arXiv:2603.01322v1 [math.PR] 1 Mar 2026

随机正则图上的吉布斯条件化、非典型共识与分裂吉布斯测度

I-HSUN CHEN, IVAN LEE, KAVITA RAMANAN, SARATH YASODHARAN

Abstract. 设 n 为相互独立的伯努利(p)随机变量 $X_i, i = 1, \dots, n$，表示由底层随机 κ-正则图 G_n 连接的个体意见，该图的边集为$E(G_n)$。我们证明，当以非典型经验一致性$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:ij\in E(G_n)} X_iX_j$为条件时，这些随机变量的联合分布在 $n \to \infty$时收敛到无限 κ-正则树 T^κ 上的一个伊辛测度；该测度具有特定的外场，外场仅取决于偏置参数 p，而温度则同时取决于 p 和非典型共识值。特别地，当经验一致性低于其典型值时，条件极限是 T^k上的平移不变分裂（TIS）反铁磁伊辛测度。当经验一致性高于其典型值时，若偏差为正或负，条件极限分别是 T^κ 上具有正或负边界条件的铁磁伊辛测度；而当偏差为零时，极限的性质会发生相变，具体取决于共识是否超过 $\kappa/(\kappa-1)$。更一般地，当这些随机变量在有限空间 $\mathcal{X}$上独立同分布时，我们证明，对于任意对称边势 $h\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$，以非典型广义共识$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j:ij\in E(G_n)} h(X_i, X_j)$为条件时，其极限联合分布属于 T^κ上的平移不变分裂吉布斯测度集合，且其顶点边缘分布的支撑集包含于 $\mathcal{X}$. 的一个（可能是严格）子集。证明利用了随机正则图上带独立同分布标记的分量经验测度的大偏差速率函数的一种易处理形式，以及吉布斯条件化原理，并对相关的非凸约束优化问题进行了细致分析。作为这些结果的副产品，我们得到了随机正则图上吉布斯测度最大熵原理的一个（渐近）类比。

关键词： 大偏差；随机正则图；吉布斯条件化原理；共识；条件极限；邻域与分量经验测度；伊辛测度；铁磁；反铁磁；分裂吉布斯测度；Sanov定理；最大熵原理；**MSC 2020 学科分类：** 主要分类 60F10、82B20；次要分类 60G60、82B31、05C80

1. Introduction

1.1. 研究背景与结果讨论。 在概率论的许多领域，人们常常关注如何理解随机对象在给定某个感兴趣的稀有事件条件下最可能出现的行为。至少在渐近意义下，回答这一问题的一种方法是运用大偏差理论。经典情形如下：给定一列$\{X_1, \dots, X_n\}$取值于有限集$\mathcal{X}$ 上的独立同分布随机变量，其共同分布为 ν，我们希望了解在该序列的经验均值 $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 偏离其典型值均值(ν)：$= \int_{\mathbb{R}} x\nu(dx)$的条件下，该序列会呈现怎样的行为。在这种情况下，首先可以应用 Sanov定理 [37], ，它表明经验测度序列$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}, \quad n \in \mathbb{N}$满足一个大偏差原理，该原理刻画了形如以下概率的（对数）渐近行为：其中 δ_x 是 x处的狄拉克 δ 测度

IHC、KR 和 SY 获得了美国海军研究办公室范内瓦·布什教职奖学金（N0014-21-1-2887）的资助。IHC 和 KR 还感谢美国国家科学基金会项目（DMS-2246838）的资助；IHC 感谢台湾教育部提供的 GSSA奖学金；IL 感谢布朗大学提供的 SPRINT UTRA奖项；SY 感谢总理青年研究人员研究资助（ANRF/ECRG/2024/005529/PMS）。

$\mathbb{P}(\nu_n \in C) \approx e^{-n \inf_{\nu' \in C} H_{(\nu' \| \nu)}}$，对于概率测度在 $\mathcal{X}$上的足够规则的子集 C，其“速率函数”为通常的相对熵泛函 $H(\cdot\|\nu)$。随后可以应用吉布斯条件化原理 [40, 9] （另见 [16, 第7.3]节），证明在事件 $S_n \geq c$的条件下，经验测度 ν_n 在 $n \to \infty$时收敛到约束优化问题的极小化解 ν^*：

$$\nu^* = \arg \min_{\nu' : \text{mean}(\nu') \geq c} H(\nu' \| \nu).$$

由于相对熵的凸性和约束的线性，这一优化问题尤其易于处理，并且可以显式确定 ν^*。随后还需要一个额外的测度变换论证（例如，参见 Cramér 定理 [8],[16, 第 2 节2]中大偏差下界的证明），以说明在以事件 $S_n \geq c$为条件时，随机变量 $\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$ 渐近地表现得如同服从共同分布为 ν^*的独立同分布序列。吉布斯条件化原理已有许多推广，包括早期将其推广到马尔可夫链经验测度的工作 [10, 28]。

本文考虑随机正则图上的这一经典问题的一个类似版本。固定一个整数 $\kappa \geq 2$，令 G_n 为顶点集 $V(G_n) = \{1, \ldots, n\}$上的随机 κ-正则图，也就是说，G_n 在所有具有 n 个顶点的 κ-正则图构成的集合上均匀分布。再次令 $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为一列取值于有限集 $\mathcal{X}$、分布为ν的独立同分布随机变量。还假设，对于每个 n，表示顶点标记的向量 $X^n = (X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 与图 G_n. 的边结构 $E(G_n)$ 相互独立。给定任意对称的边势函数 $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，我们研究 $c \in \mathbb{R}$ 的以下问题：

在经验 h-共识较大的事件条件下，也就是说，

$$\frac{1}{n} \sum_{u \in V(G_n)} \sum_{v \sim u} h(X_u, X_v) = \frac{1}{n} \sum_{u,v=1}^{n} 1_{\{uv \in E(G_n)\}} h(X_u, X_v) \geq c,$$

标记图（G_n，X^n）的典型结构是什么，当 $n \to \infty$时?

当然，当我们所取条件的事件是稀有事件时，这个问题最有意思；也就是说，c 大于$c_{h,\ \mathtt{ref}}$，即经验 h-共识 $\frac{1}{n} \sum_{v \in G_n} \sum_{u \sim v} h(X_u^n,\ X_v^n)$在$n \to \infty$. 时的极限。特别是，我们想了解，在以这一稀有事件为条件时，典型标记图（G_n，X^n），是否会呈现顶点标记边缘分布的异质性、相邻顶点标记之间的依赖关系、长程相关性等现象。

我们的第一个主要结果（第 2.2.3 节的定理 2.12）完整回答了上述问题，适用于具有共识函数的双自旋系统；也就是说，当 $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$, ν 是参数为 $p = \nu(\{1\}) \in (0, 1)$ 的伯努利分布，且 $h(x, y) = m(x, y) := xy \text{for} x, y \in \mathcal{X}$. 时。在这种情况下，经验一致性的典型值为 $c_{\mathtt{ref}} := c_{m,\text{ref}} = \kappa(2p-1)^2$,。先验而言，非典型共识可以通过多种方式实现，例如仅改变标记分布 ν，或在自旋之间引入某种依赖关系，或两者兼而有之。我们证明，在给定经验一致性为非典型值的条件下，(G_n, X^n) 的典型结构类似于无限 κ-正则树 T^κ 上具有特定逆温度和外场的伊辛测度。具体而言，若 $p \neq 1/2$，则在经验一致性大于 $c > c_{\mathtt{ref}}$ （分别小于 $c < c_{\mathtt{ref}}$）的条件下，(G_n, X^n) 依概率局部弱收敛到 T^κ 上的铁磁（分别为反铁磁）伊辛测度。另一方面，若 $p = 1/2$（此时 $c_{\mathtt{ref}} = 0$），且条件是共识超过某个正值 c，那么 (G_n, X^n) 的行为会发生相变。当 c 较小，也就是 $0 < c \leq c_* := \kappa/(\kappa - 1)$ 时，条件极限是 T^κ 上唯一的伊辛测度，其逆温度为 $\tanh^{-1}(c/\kappa)$，且没有外场；而当 c 大于 c_* 时，条件极限点则是 T^κ 上没有外场、具有正或负边界条件的铁磁伊辛测度。注意，$\tanh^{-1}(c_*/\kappa) = \tanh^{-1}(1/(\kappa - 1))$

对应于唯一性阈值，也就是低于该逆温度时， T^κ 上存在唯一的伊辛测度。此外，若 $p = 1/2$ 且共识小于 $c < 0$，则条件极限始终是没有外场的反铁磁吉布斯测度。值得注意的是，尽管当 $p = 1/2$ 时 ν 具有对称性，但与正共识的情形不同，共识为负时并不存在相变；即使相应的逆温度处于非唯一性区域，也就是 T^κ 上存在多个反铁磁伊辛测度的区域，$(G_n,\ X^n)$ 的条件分布仍总是局部收敛到唯一确定的极限（关于这一点的原因，可参见定理 2.12 之后的讨论）。

在上述所有情形中，条件极限的外场值始终为$B(p) = \log(p/(1-p))$，与 c的取值无关，；逆温度则使相应伊辛测度下的共识恰好为 c。正如注 2.13 中详细阐述的那样，伊辛测度的出现及外场的形式表明，实现非典型共识最可能的方式并非给标记分布增加偏差，而是引入相邻自旋之间的相关性。尽管降低共识最可能的方式似乎是提高相邻自旋不一致的概率（反铁磁相互作用），但这并非显而易见，因为在 T^κ 上确实也存在能诱导出低于典型水平的共识的铁磁伊辛测度（见例 F.1）。在第 2.2.4 节中，我们还将讨论何时可以根据带标记图序列（$G_n,\ X^n$）的（条件）局部极限，推导出其条件结构。

