arXiv:2603.01317v1 [cs.LO] 1 Mar 2026

（微分）逻辑关系的度量性质

UGO DAL LAGO [a], NAOHIKO HOSHINO [c], 以及 PAOLO PISTONE [d]

[a]意大利博洛尼亚大学*e-mail address*:
ugo.dallago@unibo.it

[b]法国 INRIA Sophia Antipolis

[c]日本崇城大学*e-mail address*:
nhoshino@cis.sojo-u.ac.jp

[d]法国里昂第一大学克洛德·贝尔纳校区´:
paolo.pistone@ens-lyon.fr

Abstract. 微分逻辑关系是一种用于度量高阶程序之间距离的方法，其中函数程序之间的距离本身也是 *functions*，将输入中的误差与输出中的误差联系起来。由此，微分逻辑关系能够为程序距离提供更细致且更具上下文性的信息。本文旨在阐明微分逻辑关系的度量性质。我们引入拟拟度量的概念，并观察到，拟拟度量空间构成的笛卡尔闭范畴反映了文献中微分逻辑关系的构造。笛卡尔闭结构导出一个基本引理，可将其视为程序距离的组合推理原则。此外，我们研究由类型的解释所产生的拟拟度量空间，并证明它们满足强传递条件和不可区分性条件的若干变体，以及对称性条件的一种弱形式。本文最后一部分引入微分预逻辑关系的概念，作为预逻辑关系框架的定量对应物。粗略地说，微分预逻辑关系是程序集合上的拟拟度量。微分预逻辑关系偏序集包含最细的微分预逻辑关系，该关系呈现为一种形式化定量等式理论；但该偏序集不存在最粗的微分预逻辑关系。不存在最粗微分预逻辑关系这一点，与带类型的 λ 演算中的情形形成对照；在后者中，上下文等价充当最粗的程序等价关系。

1. Introduction

程序等价是程序语义中的一个关键概念，它确保在相同条件下，也就是在任何环境中，程序的不同实现都会产生完全相同的结果。这一概念是程序验证、代码优化和可靠重构的基础：通过证明两个程序等价，开发者和编译器设计者便可以放心地用一个程序替换另一个程序，因为他们知道

Key words and phrases: 微分逻辑关系、量子格、拟度量、偏度量 cs.

其行为和结果将保持一致。在这方面，确保程序相等这一基础概念构成同余至关重要。

然而，在上述研究领域中，众所周知，如果仅通过等价概念来比较程序，却不提供衡量非等价程序之间距离 的可能性，就无法验证许多有趣且实用的程序变换 [Mit16]。所有这些都引发了人们对程序度量概念的兴趣，更广泛地说，也促使人们研究定量比较非等价程序的技术，例如，验证那些不会引入过大误差的程序变换 [RP10, MPP16]。

在定量上下文中，什么与同余这一概念相对应？一旦用某种（伪）度量衡量差异，对这个问题的一种自然回答是要求任何语言构造都不会增加距离，也就是说，它们是非扩张的。此外，（伪）度量的标准性质，例如三角不等式 $d(x,\ z) + d(z,\ y) \geqslant d(x,\ y)$，提供了度量推理中非常有用的一般原则，取代了标准的定性原则（例如，本例中的传递性 $\mathsf{eq}(x,\ z) \wedge \mathsf{eq}(z,\ y) \vdash \mathsf{eq}(x,\ y)$）。

不过，正如人们多次指出的那样 [DLGY19, DLG21], ，将语言构造限制为相对于某种纯数值度量而言非扩张的构造，在实践中往往过于严苛。一方面，关注高阶语言的文献大多将注意力限于线性语言或分级语言 [RP10, AdAGH$^+$17]，这是因为为完整的“简单类型”语言构造度量模型存在众所周知的困难[DLHLP22]。另一方面，即使将语言限制为线性语言，通常定义在函数类型上的度量在实践中也几乎派不上用场，因为它们通过比较函数的值，在最坏情况下为函数赋予距离。例如，如[DLGY19], 所示，实数集 $\mathbb{R}$ 上的恒等函数与正弦函数之间的距离通常为 8，因为在最坏情况下，它们的函数值会相差任意远，尽管它们在 0 附近的行为非常接近。

作为上述问题的一种解决方案，微分逻辑关系 [DLGY19, DLG21, Pis21, DLG22] 应运而生。在这种设定中，距离原生地适用于不受限制的高阶语言，两个程序之间的距离不一定是一个单一的数值。例如，两个函数类型的程序之间的距离由一个函数给出；该函数衡量输出中的误差如何依赖于输入中的误差，也衡量它如何依赖于输入本身的值。如此一来，距离的概念便足以表达局部差异，同时保证组合推理成为可能。这一范式也能扩展到具有复制和递归的语言[DLG21], ，并且即使存在效应也同样适用 [DLG22]。近期一项研究提出了针对分级类型理论的类似思想 [SB26]。

在程序度量的文献中，考虑量化格值度量 [HST14、Stu14]已变得常见。这意味着，如同微分逻辑关系那样，两个程序之间的距离属于某种合适的“量”的代数，即一个量化格。这促使人们对不同类别的量化值度量进行研究，每一类都以自反性条件和三角不等式的特定表述为特征。其中，拟度量 [GL13]和偏度量 [BKMP09、HS18]已被用于域的研究，甚至用于高阶语言 [GP21、MP25]。前者服从通常的三角不等式，即传递条件，而后者服从强传递条件 $d(x,y) + d(y,z) \leqslant d(x,z) + d(y,y)$。后者还考虑到将标准自反条件 $d(x,x) = 0$ 替换为左拟自反性

条件 $d(x,x) \leqslant d(x,y)$ 以及右拟自反性 条件 $d(y,y) \leqslant d(x,y)$，这意味着一个点与其自身的距离不必为零。

因此，一个自然的问题是：通过微分逻辑关系得到的程序之间的距离，是否构成某种形式的量化幺半群值度量？尤其是，这些关系支持何种形式的自反性和传递性？原论文[DLGY19] 定义了对称的微分逻辑关系，并给出了非常弱形式的三角不等式。后续研究转向更自然的非对称情形，却要么忽略了度量问题 [DLG21, DLG22] ，要么证明所得距离必然违反两者：拟度量的自反性和偏度量的强传递性[GP21, Pis21]。

本文回答了上述问题，在当前高阶程序距离研究方法与成熟的量化幺半群值度量文献之间架起一座桥梁。具体而言，我们引入拟拟度量的概念，它是通过弱化偏度量的概念得到的。“拟拟度量”一词中的第一个“拟”指左拟自反性，第二个“拟”则表示不具备对称性。拟拟度量空间的范畴$\mathbf{Qqm}$ 是笛卡尔闭的，其笛卡尔闭结构反映了微分逻辑关系的构造。这意味着，微分逻辑关系的构造保留了拟拟度量空间的结构。我们引入一种简单类型 λ 演算 Λ_{Real}，并指出， Λ_{Real} 的基本引理可由$\mathbf{Qqm}$的笛卡尔闭结构推出。此外，我们证明，由类型解释得到的拟拟度量空间实际上满足一种强传递条件的变体，以及一种弱形式的对称性条件。

拟拟度量空间范畴并非以复合方式度量程序之间距离的唯一途径。在本文最后一部分，我们引入微分预逻辑关系的概念，将其定义为满足基本引理的拟拟度量的类型索引族。该方法将预逻辑关系框架 [HS02] 推广到微分情形。直观而言，微分前逻辑关系是简单类型 λ 演算 Λ_{Real}上的“拟拟度量”。我们为微分前逻辑关系集合配备一个自然定义的偏序，并研究最小元与最大微分前逻辑关系的存在性。这一探讨的动机在于：给定语言的程序等价关系集合确实构成一个完备格，其中最粗者由上下文等价给出，最细者则由句法等式理论导出。此处出现了类似的模式：微分预逻辑关系偏序集具有任意非空交，且其最小元可表述为定量等式理论 [MPP16, DN23]。相反，该偏序集不存在最大微分前逻辑关系，这表明在 Λ_{Real}上不存在自然的“上下文拟拟度量”概念。这一情形与程序等价关系格以及线性编程语言的程序度量格 [DLHP23]形成对照。

本文结构概述。
• 在第2节中，我们回顾逻辑关系，以及文献中的微分逻辑关系如何作为逻辑关系的定量对应概念出现。此外，我们考察（拟）自反性和传递性（包括它们的定量对应概念）如何在逻辑关系和微分逻辑关系的构造下得以保留。• 在第3节中，基于第2节中的观察，我们引入一类新的量化值度量，称为拟拟度量，并考察它们与

拟拟度量和成熟的拟度量及偏拟度量概念之间的关系[KPS06]。将强传递性推广到定量情形有多种方式，其中我们重点关注强传递性的一种变体，并称之为左强传递性。

• 在第4节中，我们给出拟拟度量空间的笛卡尔闭范畴$\mathbf{Qqm}$，并指出笛卡尔闭结构是微分逻辑关系在范畴论中的类比。具体而言，$\mathbf{Qqm}$ 是简单类型 λ 演算的一个模型 Λ_{Real}（第4.2节），且基本引理（定理4.8）可由Λ_{Real} 在笛卡尔闭范畴$\mathbf{Qqm}$中的解释推出。此外，我们证明，由 Λ_{Real} 的解释所导出的拟拟度量满足左强传递性条件以及一种弱形式的对称性条件。

• 最后，在第5节中，我们引入微分预逻辑关系的概念。微分预逻辑关系的集合构成一个偏序集，具有任意非空交；特别地，该偏序集存在最小微分预逻辑关系。这个最小微分预逻辑关系，即 Λ_{Real}上的“最细度量”，与从 Λ_{Real}上的定量等式理论导出的度量一致。此外，我们指出，该偏序集不存在最大微分预逻辑关系。最大微分预逻辑关系的不存在性意味着 Λ_{Real}上不存在“上下文度量”。

2. From Logical Relations to Differential Logical Relations

本节将非正式地回顾文献中的微分逻辑关系如何作为标准逻辑关系的定量对应概念出现，同时着重说明（微分）逻辑关系的构造如何保留自反性、拟自反性和传递性等性质（及其定量对应概念）。

2.1. 逻辑关系。 逻辑关系理论广为人知，并有多种应用，可用于确立类型系统的定性 性质，例如终止性 [GLT89],双模拟 [SKS07], 适切性 [Plo77] 或参数性 [PA93, HRR14]。其基本思路是从基类型 o上的一些基本二元关系 $\rho_o \subseteq o \times o$ 出发，并通过对 A进行归纳法提升这些关系ρ_o，得到一族二元关系 $\rho_A \subseteq A \times A$；其中，$A$ 遍历所有简单类型。（在本节及下文中，我们将类型和 lambda 项与其集合论解释混为一谈。）事实上，也可以为递归 [DAB09], 多态 [Rey83, PA93] 或单子 [GLLN02] 类型考虑逻辑关系，但本文将讨论范围限定于简单类型。

提升按归纳方式定义如下：

$$(t,s) \in \rho_{A\times B} \iff (\mathrm{fst}(t),\mathrm{fst}(s)) \in \rho_A \text{ and } (\mathrm{snd}(t),\mathrm{snd}(s)) \in \rho_B, \qquad (\times)$$

$$(t,s) \in \rho_{A\Rightarrow B} \iff \text{for all } (p,q) \in \rho_A, \text{ we have } (t\,p, s\,q) \in \rho_B. \qquad (\Rightarrow)$$

为了从逻辑关系推导出类型系统的某些性质，通常需要证明所谓的基本引理，即每个类型正确的项$x : A \vdash t : B$ 都保持逻辑关系。这意味着，如上所定义的逻辑关系族 ρ_A满足以下蕴含关系

$$(p,q) \in \rho_A \implies (t[p/x], t[q/x]) \in \rho_B \qquad \text{(Fundamental Lemma)}$$

对所有 p， $q \in A$均成立。注意，基本引理等价于自反性的一个实例：上述蕴含关系成立，当且仅当对于任意项 $x : A \vdash t : B$， $(\lambda x : A.\, t,\ \lambda x : A.\, t) \in \rho_{A \Rightarrow B}$成立。

特别值得关注的是等价关系，即自反、传递且对称的关系，以及预序，即自反且传递的关系。众所周知，二者都是用于推理程序性质的基本结构。本文考虑预序，因为我们关注非对称的（微分）逻辑关系（见注记2.1）。一个基本观察是：逻辑关系的构造保持预序：若 ρ_A 与 ρ_B 是自反且传递的，则只要基本引理成立，我们便可证明 $\rho_{A \times B}$ 与 $\rho_{A \Rightarrow B}$ 同样是自反且传递的。函数空间的情形关键依赖于如下事实：类型$A \Rightarrow B$ 的所有项都必须保持关系（换言之，基本引理成立）：正如上文所观察，自反性 $(t,\ t) \in \rho_{A \Rightarrow B}$ 等价于函数 t 是保持关系的这一事实；而传递性则由关系保持、 ρ_A的自反性以及 ρ_B的传递性得出。在下一节中，我们探讨逻辑关系与预序的定量对应概念。

注记2.1。 在最初的定义中，微分逻辑关系具有对称性[DLGY19], ，但后续所有研究都舍弃了对称性。首先，若干有趣的程序差异概念并不具有对称性，例如源自增量计算[DLG21, CGRO14, APETPJO19], 的那些概念。其次，同时具有（准）自反性和对称性时，笛卡尔闭包会带来问题 [Pis21]。

2.2. 微分逻辑关系。 现在我们讨论将逻辑关系扩展到定量情形后会发生什么。我们不再考虑二元关系 $r \subseteq X \times X$（表达某个性质对两个元素成立） x ，而是考虑 y 实数集 X上的三元关系 $r \subseteq X \times Q \times X$。三元组 $(x, a, y) \in r$ 表示x 与 y 之间存在一定程度的差异，其程度由 $a \in Q$量化。这里 Q 是一个量化格，即一种有序幺半群，能够刻画数量的多种性质，例如非负实数所表示的性质。一个典型例子是由 $r \subseteq \mathbb{R} \times [0, +\infty] \times \mathbb{R}$ 给出的三元关系

$$(x, a, y) \in r \iff |x - y| \leqslant a.$$

很容易 看出 r 对应于实数之间的欧几里得距离 .

给定量化格 $\mathcal{Q}_o$ 以及基类型 o上的三元关系 $\rho_o \subseteq o \times \mathcal{Q}_o \times o$，仿照标准逻辑关系的构造，我们可以通过提升 三元关系 ρ_o，为每种类型 A 定义一族三元关系 $\rho_A \subseteq A \times \mathcal{Q}_A \times A$。为了进行提升，我们首先归纳定义量化格 $\mathcal{Q}_{A \times B}$ 和 $\mathcal{Q}_{A \Rightarrow B}$ 如下：

$$\mathcal{Q}_{A \times B} = \mathcal{Q}_A \times \mathcal{Q}_B,$$
$$\mathcal{Q}_{A \Rightarrow B} = (A \times \mathcal{Q}_A) \Rightarrow \mathcal{Q}_B.$$

我们为 $\mathcal{Q}_{A \times B}$ 赋予逐分量序，为 $\mathcal{Q}_{A \Rightarrow B}$ 赋予逐点序。 $\mathcal{Q}_{A \times B}$ 的定义意味着，我们逐分量地度量 $A \times B$中各元素之间的差异。在这里，我们不能采用欧几里得距离或曼哈顿距离，因为 $\mathcal{Q}_A$ 和 $\mathcal{Q}_B$ 可能是由高阶函数构成的量化格，如 $\mathcal{Q}_{A \Rightarrow B}$的情况所示。对于函数类型 $A \Rightarrow B$，每个 $d \in \mathcal{Q}_{A \Rightarrow B}$ 都表示从 A 到 B的函数 t 和 s 之间的差异。其思路如下：对于任意的 p， $q \in A$ 以及任意$a \in \mathcal{Q}_A$，若 q 位于圆心为 p 、半径为 a的圆盘内，则 $s\, q$ 位于圆心为 $t\, p$

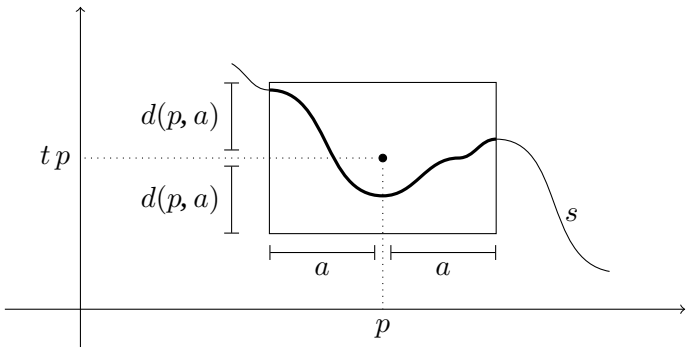


图 1：函数类型上的微分逻辑关系思想

且半径为 $d(p,\ a)$的圆盘内。换言之，d 刻画了 t 中每个点与 s的局部行为之间的相似性。图 1 展示了在 $A = B = \mathbb{R}$的情况下，d 如何界定 t 与 s 之间的距离。

