arXiv:2603.01318v1 [math.CO] 1 Mar 2026

交错符号矩阵中矩与累积量的分析

Jean-Christophe Pain*

[1]法国原子能和替代能源委员会，DAM，DIF，F-91297 阿尔帕容，法国[2]巴黎萨克雷大学，法国原子能和替代能源委员会，极端条件物质实验室，F-91680布吕耶尔勒沙泰勒，法国

摘要

在本工作中，我们研究离散可观测量

$$E_k = \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k A_{i,j}$$

与 $n \times n$ 交错符号矩阵 $A = (A_{i,j})$ 相关联。本工作利用伯努利多项式、指数生成函数、在与黎曼ζ函数相联系的 $1/n$ 中的展开，以及通过可积核方法得到的直至四阶的累积量，建立期望值的精确公式。文中提供了全部中间计算、展开和教学细节，以阐明交错符号矩阵中组合和、解析展开与可积结构之间的相互作用。

1 引言

交替符号矩阵（ASM）是 $n \times n$ 矩阵 $A = (A_{i,\ j})$ ，其元素属于 $\{-1, 0, 1\}$，并满足两个关键性质：每一行和每一列的元素之和均为 1，且每一行和每一列中的非零元素符号交替。交替符号矩阵在组合学和统计力学中占据核心地位，尤其是在带域壁边界条件（DWBC）的六顶点模型 [7] 中。交替符号矩阵计数背后的组合技巧，与 Aval 的 habilitation 研究中发展出的结构方法密切相关 [1]（另见其中的参考文献）。交替符号矩阵的研究有着丰富的组合学历史。20世纪80年代，Mills、Robbins 和 Rumsey 首次对交替符号矩阵进行了系统研究，并提出了若干关于其计数及精细统计量的著名猜想，例如第一行中 1 的位置 [5]。交替符号矩阵的总数记为 A_n，人们猜想其满足

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}.$$

*jean-christophe.pain@cea.fr

这一猜想称为 ASM 定理，Zeilberger 首先在 1996 [6], 中给出了证明，从而首次完整且严格地验证了计数公式。此后不久，Kuperberg [4]利用带域壁边界条件的六顶点模型给出了另一种优雅的证明，将交替符号矩阵计数与可积系统联系起来。这些结果为研究交替符号矩阵中的离散可观测量奠定了基础性的组合框架，例如本文分析的矩和累积量。形如

$$E_k = \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k A_{i,j}$$

在组合与统计力学的语境中自然出现，尤其是在具有域壁边界条件的六顶点模型中。

本工作旨在利用伯努利多项式精确计算 $\mathbb{E}[E_k]$，并构造指数生成函数、提取全部矩。文中对 $1/n$进行了含有显式黎曼ζ函数贡献的详细渐近展开，并利用可积核技术计算了直至四阶的累积量。针对 k 较小取值的逐步推导阐释了这些方法，而对较小 n的数值比较则凸显了向渐近行为的收敛。

本文结构如下。第2节利用伯努利多项式给出 $\mathbb{E}[E_k]$ 的精确公式，第3节引入 E_k的指数生成函数。第 4 节针对较大的 n建立渐近展开，第5节引入 E_k的核表述，第6节给出该可观测量从二阶到四阶的累积量。最后，第7节讨论对称性约化以及奇数阶矩的消失。

2 E_k的精确期望

我们回顾定义

$$E_k = \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k A_{i,j}.$$

在计算期望值之前，我们引入平均密度

$$\rho_n(i,j) := \mathbb{E}[A_{i,j}],$$

因此，在不作任何假设的情况下，

$$\mathbb{E}[E_k] = \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k \rho_n(i,j).$$

由于交替符号矩阵的每一行和每一列之和均为 1，平均矩阵 ρ_n 是双随机的：

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_n(i,j) = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \rho_n(i,j) = 1.$$

