弧都朝下的情形中（如图 27 所示），引理 5.5 给出

$$(46)\qquad \begin{array}{c} \\ j \\ j+1 \\ i \\ i+1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & j+1 & i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B-1 & B & C-1 & C+1 \\ B & B+2 & C & C+2 \\ C-1 & C & A-1 & A \\ C+1 & C+2 & A & A+2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{Cl(T-)}\quad \begin{array}{c} \\ j \\ j+1 \\ i \\ i+1 \\ j+v \\ j+v+1 \\ i+v \\ i+v+1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} j & j+1 & i & i+1 & j+v & j+v+1 & i+v & i+v+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} B & B+1 & C & \underline{C+2} & B-1 & B & C-1 & \underline{C+1} \\ B+1 & B+3 & \underline{C+1} & C+3 & B+1 & B+2 & \underline{C} & C+2 \\ C & \underline{C+1} & A & A+1 & C & \underline{C+1} & A-1 & A \\ \underline{C+2} & C+3 & A+1 & A+3 & \underline{C+2} & C+3 & A+1 & A+2 \\ B-1 & B+1 & C & \underline{C+2} & B-1 & B & C-1 & \underline{C+1} \\ B & B+2 & \underline{C+1} & C+3 & B & B+2 & \underline{C} & C+2 \\ C-1 & \underline{C} & A-1 & A+1 & C-1 & \underline{C} & A+1 & A \\ \underline{C+1} & C+2 & A & A+2 & \underline{C+1} & C+2 & A & A+2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\widetilde{\ }$使得该 8×8 矩阵是 $Q_{u/v}$右下角 2×2 块的子矩阵。现在，利用定理 5.4 进行一番繁琐（但简单）的计算后可知，如果 $\xi_j\prec\xi_i$，则得到 $Q^L_{u/v}$ 的同一个子矩阵；如果 $\xi_i\prec\xi_j$，则必须置换每个红色 2×2 块中带下划线的条目。然而，在相应的 4×4 子矩阵中置换这些条目

of $Q^T_{(u-v)/v}$ 以得到 $\widetilde{Q}^T_{(u-v)/v}$，即可解决这个问题。两条弧具有不同定向的情况也类似。□

最后，我们需要考察 $Q^L_{u/v}$ 和 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 的其余块之间的关系。具体而言，我们仍需处理右上和左下的 2×2 块，在 $Q_{u/v}$ 的情况下，它们是 Q_{+-} 或 Q_{-+} 的平移。我们希望证明，可以在 $\widetilde{Q}_{u/v}$ 中置换这些块中的条目，从而得到 $Q^L_{u/v}$，使得 $Q^L_{u/v}\sim\widetilde{Q}_{u/v}$。这将引出定理 5.4 证明的最后一步。

引理 5.13。矩阵 $Q^L_{u/v}$ 和 $Q_{u/v}$ 满足 $Q^L_{u/v}\sim Q_{u/v}$

证明。如上文所述，我们需要证明 $Q^L_{u/v}\sim\widetilde{Q}_{u/v}$。然后，由于 $Q_{u/v}\sim Q_{u/v}$，该引理（以及定理 5.4）即可得证。

首先，我们描述所需的置换。如果 $\tau_{(u-v)/v}$ 具有 UP 定向，那么每个活跃交点 ξ_i 都会一分为二，得到两个交点 $\lambda_{i'}$ 和 $\lambda_{i''}$，对应于 $L_{u/v}$，使得 $\lambda_{i'}\in\mathfrak{A}$ 和 $\lambda_{i''}\in\mathfrak{B}$（因此 $i''-i'=u-v$）；而每个非活动交点 ξ_j 都与两个交点 $\lambda_{j'}$ 和 $\lambda_{j''}$ 配对，对应于 $L_{u/v}$，使得两者都位于 $\mathfrak{C}$ 或 $\mathfrak{D}$ 中，且 $|j''-j'|=1$。由于为 λ's 编号的系统十分复杂，除非考虑若干种情况，否则我们无法说得更多。不过，假设我们已经应用了解扭同伦，若像第 4.4 节中那样，在 X^+ 附近切开 $\overline{\alpha_{(u-v)/v}}$，得到 $\alpha_{(u-v)/v}$ 的两个平行副本，那么我们可以得出如下结论：假设 $\lambda_{i'}$ 和 $\lambda_{j'}$ 位于其中一个平行副本上，而 $\lambda_{i''}$ 和 $\lambda_{j''}$ 位于另一个副本上，那么所需的全部置换都具有 $Q_{i'j''}\leftrightarrow Q_{i''j'}$（以及 $Q_{j''i'}\leftrightarrow Q_{j'i''}$）的形式，其中 $\xi_j\prec\xi_i$。只要画图并运用我们此前多次使用过的相同论证，就很容易验证这一点。