将这一思想形式化后，我们可以如下将三元关系 $\rho_o \subseteq o \times \mathcal{Q}_o \times o$ 提升为三元关系 $\rho_A \subseteq A \times \mathcal{Q}_A \times A$：

$$\begin{aligned}((t,s),(a,b),(p,q)) \in \rho_{A\times B} &\iff (t,a,p) \in \rho_A \text{ and } (s,b,q) \in \rho_B,\\ (t,d,s) \in \rho_{A\Rightarrow B} &\iff \text{for all } (p,a,q) \in \rho_A, \text{ we have } (t\,p, d(p,a), s\,q) \in \rho_B.\end{aligned}$$

如 [DLGY19], 所示，基本引理具有如下形式：对于任意项 $x : A \vdash t : B$，存在 $t^\bullet \in \mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}$，使得对于所有 $p,\ q \in A$ 以及所有 $a \in \mathcal{Q}_A$,

$$(p,a,q) \in \rho_A \implies (t\,p, t^\bullet(p,a), t\,q) \in \rho_B. \qquad \text{(Fundamental Lemma)}$$

函数 $t^\bullet$ 的表现有点像 t 的导数：它将输入误差与输出误差联系起来。关于这一联系的更详细探讨，见 [DLG21, Pis21]。

到目前为止，一切似乎都与标准定性情形一样。然而，微分逻辑关系与标准逻辑关系之间有一个重要区别。在考察自反性和传递性概念的定量对应形式时，这一区别尤为明显。给定一个从集合 X 到量化格 Q上的三元关系 $r \subseteq X \times Q \times X$，我们可以将自反性和传递性表述为以下形式：

$$\begin{aligned}r \text{ is reflexive} &\iff \text{for all } x \in X, \text{ we have } (x, \mathbf{1}, x) \in r,\\ r \text{ is transitive} &\iff \text{for all } (x,a,y) \in r \text{ and } (y,b,z) \in r, \text{ we have } (x, a \otimes b, z) \in r.\end{aligned}$$

这里，$\mathbf{1}$ 是单位元，而 $a \otimes b$ 是 Q的乘法。例如，Lawvere 量化环 $[0, +\infty]$ 的单位元是 0，其乘法 $a \otimes b$ 是加法$a + b$。如果我们将 $(x,a,y) \in r$ 解读为“ x 与 y之间的距离至多为 a”，那么上述条件就与度量的自反性条件和三角不等式一致。因此，显然我们可以按照上述转换，将预序的概念转化到定量情形中。这就是所谓的拟度量 [GL13], 本质上是一种不具备对称性条件的度量，确实是一个研究得非常充分的度量类别。

在这方面，尽管逻辑关系的构造能够很好地将预序提升到所有简单类型上，但它们的定量对应概念——拟度量——却不会 在微分逻辑关系的高阶提升下得到保持。事实上，在上一节中，我们观察到，自反性条件提升过程中的一个关键要素是基本引理；然而，在微分逻辑关系的框架下，基本引理针对每个项 $t \in A$只会给出“自反性”条件 $(t, t^\bullet, t) \in \rho_A$，这与标准自反性的区别在于，距离 $t^\bullet$ 可能不是 $\mathcal{Q}_A$的单位元。事实上，微分逻辑关系本质上并不具备自反性；正如 [DLGY19], 中所观察到的，函数 $t \in A \Rightarrow B$满足自反性条件 $(t,\mathbf{1}, t) \in \rho_{A\Rightarrow B}$当且仅当 t是一个常函数。

2.3. 弱化自反性条件。 迄今为止的观察表明，微分逻辑关系自然产生的度量结构，不可能是标准的（拟）度量结构。相反，它应当接近偏 度量 [BKMP09, HS18],，其中自反性条件 $d(x, x) = 0$ 被左拟自反性 条件 $d(x, x) \leqslant d(x, y)$ 取代，而右拟自反性 条件 $d(x, x) \leqslant d(y, y)$也被引入。下文主要关注左拟自反性，因为左、右拟自反性同时存在，会成为证明基本引理的障碍。为简洁起见，只要不会引起歧义，我们就将左拟自反性简称为拟自反性。

让我们重新考察逻辑关系中传递性的提升。正如我们所观察到的，可以从 ρ_A的自反性、关系保持以及 ρ_B的传递性，推出 $\rho_{A\Rightarrow B}$ 的传递性。然而，事实上，要推出 $\rho_{A\Rightarrow B}$的传递性，我们只需要拟自反性，而不需要 ρ_A的自反性。这里，如果对于任意$(t, s) \in \rho_A$，都有 $(t, t) \in \rho_A$，我们就称 ρ_A 是拟自反的；直观而言，这意味着只有小于某个对象的点才小于自身。由 ρ_A的拟自反性，可以如下推出 $\rho_{A\Rightarrow B}$的传递性：给定 $(t, s) \in \rho_{A\Rightarrow B}$和 $(s, u) \in \rho_{A\Rightarrow B}$，那么对于任意 $(p, q) \in \rho_A$，由 ρ_A 的拟自反性可得 $(p, p) \in \rho_A$。接着，通过关系保持，我们得到$(t\, p, s\, p) \in \rho_B$和 $(s\, p, u\, q) \in \rho_B$。最后，由 ρ_B的传递性可得 $(t\, p, u\, q) \in \rho_B$。

这样一来，可以为拟预序建立逻辑关系理论，即拟自反且传递的关系。唯一微妙之处在于，为了使拟自反关系在函数空间的构造下得以保持，必须对关系提升稍作如下修改：

$$(t, s) \in \rho_{A\Rightarrow B} \iff \text{for all } (p, q) \in \rho_A, \text{ we have } (t\, p, s\, q) \in \rho_B \text{ and } (t\, p, t\, q) \in \rho_B. \qquad (\Rightarrow^{\mathrm{q}})$$

与（$\Rightarrow$）相比，提升（$\Rightarrow^{\mathrm{q}}$）包含第二个子句 $(t\, p, t\, q) \in \rho_B$，用以关联 t 在 p 与 q上的作用。根据这一定义，可以验证：若 ρ_A 与 ρ_B 是拟预序，则 $\rho_{A\Rightarrow B}$ 也是拟预序。在定量情形中，我们需要将微分逻辑关系 $\rho_{A\Rightarrow B}$ 的定义修改如下：

$$\begin{aligned}(t, d, s) \in \rho_{A\Rightarrow B} \iff \text{for all } & (p, a, q) \in \rho_A, \\ & (t\, p, d(p, a), s\, q) \in \rho_B \text{ and } (t\, p, d(p, a), t\, q) \in \rho_B.\end{aligned}$$

请注意， $\rho_{A\Rightarrow B}$ 的定义与拟预序的子句（$\Rightarrow^{\mathrm{q}}$）非常相似。得益于这一修改，我们可以证明，只要ρ_A 是拟自反的且 ρ_B 是传递的， $\rho_{A\Rightarrow B}$ 就是拟自反且传递的。这里，当对所有$(t, a, s) \in \rho_A$，都有 $(t, a, t) \in \rho_A$时，我们称 ρ_A 是拟自反的。

在本文中，我们还从另一个关键方面细化了微分逻辑关系的定义：我们将 $\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}$ 的定义替换为如下形式：

$$\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B} = (A, \mathcal{Q}_A) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_B$$

其中右侧是函数集合 $d\colon\ A \times \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_B$，使得对所有 $x \in X$、$d(x,\ -)\colon\ \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_B$ 是单调的。单调性条件意味着较大的输入误差会导致较大的输出误差。这一限制对于通过构造微分逻辑关系来保持强传递性与不可区分性的各种变体以及弱对称性起着关键作用（见第4.3节）。

3. Quasi-Quasi-Metric

在以下各节中，我们针对微分逻辑关系发展量化值度量理论，并特别关注拟自反性、传递性以及强传递性的各种变体。受关于传递性提升的观察所启发，我们将拟拟度量引入为拟自反且传递的量化格值谓词，并考察它们与拟度量和偏拟度量这些已确立概念之间的关系。

3.1. 量化格与拟拟度量的定义。 遵循微分逻辑关系的方法，我们利用量子格来度量程序之间的差异。我们首先回顾量化格的定义。

定义3.1. 一个量化格 是完备格 $(Q, \sqsubseteq)$，并被赋予幺半群 $(Q,\mathbf{1},\otimes)$ 的结构，使得对所有 $x \in X$，$x \otimes (-)$ 与 $(-) \otimes x$ 都保持任意上确界。量化格 Q 是积分的 （参见 [HST14], 第148页），当单位元$\mathbf{1}$ 为最大元时；并且当乘法 $(-) \otimes (-)$ 为交换的时，Q 是交换的 。

在本文中，我们简单地将量化格 $(Q, \sqsubseteq,\mathbf{1},\otimes)$ 记为其底集Q，并始终假设量子格是交换的且积分的。我们分别将符号$\bigsqcap$ 与 $\bigsqcup$ 保留用于量子格的交运算和并运算。

设 Q 是一个量化格。我们将 $x, y \in Q$ 的剩余 $x \multimap y$ 定义为

$$x \multimap y = \bigsqcup\{z \in Q \mid x \otimes z \sqsubseteq y\}.$$

它是 $x \otimes (-)$ 的右伴随，因此，对所有 $y, z \in Q$，我们有

$$z \sqsubseteq x \multimap y \iff x \otimes z \sqsubseteq y.$$

例3.2. *Lawvere* 量化环 由非负扩展实数集合 $[0, +\infty]$ 及其反向 序 $a \sqsubseteq b$ 构成（当且仅当 $a \geqslant b$），并配备实数加法。请注意，量化格的序与通常的度量直觉相反： 单位元 0 是最大元，而并对应于下确界。对于 $a, b \in [0, +\infty]$，剩余 $a \multimap b$ 为

$$a \multimap b = \begin{cases} b \dot{-} a, & \text{if } a < \infty, \\ 0, & \text{if } a = \infty \end{cases}$$

其中 $b \dot{-} a$ 是截断减法。

例 3.3. 对于集合 X 以及量化格 Q 和 P，我们定义量化格 $(X,\ Q) \twoheadrightarrow P$为函数 f 的集合：$X \times Q \to P$，其中 $f(x,\ -)\colon Q \to P$ 对所有$x \in X$都是单调的。我们赋予 $(X,\ Q) \twoheadrightarrow P$ 逐点序和逐点乘法。$(X,\ Q) \twoheadrightarrow P$ 的单位元是常函数 $\mathbf{1}(x,\ a) = \mathbb{1}$，其中$\mathbb{1}$ 是P的单位元。剩余 $f \multimap g$ 定义为

$$(f \multimap g)(x,a) = \bigsqcap_{b \sqsupseteq a} f(x,b) \multimap g(x,b).$$

In t本文中，这种形式的量化格源于对函数类型的解释 .

接着，我们定义量化格值拟拟度量的概念，将其作为拟预序概念的定量对应物（“拟”既指拟度量中对对称性的摒弃，也指拟预序中对自反性的弱化）。

定义 3.4. 设 X 是一个集合，Q 是一个量化格。若三元关系$r \subseteq X \times Q \times X$ 满足以下相应条件，则称其为自反、拟自反或传递的：

$$r \text{ is } \textit{reflexive} \iff \text{for all } x \in X, \text{ we have } (x, \mathbf{1}, x) \in r;$$

r 是拟自反 $\iff$，即对于所有 $(x,a,y) \in r$，都有 $(x,a,x) \in r$；r 是传递的 $\iff$，即对于所有 $(x,a,y) \in r$ 以及 $(y,b,z) \in r$，都有 $(x, a \otimes b, z) \in r$。

定义 3.5. 对于集合 X 和量化格 Q，定义在X 上的 Q-值（伪）拟拟度量 是一个拟自反且传递的三元关系 $r \subseteq X \times Q \times X$。拟拟度量空间 是一个三元组 $(X,\ Q,\ r)$，由集合 X、量化格 Q 和拟拟度量$r \subseteq X \times Q \times X$组成。

“伪”这一前缀表示通常的分离性质，即 $(x,\ \mathbf{1},\ y) \in r$ 蕴含 $x = y$，不一定成立。由于本文不研究分离性质，本文其余部分讨论的所有度量概念都应理解为隐含带有“伪”这一限定。当上下文中 Q 和 X 明确时，我们将 r 简称为拟拟度量，而不称为定义在 X上的 Q-值拟拟度量。为了帮助理解拟拟度量，我们给出一个例子。

例 3.6. 设 (X,d) 为标准意义下的拟度量空间：X 是一个集合，且$d\colon X \times X \to [0,+\infty]$ 是满足 $d(x,x) = 0$和 $d(x,y) + d(y,z) \sqsupseteq d(x,z)$的函数。则对任意函数 $w\colon X \to [0,+\infty]$，三元关系 $r \subseteq X \times [0,+\infty] \times X$ 由下式给出

$$(x,a,y) \in r \iff w(x) \sqcap d(x,y) \sqsupseteq a$$

是 X 上的拟拟度量。

拟拟度量的引入自然引出若干问题：我们如何以标准度量的形式将这些结构形式化，以及它们的结构如何与拟度量和偏度量等更为成熟的概念相关联？在接下来的各节中，我们将探讨这些关系。

3.2. **量化幺半格值关系**。我们按照微分逻辑关系 [DLGY19] 和定量等式理论 [MPP16, DN23], 的表述，将拟拟度量引入为三元关系；而标准度量则表示为从其底层集合的积到距离量子格的函数。我们通过定义这两种“度量”表述之间的转换来弥合这一差距。首先介绍一些术语。

定义 3.7。给定一个量化格 Q 和一个集合 X，Q-关系 *over* X 是一个函数$\phi\colon X \times X \to Q$，可将其理解为一个取值于 Q的矩阵；而 Q-谓词 *over* X 是一个三元关系 $r \subseteq X \times Q \times X$。

接下来，我们定义 Q-关系与 Q-谓词之间的转换。设 X 为一个集合，$\check{}$且设 Q为一个量化格。对于一个 Q-关系 $\phi\colon X \times X \to Q$，我们定义一个 Q-谓词 $\phi \subseteq X \times Q \times X$如下：

$$\check{\phi} = \{(x, a, y) \in X \times Q \times X \mid a \sqsubseteq \phi(x, y)\}.$$

反过来，对于一个 Q-谓词 $r \subseteq X \times Q \times X$，我们定义一个 Q-关系 $\hat{}r\colon X \times X \to Q$ 如下：

$$\hat{r}(x, y) = \bigsqcup \{a \in Q \mid (x, a, y) \in r\}.$$

直观地说，$(x,\ a,\ y) \in \check{}\phi$表示 a是 x与 y之间距离的一个近似，而 $\hat{}r(x,\ y)$ 是 x 与 y之间的距离。当我们将转换限制在闭 Q-谓词上时，这种对应关系成为双射。

定义 3.8。设 X 为一个集合，且设 Q 为一个量化格。X 上的一个闭 Q-谓词 是一个Q-谓词 $r \subseteq X \times Q \times X$，满足：

• 若 $(x,\ a,\ y) \in r$ 且 $b \sqsubseteq a$，则 $(x,\ b,\ y) \in r$；并且• 对于任意族 $\{a_i \in Q\}_{i \in I}$，若 $(x,\ a_i,\ y) \in r$ 对所有 $i \in I$都成立，则 $(x,\ \bigsqcup_{i \in I} a_i,\ y) \in r$。

$\check{}$ 不难看出，对于任意 Q-关系 ϕ，Q-谓词 ϕ 是闭的。现在，我们证明，限制在闭 Q-谓词上的变换构成一个双射。

命题 3.9. 设 $r \subseteq X \times Q \times X$ 是一个闭的 Q-谓词。对于任意 x、$y \in X$ 和 $a \in Q$，

$$a \sqsubseteq \hat{r}(x, y) \iff (x, a, y) \in r.$$

$\check{}$ $\hat{}$此外，$(-)$ 和 $(-)$ 在 X上的 Q-关系集合与 X上的闭 Q-谓词集合之间构成一个双射。

证明。我们首先证明，$a \sqsubseteq \hat{}r(x,\ y)$ 当且仅当 $(x,\ a,\ y) \in r$。设 $a \sqsubseteq \hat{}r(x,\ y)$。由 r 在并下封闭可知，$(x,\ \hat{}r(x,\ y),\ y)$ 是 r的一个元素。因此，由于 r 是向下封闭的，我们得到 $(x,\ a,\ y) \in r$。另一个蕴含由$\hat{}r(x,\ y)$的定义得出。接下来我们验证，构造 $(-)$ 和 $(-)$ 构成一个双射。对于任意 Q-关系 $\phi\colon\ X \times X \to Q$，我们有

$$\check{\hat{\phi}}(x, y) = \bigsqcup \{a \in Q \mid (x, a, y) \in \check{\phi}\} = \bigsqcup \{a \in Q \mid a \sqsubseteq \phi(x, y)\} = \phi(x, y).$$