$\rho_n(i,\ j)$ 的精确空间依赖关系极为复杂，并与极地曲线现象有关。均匀密度近似是一种一阶平均场模型；

偏离这种近似的情况会出现在北极边界附近。六顶点模型在组合点处的某些改写形式，对于特定的关联函数可得出行列式表示。特别是， E_k 的累积量的行列式公式直接源自具有域壁边界条件的六顶点模型的 Izergin–Korepin 行列式公式 [3], ，该公式通过可积核给出了关联函数的精确表示。现在，我们给出在简化的均匀密度假设下得到的显式公式 $\rho_n(i,\ j) = 1/n$。

定理 2.1 （均匀密度假设下的期望）。 若 $\rho_n(i,j) = 1/n$，则

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-r}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^{r}\right),$$

或者等价地

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{B_{k-r+1}(n+1)-B_{k-r+1}}{k-r+1}\frac{B_{r+1}(n+1)-B_{r+1}}{r+1},$$

其中 B_p 表示伯努利数， $B_p(x)$ 为伯努利多项式。

证明。 从定义出发，

$$E_k = \sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^k A_{i,j},$$

我们利用二项式定理展开 $(i-j)^k$:

$$(i-j)^k = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r} i^{k-r}j^r.$$

在交替符号矩阵的均匀系综上取期望，其中每一行/列出现的概率相等，得到

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-r}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^{r}\right).$$

接下来，我们使用 Faulhaber 公式将幂和表示为伯努利多项式，从而得到

$$\sum_{m=1}^{n} m^p = \frac{B_{p+1}(n+1)-B_{p+1}}{p+1}.$$

将此表达式代入前一个公式，即可得到用伯努利多项式表示的期望的显式形式:

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{B_{k-r+1}(n+1)-B_{k-r+1}}{k-r+1}\frac{B_{r+1}(n+1)-B_{r+1}}{r+1},$$

如所声称。

□

下面我们通过逐步计算推导出 E_2 和 E_4 的表达式。

定理 2.2 （ E_2 和 E_4的精确期望）。 对于一个 $n \times n$ 交替符号矩阵， E_2和 E_4 的期望值可显式表示为

$$\mathbb{E}[E_2] = \frac{n^2-1}{3}, \qquad \mathbb{E}[E_4] = \frac{(3n^4-10n^2+7)}{15}.$$

证明。 我们从 E_2开始。展开平方后，

$$(i-j)^2 = i^2 - 2ij + j^2,$$

我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2 = \sum_{i,j} i^2 - 2\sum_{i,j} ij + \sum_{i,j} j^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot n - 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

利用以下求和式:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2 = 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot n - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^3-n}{3}.$$

除以 n 以计算交替符号矩阵上的期望值，可得

$$\mathbb{E}[E_2] = \frac{n^2-1}{3}.$$

接下来，对于 E_4，我们有

$$(i-j)^4 = i^4 - 4i^3j + 6i^2j^2 - 4ij^3 + j^4,$$

从而得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^4 = \sum_{i,j} i^4 - 4\sum_{i,j} i^3j + 6\sum_{i,j} i^2j^2 - 4\sum_{i,j} ij^3 + \sum_{i,j} j^4.$$

注意到 i 和 j 的对称性，并将求和式因式分解:

$$\sum_{i,j} i^4 = n\sum_{i=1}^{n} i^4, \quad \sum_{i,j} i^3j = \left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right), \quad \sum_{i,j} i^2j^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2,$$

我们得到

$$\sum_{i,j}(i-j)^4 = 2\sum_{i=1}^{n} i^4 - 8\left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 6\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2.$$

使用幂和的标准公式:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

经过直接计算可得

$$\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^4 = \frac{n(3n^4-10n^2+7)}{15}.$$

除以 n 以求得期望，得到

$$\mathbb{E}[E_4] = \frac{(3n^4-10n^2+7)}{15},$$

如所声称。

□

3 指数生成函数

定理 3.1 (E_k的指数生成函数**)**。 令 $E_k(A)$ 表示一个 $n \times n$ 交替符号矩阵的 k 阶矩观测量，并定义指数生成函数

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E_k(A) = \sum_{i,j=1}^{n} e^{t(i-j)} A_{i,j}.$$