我们的下一个结果涉及一般自旋的情形（即 ν 是任意有限集 $\mathcal{X}$上的一个分布）以及一般边势 $h.$。此处的主要结果（第 2.2.3 节的定理 2.24）表明，所有条件极限点都位于 κ-正则树上的平移不变分裂（TIS）吉布斯测度的集合中（见定义 2.18）。尽管一般而言，这些极限吉布斯测度可能是退化的，即其顶点边缘分布可能支撑在 $\mathcal{X}$ 的一个真子集上（如例4.7所示），但对于 ν 为均匀分布的双自旋系统，我们证明极限点始终是非退化 TIS 吉布斯测度，也就是说，极限吉布斯测度的顶点边缘分布在 $\mathcal{X}$ 上具有满支撑（见定理 2.27）。这就留下了一个有趣的未决问题：精确刻画 ν 与 h 上的条件，使得在这些条件下可以保证得到非退化条件极限点。我们猜想，只要 ν 是任意有限集 $\mathcal{X}$ 上的均匀分布，这一点就成立（见猜想 2.28）。

我们主要结果的证明利用了文献 [34, 3] 中关于带有独立同分布的顶点标记的随机正则图的分量经验测度序列$\{U_n\}$ 的大偏差原理； U_n 的精确定义见第 2.1 节。接着，运用相应的吉布斯条件化原理 [27], ，可将条件极限点刻画为有根树上的测度（表示分量经验测度）上的约束优化问题的极小化元，其目标函数为速率函数，约束则由所关注的稀有事件决定。在分析中，利用速率函数的具体形式（见定理 3.6），我们首先将该优化问题化简为有根深度为 1 的树上的测度（对应邻域经验测度）上的约束优化问题。随后，通过部分求解后一个问题，我们进一步将其化简为命题 3.3 中关于边缘边际分布的约束极小化问题，也就是说，这是关于 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}.$ 上（对称）概率测度的问题。在整个分析过程中，我们充分利用了文献 [34, 定理 4.13] 中得到的分量经验测度速率函数的简洁形式，该形式以相对熵之和表示。

剩余的技术工作将用于分析这个受约束的边极小化问题。任何在 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 上具有满支撑的极小化元 π_* （我们称之为内部极小化子）都必须是该优化问题的拉格朗日函数的临界点。这

个拉格朗日函数（或许并不意外）与在 [14] 中为所有因子模型定义的 Bethe速率函数的负值相同；该函数在那里用于论证：当 κ 为偶数时，铁磁Potts模型在局部收敛到 T^κ 的图序列上的极限自由能密度由 Bethe预测给出。在 [14, 命题 1.7], 中，Bethe速率函数（等价地，拉格朗日函数）的临界点被明确表示为相应空腔映射（或信念传播递推）的不动点 ℓ。众所周知，这些不动点是相应 TIS吉布斯测度的边界律（参见 [41, 定理 4.1]），因此任何内部极小化子都必须是某个 TIS吉布斯测度的边边缘分布（参见引理 2.21）。结合提升引理（参见引理 3.2）——该引理通过单模扩展，以边边缘分布表示 TIS吉布斯测度——以及边极小化问题与分量极小化问题的极小化元之间的平行关系（命题 3.3 利用 [34] 中得到的分量经验测度大偏差原理速率函数的形式建立了这一关系），我们得出结论：任何边缘分布具有满支撑的分量经验测度优化问题的极小化元，都是 TIS吉布斯测度。

然而，（相当令人意外的是）这远非故事的结尾，因为边优化问题的边界极小值（即支撑集是 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 的真子集的极小化元）也发挥着重要作用。如例4.7所示，即使在 $\mathcal{X} = \{1, -1\}$ 的情况下，也存在边势 h、标记分布 ν 和约束值 c，使得相应边约束极小化问题的唯一极小化元是一个边界极小值。幸运的是，在约束值 c 满足温和条件时，我们能够证明，每个边界极小化元 π_* 都必定是退化的，即 π_* 的支撑集具有如下形式： $\mathcal{X}^{\downarrow} \times \mathcal{X}^{\downarrow}$，其中$\mathcal{X}^{\downarrow} \subsetneq \mathcal{X}$（见引理 4.11）。因此，通过进一步将极小化问题限制为 $\mathcal{X}^{\downarrow} \times \mathcal{X}^{\downarrow}$ 上的（对称）概率测度，我们可将 π_* 转变为一个修改后的边约束极小化问题的内部极小化子，其中 $\mathcal{X}$ 替换为 $\mathcal{X}^{\downarrow}$；随后，我们在这一修改后的设定中运用上述针对内部极小化子的论证，从而得出条件极限必定是（可能退化的）TIS吉布斯测度。

与上文提到的 Sanov 定理的经典情形不同，我们所处理的优化问题是非凸的，因此分析要复杂得多。尽管如此，在采用共识函数的双自旋系统这一特殊情形下，我们彻底解决了所有参数范围内的这一问题，从而得到了定理 2.12 所述的完整图景。从我们的证明可以清楚看出，在对 ν 和 h作出特定假设的情况下，将我们针对多自旋系统得到的部分结果与对相应优化问题的进一步分析相结合，还能对一般情形下的条件极限得出更多结论。但本文不再探讨这一方向。

请注意，经验 h-共识也可以写成一个泛函，它只依赖于较简单的邻域经验测度 $L_n = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} \delta_{(x_u, x_v, v\sim u)}$，，后者是 $\mathcal{X}^{1+\pi}$ 上的一个随机概率测度（甚至也可以依赖于边经验测度），而不是分量经验测度 U_n。然而，仅考虑序列 $\{L_n\}$（或边经验测度）的 大偏差原理及其相应的吉布斯条件化原理，只能提供关于邻域（或边）边缘分布最可能的条件行为的信息（例如，参见 [34, 命题 3.5] ，其中讨论了 $h(x, y) = g(y)$, 对某个 $g: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$成立的特殊情形）。这里，我们考虑针对分量经验测度序列 $\{U_n\}$ 的更复杂的吉布斯条件化原理，以便揭示 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的完整联合分布的条件行为。本文所构建的框架也有助于理解稀疏图上相互作用随机过程的大偏差性质；这一问题曾在 [33,第 5.2]节中作为一个开放问题提出。

1.2. **一种新的“最大熵”原理**。我们的结果也可以视为揭示了最大熵原理适用于随机正则图上的吉布斯测度，至少在

渐近意义上。众所周知，对于自旋取值属于有限集 $\mathcal{X}$ 的 n 粒子构型，形式为

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{Z_n} \exp\{\beta \mathcal{H}_n(\sigma)\}, \quad \sigma = (\sigma_i)_{i\in[n]} \in \mathcal{X}^n$$

是有限集 $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^n$ 上使香农熵达到最大的唯一概率测度

$$H(\mu) = -\sum_{z\in\mathcal{Z}} \mu(z) \log \mu(z), \tag{1.1}$$

并满足“能量”约束 $\sum_{z\in\mathcal{Z}} \mu(z)\mathcal{H}_n(z) = c$。经典最大熵原理中香农熵的出现，在形式上可以通过将其视为信息量的度量来论证；而将最大化熵的吉布斯测度视为“对我们所知信息偏差最小的表示”，则为此提供了一种解释。大偏差理论则为选择该测度提供了更严谨的依据（尽管仅适用于有限情形，且仅在渐近意义上）。接着应用 Sanov定理及其相关的吉布斯条件化原理可知，在能量约束（稀有事件）下，最可能的测度是使该速率函数最小化的测度，从而使熵最大化；这个测度就是吉布斯测度。关于这一对应关系的全面论述，请读者参阅 [39] 及其中的参考文献，以及 Ellis [18, 19, 20], 、Oono [31] 和 Lanford [25] 的开创性著作（再版版本 [26]）。

在当前设定下，我们类似地利用大偏差理论证明，无限正则树上的 (TIS) 吉布斯测度是另一种熵型泛函的（渐近）极大化子，即分量经验测度的大偏差速率函数的相反数（参见第 3.2 节中定义的泛函 I^κ），该泛函取代了通常的熵，同时满足以共识泛函表示的能量约束。与经典情形不同，在经典情形中，熵泛函的凹性使得极大化子是唯一的吉布斯测度；而在当前设定下，速率函数的非凸性I^κ 使新的熵泛函存在多个极大化子。特别是，这体现为定理 2.12 中的相变。

1.3. **概要**。本文其余部分安排如下。下文第 1.4 节汇总本文使用的一些常用记号。第 2 节介绍数学模型并陈述主要结果。证明见第 3 节至第 6 节。第 3 节将识别条件极限的问题化约为对带标记树上的概率测度空间中某个约束优化问题的分析。第 4 节分析这一优化问题，并证明一般自旋系统的条件极限定理。第 5 节和第 6 节包含关于双自旋系统的证明或结果。附录 A–D 收录若干技术性引理的证明，附录 E 和附录 F 则包含说明性示例。

1.4. **常用记号和术语**。 我们首先汇总全文中使用的一些标准记号和术语。给定 $x \in \mathbb{R}$，我们用 $\mathrm{sgn}(x)$ 表示符号函数，也就是说，我们将 $\mathrm{sgn}(x)$ 定义为 -1，根据 $x < 0$、 $x = 0$ 或 $x > 0$ 分别取 0 或 1。给定一个集合 $\mathcal{Z}$，对于任意函数 $f\colon \mathcal{Z}^2 \to \mathbb{R}$，将其值域定义为

$$\mathsf{Range}(f) \coloneqq \left\{ f(z, z') : z, z' \in \mathcal{Z} \right\}. \tag{1.2}$$

固定一个拓扑空间 $\mathcal{S}$ 及其子集 $A \subset \mathcal{S}$。如果存在 $\mathcal{S}$ 中的开集 $\mathcal{U}$ 使得 $\mathcal{U}_A = \mathcal{U} \cap A.$，我们称集合 $\mathcal{U}_A$ 在 A 中是相对开的。

1.4.1. 测度论记号。固定 $p \in [0,1]$，用 $\mathrm{Ber}(p)$ 表示 $\{1,-1\}$ 上的伯努利分布，其中取值 1 的概率为 p。给定一个配备其 Borel σ-代数的波兰空间 $\mathcal{Z}$，用 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 表示赋予弱收敛拓扑的 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度空间。给定 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$，用 $\mathbb{E}_\mu$ 表示关于 μ的期望。对于任意有界可测函数 $f: \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，我们记

$$\langle f, \mu \rangle := \int_{\mathcal{Z}} f(z) d\mu(z).$$

给定 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$，我们用 $\mu \ll \nu$ 表示 μ 关于 ν.绝对连续。此外，令 $H(\mu\|\nu)$ 表示 μ 关于 ν 的相对熵，定义为

$$H(\mu\|\nu) := \begin{cases} \mathbb{E}_\mu \left[\log \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right) \right] & \text{if } \mu \ll \nu, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.3}$$

当 $\mathcal{Z}$ 有限时，令 $\mathrm{Unif}(\mathcal{Z})$ 表示 $\mathcal{X}$. 上的均匀分布。我们常考虑服从某个分布 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}^2)$ 的随机变量 (X, X_1)。在这种情况下，我们将X_o 的边缘分布记为 π^o，并将给定 X_o 时 X_1 的条件分布记为 $\pi^{1|o}$.