为完成证明，我们需要确定这些置换的一种排序，使其符合定理 2.15 的要求。为简洁起见，我们只给出确定顺序的规则。假设需要应用两对置换 $Q_{a'b''}\leftrightarrow Q_{a''b'}/Q_{b''a'}\leftrightarrow Q_{b'a''}$ 和 $Q_{c'd''}\leftrightarrow Q_{c''d'}/Q_{d''c'}\leftrightarrow Q_{d'c''}$（即 $\xi_b\prec\xi_a$ 和 $\xi_d\prec\xi_c$，其中 ξ_a 和 ξ_c 处于激活状态，另外两个处于非激活状态）。分别将它们称为（a，b）置换和（c，d）置换。然后，如果 $\lambda_{b'}$ 和 $\lambda_{d'}$ 位于同一个块（$\mathfrak{C}$ 或 $\mathfrak{D}$）中，且 $b=d$，那么如果 $\xi_c\prec\xi_a$，应先执行（a，b），再执行（c，d）；如果 $b\neq d$，那么如果 $\xi_b\prec\xi_d$，应先执行（a，b），再执行（c，d）。

否则，$\lambda_{b'}$ 和 $\lambda_{d'}$ 不在同一个块中。不失一般性，假设 $\lambda_{b'},\lambda_{b''}\in\mathfrak{C}$ 和 $\lambda_{d'},\lambda_{d''}\in\mathfrak{D}$。若 $d'-b'=d''-b''=v$，并且我们固定 b',b'',d' 和 d''，使得 $b'-b''=d'-d''=1$，那么（a,b）置换的形式为 $Q_{a'b''}\leftrightarrow Q_{((a'\pm(u-v))(b''+1))}/Q_{((b''+1)(a'\pm(u-v)))}\leftrightarrow Q_{b'a''}$，对于（$c,d$）也同样如此；如果 $a''=a'+u-v$，则应先执行（a,b）置换；如果 $a''=a-u+v$，则应先执行（c,d）（若用 c'' 代替 a''，结论也相同）。否则，如果 b',b'',d' 和 d'' 不满足这一条件，那么当 $\xi_b\prec\xi_d$ 时，应先执行（a,b），再执行（c,d）。这些规则足以确定产生 $Q^L_{u/v}\sim\widetilde{Q}_{u/v}$ 的置换顺序。

□

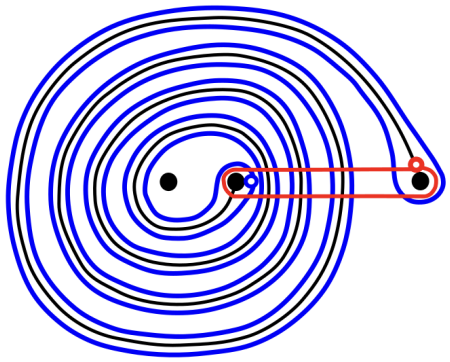


图 28. $\mathcal{D}(L_{8/1})$

定理 5.4 的证明至此结束。与第 4 节一样，我们现在给出一些例子。

5.3. **示例：有理环面链环**。有理环面链环是指二分量链环 $L_{2u/1} = T(2, 2u)$。正如我们在有理环面纽结中所见，定理 5.4 给出了关于 $S, A,$ 和 Q 的简洁公式，这些公式用我们为 $\tau_{(2u-1)/1}$ 得到的矩阵来表示。下面简要回顾一下。