那么，其期望恰好由下式给出

$$\mathbb{E}[F(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} e^{t(i-j)} = \frac{1}{n} \frac{(e^t - e^{(n+1)t})(e^{-t} - e^{-(n+1)t})}{(1-e^t)(1-e^{-t})} = \frac{1}{n} \frac{\sinh^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

将右侧按 t 的幂展开，即可系统地生成所有精确期望$\mathbb{E}[E_k]$。

证明。 根据定义，生成函数为

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k A_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (i-j)^k A_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} e^{t(i-j)} A_{i,j}.$$

取期望，得到

$$\mathbb{E}[F(t)] = \sum_{i,j=1}^{n} e^{t(i-j)} \rho_n(i,j).$$

在均匀密度假设 $\rho_n(i,\ j) = 1/n$下，这可简化为

$$\mathbb{E}[F(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} e^{t(i-j)}.$$

由等比求和公式可得

$$\sum_{i=1}^{n} e^{ti} = \frac{e^t - e^{(n+1)t}}{1 - e^t}, \qquad \sum_{j=1}^{n} e^{-tj} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}},$$

将这两个和相乘，得到

$$\mathbb{E}[F(t)] = \frac{1}{n} \frac{(e^t - e^{(n+1)t})(e^{-t} - e^{-(n+1)t})}{(1 - e^t)(1 - e^{-t})}.$$

可以用双曲三角函数表示 $\mathbb{E}[F(t)]$ 。将两个因子中的 e^t 和 e^{-t} 因式分解

$$(e^t - e^{(n+1)t}) = e^t(1 - e^{nt}),$$
$$(e^{-t} - e^{-(n+1)t}) = e^{-t}(1 - e^{-nt}),$$

分子变为

$$(e^t - e^{(n+1)t})(e^{-t} - e^{-(n+1)t}) = (1 - e^{nt})(1 - e^{-nt}).$$

现在，用双曲正弦对每一项进行因式分解:

$$1 - e^{nt} = e^{nt/2}(e^{-nt/2} - e^{nt/2}) = -2e^{nt/2} \sinh\left(\frac{nt}{2}\right),$$
$$1 - e^{-nt} = 2e^{-nt/2} \sinh\left(\frac{nt}{2}\right),$$

给出

$$(1 - e^{nt})(1 - e^{-nt}) = -4 \sinh^2\left(\frac{nt}{2}\right).$$

For 分母，同理可得（在前一个表达式中令 $n = 1$ ） :

$$(1 - e^t)(1 - e^{-t}) = -(e^t + e^{-t} - 2) = -4 \sinh^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

将分子和分母合并，得到

$$\mathbb{E}[F(t)] = \frac{1}{n} \frac{\sinh^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

最后，按 t 的幂展开，得到

$$\mathbb{E}[F(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[E_k],$$

因此，所有期望值 $\mathbb{E}[E_k]$ 都可以由该公式系统地生成。

□

4 大 n 的渐近展开

定理 4.1。 设 E_k 为 $n \times n$ *ASM* 中的第 k 阶矩观测量。那么，当 n较大时，其期望具有如下形式的渐近展开：

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{2}{(k+1)(k+2)}\, n^{k+1} + \sum_{r \geq 1} P_{k,r}\, n^{k+1-2r},$$

其中，系数 $P_{k,\,r}$ 可用伯努利数显式表示，等价地也可用黎曼ζ函数值表示：

$$P_{k,r} = \frac{4(-1)^k k!}{(2\pi)^{2r}} S(2r-1, k)\, \zeta(2r),$$

其中， $S(m, k)$ 为第二类斯特林数，即将含有 m 个元素的集合划分为 k 个非空子集的方法数。

证明。 从精确表达式出发

$$\mathbb{E}[E_k] = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-r} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j^r \right),$$

我们使用欧拉–麦克劳林公式展开每个幂和：

$$\sum_{m=1}^{n} m^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{2s}}{(2s)!} (p)_{2s-1}\, n^{p-2s+1},$$

其中 $(p)_{2s-1}$ 是下降阶乘， B_{2s} 是伯努利数。将这些展开式代入 $\mathbb{E}[E_k]$ 的二项式和，并收集 n 的各次幂，首项来自各个和的首项之积：

$$\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \frac{n^{k-r+1}}{k-r+1} \frac{n^{r+1}}{r+1} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}\, n^{k+1}.$$