反过来，对于任意闭合的 Q-谓词 $r \subseteq X \times Q \times X$，

$$(x, a, y) \in \hat{\check{r}} \iff a \sqsubseteq \hat{r}(x, y) \iff (x, a, y) \in r.$$

后一个等价关系由本命题的第一部分得出。 □

$\check{}$ 当且仅当 ϕ 具有相应性质时，我们称 Q-关系 ϕ 是自反的、拟自反的或传递的。$\check{}$ 类似地，当 ϕ 是拟拟度量时，我们称 ϕ 是拟拟度量。根据 Q-关系与闭 Q-谓词之间的双射对应，我们得到以下关于量化幺半格值关系的自反性、拟自反性和传递性的刻画。

命题 **命题 3.10**。对于任意 Q-关系 $\phi\colon\ X\times X\to Q$，以下等价关系成立：

$$\begin{aligned}\phi\ is\ reflexive &\iff for\ all\ x\in X,\ we\ have\ \mathbf{1}\sqsubseteq\phi(x,x),\\ \phi\ is\ quasi\text{-}reflexive &\iff for\ all\ x,y\in X,\ we\ have\ \phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x),\\ \phi\ is\ transitive &\iff for\ all\ x,y,z\in X,\ we\ have\ \phi(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z).\end{aligned}$$

证明。我们只验证第二个等价关系。其他等价关系也可以类似验证。设x和 y是 X的元素。注意，根据命题 3.9，我们有 $(x,\phi(x,y),y)\in\check{}\phi$。若 ϕ是拟自反的，那么由 $(x,\phi(x,y),y)\in\check{}\phi$，可得 $(x,\phi(x,y),x)\in\check{}\phi$，因此，$\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$。反过来，若 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$，那么对于任意 $(x,a,y)\in\check{}\phi$，可得$a\sqsubseteq\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$。因此，$(x,a,x)\in\check{}\phi$。 □

3.3. **拟度量与偏拟度量**。本节中，我们使用量化值关系和量化格值谓词的语言，探讨拟拟度量这一概念与较为成熟的拟度量和偏拟度量概念之间的联系。我们首先回顾拟度量的概念。

定义 3.11. 设 Q 为一个量化格。 X 上的一个拟度量 （或半度量）是一个自反且传递的 Q-谓词 $r\subseteq X\times Q\times X$。若一个 Q-关系所对应的 Q-谓词是拟度量，即 Q-关系 ϕ满足：当且仅当 ϕ 满足自反性条件 $\mathbf{1}\sqsubseteq\phi(x,x)$ 以及传递条件 $\phi(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z)$时，$X\times X\to Q$ 是 X 上的拟度量 。

当 Q 是 Lawvere 量化环 $[0,+\infty]$时，上述定义与 [GL13]中给出的拟度量定义一致。由于自反性蕴含拟自反性，每个拟度量都是拟拟度量。下面给出两个拟度量的例子。

例 3.12. 设 Q 为一个量化格，并设 $\phi\colon\ X\times X\to Q$ 是集合 X上的一个 Q-关系。我们定义 Q-关系 $\phi^l,\phi^r\colon\ X\times X\to Q$ 如下：

$$\begin{aligned}\phi^l(x,y)&=\bigsqcap_{z\in X}\phi(y,z)\multimap\phi(x,z),\\ \phi^r(x,y)&=\bigsqcap_{z\in X}\phi(z,x)\multimap\phi(z,y).\end{aligned}$$

很容易验证， ϕ^l 和 ϕ^r 是 X上的拟度量。我们称 ϕ^l 和 ϕ^r为 ϕ的左、右观测拟度量。直观来说， $\phi^l(x,\ y)$ 衡量通过观察差异 $\phi(y,\ z)$ 和 $\phi(x,\ z)$（对所有 $z\in X$而言）， x与 y之间的分离程度；类似地，$\phi^r(x,\ y)$ 衡量 x 与 y 在相反方向上的分离程度。

接下来，我们回顾[BKMP09], 所称的偏拟度量 [KPS06]的非对称变体的定义。正如我们预期的，这类度量 ϕ以拟自反条件$\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$ （以及 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(y,y)$）取代了通常的自反性条件 $\phi(x,x)=\mathbf{1}$ 。此外，与拟拟度量或拟度量不同，偏拟度量满足强传递条件。对于一个 $[0,+\infty]$关系$\phi\colon\ X\times X\to[0,+\infty]$，该条件表述为

$$\phi(x,y)+\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z)+\phi(y,y).\qquad(\ [0,\ +\infty]\text{中的强传递性})$$

这意味着，中心项 y 的自距离 $\phi(y,y)$ 会“加到三角不等式中的距离$\phi(x,z)$ 上”。这种强传递性蕴含以下不等式：

$$(\phi(y,y) \multimap \phi(x,y)) + \phi(y,z) \sqsubseteq \phi(x,z).$$

我们将这一性质称为左强传递性，并将其推广到任意量化值关系如下：

定义3.13。 我们称一个 Q-关系 $\phi\colon X \times X \to Q$ 具有左强传递性，如果对于所有x、 y、 $z \in X$，都有

$$(\phi(y,y) \multimap \phi(x,y)) \otimes \phi(y,z) \sqsubseteq \phi(x,z).$$

当且仅当 ϕ 是拟自反的且具有左强传递性时， Q-关系 $\phi\colon X \times X \to Q$ 才是 X 上的左强拟拟度量。

由 Q 的整性可知，如果一个 Q-关系 $\phi\colon X \times X \to Q$ 具有左强传递性，那么 ϕ 是传递的。因此，左强拟拟度量是拟拟度量。下面给出一个左强拟拟度量的例子。

例3.14。 设 Q 是一个量化格。对于任意函数 $\omega\colon X \to Q$ 以及任意拟度量$\phi\colon X \times X \to Q$，由下式给出的 Q-关系 $\psi\colon X \times X \to Q$

$$\psi(x,y) = \omega x \otimes \phi(x,y)$$

是定义在 X 上的左强拟拟度量。偏度量的类似构造可见于 [BKMP09]。

我们可以用 Q-谓词和自距离来刻画左强拟拟度量。尚不清楚如何在不使用自距离的情况下刻画它们。

命题 3.15。 对于任意闭 Q-谓词 $r \subseteq X \times Q \times X$，相应的 Q-关系 $\hat{}r$ 是左强拟拟度量，当且仅当

- r 是拟自反的；并且- 对于任意 x、 $y \in X$和 a、 $b \in Q$，若 $(x$、 $a \otimes \hat{}r(y$、 $y)$、 $y) \in r$且 $(y$、 b、 $z) \in r$，则 $(x$、 $a \otimes b$、 $z) \in r$。

我们也将第二个性质称为左强传递性，并且当且仅当 r 是拟自反且左强传递时，称 r 为左强拟拟度量 。

证明。 由于 $\hat{}r$ 是拟自反的当且仅当 r 是拟自反的，我们只需验证 $\hat{}r$ 是左强传递的当且仅当 r 是左强传递的。首先假设 $\hat{}r$ 是左强传递的。若 $(x, a \otimes \hat{}r(y,y), y) \in r$ 且 $(y,b,z) \in r$，则根据 $\hat{}r$ 的定义，我们有 $a \otimes \hat{}r(y,y) \sqsubseteq \hat{}r(x,y)$ 以及 $b \sqsubseteq \hat{}r(y,z)$。因此，由 $\hat{}r$ 的左强传递性可得

$$a \otimes b \sqsubseteq (\hat{r}(y,y) \multimap \hat{r}(x,y)) \otimes \hat{r}(y,z) \sqsubseteq \hat{r}(x,z),$$

w这意味着 $(x, a \otimes b, z) \in r$。反过来，若 r 是左强传递的，则由于

$$(x, (\hat{r}(y,y) \multimap \hat{r}(x,y)) \otimes \hat{r}(y,y), y) \in r, \qquad (y, \hat{r}(y,z), z) \in r,$$

由左强传递性可得

$$(x, (\hat{r}(y,y) \multimap \hat{r}(x,y)) \otimes \hat{r}(y,z), z) \in r.$$

因此， $(\hat{}r(y,\ y) \multimap \hat{}r(x,\ y)) \otimes \hat{}r(y,\ z) \sqsubseteq \hat{}r(x,\ z)$。 □

3.4. 关于传递性条件的评述。 虽然我们重点讨论左强传递性，但将强传递性的概念推广到量化幺半格值语境有多种方式，例如

$$\phi(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z)\otimes\phi(y,y), \tag{ST1}$$
$$\phi(x,y)\otimes(\phi(y,y)\multimap\phi(y,z))\sqsubseteq\phi(x,z), \tag{ST2}$$
$$\phi(y,y)\multimap(\phi(x,y)\otimes\phi(y,z))\sqsubseteq\phi(x,z), \tag{ST3}$$
$$(\phi(y,y)\multimap\phi(x,y))\otimes\phi(y,y)\otimes(\phi(y,y)\multimap\phi(y,z))\sqsubseteq\phi(x,z), \tag{ST4}$$
$$(\phi(y,y)\multimap\phi(x,y))\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z). \tag{LST}$$

条件 (ST1) 是对强传递条件的直接采用，见 [GP21]。条件 (ST2) 和 (ST4) 与对角线 [HS18] 的概念有关，分别见 [Pis21] 和 [HS18] 。最后一个条件 (LST) 是左强传递性。注意，当 ϕ 是一个满足左拟自反性条件 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$的、定义在 X 上的 $[0,+\infty]$-关系时，我们有

$$(\mathrm{ST3})\implies(\mathrm{ST2})\implies(\mathrm{ST1})\implies(\mathrm{ST4})\iff(\mathrm{LST}).$$

此外，如果 ϕ 既是左拟自反的也是右拟自反的，即对于所有 $x,y\in X$，都有 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(x,x)$ 和$\phi(x,y)\sqsubseteq\phi(y,y)$，那么 (ST1)、(ST2)、(ST4) 和 (LST) 等价。如果进一步假设对于所有 $x,y\in X$，$\phi(x,y)$ 都是有限的，那么上述五个条件等价。

We 基于以下原因，我们将注意力限制在左强传递性（LST）上 s:
• 所有由简单类型解释所产生的拟拟度量都满足左强传递性条件（见第4.3节）。• 强传递条件（ST1）、（ST2）和（ST3）在拟拟度量空间(实数 ⇒ 实数)中不成立，该空间解释实数上的函数类型（见例4.6）。• 对于任意量化幺半格值关系 ϕ: $X\times X\to Q$，若 ϕ 是左强传递的，则 ϕ满足（ST4）。

在目前为止介绍的各种传递性条件中，我们可以用观测拟度量来刻画传递性、（ST2）和（LST）。

命题 3.16. 对于任意 Q-关系 ϕ: $X\times X\to Q$，以下陈述成立 :
（i） ϕ 是传递的，当且仅当对所有 x、$y\in X$，都有 $\phi(x$、$y)\sqsubseteq\phi^r(x$、$y)$; （ii） ϕ 是传递的，当且仅当对所有 x、$y\in X$，都有 $\phi(x$、$y)\sqsubseteq\phi^l(x$、$y)$; （iii） ϕ 满足（ST2），当且仅当对所有 x、$y\in X$，都有 $\phi(x$、$x)\multimap\phi(x$、$y)\sqsubseteq\phi^r(x$、$y)$; （iv） ϕ 满足（LST），当且仅当对所有 x、$y\in X$，都有 $\phi(y$、$y)\multimap\phi(x$、$y)\sqsubseteq\phi^l(x$、$y)$。

证明。根据 ϕ^l和 ϕ^r的定义，对于所有 x，y，$z\in X$，以下不等式成立 :

$$\phi^l(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z),$$
$$\phi(x,y)\otimes\phi^r(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z).$$

此外，ϕ^l 和 ϕ^r 是满足上述条件的最大 Q-关系。这些论断可由这些刻画得出。这里，我们只证明（i）。其他结论可以用同样的方法验证。若 ϕ是传递的，则由于对所有 x,y，$z\in X$，$\phi(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z)$均成立，根据上述对 ϕ^r的刻画，可得 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi^r(x,y)$。反之，若对所有 $x,y\in X$，都有 $\phi(x,y)\sqsubseteq\phi^r(x,y)$，那么对所有 $x,y,z\in X$，都有

$$\phi(x,y)\otimes\phi(y,z)\sqsubseteq\phi(x,y)\otimes\phi^r(y,z)\sqsubseteq\phi(x,z).$$

因此， ϕ 是传递的。 □

上述结果表明，左强拟拟度量可视为拟拟度量的极限情形，即那些其拟度量 $\phi^l(x,y)$可以写成更简单形式 $\phi(x,x) \multimap \phi(x,y)$的情形。事实上， $\phi(x,x) \multimap \phi(x,y) \sqsubseteq \phi^l(x,y)$ 由命题 3.16 得出，而 $\phi^l(x,y) \sqsubseteq \phi(x,x) \multimap \phi(x,y)$ 则由 ϕ^l的刻画得出。因此，拟拟度量 ϕ 满足左强传递性条件，当且仅当 $\phi^l(x,y)$ 等于 $\phi(x,x) \multimap \phi(x,y)$。

4. The Category of Quasi-Quasi-Metric Spaces

4.1. 笛卡尔闭结构。 我们引入拟拟度量的一个笛卡尔闭范畴，并观察到笛卡尔闭结构与微分逻辑关系构造之间的对应。我们将拟拟度量空间的范畴**Qqm** 定义如下：

• 对象是拟拟度量空间 $A = (|A|, \mathcal{Q}_A, \rho_A)$，满足 ρ_A是闭的；而且• 从 A到 B的态射是三元组 (f, d, g)，由函数 $f, g\colon |A| \to |B|$和$d\colon |A| \times \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_B$组成，并满足以下条件：– $d \in (|A|, \mathcal{Q}_A) \nrightarrow \mathcal{Q}_B$，即 $d(x,-)\colon \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_B$对所有 $x \in |A|$都是单调的；以及 – 对所有 $(x, a, y) \in \rho_A$，有 $(fx, d(x,a), gy) \in \rho_B$和 $(fx, d(x,a), fy) \in \rho_B$。

对象 A 上的恒等态射是 $(i_A,\ j_A,\ i_A)$，由 $|A|$上的恒等函数 i_A和第二投影 $j_A\colon |A| \times \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_A$组成。$(f,\ d,\ g)\colon A \to B$与 $(h,\ e,\ k)\colon B \to C$的复合为 $(h \circ f,\ c,\ k \circ g)$，其中 $c\colon |A| \times \mathcal{Q}_A \to \mathcal{Q}_C$由下式给出

$$c(x,a) = e(fx, d(x,a)).$$

直观地说， $c(x,a)$ 首先计算误差 $d(x,a)$，该误差由 f引入，然后计算总误差 $e(fx, d(x,a))$，该总误差由 g相对于中间值 fx和误差 $d(x,a)$产生。

命题4.1. 范畴**Qqm** 是笛卡尔闭的。

证明. 笛卡尔闭结构与第2节中微分逻辑关系的构造紧密吻合。对象 T 由

$$|T| = \{0\}, \qquad \mathcal{Q}_T = \{\mathbf{1}\}, \qquad \rho_T = \{(0, \mathbf{1}, 0)\},$$

是一个终对象。对于对象 A 和 B，由以下内容组成的对象 $A \times B$

$$|A \times B| = |A| \times |B|, \qquad \mathcal{Q}_{A\times B} = \mathcal{Q}_A \times \mathcal{Q}_B,$$

以及由以下内容给出的 $\rho_{A\times B} \subseteq |A \times B| \times \mathcal{Q}_{A\times B} \times |A \times B|$

$$((x,y),(a,b),(z,w)) \in \rho_{A\times B} \iff (x,a,z) \in \rho_A \text{ and } (y,b,w) \in \rho_B$$

是 A 和 B 的积，其中我们赋予 $\mathcal{Q}_{A\times B}$ 逐分量的量子格结构。第一投影$(p_{A,B}, q_{A,B}, p_{A,B})\colon A \times B \to B$由这些投影组成

$$p_{A,B}\colon |A| \times |B| \to |A|, \qquad q_{A,B}\colon |A| \times |B| \times \mathcal{Q}_A \times \mathcal{Q}_B \to \mathcal{Q}_A$$

由 $p_{A,\ B}(x,\ y) = x$和 $q_{A,\ B}(x,\ y,\ a,\ b) = a$给出。第二投影以相同方式定义。由以下部分构成的对象 $A \Rightarrow B$

$$|A \Rightarrow B| = |A| \Rightarrow |B|, \qquad \mathcal{Q}_{A\Rightarrow B} = (|A|, \mathcal{Q}_A) \nrightarrow \mathcal{Q}_B,$$