在 [11], 的示例 6.2 中，我们证明了：对于 $\mathcal{G}^1_{n/1} = \mathfrak{X} \sqcup \mathfrak{Y}$，采用我们先前在第 5 节所述的相同排序方式（分别按照 $\prec$ 对活跃交点 $\mathfrak{X}$ 和非活跃交点 $\mathfrak{Y}$ 排序，其中 $\mathfrak{X}$ 排在 $\mathfrak{Y}$ 之前），命题 3.11 给出

$$\begin{cases} S_i = n - i + 1 \\ A_i = 0 \\ \begin{cases} Q_{ij} = n - k, & \text{if } (i,j) \in \mathcal{I}_k, 1 \le k \le n \\ Q_{ij} = 0, & \text{if } (i,j) \in \mathcal{I}_k, k = n+1, \end{cases} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{I}_k$ 是第 4.6 节中定义的同一集合。注意 $|\mathfrak{X}| = n$ 和 $|\mathfrak{Y}| = 1$。

以 $L_{8/1} = \mathsf{Cl}(T\tau_{7/1})$ 为一个具体例子。对于缠结 $\tau_{7/1}$，我们得到

$$\left[\begin{array}{c|c} S & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 7 & 0 \\ 6 & 0 \\ 5 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Q = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

由命题 3.11 得出。然后，应用引理 5.5，可得

$$\left[\begin{array}{c|c} S & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc|c|c} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^T$$

and

$$Q_{8/1} = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc|c|c} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

我们也可以用定理 5.4 计算 S，A，以及 Q，结果发现这些计算结果与上面给出的数据完全一致。重要的是，$Q^L_{8/1} = Q_{8/1}$，正如我们对纽结所得到的那样。与有理环面纽结的类比还可进一步延伸至以下命题。

命题 5.14. 对于有理环面链环 $L_{2n/1}$，我们有 $Q^L_{2n/1} = Q_{2n/1}$。

正如我们在命题 4.25 中所说，观察到这一族链环的简单性意味着我们无需对 $Q_{2n/1}$ 应用定理 5.4 的证明中讨论过的任何置换，即可立即得出这个命题。

5.4. **例子：** $L_{8/3}$。作为本节的结尾，我们将考察一个链环：将 Cl($T-$) 应用于一个具有 RI 定向的有理缠结而得到的链环。具体来说，我们将考察 $L_{8/3}$ =Cl($T\tau_{5/3}$)。本节前面许多图都以这个链环为例，因此建议回看图 23 和图 24，分别查看 $\mathcal{D}(L_{8/3})$ 及其未扭转版本。此前，我们还了解了如何通过标准排序为各个 λ_i 标记。

这里我们只考虑矩阵 $Q^L_{8/3}$，因为 S 和 A 不会带来任何复杂情况。我们将忽略修正项，但注意到 $\mu_1(L_{8/3}) = -2$，$\mu_2(L_{8/3}) = -1$，以及 $\mu_3(L_{8/3}) = 1$。计算 $Q^L_{8/3}$ 得到

$$Q^L_{8/3} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccc|ccc}
3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & \underline{0} & \underline{0} & 3 & 2 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & \underline{1} & \underline{1} \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & \underline{1} & \underline{1} \\
2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \underline{0} & \underline{0} & 3 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \underline{-1} & \underline{-1} & 2 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & \underline{0} & \underline{0} \\
0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & \underline{0} & \underline{0} \\
2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \underline{-1} & \underline{-1} & 2 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\
\underline{0} & -1 & -1 & \underline{0} & 0 & \underline{-1} & -2 & -2 & \underline{-1} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
\underline{0} & -1 & -1 & \underline{0} & 0 & \underline{-1} & -2 & -2 & \underline{-1} & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\
2 & \underline{1} & \underline{1} & 2 & 1 & 1 & \underline{0} & \underline{0} & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \\
2 & \underline{1} & \underline{1} & 2 & 1 & 1 & \underline{0} & \underline{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2
\end{array}\right].$$