高阶修正来自偶数阶伯努利数的贡献。利用恒等式

$$B_{2s} = (-1)^{s-1} \frac{2(2s)!}{(2\pi)^{2s}} \zeta(2s),$$

每个 n^{k+1-2r} 阶项都可以表示为

$$P_{k,r}\, n^{k+1-2r}, \quad P_{k,r} = \frac{4(-1)^k k!}{(2\pi)^{2r}} S(2r-1,k)\zeta(2r),$$

其中， ζ 是通常所说的 ζ 函数，而第二类斯特林数 $S(2r-1,k)$ 在对幂和应用欧拉–麦克劳林公式后，对 $(i-j)^k$ 的二项式展开中，将 i 和 j 的幂的贡献相加时自然出现。由此便得到所述的完整渐近展开。

□

备注 第 4.2. 第二类斯特林数满足递推关系

$S(m,k) = k\,S(m-1,k)+S(m-1,k-1), \quad S(0,0) = 1,\ S(m,0) = 0\,(m>0)\ \ S(0,k) = 0\,(k>0).$

例如， $S(3,2) = 3$，因为集合 $\{1,2,3\}$ 可以用三种不同的方式拆分为两个非空子集。

5 可观测量的核表述

设 $A = (A_{i,\,j})_{1\le i,\,j\le n}$ 是一个交替符号矩阵（ASM）。在组合点处对六顶点模型进行某些改写后，可得到特定关联函数的行列式表示，这启发了下文基于核的累积量表达式。对于整数 $k \ge 0$，定义反对称核（见附录）：

$$f_k(i,j) := (i-j)^k.$$

这些累积量的行列式表达式直接源自带有域壁边界条件 [3]，的六顶点模型的 Izergin–Korepin 行列式公式；该公式用可积核精确表示关联函数。

定义 5.1。 交替符号矩阵 A 的第 k 个可观测量定义为

$$E_k(A) := \sum_{i,j=1}^{n} f_k(i,j)\, A_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^k A_{i,j}.$$

由于 A 在 $\{-1,0,1\}$ 中具有有限支撑且元素有界，因此该和是有限的，故定义良好。当 k 为奇数时，核 f_k 是反对称的；当 k 为偶数时，则是对称的：

$$f_k(j,i) = (-1)^k f_k(i,j).$$

这种奇偶性将在期望计算中发挥关键作用。

E_k 的六阶累积量

现在，我们以可观测量 E_k 为例，说明如何计算直至四阶的累积量。累积量的行列式表达式是利用可积核结构 [3] 推导得到的。E_k 的方差为

$$\kappa_2(E_k) = \mathrm{Var}(E_k) = \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2} f_k(i_1,j_1) f_k(i_2,j_2) \det \begin{pmatrix} K(i_1,j_1;i_1,j_1) & K(i_1,j_1;i_2,j_2) \\ K(i_2,j_2;i_1,j_1) & K(i_2,j_2;i_2,j_2) \end{pmatrix},$$

其中，$f_k(i,j) = (i-j)^k$，K 是交替符号矩阵相关核。三阶累积量为

$$\kappa_3(E_k) = \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3} \prod_{\alpha=1}^{3} f_k(i_\alpha, j_\alpha) \det_{1\le\alpha,\beta\le3} K(i_\alpha,j_\alpha;i_\beta,j_\beta).$$

类似地，四阶累积量为

$$\kappa_4(E_k) = \sum_{i_1,j_1,\ldots,i_4,j_4} \prod_{\alpha=1}^{4} f_k(i_\alpha, j_\alpha) \det_{1\le\alpha,\beta\le4} K(i_\alpha,j_\alpha;i_\beta,j_\beta).$$

在大-n 极限下，可以利用核的标度极限来分析这些累积量。对于偶数 k，$\kappa_2(E_k)$非零，并给出主导的高斯涨落。高阶累积量（κ_3、κ_4）刻画非高斯修正；由于对称性，当 k 为奇数时，这些修正消失。这些公式提供了一个系统框架，可通过数值方法或利用行列式结构进行解析计算，求出任意 k 和 n对应的精确累积量。