1.4.2. 图记号：给定一个图 $G = (V, E)$，其顶点集为 $V = V(G)$，边集为$E = E(G)$，我们通常会稍微滥用记号，用 G 同时表示顶点集；其含义应可由上下文明确。令 $\mathcal{G}$ 表示图的集合。对于任意子集 $\Lambda \subseteq V$，定义其边界为

$$\partial\Lambda := \{v \in V \setminus \Lambda : \exists u \in \Lambda \text{ such that } \{u, v\} \in E\}. \tag{1.4}$$

对于任意图 $G \in \mathcal{G}$，图距离 d_G 定义如下：对于任意两个顶点 $u, v \in G$，定义

$$d_G(u,v) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : \exists v_0 = v, v_1, \ldots, v_k = u \in V \text{ such that } \{v_{i-1}, v_i\} \in E, \forall i \in [k]\}. \tag{1.5}$$

令 $\mathcal{G}_*$ 表示（无标记）有根图的集合，即带有一个称为根的指定顶点的图。$\mathcal{G}_*$ 中的元素通常记为 (G, o)；当根可由上下文明确时，也记为 G。无环有根图 (T, o) 称为树。所有（无标记）有根树的集合记为 $\mathcal{T}_*$。固定 $r \in \mathbb{N}$。对于任意有根树 $(T, o) \in \mathcal{T}_*$及任意顶点 $v \in T$，若 $d_T(v, o) = r$，则称v为深度为 r 的顶点（属于 T）。若 $\sup\{d_T(v, o) : v \in T\} = r$，则称有根树 $(T, o) \in \mathcal{T}_*$的深度为r。给定 $(T, o) \in \mathcal{T}_*$，其深度为 r 的子树 $T_r = (T, o)_r$ 定义为 (T, o) 的子图，该子图包含所有深度不超过 r 的顶点，并以 o 为根。深度小于或等于 r 的（无标记）有根树的集合记为$\mathcal{T}_{*,r}$。$\mathcal{T}_*$中的元素（1）称为“星”。给定有根树 $(T, o) \in \mathcal{T}_*$ 及任意 $v \in T \setminus \{o\}$，将其祖先 $a(v)$ 定义为满足 $d_T(u, o) = d_T(v, o) - 1$ 的顶点 $u \in N_v(T)$。注意，由于 (T, o) 是一棵有根树，$a(v)$ 的定义是唯一的。

对于任意正整数 κ，令 T^κ 表示无限无标号有根 κ 正则树，即一个无环图，其中有一个指定顶点称为根，该顶点有 κ 个邻居，而所有其他顶点都有 κ 个邻居。注意，$T^\kappa \in \mathcal{T}_*$。为保持一致，我们将集合 $\{T^\kappa\}$ 和 $\{T^\kappa_r\}$ 分别简记为 $\mathcal{T}^\kappa_*$ 和 $\mathcal{T}^\kappa_{*,r}$。

1.4.3. 标记图记号。接下来，给定一个非空有限集合 $\mathcal{X}$，令 $\mathcal{G}_*[\mathcal{X}]$ 表示顶点标记取值于 $\mathcal{X}$ 的标记有根图集合，即每个顶点都带有一个取值于 $\mathcal{X}$ 的标记的有根图集合。$\mathcal{G}_*[\mathcal{X}]$ 中的典型元素写作 (G, X)，其中$G \in \mathcal{G}_*$，且 $X = (X_v)_{v \in G}$ 表示顶点标记。我们赋予 $\mathcal{G}_*[\mathcal{X}]$ 局部拓扑，使其成为一个波兰空间（见 [1] 或 [4, 引理 3.4]）。此外，令 $\mathcal{T}_{*,1}[\mathcal{X}]$ 表示顶点标记取值于 $\mathcal{X}$ 的“标记星形树”集合，即 $\mathcal{T}_{*\text{中的无标号有根树}1}$，其中每个顶点都带有一个取值于 $\mathcal{X}$ 的标记。$\mathcal{T}_{*\text{中的}1}[\mathcal{X}]$ 典型元素写作

$(\tau,\ X)$，其中 $\tau \in \mathcal{T}_{*,\ 1}$ 且 $X = (X_v)_{v\in\tau}$ 表示顶点标记。此外，对于 $\kappa \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{T}^{\kappa}_{*,\ 1}[\mathcal{X}] \subset \mathcal{T}_{*,\ 1}[\mathcal{X}]$ 表示“标记 κ-星”的集合，即根节点度数为 κ 的标记星形树。注意，$\mathcal{T}^{\kappa}_{*,\ 1}[\mathcal{X}]$ 是一个有限集，并赋予其离散拓扑。

定义 1.1（深度-r 边缘分布）。对任意 $r \in \mathbb{N}$ 和 $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*[\mathcal{X}])$，将 ρ 的深度-r 边缘分布 $\rho_r \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_{*,r}[\mathcal{X}])$ 定义为 $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X})_r$ 的分布，其中 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}) = \rho$. 注意，$\rho_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}[\mathcal{X}])$。

注释 1.2. 由于 $\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]$ 是有限集，$\mathcal{P}(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}])$ 上的弱拓扑等价于由全变差度量生成的强拓扑（例如，参见 [17, 习题 3.2.11]）。

注释 1.3. 尽管 $\mathcal{P}(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}])$ 是不带标号的标记κ-星形树上的概率测度空间，但有时将其视为带标号的带标记星形图上的概率测度集合更为方便，其中叶子的标号从 $\{1,\dots,\kappa\}$ 中均匀随机分配。在下文中，每当对一个 $\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]$ 随机元素 (τ, X), 使用顶点标号时，应理解为 (τ, X) 被视为一个带标号的带标记星形图，其标号均匀随机分配。注意，在这种情况下，叶标记 $(X_1,\dots X_\kappa)$ 是可交换的。

2. Main results: How atypical consensus occurs

全文中，我们固定一个正整数 $\kappa \geq 2$、一个有限集 $\mathcal{X}$ 和一个标记分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，不失一般性地假设对所有 $x \in \mathcal{X}$，$\nu(x) > 0$。

2.1. 随机图模型。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 G_n 为定义在 n个顶点上的随机 κ-正则图，也就是说，G_n 是从 n 个顶点上的 κ-正则图集合中均匀抽取的。令 $(G_n,\ X^n)$ 表示相应的标记图，该图由图 G_n 及其顶点上服从共同分布 ν、相互独立且同分布（i.i.d.）的标记 $X^n = (X^n_v)_{v\in G_n}$ 构成；这些标记也与 G_n相互独立。$(G_n,\ X^n)$ 的联合分布可视为先验分布，我们关注在稀有事件条件下它如何变化。令 U_n表示相应的分量经验测度：

$$U_n = U_n(G_n, X^n) := \frac{1}{n}\sum_{v\in G_n} \delta_{\mathsf{C}_v(G_n, X^n)},$$

其中，δ_z 表示位于 z 处的狄拉克测度，而 $\mathsf{C}_v(G_n,\ X^n)$表示由以 v为根的$(G_n,\ X^n)$连通分量所诱导的带标记的有根图，并将其视为 $\mathcal{G}_*[\mathcal{X}]$的一个元素。注意，$U_n$ 是一个取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*[\mathcal{X}])$的随机元素。

类似地，令 L_n 表示相应的邻域经验测度：

$$L_n = L_n(G_n, X^n) := \frac{1}{n}\sum_{v\in G_n} \delta_{cl_v(G_n, X^n)},$$

其中，$cl_v(G_n,\ X^n)$表示由$(G_n,\ X^n)$的第一邻域所诱导的、以 v为根的带标记 κ星，并将其视为$\mathcal{T}^{\kappa}_{*,\ 1}[\mathcal{X}]$ 的一个元素（即无标号的带标记 κ星，其根为 v，叶子集合等于 G_n中 v 的邻居，并带有相应的独立同分布标记）。注意，L_n 是一个取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,\ 1}[\mathcal{X}])$的随机元素，而 L_n 是 U_n 的深度 1 边缘分布，也就是说，$L_n = (U_n)_1$, ，如定义 1.1 所述。

注 2.1（典型渐近行为与真实分布）。定义 $\eta \in \mathcal{P}(\mathcal{T}^{\kappa}_{*}[\mathcal{X}])$ 为一棵无限 κ-正则树的分布，其顶点标记相互独立且共同分布为 ν。众所周知（例如，参见 [24, 定理 3.2] 或 [30, 定理 5.8]），

$$L_n \xrightarrow{p} \eta_1 \quad \text{and} \quad U_n \xrightarrow{p} \eta \quad \text{as } n\to\infty, \tag{2.1}$$