没有向上平移 1。红色部分表示那些妨碍在 (1，2)-块中出现“$+L$”、以及在 (2，1)-块中出现“$+U$”的 2×2 子矩阵。引理 5.12 的证明通过重新排列 λ_i's 解决了这一问题（UP 情形所用的相同原则也适用于 RI 情形）。具体来说，我们要按 $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_3$、$\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_4$、$\lambda_6 \leftrightarrow \lambda_8$ 和 $\lambda_7 \leftrightarrow \lambda_9$ 重新排列。此重新排列相当于用一个置换矩阵对 $Q^L_{8/3}$ 进行共轭，这显然不会改变生成函数，并且会使 (1，2)-块和 (2，1)-块具有所需的结构。

此外，带下划线的项是仍需置换才能与引理 5.5 一致的项。将引理 5.13 的证明调整到 RI 情形后可知，所需的置换正如我们预期的那样，而且可以按满足定理 2.15 条件的顺序进行。

6. 对称着色多项式不变量

6.1. 对称着色 HOMFLY-PT 多项式。本文一直关注反对称着色 HOMFLY-PT 多项式，或者等价地说，关注由单列杨图着色的多项式。然而，我们同样可以考虑对称着色多项式，也就是由单行杨图着色的多项式。

定义 6.1。给定一个链环 L 以及一个向量 $\vec{\lambda}$，表示其各分支的着色，令 $P^{\lambda}_L(q, a)$ 为由 $\vec{\lambda}$ 指定的 L 的未约化着色 HOMFLY-PT 多项式。

这比我们在本文中一直研究的情形更具一般性——我们一直采用的一个假设是，在处理链环时，各分支具有相同的着色。在 [26], 中，作者以这种更一般的方式讨论了这些着色 HOMFLY-PT 多项式。

令 $\vec{\lambda}^T$ 为对 $\vec{\lambda}$中的每个杨图取转置后得到的杨图向量。那么， $P_L^{\vec{\lambda}}$ 与 $P_L^{\vec{\lambda}^T}$ 之间的关系由以下定理给出。

定理 6.2 （定理 4.4, [41]）。 给定链环 L ，其 n 个分支按照向量 $\vec{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ 中的杨图着色，则下列等式成立：

$$\overline{P}_L^{\vec{\lambda}}(q,a)=(-1)^c\overline{P}^{\vec{\lambda}^T}L(q,a)\Big|_{q\mapsto q^{-1}}, \tag{47}$$

其中 $c=|\lambda_1|+...+|\lambda_i|$ 为杨图中节点数之和 s.

应当注意，该定理是用未约化带色 HOMFLY-PT 多项式表述的，而我们一直使用的是约化带色 HOMFLY-PT 多项式。在约化情形下，该定理意味着反对称着色与对称着色 HOMFLY-PT 多项式通过将 q 取倒数而相互关联。

鉴于本文的特定语境，我们一直用 $P_{u/v}^{\bigwedge^j}(q,a)$ 表示 $P_{L_{u/v}}^{\vec{\lambda}}(q,a)$，其中现在允许 $L_{u/v}$ 为纽结，并且若 $L_{u/v}$ 有两个分支，则使用 $\vec{\lambda}=((1)^j,(1)^j)$；若它是纽结，则只需 $\lambda=(1)^j$，即单列杨图。类似地，我们可以用 $P_{u/v}^{S^j}(q,a)$ 表示 $P_{L_{u/v}}^{\vec{\lambda}^T}(q,a)$，其中 $\vec{\lambda}$ 是对称着色多项式的分拆。于是，我们有

$$P_{u/v}^{S^j}(q,a)=P_{u/v}^{\bigwedge^j}(q^{-1},a).$$

请注意，在 $j=1$ 情形中，这反映了未着色 HOMFLY-PT 多项式在将 q取倒数后保持对称，而这一点由修正项体现。此外，由于反对称着色多项式与对称着色多项式之间存在这种简单关系，我们可以对 $j\in\{1,2\}$使用相同的图 $\mathcal{D}^j(K_{u/v})$ 和 $\mathcal{D}^j(L_{u/v})$，来计算对称着色 HOMFLY-PT 多项式生成函数的箭图形式，此外也可计算反对称情形。关键区别在于，必须改变 S 和 Q 中所有项的符号，并且所有 Pochhammer 符号都以 q^{-1} 而非 q 定义。不过，如果将新 Q的所有非对角元减去 1，我们就可以用 q 来改写 Pochhammer 符号。例如，对于有理结 $K_{u/v}$，有

$$\sum_{j\geq 0}P_{u/v}^{S^j}(q,a)x^j=\sum_{\mathbf{d}=(d_1,...,d_u)\in\mathbb{N}^u}(-q)^{S'\cdot\mathbf{d}}a^{A'\cdot\mathbf{d}}q^{\mathbf{d}\cdot Q'\cdot\mathbf{d}^t}\begin{bmatrix}d_1+...+d_u\\ d_1,...,d_u\end{bmatrix}x^{\sum_{i=1}^u d_i},$$