在大-n 极限下，对于偶数 k，二阶累积量 $\kappa_2(E_k)$占主导地位，而当 $r > 2$满足 $r > 2$时，高阶累积量 $\kappa_r(E_k)$因行列式结构和核的标度性质而按 $1/n$ 的幂次受到抑制。因此，根据标准累积量判据，E_k 渐近服从高斯分布：其分布收敛于均值为 $\mathbb{E}[E_k]$ 、方差为 $\kappa_2(E_k)$的正态分布，当 $n \to \infty$时成立。

7 对称性约化与奇数 k时的消失

在结束之前，我们强调 ASM 可观测量的一项基本对称性质：由于转置下的不变性，奇数阶矩会消失。本节安排在此处，是因为它提供了一种一般性的简化，这种简化源自前几节推导的精确公式和累积量计算，而非引入新的计算技巧。令 $\mathcal{A}_n$ 表示 $n \times n$ ASM 的集合，并赋予其均匀概率测度。

定理 7.1。若 k 为奇数，则

$$\mathbb{E}[E_k] = 0.$$

证明。交替符号矩阵系综在矩阵转置下保持不变：若 $A \in \mathcal{A}_n$，则 $A^T \in \mathcal{A}_n$，且均匀测度保持不变。我们计算得

$$E_k(A^T) = \sum_{i,j} (i-j)^k A_{j,i} = \sum_{i,j} (j-i)^k A_{i,j} = (-1)^k E_k(A).$$

若 k 为奇数，我们得到

$$E_k(A^T) = -E_k(A).$$

根据相同的转置不变性论证，E_k 的所有奇数阶累积量也都为零：

$$\kappa_{2r+1}(E_k) = 0, \quad r \geq 1.$$

这是由 f_k 在转置下的反对称性以及均匀 ASM 系综的不变性直接得出的。取期望并利用转置不变性：

$$\mathbb{E}[E_k] = \mathbb{E}[E_k(A^T)] = -\mathbb{E}[E_k(A)],$$

我们得出

$$\mathbb{E}[E_k] = 0,$$

由此完成证明。

□

8 结论

我们建立了一个全面的框架，用于分析 ASM 可观测量 E_k 的矩和累积量。精确期望值用伯努利多项式表示，而指数生成函数则可系统地计算所有矩。我们推导了详细的$1/n$ 渐近展开，揭示了黎曼ζ函数的显式贡献，并计算了从二阶到四阶的累积量及其相应的渐近行为。连续极限揭示了高斯与非高斯涨落的特征：低阶累积量趋于高斯统计，而高阶累积量则捕捉了 ASM 结构所固有的微妙关联。

这些结果不仅为 ASM 中出现的组合和提供了精确的定量预测，也在离散组合结构与连续可积核之间架起了一座桥梁。这里展示的方法可直接用于研究北极边界和高度函数的涨落，并凸显了精确计数、渐近展开与统计力学之间的联系。此外，核行列式方法以及生成函数的运用，为推广到相关模型提供了自然途径，例如平面分拆、完全密堆环配置以及其他可积格点模型。

从更广泛的角度来看，我们的分析为研究复杂组合系统中的离散可观测量提供了范例：结合精确公式、生成函数和渐近分析，可以量化涨落，识别高斯与非高斯状态，并探索普适类。未来的工作可以将这些技术扩展到不同 E_k 可观测量之间的关联研究，探索其与随机矩阵系综的相互作用，或考察随机生长模型中的动力学推广。此外，由于可观测量具有反对称性，且交替符号矩阵系综在转置下保持不变，对于奇数 k，所有奇数阶累积量均为零。这确保了上述渐近展开和高斯近似与 E_k的对称性相一致。总之，本研究进一步彰显了组合学、渐近分析与可积结构之间的丰富交互，为数学和统计物理领域的进一步探索开辟了道路。