其中，$\xrightarrow{p}$ 表示依概率收敛。我们将 η 称为无限（标记）树的真实分布，将 η_1 称为（标记）根邻域的真实分布。

本文关注吉布斯条件化原理，它描述了上述标记图及其各组成部分的经验测度在以一类自然的稀有事件为条件时的渐近行为。

2.2. **双自旋系统中的条件极限与相变**。 我们的首个主要结果涉及双自旋系统中与 $\{L_n\}$相关的稀有事件条件下， $\{U_n\}$ 的渐近行为。我们固定 $\mathcal{X} := \{1, -1\}$，并令 $p \in (0,1)$满足 $\nu = \mathrm{Ber}(p)$。此外，定义共识函数

$$\mathrm{m}(x, y) := xy, \qquad x, y \in \mathcal{X}. \tag{2.2}$$

然后，经验一致性定义为 $\mathbb{E}_{L_n}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} \mathrm{m}(X_o,\ X_v)\right],$，它衡量图中相邻顶点之间的一致程度。根据注 2.1，经验一致性收敛到一个极限：

$$\mathbb{E}_{L_n}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} \mathrm{m}(X_o, X_v)\right] \xrightarrow{p} \mathbb{E}_{\eta_1}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} \mathrm{m}(X_o, X_v)\right] = \kappa(2p-1)^2 =: c_{\mathtt{ref}}. \tag{2.3}$$

我们考虑经验一致性偏离其典型值的稀有事件。具体而言，对于 $c \neq c_{\mathtt{ref}}$，我们考虑事件

$$\mathcal{E}_n(c) := \begin{cases} \left\{\mathbb{E}_{L_n}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} \mathrm{m}(X_o, X_v)\right] \geq c\right\} & \text{if } c > c_{\mathtt{ref}}, \\ \left\{\mathbb{E}_{L_n}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} \mathrm{m}(X_o, X_v)\right] \leq c\right\} & \text{if } c < c_{\mathtt{ref}}. \end{cases}$$

我们将此类事件称为非典型共识，其中 $c < c_{\mathtt{ref}}$ 指低一致性事件， $c > c_{\mathtt{ref}}$ 指高一致性事件。我们的首个结果——定理 2.12（见第 2.2.3 节）——指出，在给定非典型共识的条件下， $\{U_n\}$ 渐近地总是表现得像定义在 T^κ 上的伊辛测度，其逆温度和外场适当选取。伊辛测度的性质取决于条件是低一致性还是高一致性，也取决于原始标记分布是有偏还是无偏。此外，第 2.2.4 节描述了在给定非典型共识的条件下，标记 $\{X_i\}_{i\in[n]}$ 的联合分布最可能呈现的渐近行为。为陈述这些结果，我们先在第 2.2.1 节定义无限正则树上的伊辛测度类，并在第 2.2.2 节概述其若干相关性质。

2.2.1. 无限正则树上的伊辛测度。本节介绍作为条件极限出现的伊辛测度类。我们从正则树上的伊辛测度（等价地说，伊辛吉布斯测度）的定义开始。这些测度是正则树上的马尔可夫随机场（MRF），其规范将在下文定义。回想一下，根据（1.4）， ∂Λ表示子集Λ的边界。

定义 2.2（无限正则树上的伊辛测度）。 在 T^κ 上具有相互作用参数 $\beta \in \mathbb{R}$ 和外场 $B \in \mathbb{R}$ 的伊辛测度，简写为伊辛（T^κ， β， B）测度，是满足以下条件的概率测度 $\Phi \in \mathcal{P}\left(\{1,-1\}^{T^\kappa}\right)$：对于任意有限集 $\Lambda \subset T^\kappa$ 和 $\omega_{\Lambda^c} \in \{1,-1\}^{\Lambda^c}$，在给定 ω_{Λ^c} 的条件下， Φ 在 Λ 上的条件边缘分布 $\Phi_\Lambda(\cdot|\omega_{\Lambda^c})$ 等于

$\gamma_\Lambda(\cdot|\omega_{\partial\Lambda})$，其中核的族 γ_Λ 定义如下：对于任意 $\sigma_\Lambda \in \{1,-1\}^\Lambda$，

$$\gamma_\Lambda\left(\sigma_\Lambda|\omega_{\partial\Lambda}\right) := \frac{1}{Z_\Lambda(\beta,B,\omega)} \exp\left\{\beta \sum_{\substack{\{u,v\}\in E(T^\kappa)\\ u,v\in\Lambda}} \sigma_u\sigma_v + B\sum_{u\in\Lambda}\sigma_v + \beta \sum_{\substack{\{u,v\}\in E(T^\kappa)\\ u\in\Lambda, v\in\Lambda^c}} \sigma_u\omega_v\right\}, \quad (2.4)$$

其中，$Z_\Lambda(\beta,\ B,\ \omega)$是使 $\gamma_\Lambda(\cdot|\omega_{\partial\Lambda})$成为概率测度的归一化常数。对于固定的 $\omega_{\partial\Lambda} \in \{1,-1\}^{\partial\Lambda}$，我们将 $\mathcal{P}\left(\{1,-1\}^\Lambda\right)$ 上的测度 $\gamma_\Lambda(\cdot|\omega_{\partial\Lambda})$称为 Λ 上的有限体积伊辛测度，其相互作用参数为 β，外场为 B，边界条件为 $\omega_{\partial\Lambda}$。

注 2.3. </style}区间 $\beta > 0$ 和 $\beta < 0$分别对应于逆温度为 $|\beta|$的铁磁和反铁磁伊辛测度。

2.2.2. 无限正则树上的伊辛测度。*</style}*众所周知，对于某些参数子集（，B），在 T^κ 上存在多个伊辛测度，这些参数子集被称为共存区间。在刻画这些测度时，以下映射起着特殊作用。

定义 2.4（伊辛腔映射）。给定 $(\kappa,\beta,B) \in \{2,3,\ldots\}\times\mathbb{R}^2$，伊辛腔映射

$$\Gamma = \Gamma(\kappa,\beta,B) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

定义为

$$\Gamma(\theta) := B + (\kappa-1)\tanh^{-1}(\tanh(\beta)\tanh(\theta)). \quad (2.5)$$

注 2.5。利用 [21, 命题 12.24], ，空腔映射的每个不动点 θ Γ 都对应一个定义在 T^κ 上的伊辛 (T^κ,β,B) 测度 $\Phi = \Phi_\theta$。事实上，以此方式得到的伊辛测度称为定义在 T^κ 上的平移不变分裂（*TIS*）伊辛测度（或 [21] 中的完全齐次马尔可夫链）。我们将在第 2.3.2 节中，在更一般的情形下详细介绍后一类吉布斯测度。

下一个引理概述了伊辛腔映射在不同参数区域中不动点的众所周知的性质 Γ。随后将利用这些性质来刻画相应的伊辛测度。

引理 2.6（伊辛腔映射的已知性质）。固定 $\kappa \geq 2$ 和 $B \in \mathbb{R}$。在铁磁区域 $\beta > 0$ 中，存在一个临界阈值 $\beta_* = \beta_*(\kappa,B) > 0$，使得映射$\Gamma = \Gamma(\kappa,\beta,B)$ 有唯一不动点 θ^* 当且仅当(β,B) 处于唯一性区域

$$\left\{(\beta',B') : 0 < \beta' < \beta_*(\kappa,B) \ or\ (\beta',B') = (\beta_*(\kappa,0),0)\right\}. \quad (2.6)$$

此外，在铁磁区域中，以下性质成立：

(1) 假设 $B > 0$。那么 Γ 在区间 $(0,\infty)$ 内有唯一不动点 θ^+，并且 *(a)* 若 $\beta = \beta_*$，则 Γ 恰好还有一个不动点 $\theta^- < 0$；*(b)* 若 $\beta > \beta_*$，则 Γ 恰好还有两个不动点 $\theta^- < \theta^\sharp < 0$。

(2) 假设 $B < 0$。那么 Γ 在区间 $(-\infty,0)$ 内有唯一不动点 θ^-，并且 *(a)* 若 $\beta = \beta_*$，则 Γ 恰好还有一个不动点 $\theta^+ > 0$；*(b)* 若 $\beta > \beta_*$，则 Γ 恰好还有两个不动点 $0 < \theta^\sharp < \theta^+$。

(3) 当 $B = 0$ 时，$\theta^\sharp = 0$ 始终是 Γ 的一个不动点，而 Γ 恰好有三个不动点

ts

$\theta^- < \theta^\sharp = 0 < \theta^+$ 如果 $\beta > \beta_* = \beta_*(\kappa,0)$。

此外，对于每个 $B \in \mathbb{R}$，$\beta_*(2,B) = \infty$ 成立；而对于 $\kappa \geq 3$,

- $\beta_*(\kappa,\ 0)$ =双曲正切$^{-1}(\frac{1}{\kappa-1})$;

对于每个 $B \in \mathbb{R}$，• $\beta_*(\kappa,B) = \beta_*(\kappa,-B)$。

在反铁磁区域 $\beta < 0$ 中，对于所有 $B \in \mathbb{R}$，映射 $\Gamma = \Gamma(\kappa,\beta,B)$ 都有唯一不动点 $\theta^\sharp$。特别地，$\mathrm{sgn}(\theta^\sharp) = \mathrm{sgn(B)}$。

证明。我们先讨论铁磁区域 $\beta > 0$。首先，注意到 $\beta^*(\kappa, B)$ 是映射 $J \mapsto h(J, d)$ 的逆映射，且 $J = \beta$, $h = B$ 和 $d = \kappa - 1$，由此可得 (2.6) [21, 引理 12.27(i)],。对于情形 (1)，θ^+ 在 $(0, \infty)$ 中的存在性和唯一性已在 [13, 引理 2.3] 中证明。结合 [21, 引理 12.27(ii)-(iii)]，以及当 $B > 0$时 $\theta = 0$ 不是不动点这一事实，我们可以得出 (1a) 和 (1b)。情形 (2)（包括 (2a) 和 (2b)）可利用自旋翻转对称性由情形 (1) 推出。对于情形 (3)，检查映射 (2.5) 即可容易看出，$\theta^\sharp = 0$ 是 Γ 的不动点。非唯一性区域中 θ^- 和 θ^+ 的存在性由 [21, 引理 12.27(iii)] 得出。当 $B = 0$ 时，临界阈值 β_* 的取值可由 [21, (12.28) 和 (12.30)] 中关于唯一性阈值的计算得到。根据 [21,引理 12.27], β_* 在 B 上是对称的。