其中 $S'=-S$、 $A'=A$ 和 $Q'=-Q-1+I$，对于 S， A，以及 Q 由定理 4.6 计算得出的矩阵，其中 $-1+I$ 是对角线上为 0、其他位置均为 -1 的矩阵。

例子。 我们可以将对 $T(2,2n+1)$ 环面纽结的计算结果与 [22] 中的结果进行比较。特别是，可以很容易地确定， $-Q_{(2n+1)/1}^K-1+I$ 等于

$T(2, 2n+1)$ 在 [22] 中计算得到的矩阵，只需对指标重新排序并整体向上平移 $2n$。

6.2. **着色琼斯多项式**。简要介绍一下彩色琼斯多项式及其在本文讨论中的作用，是很有必要的。这些单变量多项式不变量出现在纽结理论的许多不同猜想中，包括体积猜想 [28, 29, 30] 和AJ猜想 [25, 24]。它们通过用任意不可约表示给链环图中的股线着色，推广了普通的琼斯多项式 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$。对于图为 D 的纽结 K，给定这些不可约表示之一 $S^j\mathbb{C}^2$，即向量表示的j重对称积，相应的 j着色琼斯多项式可通过对 D进行 j缆化，并插入 j阶琼斯-温茨尔投影算子来计算。有关该不变量的更多细节，请参阅上文列出的两个猜想的相关引文。

重要的是，纽结 K 的 j着色（约化）琼斯多项式（记作$V_K^j(q)$）与 $P_K^{S^j}(q,\ a)$ 之间的关系为

$$V_K^j(q) = P_K^{S^j}(q,a)\Big|_{a\mapsto q^2}.$$

在有理结的背景下，这导出了定理 4.6 的以下推论，其中我们在 M 和 $\mathrm{Conf}^2(M)$ 中使用相同的几何图示。

推论6.3. 有理结 $K_{u/v} =Cl(^{\tau_{u/v}})$ 的着色琼斯多项式生成函数可写为

$$\sum_{j\geq 0} V^j_{K_{u/v}}(q)x^j = \sum_{\boldsymbol{d}=(d_1,\ldots,d_u)\in\mathbb{N}^u} (-q)^{H\cdot\boldsymbol{d}} q^{\boldsymbol{d}\cdot Q\cdot\boldsymbol{d}^t} \frac{(q^{-2};q^{-2})j}{\prod_{i=1}^u (q^{-2};q^{-2})_{d_i}} x^{d_1+\ldots+d_u} \tag{48}$$

其中 S、 H 和 Q 可由以下公式计算:

$$\begin{cases} H_i = (3\Psi_{X^+} - \Psi_{\{X^-,Y\}})([\gamma_i]) + 2\mu_2(K_{u/v}) - \mu_1(K_{u/v}) \\ \begin{cases} Q_{ii} = (3\Psi_{X^+} - \Psi_{\{X^-,Y\}})([\gamma_i]) - \mu_3(K_{u/v}) \\ Q_{ij} = Q_{ii} + (2\Psi_{X^+} - \Phi)([\gamma_{j,i}]). \end{cases} \end{cases}$$

证明. 这直接由定理 4.6 得出，并且

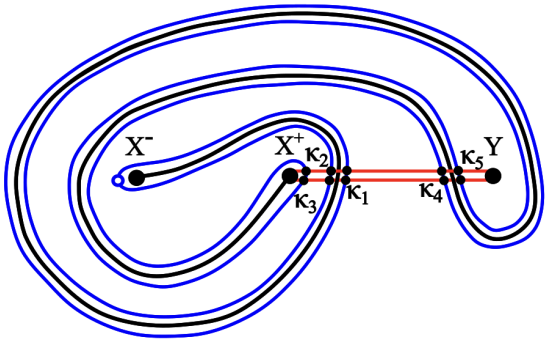
$$V^j_{K_{u/v}}(q) = P^{\wedge^j}_{u/v}(q,a)\Big|_{q\mapsto q^{-1},a\mapsto q^2},$$