以及由 $\rho_{A\Rightarrow B}\subseteq|A\Rightarrow B|\times\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}\times|A\Rightarrow B|$ 给出

$$(f,d,g)\in\rho_{A\Rightarrow B}\iff \text{for all } (x,a,y)\in\rho_A,\\ (fx,d(x,a),gy)\in\rho_B \text{ and } (fx,d(x,a),fy)\in\rho_B$$

是从 A 到 B的一个指数对象。这里，$|A|\Rightarrow|B|$ 是从 $|A|$ 到 $|B|$的函数集合，并且我们赋予 $\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}$ 逐点量子格结构。求值态射$(e_{A,B},c_{A,B},e_{A,B})$：$(A\Rightarrow B)\times A\to B$由以下部分组成

$$e_{A,B}\colon|A\Rightarrow B|\times|A|\to|B|,\qquad c_{A,B}\colon|A\Rightarrow B|\times|A|\times\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}\times\mathcal{Q}_A\to\mathcal{Q}_B$$

由$e_{A,B}(f,x)=fx$和$c_{A,B}(f,x,d,a)=d(x,a)$给出。 □

每个度量空间都诱导一个拟拟度量空间。下面的例子对应于 $\mathbb{R}$上的欧几里得度量。

例 4.2. 我们定义 $R\in$**Qqm** 为

$$|R|=\mathbb{R},\qquad \mathcal{Q}_R=[0,+\infty],\qquad (x,a,y)\in\rho_R\iff|x-y|\sqsupseteq a.$$

注意，与 ρ_R 相关联的 $[0,+\infty]$-关系$\hat{}\rho_R$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ 正是欧几里得度量$\hat{}\rho_R(x,y)=|x-y|$。

例 4.3. 为了说明如何度量函数之间的距离，我们具体描述函数空间 $R\Rightarrow R\in$**Qqm**。$R\Rightarrow R$ 的底层集合是定义在 $\mathbb{R}$上的函数集合，而 $\mathcal{Q}_{R\Rightarrow R}$是满足以下条件的函数 d的集合：$\mathbb{R}\times[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 对于任意 $x\in\mathbb{R}$，函数 $d(x,-)\colon[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 是单调的。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f和 g，当且仅当 $d\in\mathcal{Q}_{R\Rightarrow R}$满足以下条件时，我们有$(f,d,g)\in\rho_{R\Rightarrow R}$

$$d(x,a)\sqsubseteq\bigsqcap_{|x-y|\sqsupseteq a}|fx-gy|\sqcap|fx-fy|,$$

也就是说，$d(x,a)$界定了圆盘上 fx与 g和 f的取值之间的间隙，该圆盘的中心为 x，半径为 a。单位元 $\mathbf{1}\in\mathcal{Q}_{R\Rightarrow R}$是常函数 $\mathbf{1}(x,a)=0$，并且当且仅当 f是常函数时，我们有$(f,\mathbf{1},f)\in\rho_{R\Rightarrow R}$。特别地，$\rho_{R\Rightarrow R}$不是自反的。

我们可以将例 4.3 中给出的 $\rho_{R\Rightarrow R}$ 刻画推广如下。

命题 4.4. 设 A 和 B 是拟拟度量空间。对于任意的 f、$g\in|A\Rightarrow B|$、$x\in|A|$和 $a\in\mathcal{Q}_A$，有

$$\hat{\rho}_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a)=\bigsqcap_{(x,a,y)\in\rho_A}\hat{\rho}_B(fx,gy)\sqcap\hat{\rho}_B(fx,fy).$$

证明。我们将右侧记为 $d(x,a)$。我们先验证 $\hat{}\rho_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a)\sqsubseteq d(x,a)$。根据 $\hat{}\rho_{A\Rightarrow B}(f,g)$ 的定义，对于任意 $(x,a,y)\in\rho_A$，有

$$(fx,\hat{\rho}_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a),gy)\in\rho_B,\qquad(fx,\hat{\rho}_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a),fy)\in\rho_B.\tag{4.1}$$

因此，

$$\hat{\rho}_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a)\sqsubseteq\hat{\rho}_B(fx,gy)\sqcap\hat{\rho}_B(fx,fy).$$

由于此不等式对所有满足 $(x,a,y)\in\rho_A$的 $y\in|A|$ 都成立，我们得到

$$\hat{\rho}_{A\Rightarrow B}(f,g)(x,a)\sqsubseteq d(x,a).$$

接下来验证另一个不等式。根据 d的定义，对任意 $(x,\ a,\ y)\in\rho_A$，我们有

$$(fx,d(x,a),gy)\in\rho_B,\qquad(fx,d(x,a),fy)\in\rho_B.$$

此外，由于 ρ_A向下封闭，对所有 $x \in |A|$，都有 $d(x,\ -)$ 是单调的。因此，d 是 $\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}$的一个元素。由于$\hat{}\rho_{A\Rightarrow B}(f,\ g)$ 是满足（4.1）的 $\mathcal{Q}_{A\Rightarrow B}$ 的最大元，我们得到 $d(x,\ a) \sqsubseteq \hat{}\rho_{A\Rightarrow B}(x,\ a)$。□

例4.5. 我们观察到$\hat{}\rho_{R\Rightarrow R}$ 不是对称的。设$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ 为 $\mathbb{R}$上的恒等函数。由引理 4.4可知，我们有

$$\hat{\rho}_{R\Rightarrow R}(\sin, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(x,a) = \bigsqcap_{|x-y|\sqsupseteq a} |\sin(x) - y| \sqcap |\sin(x) - \sin(y)|,$$
$$\hat{\rho}_{R\Rightarrow R}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \sin)(x,a) = \bigsqcap_{|x-y|\sqsupseteq a} |x - \sin(y)| \sqcap a.$$

由于

$$\hat{\rho}_{R\Rightarrow R}(\sin, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})(\pi, 2\pi) = 3\pi \sqsubsetneq 2\pi = \hat{\rho}_{R\Rightarrow R}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \sin)(\pi, 2\pi),$$

$\hat{}\rho_{R\Rightarrow R}$ 不是对称的。

在下一个例子中，我们观察到拟拟度量空间 $R \Rightarrow R$ 不满足强传递性的变体(ST1)、(ST2)和(ST3)。

例4.6. 为简洁起见，我们将$\hat{}\rho_{R\Rightarrow R}$ 记为 ϕ，并用$\phi_{f,g}$ 表示 $\phi(f,g)$。我们证明，$\mathbb{R}$ 上的 $\mathcal{Q}_{R\Rightarrow R}$-关系 ϕ 不满足(ST1)、(ST2)或(ST3)中的任何一个。为此，我们如下定义函数 $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = |x|, \qquad h(x) = x.$$

我们首先检查 ϕ的 (ST1) 不成立：

$$\big(\phi_{f,g} \otimes \phi_{g,h}\big)(0,2) = 1 + 2 \sqsupsetneq 3 + 2 = \big(\phi_{f,h} \otimes \phi_{g,g}\big)(0,2).$$

接下来我们观察到 ϕ的 (ST3) 不成立：

$$\begin{aligned}\big(\phi_{g,g} \multimap (\phi_{f,g} \otimes \phi_{g,h})\big)(0,2) &= \bigsqcap_{a\sqsupseteq 2} \big(\phi_{g,g}(0,a) \multimap (\phi_{f,g}(0,a) + \phi_{g,h}(0,a))\big) \\ &= \bigsqcap_{a\sqsupseteq 2} \big(a \multimap (1+a)\big) \\ &= 1 \sqsupsetneq 3 = \phi_{f,h}(0,2).\end{aligned}$$

Si由于 (ST2) 蕴含任意量化格值关系的 (ST3)，因此 ϕ的 (ST2) 也不成立 .

我们将以下述意义证明 **Qqm** 具有“弱”余积。此时，我们尚不清楚 **Qqm** 是否具有余积。

命题 4.7. 范畴 **Qqm** 具有弱余积：对于**Qqm**中的对象 A 和 B，存在一个**Qqm** 中的对象 $A + B$，并配备一对截面和回缩：

$$s_C\colon \mathbf{Qqm}(A,C) \times \mathbf{Qqm}(B,C) \lhd \mathbf{Qqm}(A+B,C) :r_C \qquad (C \in \mathbf{Qqm})$$

使得回缩 r_C 关于 C是自然的。

证明。对于量化格 Q，我们定义量化格 LQ如下：

$$LQ = \{\varnothing\} \cup \{\{a\} \mid a \in Q\}$$

其中，我们赋予 LQ由下式给出的偏序

$$\varnothing \sqsubseteq \{a\}, \qquad \{a\} \sqsubseteq \{b\} \iff a \sqsubseteq b.$$

LQ 的乘法是对 Q乘法的扩展，由下式给出

$$\{a\} \otimes \{b\} = \{a \otimes b\}, \qquad \{a\} \otimes \varnothing = \varnothing \otimes \{a\} = \varnothing \otimes \varnothing = \varnothing.$$

对于 A 和 $B \in$**Qqm**，令 $A + B$ 为 **Qqm** 中的对象，其定义为

$$\begin{aligned} |A + B| &= \{0\} \times |A| \cup \{1\} \times |B|, \\ \mathcal{Q}_{A+B} &= L\mathcal{Q}_A \times L\mathcal{Q}_B, \\ \rho_{A+B} &= \{(u, (\varnothing, \varnothing), v) \mid u, v \in |A + B|\} \\ &\qquad \cup \{((0, x), (\{a\}, \varnothing), (0, y)) \mid (x, a, y) \in \rho_A\} \\ &\qquad \cup \{((1, z), (\varnothing, \{b\}), (1, w)) \mid (z, b, w) \in \rho_B\}. \end{aligned}$$

给定一个态射 $(f, d, g)\colon A + B \to C$，我们将通过限制 f、d 和 g 的域，定义态射对 $r_C(f, d, g)$，即 $(h, e, k)\colon A \to C$ 和 $(h', e', k')\colon B \to C$；定义 $(h, e, k)\colon A \to C$ 如下：

$$h(x) = f(0, x), \qquad e(x, a) = d((0, x), (\{a\}, \varnothing)), \qquad k(x) = g(0, x),$$

并以相同方式定义 (h', e', k')。反过来，给定态射 $(f, d, g)\colon A \to C$ 和 $(h, e, k)\colon B \to C$，我们定义 $s_C((f, d, g), (h, e, k))$ 为

$$([f, h], \wr d, e\int, [g, k])\colon A + B \to C$$

由 f 和 h、g 和 k 的余元组构造 $[f, h], [g, k]\colon |A + B| \to |C|$ 分别组成，以及由函数 $\wr d, e\int\colon |A + B| \times \mathcal{Q}_{A+B} \to \mathcal{Q}_C$ 定义为

$$\wr d, e\int((0, x), (\alpha, \beta)) = \begin{cases} d(x, a), & \text{if } \alpha = \{a\}, \\ \bot, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\wr d, e\int((1, z), (\alpha, \beta)) = \begin{cases} e(z, b), & \text{if } \beta = \{b\}, \\ \bot, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\bot$ 是 $\mathcal{Q}_C$ 的最小元。显然，r_C 是 s_C 的左逆，并且关于 C 自然。

□

4.2. 拟拟度量语义。我们引入简单类型 λ 演算 Λ_{Real}，以及它在笛卡尔闭范畴 **Qqm** 中的解释。我们证明，类型的解释在 Λ_{Real} 上给出了微分逻辑关系，并进一步从范畴解释中推导出一个基本引理。

目标演算。我们描述目标演算 Λ_{Real}，它包含实数以及定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意元函数。为了定义目标演算，我们固定一个集合 $\mathbb{F}$，其中包含形如 $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$（$n \in \mathbb{N}$）的多元函数。我们称 $\alpha \in \mathbb{F}$ 的元数为 n，并将其记作 $\mathsf{ar}(\alpha)$。

令 Var 为一个可数无穷变量集合。我们如下定义类型和项：

$$\begin{aligned} &(\text{Type}) && \mathsf{A}, \mathsf{B} \coloneqq \mathsf{Real} \mid \mathsf{A} \times \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}, \\ &(\text{Term}) && \mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{u} \coloneqq \mathsf{x} \in \mathsf{Var} \mid \underline{r} \mid \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \mid \mathsf{t}\,\mathsf{s} \mid \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t} \mid \langle \mathsf{t}, \mathsf{s} \rangle \mid \mathsf{fst}(\mathsf{t}) \mid \mathsf{snd}(\mathsf{s}). \end{aligned}$$

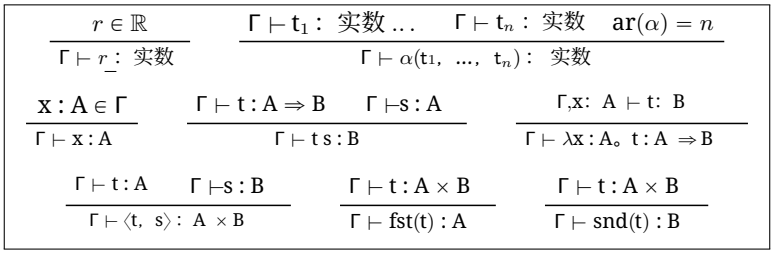


图 2：类型规则

在项的定义中， r 遍历 $\mathbb{R}$，而 α 遍历 $\mathbb{F}$。我们采用图 2 中给出的标准类型规则。若判断可由这些规则推导得出，我们记作 $\Gamma \vdash t : A$。下文中，我们也用 p 和 q 作为项的元变量。我们用**类型**表示类型集合，用$\mathbf{Term}_A$表示类型 A 的闭项集合。

记号。令 Γ 为如下形式的类型环境： $\Gamma = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$。对于一个类型索引集族 $\{X_A\}_{A \in \mathbf{Type}}$，我们定义集合 X_Γ 如下：

$$X_\Gamma = \begin{cases} X_{A_1} \times \cdots \times X_{A_n}, & \text{if } n \geqslant 1; \\ \{*\} & \text{if } n = 0; \end{cases}$$

并且给定一个元素 $\gamma \in X_\Gamma$，我们将其第 i 个元素记为 $\gamma|_i$。例如，**项**$_\Gamma$ 表示由闭项 $\gamma|_i = t_i \in$ **项**$_{A_i}$组成的有限序列集合 $\gamma = (t_1, \ldots, t_n)$。此外，对于类型环境 Γ和类型 B，给定 $\gamma = (x_1, \ldots, x_n) \in X_\Gamma$ 和$y \in X_B$，我们将 $\gamma :: y$记为 $(x_1, \ldots, x_n, y) \in X_\Delta$，其中 $\Delta = (x_1 : A \ldots, x_n : A_n, y : B)$。

类似地，给定一个量化格值谓词的类型索引族

$$\{r_A \subseteq X_A \times Q_A \times X_A\}_{A \in \mathbf{Type}},$$

我们定义一个量化格值谓词 $r_\Gamma \subseteq X_\Gamma \times Q_\Gamma \times X_\Gamma$ 如下

$$(\gamma, \xi, \epsilon) \in r_\Gamma \iff \text{for all } i \in \{1, \ldots, n\},\ (\gamma|_i, \xi|_i, \epsilon|_i) \in r_{A_i}$$

其中，我们为 Q_Γ 赋予逐分量的量化格结构。显然，如果对于所有类型 A， r_A 都是拟拟度量，那么 r_Γ 就是 X_Γ上的拟拟度量。

集合论语义。我们回顾 Λ_{Real}的标准集合论解释，该解释包含在笛卡尔闭范畴 $\mathbf{Qqm}$ 中对 Λ_{Real} 的解释之内。集合论解释按照如下方式将类型与集合、项与函数相关联：我们将类型 A 解释为一个集合 $[\![A]\!]$，其归纳定义如下：

$$[\![\mathsf{Real}]\!] = \mathbb{R}, \qquad [\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!], \qquad [\![A \Rightarrow B]\!] = [\![A]\!] \Rightarrow [\![B]\!];$$

并且我们将项 $\Gamma \vdash t : A$ 解释为函数 $[\![t]\!]$ from $[\![\Gamma]\!]$ to $[\![A]\!]$。我们在图 3 中给出 $[\![t]\!]$ 的定义。为简洁起见，给定一个闭项 $\vdash t : A$，我们将其解释$[\![t]\!]$: $\{*\} \to [\![A]\!]$ 与其值 $[\![t]\!]_* \in [\![A]\!]$ 等同。

$$
\begin{aligned}
[\![x_i]\!]_\gamma &= \gamma|_i \\
[\![\underline{r}]\!]_\gamma &= r \\
[\![\alpha(t_1,\ \ldots\ldots,\ t_n)]\!]_\gamma &= \alpha([\![t_1]\!]_\gamma \ldots\ldots,\ [\![t_n]\!]_\gamma) \\
[\![t\ s]\!]_\gamma &= [\![t]\!]_\gamma([\![s]\!]_\gamma) \\
[\![\lambda x\colon A.\, t]\!]_\gamma(x) &= [\![t]\!]_{\gamma::x} \\
[\![\mathsf{fst}(t)]\!]_\gamma &= [\![t]\!]\text{的第一分量}_\gamma \\
[\![\mathsf{snd}(t)]\!]_\gamma &= [\![t]\!]\text{的第二分量}_\gamma \\
[\![\langle t,\ s\rangle]\!]_\gamma &= ([\![t]\!]_\gamma\ [\![s]\!]_\gamma)
\end{aligned}
$$