在反铁磁区域 $\beta < 0$ 中，由于伊辛腔映射 Γ 是递减函数，因此总存在唯一不动点 $\theta^\sharp$。特别地，由于 $\Gamma(0) = B$，可知当 $B > 0$ 时，唯一不动点位于区间 $(0, \infty)$；当 $B < 0$ 时，唯一不动点位于区间 $(-\infty, 0)$；当 $B = 0$ 时，只需检查 Γ. □，即可轻易得出 $\theta^\sharp = 0$ 是唯一不动点。

以下总结了不同区域中 T^κ 上所有 TIS 伊辛测度；另请参见图 1。它们将在主要结果中出现。

定义 2.7（T^κ 上所有有限温度 TIS 伊辛测度的刻画）。给定$\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geq 2$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$、$B \in \mathbb{R}$ 和 $\Gamma = \Gamma(\kappa, \beta, B)$。在铁磁区域 $\beta > 0$ 中，我们令

(1a) $\Phi^*_\kappa(\beta, B)$ 表示当 (β, B) 处于唯一性区域 (2.6) 时，对应于不动点 θ^* 的 T^κ 上的伊辛测度；(1b) $\Phi^\sharp_\kappa(\beta, B)$ 表示当$\beta > \beta_*$时，对应于 Γ 的不动点 $\theta^\sharp$ 的 T^κ 上的伊辛测度；(1c) $\Phi^+_\kappa(\beta, B)$ 表示当 $B > 0$（正外场），或当 $\beta > \beta_*$ 且 $B = 0$（非唯一性区域中的零外场），或当 $\beta \geq \beta_*$ 且 $B < 0$（非唯一性区域中的负外场）时，对应于 Γ 的不动点 θ^+ 的 T^κ 上的伊辛测度；(1d) $\Phi^-_\kappa(\beta, B)$ 表示当 $B < 0$（负外场），或当 $\beta > \beta_*$ 且 $B = 0$（非唯一性区域中的零外场），或当 $\beta \geq \beta_*$ 且 $B > 0$（非唯一性区域中的正外场）时，对应于 Γ 的不动点 θ^- 的 T^κ 上的伊辛测度；

在反铁磁区域 $\beta < 0$ 中，我们令 (2) $\Phi^\sharp_\kappa(\beta$
$B)$ 表示 T^κ 上对应于唯一不动点的伊辛测度 $\theta^\sharp$.

注 2.8. 由引理 2.6 和定义 2.7 可知，在唯一性区域 (2.6) 中，当 $B > 0$ 时，$\Phi^*_\kappa(\beta, B) = \Phi^+_\kappa(\beta, B)$；当 $B < 0$ 时，$\Phi^*_\kappa(\beta, B) = \Phi^-_\kappa(\beta, B)$；此外，当$0 < \beta \leq \beta_*(\kappa, 0)$ $\Phi^\sharp_\kappa(\beta, 0) = \Phi^*_\kappa(\beta, 0)$。

注 2.9. 在铁磁区域 $\beta > 0$ 中，Φ^+_κ 也称为 T^κ 上“具有正边界条件”的伊辛测度，因为它是有限体积伊辛测度的单调递减极限：当 $r \to \infty$, 时，这些测度定义在 T^κ_r 上，即 T^κ 中深度为 r 的子树（定义见第 1.4.2 节），并满足边界条件 $\omega_{\partial\Lambda_r} \equiv 1$（例如参见 [29, (2.5)]）。类似地，伊辛测度 Φ^-_κ 也称为“具有负边界条件”的伊辛测度。

注 2.10. 请注意，上文定义的伊辛测度是 $\mathcal{P}\left(\mathcal{X}^{T^\kappa}\right)$ 中的元素，并将根据注释 1.3 视为 $\mathcal{P}(\mathcal{T}^\kappa_*[\mathcal{X}])$ 中的元素。

为以统一的方式陈述主要结果，我们将超出定义 2.7 的范围，也考虑在 T^κ 上温度为“冻结”状态的伊辛测度，也就是说，当 $|\beta| = \infty$时。在下文中，令 $T^{\kappa,+}$（分别为 $T^{\kappa,-}$）表示所有标记均为 1（分别为 -1）的无限 κ 正则树。此外，令 $T^{\kappa,\pm}$ 表示根标记为 1、顶点标记交替的无限 κ 正则树，

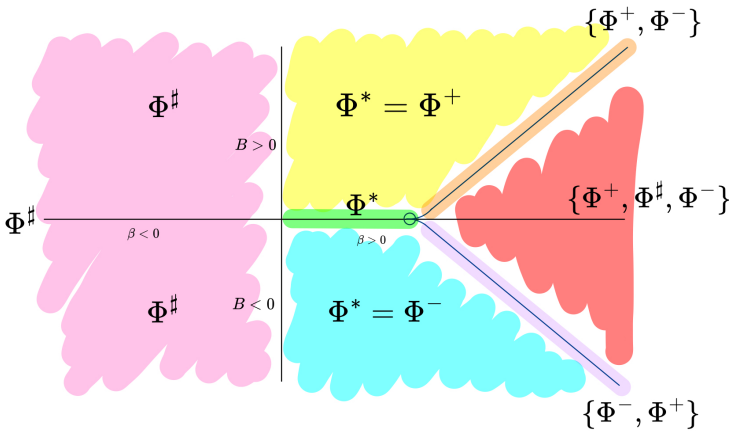


FIGURE 1. 不同参数区域中的所有 TIS 伊辛测度 $(\beta,\ B)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

顶点标记，即每个顶点 $v\in T^\kappa$ 在 $d(v,o)$ 为偶数时标记为 1，在 $d(v,o)$ 为奇数时标记为 -1。类似地，令 $T^{k,\mp}$ 表示根标记为 -1 、顶点标记交替的无限 κ 正则树。

定义 2.11 （T^κ上的冻结温度伊辛测度）。 对于任意 $B\in\mathbb{R}$， T^κ 上的铁磁伊辛测度在冻结温度下、取正/负边界条件时定义如下：

$$\Phi^+_\kappa(\infty,B)=\Phi^+_\kappa(\infty):=\delta_{T^{\kappa,+}},\quad \Phi^-_\kappa(\infty,B)=\Phi^-_\kappa(\infty):=\delta_{T^{\kappa,-}}. \tag{2.7}$$

在反铁磁区域中，对于任意 $B\in\mathbb{R}$，将唯一的 TIS 伊辛测度 $\Phi^\sharp_\kappa$ 的定义扩展为以下 T^κ 上冻结温度下的反铁磁伊辛测度：

$$\Phi^\sharp_\kappa(-\infty,B)=\Phi^\sharp_\kappa(-\infty):=\frac{1}{2}\delta_{T^{\kappa,\pm}}+\frac{1}{2}\delta_{T^{k,\mp}}. \tag{2.8}$$

引入候选条件极限后，我们可以陈述第一个条件极限定理，该定理以非典型共识为前提。

2.2.3. 双自旋系统的分量经验测度的条件极限。 对于 $\delta>0$，定义 c_δ：若满足 $c>c_{\mathtt{ref}}$，则取 $\min\{c+\delta,\kappa\}$；若满足 $c<c_{\mathtt{ref}}$.，则取 $\max\{c-\delta,-\kappa\}$。请回忆，标记分布为 $\nu=\mathrm{Ber}(p)$，其中某个 $p\in$ 属于 (0，1)。现在陈述我们的第一个主要结果，其证明见第 6 节。

定理 2.12 （双自旋系统的吉布斯条件化原理与相变）。 固定$0\neq c\in[-\kappa,\kappa]$，并回顾(2.3)中的 c_{ref} 定义。则以下陈述成立：*(1)* 若 $c\in[-\kappa,c_{ref})$，则存在唯一的 $\beta=\beta(c,p)\in[-\infty,0)$，使得

$$\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(U_n\in\cdot\mid\mathcal{E}_n(c_\delta))=\delta_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,B)},$$

其中 $B=\log(p/(1-p))$，且 $\Phi^\sharp_\kappa(\beta,B)$ 如定义 *2.7(2)* 和(2.8)中所述。此外，$\beta(-\kappa,p)=-\infty$，且唯一的 β满足： $\Phi^\sharp_\kappa(\beta,0)$ 的共识为 c。

(2) 若 $c\in(c_{ref},\kappa]$ 且 $p\neq1/2$，则以下结论成立：

(a) 若 $p>1/2$，则存在唯一的 $\beta=\beta(c,p)\in(0,\ \infty]$，使得

$$\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(U_n\in\cdot\mid\mathcal{E}_n(c_\delta))=\delta_{\Phi^+_\kappa(\beta,B)},$$

其中 $B=$对数$(p/(1-p))>0$ 以及 $\Phi^+_\kappa(\beta,B)$ 如定义 *2.7(1c)* 和 (2.7)所述。此外，$\beta(\kappa,p)=\infty$ 和唯一的 β 满足：$\Phi^+_\kappa(\beta,B)$ 的共识为 c;

(b) 若 $p < 1/2$，则存在唯一的 $\beta = \beta(c,p) \in (0, \infty]$ 使得

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(U_n \in \cdot \mid \mathcal{E}_n(c_\delta)) = \delta_{\Phi_\kappa^-(\beta,B)},$$

其中 $B = \log(p/(1-p)) < 0$ 和 $\Phi_\kappa^-(\beta, B)$ 如定义 *2.7(1d)* 和 (2.7)中所规定。此外，$\beta(\kappa,p) = \infty$ 以及唯一的 β 满足：$\Phi_\kappa^-(\beta,B)$ 的共识为 c;