注意到 $H_i \equiv -\Psi_{\{X^\pm,Y\}}([\gamma_x]) - \mu_1(K_{u/v})$（模 2），其中后者是来自（反对称）彩色 HOMFLY-PT 情形的 S_i 的取负版本。请注意， $H = 2A - S$。□

目前尚不清楚，以这种方式看待彩色琼斯多项式是否对上文所提到的任一猜想特别有帮助，但这或许值得研究。

6.3. 示例：8字结的着色琼斯多项式。 最后，我们说明如何借助本文的方法，对一个具体例子——8字结——计算彩色琼斯多项式。

回想一下带有 κ_i 标记的 $K_{5/2}$ 的几何图示图22。该图如下重现。



与第4.7节一样，我们忽略修正项，因为它们对应于框架平移。然后，利用推论6.3，可以计算得出

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

这既可以直接根据公式计算，也可以利用以下事实计算： Q 是通过取定理 4.6 计算出的 Q 和 $H = 2A - S$ 的负值得到的。由此可得

$$V_{4_1}^j(q) = \sum_{|\mathbf{d}|=\mathbf{j}} (-q)^{2d_1-d_2-2d_4+d_5} q^{2d_1^2-d_2^2-2d_4^2+d_5^2+2d_1d_2+2d_1d_3+4d_1d_4+2d_1d_5-2d_2d_5+2d_3d_4} \frac{(q^{-2};q^{-2})_j}{\prod_{i=1}^5 (q^{-2};q^{-2})_{d_i}},$$

其中 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^5$ 且 $|\mathbf{d}| = d_1 + ... + d_5$。更简洁地说，我们可以写成

$$V_{4_1}^j(q) = \sum_{|\mathbf{d}|=\mathbf{j}} (-q)^{H\cdot\mathbf{d}} q^{\mathbf{d}\cdot Q\cdot\mathbf{d}^T} \begin{bmatrix} j \\ d_1, ..., d_5 \end{bmatrix}^-,$$

其中

$$\begin{bmatrix} j \\ d_1, ..., d_5 \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} j \\ d_1, ..., d_5 \end{bmatrix}\Big|_{q\mapsto q^{-1}}.$$