图 3：集合论解释

拟拟度量语义。现在我们描述在笛卡尔闭范畴 **Qqm** 中的解释。我们将基类型 Real 解释为例 4.2 中给出的 R，并将该解释扩展到所有类型，如下所示：

$$(\!|\mathsf{Real}|\!) = R, \qquad (\!|\mathsf{A}\times\mathsf{B}|\!) = (\!|\mathsf{A}|\!)\times(\!|\mathsf{B}|\!), \qquad (\!|\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}|\!) = (\!|\mathsf{A}|\!)\Rightarrow(\!|\mathsf{B}|\!).$$

下文中，我们将 $(\!|\mathsf{A}|\!)$ 的每个分量简单记作 $(|\mathsf{A}|,\ \mathcal{Q}_\mathsf{A},\ \rho_\mathsf{A})$。由于**Qqm** 的笛卡尔闭结构包含集合与函数范畴 **Set** 的笛卡尔闭结构，底层集合 $|\mathsf{A}|$ 与其集合论解释 $[\![\mathsf{A}]\!]$ 相同。展开 $(\!|\mathsf{A}|\!)$ 的定义，可得量化格$\mathcal{Q}_\mathsf{A}$的如下归纳定义：

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{Real}} = [0,+\infty], \qquad \mathcal{Q}_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}} = \mathcal{Q}_\mathsf{A}\times\mathcal{Q}_\mathsf{B}, \qquad \mathcal{Q}_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}} = (|\mathsf{A}|,\mathcal{Q}_\mathsf{A}) \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_\mathsf{B},$$

以及拟拟度量 ρ_A 的如下归纳定义：

$$
\begin{aligned}
(x,a,y)\in\rho_{\mathsf{Real}} &\iff |x-y|\sqsupseteq a,\\
((x,y),(a,b),(z,w))\in\rho_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}} &\iff (x,a,z)\in\rho_\mathsf{A}\text{ and }(y,b,w)\in\rho_\mathsf{B},\\
(f,d,g)\in\rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}} &\iff \text{for all }(x,a,y)\in\rho_\mathsf{A},\\
&\qquad (fx,d(x,a),gy)\in\rho_\mathsf{B}\text{ and }(fx,d(x,a),fy)\in\rho_\mathsf{B}.
\end{aligned}
$$

项 $\Gamma\vdash t:\mathsf{A}$ 的解释 $(\!|t|\!)\colon (\!|\Gamma|\!)\to(\!|\mathsf{A}|\!)$ 等于 $([\![t]\!],\ \{t\},\ [\![t]\!])$，其中 $\{t\}$称为导数 [DLG21]，我们在图4中给出了 $\{t\}$ 的定义。函数

$$\alpha^\bullet\colon R^n\times[0,+\infty]^n\to[0,+\infty]$$

定义中 $\{\alpha(t_1,\ \ldots\ldots,\ t_n)|\}$ 的函数定义为

$$\alpha^\bullet(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_n) = \bigsqcap_{|x_1-y_1|\sqsupseteq a_1}\cdots\bigsqcap_{|x_n-y_n|\sqsupseteq a_n}|\alpha(x_1,\ldots,x_n)-\alpha(y_1,\ldots,y_n)|.$$

以下基本引理由导数的构造得出 s.

The理 4.8（基本引理）。对于任意 $\Gamma\vdash t:\mathsf{A}$ 和 $(\gamma,\ \xi,\ \varepsilon)\in\rho_\Gamma$，我们有 e

$$([\![t]\!]_\gamma,\{t\}_{\gamma,\xi},[\![t]\!]_\varepsilon)\in\rho_\mathsf{A}.$$

特别地，当A 等于实数时，我们有

$$|[\![t]\!]_\gamma-[\![t]\!]_\varepsilon|\sqsupseteq\{t\}_{\gamma,\xi}.$$

证明。 该结论由 $(\!|t|\!) = ([\![t]\!],\{t\},[\![t]\!])$ 是一个从 $(\!|\Gamma|\!)$ 到 $(\!|\mathsf{A}|\!)$的态射得出。 □

$$
\begin{aligned}
\{\!|\mathsf{x}_i|\!\}_{\gamma,\xi} &= \xi|_i \\
\{\!|\underline{r}|\!\}_{\gamma,\xi} &= 0 \\
\{\!|\alpha(\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n)|\!\}_{\gamma,\xi} &= \alpha^{\bullet}([\![\mathsf{t}_1]\!]_{\gamma},\ldots,[\![\mathsf{t}_n]\!]_{\gamma},\{\!|\mathsf{t}_1|\!\}_{\gamma,\xi},\ldots,\{\!|\mathsf{t}_n|\!\}_{\gamma,\xi}) \\
\{\!|\mathsf{t}\,\mathsf{s}|\!\}_{\gamma,\xi} &= \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}([\![\mathsf{s}]\!]_{\gamma},\{\!|\mathsf{s}|\!\}_{\gamma,\xi}) \\
\{\!|\lambda\mathsf{x}:\mathsf{A}.\,\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}(x,a) &= \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma::x,\xi::a} \\
\{\!|\langle\mathsf{t},\mathsf{s}\rangle|\!\}_{\gamma,\xi} &= (\{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi},\{\!|\mathsf{s}|\!\}_{\gamma,\xi}) \\
\{\!|\mathsf{fst}(\mathsf{t})|\!\}_{\gamma,\xi} &= \text{the first component of } \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi} \\
\{\!|\mathsf{snd}(\mathsf{t})|\!\}_{\gamma,\xi} &= \text{the second component of } \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}
\end{aligned}
$$

图4：导数的定义

基本引理为推理项的集合论解释之间的距离提供了一个组合框架。在下面的例子中，我们假设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{R}$上的所有多元函数的集合。

例4.9. 我们固定一个正实数 $\epsilon > 0$，并定义函数 F：$(\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下

$$F(f,x) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}.$$

函数 F 近似于 f 的导数：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 处的值，并且等于以下表达式的集合论解释

$$\mathsf{f} : \mathsf{Real} \Rightarrow \mathsf{Real}, \mathsf{x} : \mathsf{Real} \vdash \mathsf{let\ y\ be}\ \mathrm{add}(\mathsf{x})\ \mathsf{in}\ \mathrm{diff}(\mathsf{f\,y}, \mathsf{f\,x}) : \mathsf{Real}$$

其中，let y be t in s 是 $(\lambda \mathsf{y} : \mathsf{A}.\,\mathsf{s})\,\mathsf{t}$ 的语法糖，而 $\mathsf{diff} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $\mathsf{add} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下：$\mathsf{diff}(x,y) = (x-y)/\epsilon$ 和 $\mathsf{add}(x) = x + \epsilon$。于是，由基本引理可得

$$D\colon |(R \Rightarrow R) \times R| \times \mathcal{Q}_{(R \Rightarrow R) \times R} \to \mathcal{Q}_R$$

定义如下

$$D((f,x),(d,a)) = \frac{d(x+\epsilon,a) + d(x,a)}{\epsilon}$$

满足 $(F,D,F) \in \rho_{((R \Rightarrow R) \times R) \Rightarrow R}$。注意，$D$取决于所选用来表示 F 的具体项。由于我们有

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \hat{\rho}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \sin), \sin) \in \rho_{R \Rightarrow R}, \qquad (0,a,a) \in \rho_R,$$

我们得到 $F(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}, 0)$ 与 $F(\mathsf{sin}\ a)$之间距离的如下界：

$$
\begin{aligned}
|F(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},0) - F(\sin,a)| &\sqsupseteq D((\mathrm{id}_{\mathbb{R}},0),(\hat{\rho}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\sin),a)) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left(a \sqcap \left(\bigsqcap_{|\epsilon - y| \sqsupseteq a} |\epsilon - \sin(y)| + \bigsqcap_{|y| \sqsupseteq a} |\sin(y)|\right)\right)
\end{aligned}
$$

其中，第二个等式由例4.5中给出的 $\hat{}\rho(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\sin)$ 的显式表示得出。进一步化简可得如下界：

$$|F(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},0)-F(\sin,a)| \sqsupseteq \frac{a}{\epsilon} \sqcap \prod_{|y|\sqsupseteq a}\left|1-\frac{\sin(y+\epsilon)-\sin(y)}{\epsilon}\right|.$$

特别地，当 $a=\epsilon^2$ 时，右侧在 $\epsilon \to 0$ 时收敛到 0。

我们还可以利用基本引理来近似不同函数之间的距离。

命题 4.10 命题。 对于任意闭项 $\vdash \mathsf{t}:\mathsf{A} \Rightarrow$ 实数 和 $\vdash \mathsf{s}:\mathsf{A} \Rightarrow$实数，有

$$(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket, d, \llbracket \mathsf{s} \rrbracket) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$$

其中 $d \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$ 由下式给出

$$d(x,a) = \big(|\llbracket \mathsf{t} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{s} \rrbracket(x)| + \{\!|\mathsf{s}|\!\}(x,a)\big) \sqcap \{\!|\mathsf{t}|\!\}(x,a).$$

证明。 由基本引理可得

$$(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket, \{\!|\mathsf{t}|\!\}, \llbracket \mathsf{t} \rrbracket) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}, \qquad (\llbracket \mathsf{s} \rrbracket, \{\!|\mathsf{s}|\!\}, \llbracket \mathsf{s} \rrbracket) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}.$$

因此，对于任意 $(x,\ a,\ y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned} d(x,a) &\sqsubseteq |\llbracket \mathsf{t} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{s} \rrbracket(x)| + \{\!|\mathsf{s}|\!\}(x,a) \\ &\sqsubseteq |\llbracket \mathsf{t} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{s} \rrbracket(x)| + |\llbracket \mathsf{s} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{s} \rrbracket(y)| \\ &\sqsubseteq |\llbracket \mathsf{t} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{s} \rrbracket(y)|, \end{aligned}$$

and

$$d(x,a) \sqsubseteq \{\!|\mathsf{t}|\!\}(x,a) \sqsubseteq |\llbracket \mathsf{t} \rrbracket(x) - \llbracket \mathsf{t} \rrbracket(y)|.$$

因此，根据 $\rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$ 的定义，我们得到 $(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket,\ d,\ \llbracket \mathsf{s} \rrbracket) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$。 □

4.3. 拟拟度量语义中的一些附加性质。 本节研究由 Λ_{Real} 的解释所产生的拟拟度量。我们观察到，形如 ρ_{A} 的拟拟度量（其中类型为 A）具有若干附加性质：即不可区分性的一种变体、左强传递性以及弱对称性。

定理4。 11. 对于每种类型 A，拟拟度量 ρ_{A} 满足以下性质。

• *(自不可区分性)* 对任意 $x, y \in |A|$，若 $(x, \sigma_x, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，则 $x = y$。• *(左强传递性)* 对任意 x, $y \in |A|$，以及任意 $a, b \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$，若 $(x, a \otimes \sigma_y, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$且 $(y, b, z) \in \rho_{\mathsf{A}}$，则 $(x, a \otimes b, z) \in \rho_{\mathsf{A}}$。

• *(弱对称性)* 对任意 $x, y, z, w \in |A|$，以及任意 $a, b \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$，若 $(x, a \otimes \sigma_w, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$ 且$(x, b,$ $z) \in \rho_{\mathsf{A}}$ 且 $a \otimes b \sqsubseteq \sigma_y$，则 $(y, a \otimes b, z) \in \rho_{\mathsf{A}}$。

在此，对于 $x \in |\mathsf{A}|$，我们将 $\sigma_x \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$ 定义为 $\hat{}\rho_{\mathsf{A}}(x,x)$，即：

$$\sigma_x = \bigsqcup\{a \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \mid (x,a,x) \in \rho_{\mathsf{A}}\}.$$

我们将 σ_x x的自距离 称为。

证明。我们对 A 使用归纳法证明该断言。基例为 A = 实数，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，自距离 σ_x 均等于 0。因此，该断言由 ρ_{Real} 是 $\mathbb{R}$上的度量得出。对于 A = (B × C)的情形，对每个 $(x, y) \in |\mathsf{B} \times \mathsf{C}|$，我们有 $\sigma_{(x,\ y)} = (\sigma_x, \sigma_y)$，该断言由 B 和 C 的归纳假设得出。剩下需要检查 A = (B ⇒ C)的情形。这里我们用到这样一个事实：对于任意 $f\colon |\mathsf{A}| \to |\mathsf{B}|$ 且 $x \in |\mathsf{A}|$，有 $\sigma_f(x, \sigma_x) = \sigma_{fx}$。我们将此事实的证明留待引理 4.12。

- （自不可区分性）若 $(f, \sigma_f, g) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$，则对任意 $x \in |\mathsf{A}|$，
$$(fx, \sigma_{fx}, gx) = (fx, \sigma_f(x, \sigma_x), gx) \in \rho_{\mathsf{B}}.$$
因此，由 ρ_{B} 的自不可区分性可知，对所有 $x \in |\mathsf{A}|$，fx 等于 gx。
- （左强传递性）我们假设 $(f, d \otimes \sigma_g, g) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$ 以及 $(g, e, h) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$。由这些假设，对任意 $(x, a, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，我们得到
$$(fx, d(x, \sigma_x) \otimes \sigma_{gx}, gx) = (fx, d(x, \sigma_x) \otimes \sigma_g(x, \sigma_x), gx) \in \rho_{\mathsf{B}}, \quad (gx, e(x, a), hy) \in \rho_{\mathsf{B}}.$$
于是，由 ρ_{B} 的左强传递性可得
$$(fx, d(x, \sigma_x) \otimes e(x, a), hy) \in \rho_{\mathsf{B}}.$$
由于 d 是单调的且 $a \sqsubseteq \sigma_x$，我们有 $d(x, a) \sqsubseteq d(x, \sigma_x)$。因此，
$$(fx, d(x, a) \otimes e(x, a), hy) \in \rho_{\mathsf{B}}. \tag{4.2}$$
还需验证 $(fx, d(x, a) \otimes e(x, a), fy) \in \rho_{\mathsf{B}}$，从而推出 $(f, d \otimes e, h) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$。对假设应用拟自反性，可得
$$(f, d \otimes \sigma_g, f) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}, \qquad (g, e, g) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}.$$
特别地，我们有
$$(fx, d(x, a) \otimes \sigma_g(x, a), fy) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}, \qquad e \sqsubseteq \sigma_g.$$
因此，
$$(fx, d(x, a) \otimes e(x, a), fy) \in \rho_{\mathsf{B}}. \tag{4.3}$$
由 (4.2) 和 (4.3)，可知 $(f, d \otimes e, h)$ 是 $\rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$ 的一个元素。
- （弱对称性）设 $(f, d \otimes \sigma_k, g) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$，且 $(f, e, h) \in \rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$ 和 $d \otimes e \sqsubseteq \sigma_g$。那么，对于任意 $(x, a, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，我们有
$$(fx, d(x, \sigma_x) \otimes \sigma_{kx}, gx) = (fx, d(x, \sigma_x) \otimes \sigma_k(x, \sigma_x), gx) \in \rho_{\mathsf{B}}, \tag{4.4}$$
$$(fx, e(x, a), hy) \in \rho_{\mathsf{B}}. \tag{4.5}$$
由于 $a \sqsubseteq \sigma_x$，第一条款 (4.4) 蕴含
$$(fx, d(x, a) \otimes \sigma_{kx}, gx) \in \rho_{\mathsf{B}}. \tag{4.6}$$
我们还有
$$d(x, a) \otimes e(x, a) \sqsubseteq \sigma_g(x, a) \sqsubseteq \sigma_g(x, \sigma_x) = \sigma_{gx}$$
因此，根据 (4.6) 和 (4.5)，并利用 ρ_{B} 的弱对称性，
$$(gx, d(x, a) \otimes e(x, a), hy) \in \rho_{\mathsf{B}}.$$
此外，由于 $d \otimes e \sqsubseteq \sigma_g$，我们得到
$$(gx, d(x, a) \otimes e(x, a), gy) \in \rho_{\mathsf{B}}.$$
因此，$(g, d \otimes e, h)$ 是 $\rho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$ 的一个元素。