(3) 若 $c \in (c_{ref}, \kappa]$ 且 $p = 1/2$，此时 $c_{ref} = 0$，则以下结论成立：*(a)* 若进一步有 $c \in (0, \kappa/(\kappa-1)]$,，则给定 $\mathcal{E}_n(c)$ 时，U_n 收敛到唯一的伊辛测度 $\Phi_\kappa^*(\tanh^{-1}(c/\kappa), 0)$，如定义 *2.7(1a)* 所规定。特别地，$\Phi_\kappa^*(\tanh^{-1}(c/\kappa), 0)$ 的共识为 c；*(b)* 若 $c \in (\kappa/(\kappa-1)\ \kappa]$，则存在唯一的 $\beta = \beta(c, 0) \in (\beta_*(\kappa, 0)\ \infty]$，使得给定 $\mathcal{E}_n(c)$ 时，U_n 渐近地落在 $\{\Phi_\kappa^+(\beta, 0)\ \ \Phi_\kappa^-(\beta, 0)\}$ 中，其中 $\Phi_\kappa^+(\beta, 0)$ 和 $\Phi_\kappa^-(\beta, 0)$ 如定义 *2.7(1c)(1d)* 和 *(2.7)* 所规定。换言之，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有：其中 $B_\varepsilon(\{\Phi_\kappa^+(\beta, 0)\ \ \Phi_\kappa^-(\beta, 0)\})$ 表示 $\{\Phi_\kappa^+(\beta, 0)\ \ \Phi_\kappa^-(\beta, 0)\}$ 在 $\mathcal{P}(T_*^\kappa[\mathcal{X}])$ 中的一个 ε- 邻域。此外，$\beta(\kappa, 0) = \infty$，且唯一的 β 满足：$\Phi_\kappa^+(\beta, 0)$ 的共识为 c。

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(U_n \notin B_\varepsilon(\{\Phi_\kappa^+(\beta,0), \Phi_\kappa^-(\beta,0)\}) \mid \mathcal{E}_n(c_\delta)) < 0,$$

注 2.13。请注意，在所有情形下，温度参数 β 都取决于 c 和 p，而外场 $B = B(p)$ 始终是 p 上的同一个函数。此外，特定外场 $B(p) = \log(p/(1-p))$ 仅仅可以看作以下述方式表示标记的原始乘积测度：对于任意有限图 G，当 $B = B(p)$时，

$$\Phi_G(\beta, B)(\sigma) := \frac{1}{Z_G}\exp\left\{\beta\sum_{\{u,v\}\in E(G)}\sigma_u\sigma_v + B\sum_{v\in G}\sigma_v\right\}, \quad \forall\sigma\in\{1,-1\}^{|G|} \tag{2.9}$$

$$\propto \exp\left\{\beta\sum_{\{u,v\}\in E(G)}\sigma_u\sigma_v\right\}\prod_{v\in G}\nu(\sigma_v),$$

基于这一原因，我们也将标记分布 ν 称为参考测度 .

定理 2.12 的第一个断言是关于 $\{U_n\}$的一个条件极限定理。该定理指出，当共识低于典型水平时，在非典型共识条件下的序列 $\{U_n\}$ 收敛于具有特定外场和逆温度的唯一平移不变反铁磁伊辛测度。需要注意的是，只要 $|\beta|$ 足够大（具体取决于 B），T^κ 上就存在多个反铁磁伊辛测度，其中两个著名的例子是周期 2 极端测度，也称为“棋盘相”。然而，由于有限图序列的任何（局部弱）极限都必须是“单模”的（文献中将这一性质称为“sofic”），而单模测度是平移不变的，因此这两个棋盘相不可能是任何有限图序列的（局部弱）极限。这解释了条件极限为何具有平移不变性。另一方面，条件极限具有分裂性，这与我们研究的非典型事件仅涉及成对相互作用这一事实有关，证明中将对此作进一步说明。

定理 2.12 的第二个断言讨论共识异常偏高的情形，此时参考测度 ν 是非均匀的（等价地，$p \neq 1/2$）。在这种情况下，在异常共识条件下的序列 $\{U_n\}$ 收敛到一个铁磁伊辛测度，其逆温度和外场特定，并且其边界条件具有与参考测度 ν 相同的偏差

，具体而言，若 $p > 1/2$，则为正边界条件；若 $p < 1/2$，则为负边界条件。值得注意的是，当给定 B 且 β 足够大时，在 T^κ 上存在多个 TIS 伊辛测度。尽管如此，条件极限仍然是唯一的，因为参考测度 ν 的不对称性使其中一种更有可能出现。

当真实标记分布 ν 为均匀分布时，上述不对称性便不复存在，这使得相对于非典型共识值 c的 $\{U_n\}$ 条件极限的性质出现了有趣的相变。如 (3a) 所述，当且仅当共识为正但不太大时，仍存在唯一的条件极限，即 $0 = c_{\mathtt{ref}} < c \le \kappa/(\kappa-1)$。特别地，该极限关于自旋翻转对称；在这种情况下，超过共识值 c 的最优方式仅是提高相邻自旋一致的概率。注意，阈值 $\kappa/(\kappa-1) = \tanh(\beta_*(\kappa, 0))$ 是在唯一性区域中，无外场的任意铁磁伊辛测度在 T^κ 上所能达到的最大共识。因此，如 (3b) 所示，大于 $\kappa/(\kappa-1)$ 的共识只能通过处于非唯一性区域的铁磁伊辛测度实现。此外，在非唯一性区域的多个伊辛测度中，包括 Φ_κ^-，$\Phi_\kappa^\sharp$ 和 Φ_κ^+，定理 2.12 表明，实现这一非典型共识 c 最可能的方式是打破 1 自旋与 -1 自旋之间的对称性，并选择 Φ_κ^- 和 Φ_κ^+。事实上，这两个伊辛测度出现的可能性相同（这是由于参考测度 ν的自旋翻转对称性、共识函数 m 的定义，以及无外场的伊辛测度），仅凭非典型共识值 c无法确定哪一个是条件极限。

2.2.4. 回到联合标记分布的条件行为。虽然定理 2.12 以无限正则树上的各种伊辛测度刻画了 $\{U_n\}$ 在非典型共识下的情形，但我们也关注标记 $\{X_i\}_{i\in[n]}$ 的联合分布的条件结构。本节将通过推导一个合理的模型来弥补这一缺口，该模型与给定非典型经验一致性时的条件极限相一致。

我们针对 n 阶图提出以下后验模型：

后验模型。随机抽取一个 κ-正则随机图 G_n，其包含 n 个顶点；随后根据（随机图）G_n 上的伊辛测度，为每个顶点赋予自旋 $X^n = \{X_i\}_{i\in[n]}$。该伊辛测度的外场为 $B = B(p) = \log(p/(1-p))$，唯一的温度参数为 $\beta = \beta(c,p) \in \mathbb{R}$，具体如定理 2.12 所述。换言之，$\mathcal{L}(X^n \mid G_n) = \Phi_{G_n}(\beta, B)$，其中 Φ_{G_n} 是式 (2.9) 中定义在 G_n 上的伊辛测度。

我们现在证明，在若干种情形下，后验模型都能得到严格论证，包括 $c > c_{\mathtt{ref}}$ 的情形；其中最微妙的是 $p = 1/2$ 的设定，此时存在相变，将在下文 1(d) 中讨论。回顾定义 2.7 中指定的各种伊辛模型。

引理 2.14. 固定 $p \in (0,1)$ 和 $c \in (-\kappa, \kappa)$，使得 $c \neq c_{ref}$。令 (G_n, X^n) 服从后验模型，并令其关联的 $B = B(p)$ 和 $\beta = \beta(c,p)$ 如其中所述。则序列 $\{(G_n, X^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的局部弱极限与在事件 $\mathcal{E}_n(c)$ 条件下 U_n 的渐近条件极限一致，适用于以下情形：

(1a) 若 $c > c_{ref}$ 且 $p > 1/2$，则 (G_n, X^n) 几乎必然局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^+(\beta, B)$；*(1b)* 若 $c > c_{ref}$ 且 $p < 1/2$，则 (G_n, X^n) 几乎必然局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^-(\beta, B)$；*(1c)* 若 $c \in (0, \kappa/(\kappa-1)]$ 且 $p = 1/2$，则 (G_n, X^n) 几乎必然局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^*(\beta, B)$；*(1d)* 若 $c \in (\kappa/(\kappa-1)\ \kappa]$ 且 $p = 1/2$，则 (G_n, X^n) 以高概率渐近地处于 $\{\Phi_\kappa^+(\beta, 0)\ \Phi_\kappa^-(\beta, 0)\}$，也就是说，对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(U(G_n, X^n) \in B_\varepsilon\left(\left\{\Phi_\kappa^+(\beta,0), \Phi_\kappa^-(\beta,0)\right\}\right)\right) = 1.$$

(2) 若 $c < c_{reg}$ 且存在唯一的伊辛(T^κ, β, B) 测度，则(G_n, X^n) 几乎必然局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^\sharp(\beta, B)$ 。

证明。 注意，根据 [12, 命题 2.5], , 随机 κ-正则图 G_n 在全测度集合 $\Omega \setminus \mathcal{N}$上局部弱收敛至 T^κ。下文将论证 $(G_n(\omega)\ X^n)$ 的所述收敛性；其分布由 $\Phi_{G_n(\omega)}(\beta,\ B)$ 给出。对每个情形中的 $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$，均有:

情形（*1a*）： 由 [13] （另见 [29]的引言）可知，由于 $\beta > 0$ 且 $B > 0$, $\Phi_{G_n(\omega)}(\beta,\ B)$ 局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^+(\beta,\ B)$。

情形（*1b*）： 这由（1a）和自旋翻转对称性得出。

情形（*1c*）： 在此情形下，定理 2.12(3a) 蕴含 $\beta(c,\ p) = \tanh^{-1}(c/\kappa)$ 且 $B = 0$。根据 [21, 定理 12.31], , 存在唯一的 Ising $(T^\kappa,\ \beta,\ 0)$ 测度 $\Phi_\kappa^*(\beta,\ 0)$。因此， [24,命题 2.14] 蕴含 $\Phi_{G_n(\omega)}(\beta,\ 0)$ 局部弱收敛至 $\Phi_\kappa^*(\beta,\ 0)$。