如果将 Q 替换为 $Q - 1 + I$，我们就可以使用“标准”的量子多项式系数。

参考文献

[1] Dror Bar-Natan. “缠结与协边的 Khovanov 同调”。几何与拓扑 9 (2005), 1443–1499. doi: 10.2140/gt.2005.9.1443. eprint: math/0410495.[2] Dror Bar-Natan. “关于琼斯多项式的 Khovanov 范畴化”。代数几何与拓扑 2 (2002), 337–370. eprint: math/0201043.[3] S. Chauhan, P. Kucharski, D. Noshchenko, Ramadevi Pichai, Vivek Kumar Singh, and Marko Stosic. “全扭转与纽结和箭图的稳定性”。*arXiv* 预印本 *arXiv:2508.18417* (2025). 网址：https://arxiv.org.[4] Tobias Ekholm, Angus Gruen, Sergei Gukov, Piotr Kucharski, Sunghyuk Park, Marko Stošić, and Piotr Sułkowski. “纽结补的分支、箭图与理想”。几何物理杂志 177 (2022), 104520. doi: 10.1016/j.geomphys.2022.104520. eprint: 2110.13768.[5] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “纽结同调与广义箭图分拆函数”。数学物理快报113.6 (2023), 117. doi: 10.1007/ s11005-023-01733-4.[6] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “多重覆盖 skein、箭图与三维 $\mathcal{N} = 2$对偶性”。高能物理杂志 2020.2 (2020), 18. doi: 10 . 1007 / JHEP02(2020)018.[7] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. “纽结与链环的一种新多项式不变量”。美国数学会通报 *(*新系列*)* 12.2 (1985), 239–246. doi: 10.1090/S0273-0979-1985-15361-3.[8] C. McA. Gordon and R. A. Litherland. “链环的符号差”。数学发明47 (1978), 53–70. doi: 10.1007/BF01609479.[9] Eugene Gorsky, Sergei Gukov, and Marko Stosic. “纽结的四重分次着色同调”。基础数学 243.3 (2018年8月), 209–299. arXiv: 1304 . 3481[math.QA]. 网址：https://arxiv.org/abs/1304.3481.[10] Sergei Gukov and Marko Stosic. “纽结与 BPS 态的同调代数”。几何与拓扑专著 18 (2012), 309–367. doi: 10 . 2140 / gtm . 2012 . 18 . 309. arXiv: 1112.0030 [hep-th].[11] Jonathan Higgins. “链环-箭图对应的几何方法 I：有理缠结”（准备中）。[12] Jakub Jankowski, Sergei Gukov, Piotr Kucharski, and Marcin Manowita. “箭图对角化与开 BPS 态”。数学物理通讯402.2 (2023), 1551–1606. doi: 10.1007/s00220-023-04753-2.[13] Jakub Jankowski, Piotr Kucharski, Hélder Larraguível, Dmitry Noshchenko, and Piotr Sułkowski. “纽结与箭图的排列多面体”。物理评论 *D* 104.8 (2021). doi: 10.1103/PhysRevD.104.086017. 网址：https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.086017.[14] Vaughan FR Jones. “辫群的 Hecke 代数表示与链环多项式”。数学年刊126.2 (1987), 335–388. doi: 10.2307/1971403.[15] Mikhail Khovanov. “琼斯多项式的范畴化”。杜克数学杂志 101.3 (2000), 359–426. doi: 10.1215/S0012-7094-00-10131-7. eprint: math/9908171.

[16] Mikhail Khovanov. “三重分次链环同调与 Soergel 双模的霍赫希尔德同调”。 国际数学杂志18.8（2007年），869–885。arXiv: math/0510265 [math.GT].[17] 米哈伊尔·霍瓦诺夫和列夫·罗赞斯基。“矩阵分解与链环同调”。基础数学 199（2008年），1–91。doi: 10.4064/fm199-1-1。arXiv: math/0401268[math.QA].[18] 米哈伊尔·霍瓦诺夫和列夫·罗赞斯基。“矩阵分解与链环同调 II”。几何与拓扑 12.3（2008年），1387–1425。doi: 10 . 2140 / gt . 2008 . 12 . 1387。arXiv: math/0505056 [math.QA].[19] Piotr Kucharski。“三维流形的箭图：对应关系、BPS 态与三维$\mathcal{N}=2$理论”。 高能物理杂志2020.75（2020年），1–27。doi: 10.1007/JHEP09(2020)

075.[20] Piotr Kucharski、Hélder Larraguível、Dmitry Noshchenko 与 Piotr Sułkowski。“对称箭图的解链”。数学物理快报116.1（2026年），10. doi: 10.1007/s11005- 025-02038-4.[21] Piotr Kucharski、马库斯·赖内克、Marko Stošić 与 Piotr Sułkowski。“BPS 态、纽结与箭图”。物理评论 *D* 96.12（2017年），121902. doi: 10.1103/PhysRevD.96. 121902.[22] Piotr Kucharski、马库斯·赖内克、Marko Stošić 与 Piotr Sułkowski。“纽结—箭图对应”。理论与数学物理进展23.7（2019年），1849–1902. issn: 1095-0753. doi: 10.4310/atmp.2019.v23.n7.a4. url: http://dx.doi.org/10.4310/ATMP. 2019.v23.n7.a4.[23] Piotr Kucharski、马库斯·赖内克、Marko Stošić 与 Piotr Sułkowski。“纽结—箭图对应的物理与几何”。数学物理通讯 379.3（2020年），1061– 1097. doi: 10.1007/s00220-020-03840-y.[24] 黎清 T. Q.。“纽结的彩色琼斯多项式与 A 多项式”。数学进展207.1（2006年），135–163. doi: 10.1016/j.aim.2006.01.006.[25] 黎清 T. Q. 和陈英 T.。“关于纽结的AJ猜想”。美国数学会汇刊 365.10（2013年），5113–5143. doi: 10.1090/S0002-9947-2013-05809-8. eprint: arXiv:1111.5258.[26] 林晓松与郑浩。“关于赫克代数与彩色 HOMFLY 多项式”。美国数学会汇刊362.1（2010年），1–18. doi: 10.1090/S0002-9947- 09-04691-1. eprint: math/0601267.[27] 马尔科·麦凯、Marko Stosic 与 Pedro Vaz。“1,2 彩色 HOMFLY-PT 链环同调”。美国数学会汇刊 363.4（2011年），2091–2124.[28] 村上斉。“体积猜想及其推广导论”。越南数学学报 36.1（2011年），5–33. doi: 10.1007/s13546-011-0002-z. arXiv: 1002.0126 [math.GT].[29] 村上斉和村上淳。“彩色琼斯多项式与纽结的单纯体积”。数学学报 186（2001年），85–104.[30] 村上淳。“双扭结纽结的复化四面体、基本群与体积猜想”。*arXiv* 预印本 *arXiv:2501.00225* （2025年）。[31] 村杉邦男。纽结理论及其应用。纽约：Springer Science+Busine