参考文献

[1]J.-C. Aval, 《围绕对称群的组合学》，研究指导资格认证，波尔多第一大学，2013年。在线可查：https://www.labri.fr/ perso/aval/HDR.pdf。 [法语][2] A. R. Its、A. G. Izergin、V. E. Korepin 和 N. A. Slavnov，量子关联函数的微分方程，《Int. J. Mod. Phys.》B4，1003–1037（1990）。[3] I. G. Korepin、N. M. Bogoliubov 和 A. G. Izergin，《量子逆散射方法与关联函数》，剑桥大学出版社（1993）。[4] G. Kuperberg，交错符号矩阵猜想的另一种证明，《Int. Math. Res. Not.》3，139–150（1996）。[5] W. H. Mills、D. P. Robbins 和 H. Rumsey Jr.，交替符号矩阵与降平面划分，《J. Combin. Theory Ser. A》34，340–359（1983）。[6] D. Zeilberger，交错符号矩阵猜想的证明，《Electron. J. Combin.》3，1–23（1996）。[7] P. Zinn-Justin，具有域壁边界条件的六顶点模型与经典正交多项式，《Phys. Rev. E》62，3411–3418（2000）。

A 附录：交错符号矩阵的可积核

交替符号矩阵（ASM）与满足域壁边界条件（DWBC）的六顶点模型构型一一对应 [3,4]。在这一对应关系下， $n\times n$ 交替符号矩阵上的均匀测度与组合点 $\Delta=1/2$处的六顶点模型相吻合。虽然该点并非标准的自由费米子点（$\Delta=0$），但模型仍然是可积的，并且其关联函数具有行列式表示。

令 $X_{i,j}$ 表示与交替符号矩阵的某个局部可观测量相关联的指示变量（例如特定顶点类型，或非相交路径表述中的一个粒子）。在满足域壁边界条件的六顶点表示中，某些局部可观测量具有行列式表示。特别地，相应路径变量或顶点变量的关联函数满足

$$\mathbb{E}[X_{i_1,j_1}\cdots X_{i_r,j_r}]=\det_{1\le\alpha,\beta\le r} K(i_\alpha,j_\alpha;i_\beta,j_\beta),$$

其中 K 是一个形式如下的可积核

$$K(i,j;i',j')=\sum_{m=0}^{n-1}\phi_m(i,j)\,\psi_m(i',j').$$

这里 $\{\phi_m\}$ 和 $\{\psi_m\}$ 是由六顶点配分函数的 Izergin–Korepin 行列式公式导出的一族双正交函数。在组合点处，该核在标度极限下具有双重围道积分表示：

$$K(i,j;i',j')=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\Gamma_1}\!\oint_{\Gamma_2}\frac{F(z,w)}{z-w}\frac{z^{i-1}}{w^{i'}}\frac{\phi(w)^n}{\phi(z)^n}\,dz\,dw,$$

其中 $\phi(z)$ 是特征势， $F(z,w)$ 是解析谱函数。这一结构是 Its–Izergin–Korepin–Slavnov 型 [2]可积核的特征。

若我们考虑如下形式的可观测量

$$E_k=\sum_{i,j} f_k(i,j)\,X_{i,j},$$

则方差（二阶累积量）由下式给出：

$$\mathrm{Var}(E_k)=\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2} f_k(i_1,j_1)f_k(i_2,j_2)\det\begin{pmatrix}K(i_1,j_1;i_1,j_1) & K(i_1,j_1;i_2,j_2)\\ K(i_2,j_2;i_1,j_1) & K(i_2,j_2;i_2,j_2)\end{pmatrix}.$$

更一般地，第 r 阶累积量如下：

$$\kappa_r(E_k)=\sum_{i_1,j_1,\dots,i_r,j_r}\prod_{\alpha=1}^{r} f_k(i_\alpha,j_\alpha)\det_{1\le\alpha,\beta\le r}K(i_\alpha,j_\alpha;i_\beta,j_\beta).$$

在大 n 情形下，在北极曲线定理所描述的液相“体相”内部， K 的积分表示与鞍点法证明了高斯行为，以及第 4 节中给出的涉及黎曼ζ函数值的显式 $1/n$ 展开。