情形（1d）：在这种情形下，定理 2.12(3b) 意味着 $\beta(c, p) > \beta_*(\kappa, 0)$。注意， [29,定理 2.4] 意味着 $\Phi_{G_n}(\omega) = \Phi_{G_n}(\omega)(\beta, 0)$ 在局部依概率收敛到 $\frac{1}{2}\Phi_\kappa^+(\beta, 0) + \frac{1}{2}\Phi_\kappa^-(\beta, 0)$。乍看之下，这似乎表明 (G_n, X^n) 极限与定理 2.12(3b) 中为 U_n 指定的条件极限集合并不一致。然而， [29, 定理 2.4] 还对收敛结果作了进一步细化，表明只要图序列 $G_n(\omega)$ 还满足某种边扩展性质（当 n 趋于无穷时，该性质对于随机 κ-正则图以高概率成立），条件测度 $\Phi_{G_n}(\omega)_+ := \Phi_{G_n}(\omega)(\cdot \mid \sum_{v\in G_n}(\omega)\ X_v > 0)$ 就会在局部依概率收敛到 $\Phi_\kappa^+(\beta, 0)$。特别地，在 $\Phi_{G_n}(\omega)$ 下，两个事件 $\{\sum_{v\in G_n}(\omega)\ X_v > 0\}$ 和 $\{\sum_{v\in G_n}(\omega)\ X_v < 0\}$ 发生的概率相同，且都接近 $1/2$。因此，以接近 $1/2$ 的概率（当 $G_n(\omega)$ 满足某种边扩展性质且 $\sum_{v\in G_n}(\omega)\ X_v > 0$ 时），$\Phi_{G_n}(\omega)$ 可由 $\Phi_\kappa^+(\beta, 0)$ 近似；以接近 $1/2$ 的概率（当 $G_n(\omega)$ 满足某种边扩展性质且 $\sum_{v\in G_n}(\omega)X_v < 0$ 时），$\Phi_{G_n}(\omega)$ 可由 $\Phi_\kappa^-(\beta, 0)$ 近似。至此，情形（ 1d ）的论证完成。

情形 *(2)*：在这种情形下， [24, 命题2.14] 以及存在唯一伊辛（$T^\kappa,\ \beta,\ B$）测度这一假设蕴含：$\Phi_{G_n\ (\omega)}$ （$\beta,\ B$）局部弱收敛到唯一的伊辛测度$\Phi_\kappa^\sharp$（$\beta,\ B$）。□

注2.15. 在引理 2.14 未涵盖的其余区域内，定理2.12(1)表明，在给定事件 $\mathcal{E}_n$（c）的条件下，U_n 的条件极限仍然集中于唯一的 TIS 伊辛测度 $\Phi_\kappa^\sharp$。在 T^κ上。尽管如此，该区域内 n顶点图上的描述更为复杂，因为随机正则图上的反铁磁伊辛测度已知会在某个低于唯一性阈值的逆温度值 $\beta_{RSB} < 0$ 处出现“副本对称破缺（RSB）相变”（例如，参见 [7], [43] 及其中的参考文献）。例如，当 $B = 0$时， [7] 中证明了 $\beta_{RSB} = -\tanh^{-1}(1/\sqrt{\kappa - 1})$，它小于（无外场情形下的）吉布斯唯一性阈值 $\beta = -\tanh^{-1}(1/(\kappa - 1))$。基于与第 2.2.3 节中解释定理2.12(1)时类似的理由，我们相信，凭借极限的索菲克性，后验模型在区域 $\beta \in (\beta_{RSB},\ 0)$ 中仍应是正确的答案。然而，在区域 $\beta < \beta_{RSB}$ （亦称为凝聚区）中，图的全局结构占据主导地位，因而在如此低一致性的条件下，于 n顶点图上选取最可能模型的问题就不那么直接了。

2.3. **一般自旋系统**。 现在我们介绍一些结果，探讨多自旋系统在给定一类比非典型共识更一般的稀有事件条件下的条件行为。下文中， $\mathcal{X}$ 是任意有限集， $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$是标记分布；不失一般性，我们假设对所有 $x \in \mathcal{X}$， $\nu(x) > 0$ 。请注意，根据上下文，我们将$\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$视为其概率质量函数（p.m.f.）。

2.3.1. 关注的稀有事件与条件极限定律。 我们考虑的非典型或稀有事件类别，是通过一个对称函数 h 来描述的： $\mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$ ，我们称之为边势。定义相应的（局部） h-共识 S_h ： $\mathcal{T}^{\kappa}_{*,\ 1}[\mathcal{X}] \to \mathbb{R}$ 其定义为

$$S_h = S_h(\tau, X) \coloneqq \sum_{v=1}^{\kappa} h(X_o, X_v), \quad (\tau, X) \in \mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]. \tag{2.10}$$

那么，对于任意测度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}])$，在 μ 下的 h-共识 等于

$$\mathbb{E}_{\mu}\left[S_h\right] = \mathbb{E}_{\mu}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} h(X_o, X_v)\right] = \kappa \mathbb{E}_{\pi_{\mu}}\left[h(X_o, X_1)\right], \tag{2.11}$$

其中，最后一个等号成立是因为叶标记在 μ 下可交换（见注释 1.3），而 π_{μ} 表示边边缘分布，即 (X_o, X_1) 在 μ. 下的联合分布。因此，(2.11)表明， $\mathbb{E}_{\mu}\left[S_h\right]$ 仅通过其边边缘分布依赖于 μ 。当测度 μ是随机经验测度 L_n时，我们将随机变量 $\mathbb{E}_{L_n}\left[S_h\right]$ 称为经验h-共识。注意，根据 (2.1) 以及 $\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]$ 有限这一事实，当 $n \to \infty$时，经验h-共识依概率收敛到一个确定性极限：

$$\mathbb{E}_{L_n}\left[S_h\right] \to \mathbb{E}_{\eta_1}\left[S_h\right] \coloneqq c_{h,\mathtt{ref}}. \tag{2.12}$$

我们将极限 $c_{h,\mathtt{ref}}$ 称为典型 h-共识。当 $h(x, y) = xy$时，我们恢复先前的共识泛函 (2.2)。

我们关注在观察到非典型经验 h-共识的条件下， U_n的行为，具体定义如下。

定义 2.16 （非典型经验 h-共识）。 给定边势 h 和 $c \in \mathbb{R}$ ，且满足$c \neq c_{h,\ \mathtt{ref}}$，将事件 $\mathcal{E}_n(h,\ c)$ 定义为

$$\mathcal{E}_n(h, c) \coloneqq \begin{cases} \{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \geq c\} & \text{if } c > c_{h,\mathtt{ref}}, \\ \{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \leq c\} & \text{if } c < c_{h,\mathtt{ref}}. \end{cases} \tag{2.13}$$

并将测度集合 $\mathcal{E}(h,\ c)$ 定义为

$$\mathcal{E}(h, c) \coloneqq \begin{cases} \{\mu \in \mathcal{P}\left(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]\right) : \mathbb{E}_{\mu}[S_h] \geq c\} & \text{if } c > c_{h,\mathtt{ref}}, \\ \{\mu \in \mathcal{P}\left(\mathcal{T}^{\kappa}_{*,1}[\mathcal{X}]\right) : \mathbb{E}_{\mu}[S_h] \leq c\} & \text{if } c < c_{h,\mathtt{ref}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

此外，在下文中，对于任意 $c \neq c_{h,\ \mathtt{ref}}$ 和 $\delta > 0$，令

$$c_{\delta} \coloneqq \begin{cases} c + \delta & \text{if } c > c_{h,\mathtt{ref}}, \\ c - \delta & \text{if } c < c_{h,\mathtt{ref}}. \end{cases} \tag{2.15}$$

我们关注以下类型的条件极限定律。

定义 2.17. 固定一个边势 h，以及 $c \in \mathbb{R}$、 $c \neq c_{h,\ \mathtt{ref}}$. 令 $\mathcal{E}_n(h,\ c)$ 和 $(c_{\delta})_{\delta > 0}$ 分别如定义 2.16 和 (2.15) 中所述。

（1）给定 $\rho^* \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_*[\mathcal{X}])$，我们称 U_n 给定 $\mathcal{E}_n(h,\ c)$ 收敛于 ρ^*，如果

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(U_n \in \cdot \mid \mathcal{E}_n(h, c_{\delta})) = \delta_{\rho^*}(\cdot). \tag{2.16}$$

(2) 对于任意 $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{G}_*[\mathcal{X}])$，如果对每个开集 $U \supset \mathcal{U}$ 都满足以下条件，则称 U_n 给定 $\mathcal{E}_n(h,\ c)$ 渐近地 $\mathcal{U}$属于 $U \supset \mathcal{U}$:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(U_n \notin U \mid \mathcal{E}_n(h, c_{\delta})\right) < 0. \tag{2.17}$$

2.3.2. 一般自旋系统和稀有事件的结果。 在一般情形下，我们将证明，与非典型共识的情形类似，在非典型 h-共识下的条件极限仍然是树上的吉布斯测度。然而，并非所有树上的吉布斯测度都会作为条件极限出现。下面，我们定义一类树上的吉布斯测度子类，它们可以作为候选条件极限点出现。

定义 2.18 （无穷树上的平移不变分裂吉布斯测度）。 给定一棵无穷（局部有限）树 T、一个正对称函数 $\psi\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to(0,\infty)$ 以及一个正函数 $\bar{\psi}\colon \mathcal{X}\to(0,\infty)$，若存在一族概率测度 $(\ell_v)_{v\in T}$，属于 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$，称为“边界律”或“入口律”，使得对每个 $r\in\mathbb{N}$ 和 $x\in\mathcal{X}^{T_r}$，则称测度 $\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{P}(\mathcal{X}^T)$ 是 T^- 上、状态空间为 $\mathcal{X}$ 且规范为 $(\psi,\bar{\psi})$ 的分裂吉布斯测度。

$$\boldsymbol{\rho}_{T_r}(x)=\frac{1}{Z_{T_r}}\prod_{\{u,v\}\in E(T_r)}\psi(x_u,x_v)\prod_{v\in T_{r-1}}\bar{\psi}(x_v)\prod_{v\in T_r\setminus T_{r-1}}\ell_v(x_v), \tag{2.18}$$