Media, LLC，1996。

[32] Miłosz Panfil、Marko Stošić与Piotr Sułkowski。“Donaldson-Thomas不变量、环面纽结与格路径”。物理评论 *D* 98.2（2018年），026022。doi: 10.1103/PhysRevD.98.026022.[33] Jozef H. Przytycki与Paweł Traczyk。“康威型链环的不变量”。神户数学杂志4.2（1987年），115–139。url: https://arxiv.org.[34] Khaled Qazaqzeh、Isam Al-Darabsah与Aisheh Quraan。“有理链环的符号差”。纽约数学杂志 20（2014年），183–194。[35] Jacob Rasmussen。“纽结、多项式与范畴化”。量子场论与流形不变量。Daniel S. Freed、Sergei Gukov、Ciprian Manolescu、Constantin Teleman与Ulrike Tillman编。第28卷。IAS/Park City数学丛书。普罗维登斯：美国数学会，2021年，77–167。[36] Jacob Rasmussen。“Khovanov–Rozansky同调上的若干微分”。几何与拓扑19.6（2015年），3031–3104。doi: 10.2140/gt.2015.19.3031.[37] N. Yu. Reshetikhin与V. G. Turaev。“由量子群导出的带状图及其不变量”。数学物理通讯 127.1（1990年），1–26。issn: 0010-3616。doi: 10.1007/BF02096491。url: https://link.springer.com/article/10.1007/ BF02096491.[38] Marko Stošić与Piotr Sułkowski。“环面纽结与广义Schröder路径”。核物理 *B* 1012（2025年），116814。doi: 10.1016/j.nuclphysb.2025.116814.[39] Marko Stosic与Paul Wedrich。“有理链环与箭图的DT不变量”。国际数学研究通讯 2021.6（2021年），4169–4210。doi: 10.1093/imrn/rny289。arXiv: 1711.03333 [math.QA].[40] Marko Stošić与Paul Wedrich。“缠结加法与纽结–箭图对应”。伦敦数学会杂志104.1（2021年），341–361。doi: 10.1112/jlms.12433.[41] Daniel Tubbenhauer、Pedro Vaz与Paul Wedrich。“超 q-Howe对偶与网范畴”。代数组合4.4（2021年），1027–1072。doi: 10.5802/alco.191.[42] Ben Webster与Geordie Williamson。“着色HOMFLY-PT同调的几何构造”。几何与拓扑21.5（2017年），2557–2633。doi: 10.2140/gt.2017. 21.2557.[43] Paul Wedrich。“着色有理缠结的范畴化 $\mathfrak{sl}_N$ 不变量”。代数几何与拓扑 16.1（2016年2月），427–482。issn: 1472-2747。doi: 10.2140/agt.2016.16.427。url: http://dx.doi.org/10.2140/agt.2016.16.427.

JonathanHiggins，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校数学系，西格林街1409号，厄巴纳，伊利诺伊州61801，美国电子邮件地址：jh110@illinois.edu