□

定理 4.11 的证明依赖于下面的引理。

引理 4.12。 设A 和B 是满足 ρ_{A} 自不可区分性条件的类型。那么，对于任意 $f\colon |\mathsf{A}| \to |\mathsf{B}|$ 以及任意 $x \in |\mathsf{A}|$，我们有 $\sigma_f(x, \sigma_x) = \sigma_{fx}$。

证明。 对于任意 $f\colon |\mathsf{A}| \to |\mathsf{B}|$ 以及任意 $x \in |\mathsf{A}|$，我们有

$$\sigma_f(x, \sigma_x) = \bigsqcap_{(x,\sigma_x,y)\in\rho_{\mathsf{A}}} \hat{\rho}_{\mathsf{B}}(fx, fy) = \hat{\rho}_{\mathsf{B}}(fx, fx) = \sigma_{fx}$$

其中，第一个等式由引理 4.4 得出，第二个等式则由 ρ_{A} 的自不可区分性条件得出。 □

我们对定理 4.11 中的第三个条件作一些解释。我们将此条件称为弱对称性，因为粗略地说，它是对称性与传递性的结合：若忽略 ρ_{A} 中元素的第二分量，弱对称性性质表明，若 $(x, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$ 且 $(x, z) \in \rho_{\mathsf{A}}$，则 $(y, z) \in \rho_{\mathsf{A}}$。我们也解释弱对称性性质的第一个假设 $(x, a \otimes \sigma_w, y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，并指出 w 与 $x, y, z \in |\mathsf{A}|$ 无关。粗略地说，该假设意味着 a 是 x 与 y 之间“逐点距离”的界：例如，对于函数 $f, g \in |(\text{实数} \Rightarrow \text{实数}) \Rightarrow \text{实数}|$ 和 $d \in \mathcal{Q}_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}$，若 $(f, d \otimes \sigma_h, g) \in \rho_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}$ 对某个 $h \in |(\text{实数} \Rightarrow \text{实数}) \Rightarrow \text{实数}|$ 成立，那么对于任意 $u \in |\text{实数} \Rightarrow \text{实数}|$，我们有

$$(fu, d(u, \sigma_u), gu) = (fu, d(u, \sigma_u) + \sigma_{hu}, gx) = (fu, d(u, \sigma_u) + \sigma_h(x, \sigma_u), gu) \in \rho_{\mathsf{Real}}.$$

由于 ρ_{Real} 具有对称性，我们也有 $(gu,\ d(u,\ \sigma_u),\ fu) \in \rho_{\mathsf{Real}}$。这样，对于所有类型 A，我们将 ρ_{Real} 的对称性提升为 ρ_{A} 的弱对称性。下面的推论给出了弱对称性的更显式表示。

推论 4.13。 对于任意类型 A，以及任意 x、y、$z \in |\mathsf{A}|$ 和 $a \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$，如果 $(x、\ a \otimes \sigma_z、\ y) \in \rho_{\mathsf{A}}$ 以及 $a \otimes \sigma_x \sqsubseteq \sigma_y$，则 $(y、\ a \otimes \sigma_x、\ x) \in \rho_{\mathsf{A}}$。

证明。 由于 $(x,\ \sigma_x,\ x) \in \rho_{\mathsf{A}}$，该断言由弱对称性得出。 □

由弱对称性还可得到另一个不可区分性性质。

推论 4.14。 对于任意类型 A，如果 $(x、{}^{\sigma_y}、\ y) \in \rho_{\mathsf{A}}$，则 $x = y$。

证明。 设 $(x,\ {}^{\sigma_y},\ y) \in \rho_{\mathsf{A}}$。于是，根据关于 $(x,\ \mathbf{1} \otimes \sigma_y,\ y) \in \rho_{\mathsf{A}}$ 和$(x,\ {}^{\sigma_y},\ x) \in \rho_{\mathsf{A}}$的弱对称性，我们得到 $(y,\ {}^{\sigma_y},\ x) \in \rho_{\mathsf{A}}$。由自不可区分性可知，$y$等于$x$。 □

注 4.15。 令**sQqm** 为**Qqm** 的满子范畴，由满足自不可区分性、左强传递性和弱对称性的拟拟度量空间组成。沿用定理 4.11 证明中的论证，我们可以证明**sQqm** 是笛卡尔闭的。相比具有这些附加性质的拟拟度量空间，我们更偏好一般的拟拟度量空间，是因为它们与第 5.4 节给出的定量等式理论有着无缝的联系。事实上，虽然将拟拟度量的公理纳入定量等式理论的推理规则是直接的，但由于自不可区分性、左强传递性和弱对称性依赖于自距离，如何容纳这些性质则不太明确。这一困难实质上等价于：如何在不使用自距离的情况下，利用量化格值谓词刻画左强传递性（见命题 3.15）。

5. A Poset of Differential Prelogical Relations

范畴**Qqm** 并不是度量项之间距离的唯一方式。在本节中，我们将微分前逻辑关系的概念介绍为 Λ_{Real}上的“拟拟度量”。微分前逻辑关系的集合带有一个偏序 $R \subseteq S$，直观地说，这意味着“拟拟度量” R 比“拟拟度量” S更精细。本节旨在考察这一偏序集的序理论结构，其动机来自程序等价关系格的结构。

5.1. 微分预逻辑关系。 我们按照预逻辑关系 [HS02] 的思路，将微分预逻辑关系引入为定义元素集合上的拟拟度量的类型索引族。这里，对于类型 A，如果存在一个类型为 A 的闭项 t，使得 $x = [\![\mathsf{t}]\!]$，则称元素 $x \in |\mathsf{A}|$ 是Λ_{Real}可定义 的。我们用 $\|\mathsf{A}\|$ 表示 $|\mathsf{A}|$ 中由 Λ_{Real}可定义元素组成的子集。

定义 5.1。 一个微分预逻辑关系 R 是一个类型索引的拟拟度量族

$$R_{\mathsf{A}} \subseteq \|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|$$

满足以下条件：

- 对于任意 $(x,\ a,\ y) \in \|\text{实数}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{Real}} \times \|\text{实数}\|$,

$$(x, a, y) \in R_{\mathsf{Real}} \iff |x - y| \sqsupseteq a.$$

- 对于每个项 $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A}$，以及对于每个 $(\gamma, \xi, \epsilon) \in R_{\Gamma}$,

$$([\![\mathsf{t}]\!]_{\gamma}, \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}, [\![\mathsf{t}]\!]_{\epsilon}) \in R_{\mathsf{A}}.$$

我们将第二个条件称为基本性质。

基本性质要求，任意项 t 的解释 $([\![\mathsf{t}]\!], \{\!|\mathsf{t}|\!\}, [\![\mathsf{t}]\!])$ 都保持微分预逻辑关系。由基本性质可知，微分预逻辑关系 R 在函数应用、投影和元组构造下封闭：

- 如果 $(f, d, g) \in R_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$ 且 $(x, a, y) \in R_{\mathsf{A}}$，那么 $(fx, d(x, a), gy) \in R_{\mathsf{B}}$。- 如果 $((x, y), (a, b), (z, w)) \in R_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}}$，那么 $(x, a, z) \in R_{\mathsf{A}}$ 且 $(y, b, w) \in R_{\mathsf{B}}$。- 如果 $(x, a, z) \in R_{\mathsf{A}}$ 且 $(y, b, w) \in R_{\mathsf{B}}$，那么 $((x, y), (a, b), (z, w)) \in R_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}}$。

而 HS 中引入的预逻辑关系 R [HS02] 由定义在类型索引集合族 $\{U_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 和 $\{V_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$之上的类型索引关系族 $\{R_{\mathsf{A}} \subseteq U_{\mathsf{A}} \times V_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 构成；微分预逻辑关系则由定义在固定集合族 $\{\|\mathsf{A}\|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$上的类型索引拟拟度量族构成。为简化微分预逻辑关系的定义及其比较，我们限制了微分预逻辑关系的底层集合。不过，遵循预逻辑关系的原始框架，将微分预逻辑关系的定义推广开来是轻而易举的。

下面给出几个微分预逻辑关系的例子。这些例子的基本性质留待第5.2节证明。

例5.2. 我们通过将拟拟度量族 $\{\rho_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 限制在 Λ_{Real}可定义元素上，来定义一个微分预逻辑关系 $\varrho = \{\varrho_{\mathsf{A}} \subseteq \|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$：

$$\varrho_{\mathsf{A}} = \rho_{\mathsf{A}} \cap (\|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|).$$

$\mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$值谓词 ϱ_{A} 是 $\|\mathsf{A}\|$ 上的拟拟度量，因为 ρ_{A} 是拟拟度量。

例5.3。 我们通过考察函数在 Λ_{Real}可定义 元素处的距离，引入一个微分预逻辑关系 δ：定义微分预逻辑关系$\delta = \{\delta_{\mathsf{A}} \subseteq \|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 如下：

$$\begin{aligned}(x,a,y) \in \delta_{\mathsf{Real}} &\iff |x-y| \sqsupseteq a,\\ ((x,y),(a,b),(z,w)) \in \delta_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}} &\iff (x,a,z) \in \delta_{\mathsf{A}} \text{ and } (y,b,w) \in \delta_{\mathsf{B}},\\ (f,d,g) \in \delta_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}} &\iff \text{for all } (x,a,y) \in \delta_{\mathsf{A}},\\ &\qquad (fx, d(x,a), gy) \in \delta_{\mathsf{B}} \text{ and } (fx, d(x,a), fy) \in \delta_{\mathsf{B}}.\end{aligned}$$

注意，在 $\delta_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$的定义中，我们要求 f 和 g 是 Λ_{Real}可定义的。通过对 A 进行归纳，我们可以证明 δ_{A} 是拟拟度量。类似的微分逻辑关系构造可见于 [DLGY19]。

例 5.4。 我们给出一种微分预逻辑关系的构造，它概括了例5.2和例5.3。该构造以一个 Λ_{Real} 闭谓词为参数：我们称类型索引的子集族

$$P_{\mathsf{A}} \subseteq |\mathsf{A}|$$

为 Λ_{Real}闭谓词，如果对于任意项 $\Gamma \vdash \mathsf{t}\colon \mathsf{A}$ 以及任意 $\gamma \in P_{\Gamma}$，都有 $[\![\mathsf{t}]\!]_{\gamma} \in P_{\mathsf{A}}$。给定一个 Λ_{Real}闭谓词 $\{P_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$，我们通过对 A 进行归纳定义一个 $\mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$谓词 $S_{\mathsf{A}} \subseteq P_{\mathsf{A}} \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times P_{\mathsf{A}}$如下：

$$\begin{aligned}(x,a,y) \in S_{\mathsf{Real}} &\iff |x-y| \sqsupseteq a,\\ ((x,y),(a,b),(z,w)) \in S_{\mathsf{A}\times\mathsf{B}} &\iff (x,a,z) \in S_{\mathsf{A}} \text{ and } (y,b,w) \in S_{\mathsf{B}},\\ (f,d,g) \in S_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}} &\iff \text{for all } (x,a,y) \in S_{\mathsf{A}},\\ &\qquad (fx, d(x,a), gy) \in S_{\mathsf{B}} \text{ and } (fx, d(x,a), fy) \in S_{\mathsf{B}}.\end{aligned}$$

我们可以通过归纳法证明，对于所有类型 A，$\mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$谓词 S_{A} 都是P_{A}上的拟拟度量。我们称类型索引族 $S = \{S_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 为与P相关联的类型索引族。接着，我们将微分预逻辑关系 $\{R_{\mathsf{A}}\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 定义为 S 在Λ_{Real}可定义元素上的限制，也就是说，我们定义 R_{A} 为

$$R_{\mathsf{A}} = S_{\mathsf{A}} \cap (\|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|).$$

我们称 R 为与 P相关联的微分预逻辑关系。例如，ϱ 是与 $\{|\mathsf{A}|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$相关联的微分预逻辑关系，而 δ 是与 $\{\|\mathsf{A}\|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$相关联的微分预逻辑关系。我们再举一个通过为 Λ_{Real} 添加一些函数而得到的 Λ_{Real}闭谓词的例子。例如，我们可以为 Λ_{Real} 添加一个项构造子

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{Real} \Rightarrow \mathsf{Real}}{\Gamma \vdash F(\mathsf{t}) : \mathsf{Real}}$$

对应某个固定函数 $F\colon (\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，例如 $Ff = \inf_{x\in\mathbb{R}} |fx|$。我们将这个扩展演算记作 $\Lambda^{F}_{\mathsf{Real}}$。于是，我们可以自然地将解释函数 $[\![-]\!]$ 扩展到 $\Lambda^{F}_{\mathsf{Real}}$。现在，我们将 $\{\|\mathsf{A}\|_F \subseteq |\mathsf{A}|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 定义为

$$x \in \|\mathsf{A}\|_F \iff x = [\![\mathsf{t}]\!] \text{ for some closed term } \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A} \text{ in } \Lambda^{F}_{\mathsf{Real}}.$$

显然，$\{\|\mathsf{A}\|_F \subseteq |\mathsf{A}|\}_{\mathsf{A}\in\mathbf{Type}}$ 是一个 Λ_{Real}闭谓词。

5.2. **基本性质**。 我们证明第 5.1 节中给出的所有微分预逻辑关系的例子的基本性质。由于这些例子都是例 5.4 的实例，我们只需证明与一个 Λ_{Real}-闭谓词相关联的微分预逻辑关系的基本性质。我们先证明一个更强的命题，并由此推导出基本性质。

定理 5.5。 设 S 是与 Λ_{Real}-闭谓词 P 相关联的类型索引族。对于每个项 $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A}$，以及任意 $(\gamma、\ \xi、\ \epsilon) \in S_\Gamma$，有

$$(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\gamma, \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}, \llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon) \in S_{\mathsf{A}}.$$

证明。 我们对 $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A}$ 的推导进行归纳来证明该命题。我们只检查 $\mathsf{t} = \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)$ 和 $\mathsf{t} = \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{s}$ 的情形。其余情形很容易验证。我们先检查 $\Gamma \vdash \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) : \mathbf{Real}$ 的情形。对于任意 $(\gamma, \xi, \epsilon) \in S_\Gamma$，由归纳假设可知，对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有

$$|\llbracket \mathsf{t}_i \rrbracket_\gamma - \llbracket \mathsf{t}_i \rrbracket_\epsilon| \sqsupseteq \{\!|\mathsf{t}_i|\!\}_{\gamma,\xi}.$$

因此，根据 $\alpha^\bullet$ 的定义，我们得到

$$|\llbracket \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \rrbracket_\gamma - \llbracket \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \rrbracket_\epsilon| \sqsupseteq \{\!|\alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)|\!\}_{\gamma,\xi}.$$

因此，

$$(\llbracket \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \rrbracket_\gamma, \{\!|\alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)|\!\}_{\gamma,\xi}, \llbracket \alpha(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \rrbracket_\epsilon) \in S_{\mathsf{Real}}.$$

接下来检查 $\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{s} : \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ 的情形。设 (γ, ξ, ϵ) 是 S_Γ 的一个元素。由归纳假设可知，对于任意 $(x, a, y) \in S_{\mathsf{A}}$，有

$$(\llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t} \rrbracket_\gamma(x), \{\!|\lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}(x, a), \llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon(y)) = (\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_{\gamma::x}, \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma::x,\xi::a}, \llbracket \mathsf{t} \rrbracket_{\epsilon::y}) \in S_{\mathsf{B}}.$$

Si由于 P是 Λ_{Real}-闭的， $\llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}。\, \mathsf{t} \rrbracket_\gamma$和 $\llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}。\, \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon$都是 $P_{\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}$的元素。因此，

$$(\llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t} \rrbracket_\gamma, \{\!|\lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}, \llbracket \lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\, \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon)$$

是 $S_{\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}$的一个元素。 □

接下来，我们推导出与 Λ_{Real}-闭谓词相关联的微分预逻辑关系的基本性质。

推论 5.6 (基本性质**)**。 设 R 是与 Λ_{Real}-闭谓词 P相关联的微分预逻辑关系。对于每个项 $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A}$，以及任意 $(\gamma、\ \xi、\ \epsilon) \in R_\Gamma$，我们有

$$(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\gamma, \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\xi}, \llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon) \in R_{\mathsf{A}}.$$

证明。 由于 γ 和 ϵ 由 Λ_{Real}-可定义元素组成， $\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\gamma$ 和 $\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon$ 是 Λ_{Real}-可定义的。因此，由定理 5.5 可知， $(\llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\gamma,\ \{\!|\mathsf{t}|\!\}_{\gamma,\ \xi},\ \llbracket \mathsf{t} \rrbracket_\epsilon)$ 是 R_{A} 的一个元素。 □

5.3. **微分预逻辑关系偏序集**。令 $\mathfrak{R}$ 为微分预逻辑关系的集合。对于微分预逻辑关系 R 和 S，当对每个类型 A 都有 $R_{\mathsf{A}} \subseteq S_{\mathsf{A}}$ 时，我们记作 $R \subseteq S$。这在 $\mathfrak{R}$ 上定义了一个偏序。根据偏序的定义，$R \subseteq S$ 成立当且仅当 R 比 S 更细，也就是说，对于任意 $x,\ y \in \|\mathsf{A}\|$，我们有 $R_{\mathsf{A}}(x,\ y) \sqsubseteq S_{\mathsf{A}}(x,\ y)$。我们的问题是，偏序集 $\mathfrak{R}$ 是否具有类似于程序等价关系格的序理论结构；具体而言，$\mathfrak{R}$ 是否为完备格，以及 $\mathfrak{R}$ 是否有最大元和最小元。

不难验证，偏序集 $\mathfrak{R}$ 有任意非空交。

命题 5.7。对于任意一族微分预逻辑关系 $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}$，它们的交集

$$S_{\mathsf{A}} = \bigcap_{R \in \mathfrak{S}} R_{\mathsf{A}}$$

是一个微分预逻辑关系，并且是 $\mathfrak{S}$ 在 $\mathfrak{R}$中的最大下界。

特别地，由于 $\mathfrak{R}$ 非空，偏序集 $\mathfrak{R}$ 有最小微分前逻辑关系 ν，其定义如下：

$$\nu_{\mathsf{A}} = \bigcap_{R \in \mathfrak{R}} R_{\mathsf{A}}.$$

正如预期的那样，我们可以用一个定量等式理论来刻画最小微分前逻辑关系 ν。这正是我们在第 5.4 节要证明的内容。相反，出乎我们的预料，我们在第 5.5 节观察到，$\mathfrak{R}$ 不一定存在最大微分预逻辑关系。

5.4.**作为定量等式理论的最小微分预逻辑关系**。我们给出最小微分预逻辑关系 $\nu \in \mathfrak{R}$ 的具体表述。为此，我们在图 5 中给出一个定量等式理论 Θ_{Real}，在**Qqm** 中将 Λ_{Real} 的解释内化到 Λ_{Real}的语言中。在推导规则中，每个判断 $\Gamma \vdash (\mathsf{t}\ a,\ \mathsf{s}) : \mathsf{A}$ 都由一个函数 $a \in (\llbracket\Gamma\rrbracket, \mathcal{Q}_\Gamma) \to \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$ 以及一对项 $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{A}$ 和 $\Gamma \vdash \mathsf{s} : \mathsf{A}$ 组成。我们的思路受到 [MPP16] 和 [DN23], 中定量等式理论的启发，但有两点不同：首先，距离 a 不必是实数，而是表示为量化格之间的函数；其次，我们用局部相似性取代非扩张性。

该定量等式理论 Θ_{Real} 导出一个微分预逻辑关系：对于每个类型 A，我们定义一个 $\mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$-谓词 $\theta_{\mathsf{A}} \subseteq \|\mathsf{A}\| \times \mathcal{Q}_{\mathsf{A}} \times \|\mathsf{A}\|$，其定义如下：

$$(x,\ a,\ y) \in \theta_{\mathsf{A}} \iff x = \llbracket\mathsf{t}\rrbracket \text{ 和 } y = \llbracket\mathsf{s}\rrbracket，\text{其中某个可推导判断为 } \vdash (\mathsf{t}\ a,\ \mathsf{s}) : \mathsf{A}$$

其中我们将 $a\colon \{*\} \times \{*\} \to \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$ 与 $a(*,\ *) \in \mathcal{Q}_{\mathsf{A}}$等同。

定理 5.8。对于每个类型 A，我们有 $\theta_{\mathsf{A}} = \nu_{\mathsf{A}}$。

证明。我们通过证明 θ 是最小微分预逻辑关系来推导该结论。首先证明，对于任意微分预逻辑关系 R 和任意类型 A，都有 $\theta_{\mathsf{A}} \subseteq R_{\mathsf{A}}$。为此，给定一个微分预逻辑关系 R，我们证明，对于任意类型环境 $\Gamma = (\mathsf{x}_1 : \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \mathsf{A}_n)$，以及任意可推导判断 $\Gamma \vdash (\mathsf{t}\ a, \mathsf{s}) : \mathsf{A}$，都有

$$(\llbracket\lambda \mathsf{x}_1 : \mathsf{A}_1.\ \cdots \lambda \mathsf{x}_n : \mathsf{A}_n.\ \mathsf{t}\rrbracket, b, \llbracket\lambda \mathsf{x}_1 : \mathsf{A}_1.\ \cdots \lambda \mathsf{x}_n : \mathsf{A}_n.\ \mathsf{s}\rrbracket) \in R_{\mathsf{A}_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathsf{A}_n \Rightarrow \mathsf{A}}$$

$$\frac{a(\gamma,\xi)=|x-y|}{\Gamma\vdash(\underline{x},a,\underline{y}):\mathsf{Real}}\qquad\frac{\Gamma=(\mathsf{x}_1:\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{x}_n:\mathsf{A}_n)\quad a(\gamma,\xi)=\xi|_i}{\Gamma\vdash(\mathsf{x}_i,a,\mathsf{x}_i):\mathsf{A}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t}_1,a_1,\mathsf{s}_1):\mathsf{Real}\quad\ldots\quad\Gamma\vdash(\mathsf{t}_n,a_n,\mathsf{s}_n):\mathsf{Real}\qquad b(\gamma,\xi)=\alpha^\bullet([\![\mathsf{t}_1]\!]_\gamma,\ldots,[\![\mathsf{t}_n]\!]_\gamma,a_1(\gamma,\xi),\ldots,a_n(\gamma,\xi))}{\Gamma\vdash(\alpha(\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n),b,\alpha(\mathsf{s}_1,\ldots,\mathsf{s}_n)):\mathsf{Real}}$$

$$\frac{\Gamma,\mathsf{x}:\mathsf{A}\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{B}\quad b(\gamma,\xi)(x,a)=a(\gamma::x,\xi::a)}{\Gamma\vdash(\lambda\mathsf{x}:\mathsf{A}.\,\mathsf{t},b,\lambda\mathsf{x}:\mathsf{A}.\,\mathsf{s}):\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}\quad\Gamma\vdash(\mathsf{p},b,\mathsf{q}):\mathsf{A}\quad c(\gamma,\xi)=a(\gamma,\xi)([\![\mathsf{p}]\!]_\gamma,b(\gamma,\xi))}{\Gamma\vdash(\mathsf{t}\,\mathsf{p},c,\mathsf{s}\,\mathsf{q}):\mathsf{B}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}\quad\Gamma\vdash(\mathsf{p},b,\mathsf{q}):\mathsf{B}}{\Gamma\vdash(\langle\mathsf{t},\mathsf{p}\rangle,\langle a,b\rangle,\langle\mathsf{s},\mathsf{q}\rangle):\mathsf{A}\times\mathsf{B}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},\langle a,b\rangle,\mathsf{s}):\mathsf{A}\times\mathsf{B}}{\Gamma\vdash(\mathsf{fst}(\mathsf{t}),a,\mathsf{fst}(\mathsf{s})):\mathsf{A}}\qquad\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},\langle a,b\rangle,\mathsf{s}):\mathsf{A}\times\mathsf{B}}{\Gamma\vdash(\mathsf{snd}(\mathsf{t}),b,\mathsf{snd}(\mathsf{s})):\mathsf{B}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}\quad\Gamma\vdash\mathsf{p}:\mathsf{A}\quad\Gamma\vdash\mathsf{q}:\mathsf{A}\quad[\![\mathsf{t}]\!]=[\![\mathsf{p}]\!]\quad[\![\mathsf{s}]\!]=[\![\mathsf{q}]\!]}{\Gamma\vdash(\mathsf{p},a,\mathsf{q}):\mathsf{A}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}\quad b\sqsubseteq a}{\Gamma\vdash(\mathsf{t},b,\mathsf{s}):\mathsf{A}}\qquad\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a_i,\mathsf{s}):\mathsf{A}\quad a=\bigsqcup_{i\in I}a_i}{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}\quad\Gamma\vdash(\mathsf{s},b,\mathsf{u}):\mathsf{A}}{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a\otimes b,\mathsf{u}):\mathsf{A}}\qquad\frac{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{s}):\mathsf{A}}{\Gamma\vdash(\mathsf{t},a,\mathsf{t}):\mathsf{A}}$$

图 5：推导规则

其中 $b\in\mathcal{Q}_{\mathsf{A}_1\Rightarrow\cdots\Rightarrow\mathsf{A}_n\Rightarrow\mathsf{A}}$ 定义为

$$b(x_1,a_1)\cdots(x_n,a_n)=a((x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n)).$$

我们可以通过对 $\Gamma\vdash(\mathsf{t}\ a,\mathsf{s}):\mathsf{A}$ 的推导应用归纳法，并利用 R 的基本性质，得出上述结论。特别地，当 Γ 是空类型环境时，对于任意类型 A，我们得到 $\theta_{\mathsf{A}}\subseteq R_{\mathsf{A}}$。接下来，我们验证 θ 是一个微分预逻辑关系。对于每种类型 A，由图 5 中最后五条规则可知，θ_{A} 是 $\|\mathsf{A}\|$ 上的拟拟度量。基本性质可由以下陈述推出。

- 对于任意 $\Gamma\vdash\mathsf{t}:\mathsf{A}$,

$$\Gamma\vdash(\mathsf{t},\{\!|\mathsf{t}|\!\},\mathsf{t}):\mathsf{A}.$$

- 对于长度为 n 的任意类型环境 Γ 和长度为 m 的任意类型环境 Δ，若 $\Gamma,\mathsf{x}:\mathsf{A}\ \Delta\vdash(\mathsf{t}\ a,\mathsf{s}):\mathsf{B}$ 且 $\vdash(\mathsf{p}\ b,\mathsf{q}):\mathsf{A}$，则

$$\Gamma,\Delta\vdash(\mathsf{t}[\mathsf{p}/\mathsf{x}],c,\mathsf{s}[\mathsf{q}/\mathsf{x}]):\mathsf{B},\qquad\Gamma,\Delta\vdash(\mathsf{t}[\mathsf{p}/\mathsf{x}],c,\mathsf{t}[\mathsf{q}/\mathsf{x}]):\mathsf{B}$$

其中，对于 $\gamma=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in|\Gamma|$ 和 $\xi=(d_1,\ldots,d_n,e_1,\ldots,e_m)\in\mathcal{Q}_\Gamma$，我们定义 $c(\gamma,\xi)$ 为

$$a((x_1,\ldots,x_n,[\![\mathsf{p}]\!],y_1,\ldots,y_m),(d_1,\ldots,d_n,b,e_1,\ldots,e_m)).$$

我们可以通过对 t 作归纳法证明第一个命题，并通过对 $\Gamma, \mathsf{x}:\mathsf{A}\ \Delta \vdash (\mathsf{t}\ a, \mathsf{s}):\mathsf{B}$ 的推导作归纳法证明第二个命题。剩下要验证的是，$(x,a,y)\in\theta_{\mathsf{Real}}$ 当且仅当 $|x-y|\sqsupseteq a$。由第一条推导规则可知，若 $|x-y|\sqsupseteq a$，则$(x,a,y)\in\theta_{\mathsf{Real}}$。反向蕴含则由 θ_{Real} 是 δ_{Real}的子集这一事实得出。□

5.5. **最大微分预逻辑关系的不存在性**。偏序集 $\mathfrak{R}$不一定存在最大微分预逻辑关系。为此，我们假设 $\mathbb{F}$ 为空，并证明 $\mathfrak{R}$不存在最大微分预逻辑关系。当 $\mathbb{F}$ 为空时，项 $\vdash \mathsf{t}:\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}$ 的集合论解释等于一个常函数或恒等函数。由于我们需要这一事实来推导结论，下面简述其证明。我们定义一个范畴 $\mathcal{B}$，其对象为 $\mathsf{obj}(\mathcal{B})=\{\bullet\}$，并且

$$\mathcal{B}(\bullet,\bullet)=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ is a constant function or the identity function}\}.$$

$\mathcal{B}$ 的复合就是函数的复合。由于预层范畴[$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$，**集合**]是笛卡尔闭的，[$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$，**集合**]是 Λ_{Real}的一个模型，其中我们将基类型 Real 解释为 $\mathcal{B}(-,\bullet)$。然后，通过在 [$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$，**集合**] 与**集合**之间构造逻辑关系，并为这些逻辑关系建立基本引理，我们可以证明，项 $\vdash \mathsf{t}:\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}$ 的集合论解释等于一个常函数或恒等函数。

现在我们继续证明，$\mathfrak{R}$ 不存在最大微分预逻辑关系。我们首先证明，微分预逻辑关系 δ 在 $\mathfrak{R}$中是极大的。

P命题 5.9. 对于任意微分预逻辑关系 R，若 $R\sqsupseteq\delta$，则 $R=\qquad\qquad\qquad\qquad\delta$.

证明。我们通过对 A 使用归纳法，证明 R_{A} 等于 δ_{A}。基例 $\mathsf{A}=$ 实数显然成立。对于 $\mathsf{A}=(\mathsf{B}\times\mathsf{C})$ 的情形，若 $((x、\ y)、\ (a、\ b)、\ (z、\ w))\in R_{\mathsf{B}\times\mathsf{C}}$，则 $(x、\ a、\ z)\in R_{\mathsf{B}}=\delta_{\mathsf{B}}$且 $(y、\ b、\ w)\in R_{\mathsf{C}}=\delta_{\mathsf{C}}$。因此，$((x、\ y)、\ (a、\ b)、\ (z、\ w))$是 $\delta_{\mathsf{B}\times\mathsf{C}}$的一个元素。对于 $\mathsf{A}=(\mathsf{B}\Rightarrow\mathsf{C})$的情形，若 $(f、\ d、\ g)\in R_{\mathsf{B}\Rightarrow\mathsf{C}}$，则对任意 $(x、\ a、\ y)\in R_{\mathsf{B}}=\delta_{\mathsf{B}}$，我们有 $(fx、\ d(x、\ a)、\ gy)\in R_{\mathsf{C}}=\delta_{\mathsf{C}}$以及 $(fx、\ d(x、\ a)、\ fy)\in R_{\mathsf{C}}=\delta_{\mathsf{C}}$。由于 f和 g均为 Λ_{Real}-可定义的，我们得到$(f、\ d、\ g)\in\delta_{\mathsf{B}\Rightarrow\mathsf{C}}$。□

接下来，我们通过证明 $\varrho\not\subseteq\delta$，说明 δ 不是最大微分前逻辑关系。$\varrho\not\subseteq\delta$ 的见证存在于 $((\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}$ 中。作为准备，我们考察类型 $(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}$ 上的 ρ。我们定义函数 O，Z：$(\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 如下：

$$O(f)=0,\qquad Z(f)=f(0).$$

O 和 Z 都是 Λ_{Real}-可定义的。在下面的引理中，为简洁起见，我们将 $\delta_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}(O,\ Z)$ 简记为 $D\hat{}$。

引理 5.10。对于任意 F：$(\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，若

$$(O,D,F)\in\rho_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}},$$

则 $F=O$。

Proof. 与引理 4.4 的证明类似，我们可以证明下列等式：

$$D(f,d)=\prod_{(f,d,g)\in\delta_{\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}}}|O(f)-Z(g)|=\prod_{(f,d,g)\in\delta_{\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}}}|g(0)|.$$

假设 $(O, D, F) \in \rho_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}$，我们可以推得，对于任意函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，都有$F(f)=0$。我们定义一个函数 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义如下：

$$g(x) = 2x.$$

Then，由于 g不是 Λ_{Real}-可定义的，并且 $(g,\ \hat{}\rho_{\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}}(g,\ f),\ f) \in \rho_{\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}}$，我们得到

$$(0, 0, F(f)) = (O(g), D(g, \hat{\rho}_{\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real}}(g, f)), F(f)) \in \rho_{\mathsf{Real}}.$$

因此，$F(f)=0$。 □

命题 5.11. 设 $k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是由 $k(x)=1$给出的常函数，并且我们定义$J\colon ((\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R})\Rightarrow\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 为 $J(F)=F(k)$。于是，我们有

$$(J, \sigma_J, J) \notin \delta_{((\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}.$$

证明。 我们假设 $(J,\ \sigma_J,\ J) \in \delta_{((\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}$并推出矛盾。由引理 4.4 可得

$$\sigma_J(O, D) = \bigsqcap_{(O,D,F)\in\rho_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}} |JO - JF| = |JO - JO| = 0$$

其中中间的等式由引理 5.10 得出。由于 $(O,\ D,\ Z) \in \delta_{(\mathsf{Real}\Rightarrow\mathsf{Real})\Rightarrow\mathsf{Real}}$，我们得到

$$(0, 0, 1) = (JO, \sigma_J(O, D), JZ) \in \delta_{\mathsf{Real}},$$

一个矛盾。 □

根据命题 5.9 和命题 5.11，我们看到 δ 是一个极大微分前逻辑关系，但不是 $\mathfrak{R}$ 的最大微分前逻辑关系。因此，$\mathfrak{R}$中不存在最大元。

5.6. **最大微分预逻辑关系的不存在性，非正式地**。 我们说明，试图证明 δ 是最大微分前逻辑关系的尝试为何失败，并将基本性质的形式识别为障碍。假定 $\varrho_{\mathsf{A}} \subseteq \delta_{\mathsf{A}}$，我们试图证明：对任意 $([\![\mathsf{t}]\!], d, [\![\mathsf{t}]\!]) \in \varrho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$，我们有 $([\![\mathsf{t}]\!], d, [\![\mathsf{t}]\!]) \in \delta_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$。为此，我们必须证明：对任意 $([\![\mathsf{p}]\!], a, [\![\mathsf{q}]\!]) \in \delta_{\mathsf{A}}$，我们有

$$([\![\mathsf{t\ p}]\!], d([\![\mathsf{p}]\!], a), [\![\mathsf{t\ q}]\!]) \in \delta_{\mathsf{Real}}. \tag{5.1}$$

然而，假设 $\varrho_{\mathsf{A}} \subseteq \delta_{\mathsf{A}}$和 $([\![\mathsf{t}]\!],\ d,\ [\![\mathsf{t}]\!]) \in \varrho_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}}$不足以推出断言 (5.1)，因为 $([\![\mathsf{p}]\!],\ a,\ [\![\mathsf{q}]\!]) \in \delta_{\mathsf{A}}$不一定是 ϱ_{A}的元素。因此，我们必须借助基本性质。根据基本性质，我们有

$$([\![\mathsf{t}]\!], \{\mathsf{t}\}, [\![\mathsf{t}]\!]) \in \delta_{\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{Real}},$$

由此得到

$$([\![\mathsf{t\ p}]\!], \{\mathsf{t}\}([\![\mathsf{p}]\!], a), [\![\mathsf{t\ q}]\!]) \in \delta_{\mathsf{Real}}.$$

这一结果已接近我们的目标：如果 $\{\mathsf{t}\} = \sigma_{[\![\mathsf{t}]\!]}$，那么由于 $d \sqsubseteq \sigma_{[\![\mathsf{t}]\!]} = \{\mathsf{t}\}$，我们可以推导出断言（5.1）。然而，这个等式并不一定成立。这构成了该证明的障碍：基本性质只保证可以构造一个下界$\{\mathsf{t}\} \sqsubseteq \sigma_{[\![\mathsf{t}]\!]}$。事实上，由命题 5.11 可知，我们有 $\{\mathsf{t}\} \sqsubsetneq \sigma_{[\![\mathsf{t}]\!]}$ 其中

$$\mathsf{t} = \lambda \mathsf{f} : (\mathsf{Real} \Rightarrow \mathsf{Real}) \Rightarrow \mathsf{Real}.\, \mathsf{f}\, (\lambda \mathsf{x} : \mathsf{Real}.\, \underline{1}).$$

5.7. 上下文度量? 众所周知，对于给定语言的不同程序等价关系可以进行比较：当一个等价关系所识别的程序比另一个更多时，前者就比后者更粗，也就是说，它识别了更多的程序。在这种排序下，程序等价关系确实构成一个完备格，其中最粗的程序等价关系是上下文等价，而最细的则源自句法等式理论。前者赋予程序等价关系以计算意义，后者则是程序等价关系的有限推理原则。此外，我们还可以从指称语义中推导出程序等价关系；这些等价关系介于上下文等价和句法等式理论之间。这些程序等价关系使我们能够证明上下文等价，并推翻句法等式。

在这里，我们考察偏序集 $\mathfrak{R}$，以探讨类似的情形。正如我们在第 5.4 节中所观察到的，最小微分前逻辑关系是程序等价关系格中句法等式理论的定量对应物。然而，如第 5.5 节所示，一般来说并不存在最大微分前逻辑关系。这表明，自然的“上下文程序度量”并不存在，因为这种度量应当是最大微分前逻辑关系，正如上下文等价是最大的程序等价关系一样。

我们如何弥合程序等价关系与微分前逻辑关系之间的差距？定义“上下文程序度量”面临的主要技术障碍在于如何测量程序之间的距离。由于程序间的距离描述了输出对输入的依赖关系，因此，在测量程序间的距离时，我们应当考察输出间的距离与上下文间的距离之间的关系。因此，我们应当先定义上下文间距离的概念再定义上下文度量。然而，定义上下文间的距离需要对上下文所包含的项赋予度量，这就导致了循环论证。

6. Related Work

针对简单类型语言的微分逻辑关系最初由 [DLGY19], 提出，随后扩展到带单子的语言 [DLG22], ，并与增量计算建立了联系[DLG21]。此外， [DG24]提出了一个统一的基于操作的逻辑关系框架，其中涵盖了微分逻辑关系。与度量空间和偏度量空间的联系已在 [GP21, Pis21], 中得到探讨：一方面，这些工作提供了一系列负面结果，为本文的研究提供了动机；另一方面，它们基于一种不同的关系构造，建立了一类度量模型和偏度量模型。

关于在线性或分级 λ 演算中，以度量空间范畴和非扩张函数范畴进行解释的文献相当丰富 [RP10, GHH+13, AdAGH+17, Gav18, DLHP23, SB26]。一种相关方法是定量代数理论 [MPP16],，其旨在通过等式呈示刻画代数上的度量。这些理论已扩展到量化值度量 [DN23], 也扩展到简单类型（即非分级）语言 [DLHLP22], ；不过在后一种情况下，非扩张性条件使得构造有趣的代数颇具挑战性。

关于偏度量空间的文献同样浩如烟海。Matthews[BKMP09], 提出了偏度量空间，人们主要研究其在域理论度量化中的应用 [BS97, Sch03, Smy06] ，近来还研究了其在 λ-理论中的应用 [MP25]。 [HS18]通过对角线量化范畴引入了偏度量的一种优雅的范畴描述对角线。由于这一构造

显然与此处讨论的拟自反性和左强传递性概念相关，因此，探寻此处引入的拟拟度量的类似范畴描述将很有意义。

7. Conclusion

本文探讨了微分逻辑关系所产生的程序距离概念与通过拟拟度量空间定义的程序距离概念之间的联系。我们在第3节和第4节中的结果，为文献中的微分逻辑关系与量化幺半格值度量的各种表述搭建了概念桥梁。借助这座桥梁，我们可以利用量化值关系这一广阔研究领域中的方法和成果 [HST14, Stu14] ，研究高阶编程语言中的程序距离。例如，一个自然的研究方向是通过逻辑关系刻画极限，以及更一般地刻画拓扑性质，近期的一项工作[BCDLG22], 已提出这一方向，不过其采用的是定性框架。与此同时，正如第5节所述，我们基于拟拟度量空间的方法引出了关于如何定义 λ 演算上数学上合理的“度量”类的自然问题。也就是说，λ 演算上是否存在一类具有计算意义的“度量”，其中包含最大元和最小元？我们在第5.6节中的论证指出，当前形式的基本引理过于薄弱。事实上，基本引理（定理4.8）仅给出了将导数构造为自距离近似值的方法，而我们尚未对导数作出数学刻画。

这项工作还有若干进一步的方向。尽管我们在此聚焦于非对称微分（预）逻辑关系，理解严格对称情形的度量结构（如 [DLGY19], 中所述）同样会很有意思。请注意，这将要求放弃拟自反性，参见注记2.1。最后，尽管本文仅考虑了简单类型，将我们基于拟拟度量空间的工作加以扩展，以涵盖其他构造（例如[DLG22]中的单子类型）也会很有意思。因此，探索由拟度量、拟拟度量、强拟拟度量与偏拟度量所产生的方法在研究带有效应（例如概率选择）的语言中的应用，是自然的。

References

[AdAGH+17] Arthur Azevedo de Amorim、Marco Gaboardi、Justin Hsu、Shin-ya Katsumata 和 Ikram Cherigui。度量保持的语义说明。载于 *Proc. of POPL 2017*，第 545–556 页。ACM，2017 年。doi:10.1145/3009837.3009890。[APETPJO19] Mario Alvarez-Picallo、Alex Eyers-Taylor、Michael Peyton Jones 和 C.-H. Luke Ong。修复增量计算。载于 Lu´ıs Caires（编），*Proc. of ESOP 2019*，第 525–552 页。Springer，2019 年。[BCDLG22] Gilles Barthe、Rapha¨elle Crubill´e、Ugo Dal Lago 和 Francesco Gavazzo。论 Feller连续性与完全抽象。 *Proc. ACM Program. Lang.*，6(ICFP)，2022 年 8 月。doi:10.1145/ 3547651。[BKMP09] Michael Bukatin、Ralph Kopperman、Steve Matthews 和 Homeira Pajoohesh。偏度量空间。 *American Mathematical Monthly*，116:708–718，2009 年 10 月。doi:10.4169/193009709X460831。[BS97] Michael A. Bukatin 和 Joshua S. Scott。通过 Scott域计算程序之间距离的初步探索。载于 Sergei Adian 和 Anil Nerode（编），*Proc. of LFCS 1997*，第 33–43 页。Springer，1997 年。doi:10.1007/3-540-63045-7_4。

[CGRO14] Yufei Cai、Paolo G. Giarrusso、Tillmann Rendel 和 Klaus Ostermann。高阶语言的变化理论：通过静态微分对 λ -演算进行增量化。载于 *Proc. of PLDI 2014*，第 145–155 页，2014 年。doi:10.1145/2594291.2594304。ACM，。[DAB09] Derek Dreyer、Amal Ahmed 和 Lars Birkedal。逻辑步索引逻辑关系。载于 *Proc. of LICS 2009*，第 71–80 页。IEEE，2009 年。doi:10.1109/LICS.2009.34。[DG24] Francesco Dagnino 和 Francesco Gavazzo。操作逻辑关系的纤维化叙事：纯效应与微分。*Logical Methods in Computer Science*，20(2)，2024 年 4 月。doi:10.46298/lmcs-20(2:1)2024。[DLG21] Ugo Dal Lago 和 Francesco Gavazzo。微分逻辑关系，第二部分：增量与导数。*Theoretical Computer Science*，895:34–47，2021 年。[DLG22] Ugo Dal Lago 和 Francesco Gavazzo。效应程序距离化。*Proc. ACM Program. Lang.*，6（POPL），1 月。doi:10.1145/3498680。[DLGY19] Ugo Dal Lago、Francesco Gavazzo 和 Akira Yoshimizu。微分逻辑关系，第一部分：简单类型情形。载于 *Proc. of ICALP 2019*，第 132 卷，*LIPIcs*，第 111:1–111:14 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019 年。doi:10.4230/LIPICS.ICALP.2019.111。[DLHLP22] Ugo Dal Lago、Furio Honsell、Marina Lenisa 和 Paolo Pistone。论定量代数高阶理论。载于 *Proc. of FSCD 2022*，第 228 卷，*LIPIcs*，第 4:1–4:18 页，德国 Dagstuhl，2022 年。doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2022.4。[DLHP23] Ugo Dal Lago、Naohiko Hoshino 和 Paolo Pistone。论程序度量格。载于 Marco Gaboardi 和 Femke van Raamsdonk（编），*8th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2023)*，260 *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*，第 20:1–20:19 卷，第 2023 页，德国 Dagstuhl，。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik。URL：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSCD.2023.20，doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2023.20。[DN23] Fredrik Dahlqvist 和 Renato Neves。分级 lambda 演算的完备 v-等式系统。载于 Marie Kerjean 和 Paul Blain Levy（编），*Proc. of MFPS XXXIX*，第 3 卷，*EPTICS*，2023 年。doi:10.46298/ENTICS.12299。[Gav18] Francesco Gavazzo。高阶效应程序的定量行为推理：应用距离。载于 *Proc. of LICS 2018*，第 452–461 页。ACM，2018 年。doi:10.1145/3209108.3209149。[GHH+13] Marco Gaboardi、Andreas Haeberlen、Justin Hsu、Arjun Narayan 和 Benjamin C. Pierce。差分隐私的线性依赖类型。*SIGPLAN Not.*，48(1):357–370，2013 年 1 月。doi:10.1145/2480359.2429113。[GL13] Jean Goubault-Larrecq。*Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology*，2013 年。New Mathematical Monographs。剑桥大学出版社，。[GLLN02] Jean Goubault-Larrecq、Slawomir Lasota 和 David Nowak。单子类型的逻辑关系。载于 *Proc. of CSL 2002*，第 553–568 页。Springer，2002 年。[GLT89] Jean-Yves Girard、Yves Lafont 和 Paul Taylor。*Proofs and Types*，*Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science* 7，第 1989 卷，。剑桥大学出版社，。[GP21] Guillaume Geoffroy 和 Paolo Pistone。高阶类型与近似程序变换的偏度量语义。载于 *Proc. of CSL 2021*，第 183 卷，*LIPIcs*，第 35:1–35:18 页，2021 年。doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2021.23。[HRR14] Claudio Hermida、Uday S. Reddy 和 Edmund P. Robinson。逻辑关系与参数性——面向范畴论与程序设计语言的 Reynolds纲领。载于 *Proc. of WACT 2013*，*ENTCS* 303，第 149–180 页，2014 年。Elsevier，。[HS02] Furio Honsell 和 Donald Sannella。预逻辑关系。*Information and Computation* 178(1)，23–43，2002，(2):–。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890540102931159，doi:10.1006/inco.2002.3115。[HS18] Dirk Hofmann 和 Isar Stubbe。从充实得到拓扑：偏度量的特殊情形。*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique*，LIX，4:307–353，2018 年。[HST14] Dirk Hofmann，Gavin J Seal 和 W Tholen。*Monoidal Topology: a Categorical Approach to Order, Metric and Topology*。剑桥大学出版社，纽约，。[KPS06] H.-P.A. K¨unzi、H. Pajoohesh 和 M.P. Schellekens。偏拟度量。*Theoretical Computer Science* 365(3)，237–246，2006，(1):–。doi:10.1016/j.tcs.2006.07.050。

[Mit16] Sparsh Mittal。近似计算技术综述。 *ACM Comput. Surv.*，48 4 2016 10 1145 2893356 ( )，2016 年 3 月。doi: . / . [MP25] Valentin Maestracci 和 Paolo Pistone。λ演算是可量化的。载于 *Proc. of* ，第 卷，页码：–: 。Schloss *CSL 2025* 326 *LIPIcs* 34 1 34 23 Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fur Informatik，2025 年。doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2025.34。[MPP16] Radu Mardare、Prakash Panangaden 和 Gordon Plotkin。定量代数推理。载于 *Proc. of LICS 2016*。IEEE Computer Society，2016 年。[PA93] Gordon Plotkin 和 Martin Abadi。参数多态性逻辑。载于 *Proc. of TLCA* ，第 卷，页码 –。Springer，。[*1993* 664 *LNCS* 361 375 1993 Pis21] Paolo Pistone。简单类型λ演算的广义度量空间。载于 *Proc.* ，页码 –。IEEE，。doi: . /LICS . . . *of LICS 2021* 1 14 2021 10 1109 52264 2021 9470696 [Plo77] Gordon Plotkin。将 LCF 视为一种编程语言。 *Theoretical Computer Science*，5 3 223 10 1016 0304 3975 77 90044 5 ( ): –255，1977 年。doi: . / - ( ) -。[Rey83] John C. Reynolds。类型、抽象与参数多态性。载于 R.E.A. Mason （编），*Information Processing '83*，页码 513–523。North-Holland，1983 年。[RP10] Jason Reed 和 Benjamin C. Pierce。距离使类型更强。 *Proc. of ICFP* ，页码 –。[SB26] Victor *2010* 157 168, 2010 Sannier 和 Patrick Baillot。用于局部敏感性分析的依赖共效应。 *Proc.* ，（POPL），1 月。doi: . / . [Sch *ACM Program. Lang.* 10 2026 10 1145 3776670 03] Michel P. Schellekens。部分可度量化的刻画：域是可量化的。 *Theoretical Computer Science*，305(1-3):409–432，2003 年。doi:10.1016/S0304-3975(02) 00705-3。[SKS07] Davide Sangiorgi、Naoki Kobayashi 和 Eijiro Sumii。逻辑双模拟与函数式语言。载于 Farhad Arbab 和 Marjan Sirjani（编）， *Proc. of FSEN 2007*，页码 364–379。Springer，2007 年。[Smy06] Michael B. Smyth。构造性极大点空间与部分可度量化。 *Ann.* ，（ -）：–。doi: . /j.apal. . . . [*Pure Appl. Log.* 137 1 3 360 379, 2006 10 1016 2005 05 032 Stu14] Isar Stubbe。量子格富集范畴导论。 *Fuzzy Sets and Systems*，256 95 10 1016 2013 08 009：–116，2014 年。doi: . / j.fss. . . .