其中，T_r 是 T 的深度为 r 的子树，定义见第 1.4.2 节；$\boldsymbol{\rho}_{T_r}$ 是 $\boldsymbol{\rho}$ 在 T_r 上的边缘分布，Z_{T_r} 是归一化常数。当对某个 $\kappa\geq 2$，$T=T^\kappa$ 成立时，若相应的边界律是齐次的，即对某个 $\ell\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$，所有 $v\in T^\kappa$ 都有 $\ell_v=\ell$，则称 T^κ 上的分裂吉布斯测度为平移不变。将 T^κ 上、状态空间为 $\mathcal{X}$ 且规范为 $(\psi,\bar{\psi})$ 的平移不变分裂（ TIS ）吉布斯测度所成的集合记为 $\mathrm{TISGM}_{T^\kappa}^{\psi,\bar{\psi}}$。

注 2.19. 虽然我们的术语与 [36, 23], [21, 章 12] （以及[32, 38, 41, 42]）中使用的术语一致，但树上的分裂吉布斯测度也称为树上的马尔可夫链，树上的 TIS 吉布斯测度也称为树上的完全齐次马尔可夫链，而T^κ 也称为度数为 $\kappa-1$的凯莱树。关于各种规范下分裂吉布斯测度的刻画已有大量研究，例如，参见 [21, 36, 38]关于伊辛测度的研究，以及 [23, 35]关于波茨测度的研究。

注 2.20. 为保证边缘分布相容性，即对于每个$r,s\in\mathbb{N}$，都有 $(\boldsymbol{\rho}_{T_{r+s}})_{r}=\boldsymbol{\rho}_{T_r}$，边界律 $(\ell_v)_{v\in T}$ 必须满足某种相容性性质，该性质在 [21,定义 12.10], 中给出，并在其中用作边界律的定义。本文仅在以下引理中陈述当 $T=T^\kappa$ 时齐次边界律所满足的这一相容性性质，并将其证明推迟到附录 A。

引理 2.21 (通过边界律刻画边缘边际分布)。 给定任意 $\boldsymbol{\rho}\in$ TIS 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\psi,\bar{\psi}}$，，其边界律 $\ell\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 是递推 CAV： $\mathcal{P}(\mathcal{X})\to\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 的不动点，其中递推定义为

$$\mathsf{CAV}\ell(x)=\frac{1}{\zeta}\bar{\psi}(x)\left(\sum_{z\in\mathcal{X}}\psi(x,z)\ell(z)\right)^{\kappa-1},\quad\forall x\in\mathcal{X}, \tag{2.19}$$

其中 ζ是归一化常数。事实上，集合 TIS 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\psi,\bar{\psi}}$，与不动点集合 $\Delta^*:=\{\ell\in\mathcal{P}(\mathcal{X}):\mathsf{CAV}\ell=\ell\}$之间存在一一对应。此外，对任意 $\ell\in\Delta^*$，与 ℓ 对应的 *TIS* 吉布斯测度 $\boldsymbol{\rho}$ 的边边缘分布 $\pi_{\boldsymbol{\rho}_1}$ 满足

$$\pi_{\boldsymbol{\rho}_1}(x,z)\propto\ell(x)\psi(x,z)\ell(z),\quad\forall x,z\in\mathcal{X}. \tag{2.20}$$

注释 2.22。 根据引理 2.21，任意边界律 ℓ 在 $\mathcal{X}$ 上都必须是满支撑，因为$^-$规范 ψ和 ψ均为正；否则无法满足式 (2.19)。此外，根据式 (2.20)，任意 $\boldsymbol{\rho}\in$ TIS 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\psi,\bar{\psi}}$，的边缘边际分布（因此其顶点边缘分布）在 $\mathcal{X}^2$（分别在 $\mathcal{X}$）上必须是满支撑。

注释 2.23。 再次注意，上述定义的分裂吉布斯测度是 $\mathcal{P}\left(\mathcal{X}^{T^\kappa}\right)$ 的元素，根据注释 1.3，它们也可以视为 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$ 的元素。

现在我们陈述第二个主要结果，该结果刻画了在非典型 h-共识条件下 U_n 的条件极限。首先，令

$$h_{\min} \coloneqq \min_{x,z\in\mathcal{X}} h(x,z) \quad \text{and} \quad h_{\max} \coloneqq \max_{x,z\in\mathcal{X}} h(x,z).$$

此外，令 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 表示 $\mathcal{P}(\mathcal{X}^2)$ 中对称测度的子集，即

$$\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) := \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X}^2) : \pi(x,y) = \pi(y,x), \quad \forall x,y \in \mathcal{X}\}, \tag{2.21}$$

并对 $c \in \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{B}_h(c) \coloneqq \left\{\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) : \kappa\mathbb{E}_\pi\left[h(X_o,X_1)\right] = c\right\}. \tag{2.22}$$

回顾式 (1.2) 中映射 Range 的定义。

定理 2.24 (条件极限是 TIS 吉布斯测度)。 固定 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$。设 h 为边势，并固定 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) \setminus \mathrm{Range}(\kappa h)$，使得 $c \neq c_{h,ref}$。那么， U_n 给定的 $\mathcal{E}_n(h,c)$ 渐近地属于 $\mathfrak{G}(c)$（按定义 *2.17* 的含义），其中

$$\mathfrak{G}(c) \coloneqq \bigcup_{\mathcal{X}^\downarrow\subsetneq\mathcal{X}} \bigcup_{\beta\in\mathbb{R}} \mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp(\beta h^\downarrow),\nu^\downarrow} \bigcap \left\{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_{\rho_1} \in \mathcal{B}_h(c)\right\}, \tag{2.23}$$

$h^\downarrow \colon = h|_{\mathcal{X}^\downarrow\times\mathcal{X}^\downarrow}\colon \quad \mathcal{X}^\downarrow \times \mathcal{X}^\downarrow \to \mathbb{R}$ 和 $\nu^\downarrow = \nu\left(\cdot|\mathcal{X}^\downarrow\right) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}^\downarrow)$，并将其视为概率质量函数。

为证明这一结果，我们结合随机 κ-正则图上带独立同分布的顶点标记时分量经验测度的大偏差原理（见定理 3.6），以及命题 3.7 中关于大偏差的吉布斯条件化原理，从而将识别条件极限的问题化为：在带标记树上的概率测度空间中，分析一个涉及速率函数的特定约束优化问题。随后，我们对该问题进行简化（见第 3.4 节），并研究简化后的优化问题（见第 4.1–4.2 节），从而得出式 (2.23) 中条件极限的具体形式；该定理的证明见第 4.3 节。

注 2.25. 定理 2.24 中的假设 $c \notin \mathrm{Range}(\kappa h)$ 是一个技术性条件，用于确保条件极限是具有正温度的 TIS 吉布斯测度，也就是说，具有 $\beta \in \mathbb{R}$。我们认为，只要扩大集合 $\mathfrak{G}(c)$，使其包含具有冻结温度的 T^κ 上的 TIS 吉布斯测度，也就是具有 $\beta = \infty$ 或 $\beta = -\infty$，就可以去掉这一假设，正如定理 2.12 中所做的那样。不过，由于 c 的这些取值对应边界情形，我们选择不在主要陈述中纳入它们；可以像定理 2.12 的证明中那样单独分析。

注 2.26. 注意，(2.23) 中的集合 $\mathfrak{G}(c)$ 由定义在各种状态空间上的 TIS 吉布斯测度组成，其 h-共识为 c。其中包括状态空间为原始自旋空间 $\mathcal{X}$ 且属于 $\mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp(\beta h),\ \nu}$ 的测度，我们称之为非退化 TIS 吉布斯测度；也包括状态空间为 $\mathcal{X}^\downarrow \subsetneq \mathcal{X}$ 且属于 $\mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp(\beta h^\downarrow\ \nu^\downarrow)}$ 的测度，我们称之为退化 TIS 吉布斯测度。根据注释 2.22，非退化测度恰好是根边缘分布具有满支撑的测度，而退化测度的根边缘分布则支撑在一个真子集 $\mathcal{X}^\downarrow \subsetneq \mathcal{X}$ 上。我们只在此意义上使用“退化／非退化”这两个术语。

虽然定理 2.24 给出了一个非常一般的结果，但从证明中可以清楚地看出，若掌握边势 h 或标记分布 ν 的具体信息，就可以确定 $\mathfrak{G}(c)$ 的一个更小子集，使其包含所有条件极限。事实上，在 $\mathcal{X} = \{1,-1\}$ 和 $h(x,\ y) = m(x,\ y) = xy$ 为共识泛函这一特殊情形下，定理 2.12 给出了这样的细化，并确定了所有情形下精确的条件极限。特别是，该定理表明，对于每个约束值 $c \in (-\kappa,\ \kappa)$，条件极限始终是非退化的吉布斯测度。这

自然引出了一个问题：是否可能沿着这一方向作出更一般的细化，从而得到以下结果：

开放问题。 对于哪些自旋系统 $\mathcal{X}$、标记分布 ν 和边势 h，条件极限总是非退化的?

2.3.3. 条件极限的非退化性。 我们在第 4.2 节证明，即使在简单的双自旋系统中，对于约束值 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$，也可能出现退化的条件极限。这表明，解决开放问题（在上一节中提出）并非易事。尽管如此，我们的下一个结果通过识别双自旋系统中的一个广泛子类，向解决该开放问题迈出了部分步伐；对于这类系统，条件极限总是非退化的。

定理 2.27 （均匀标记分布下双自旋系统的非退化性）。 固定$|\mathcal{X}| = 2$, $\nu =$均匀分布$(\mathcal{X})$、一个边势 h, 并令 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$ 满足 $c \neq c_{h,\ ref.}\widehat{\ }$那么，在给定 $\mathcal{E}_n(h, c)$ 的条件下， U_n 渐近地属于 $\mathfrak{G}(c)$, 其中

$$\widehat{\mathfrak{G}}(c) := \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp\{\beta h\}, \nu} \bigcap \{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_{\rho_1} \in \mathcal{B}_h(c)\}. \tag{2.24}$$

该定理的证明见第 5.3 节，它是一个更一般结果的推论（见命题 5.1）。该结果表明，对于满足某项性质的一类多自旋系统，不会出现退化条件极限（见第 5 节命题 5.1 中的 (5.1)）。我们认为，这一类应当包括所有具有均匀标记分布的多自旋系统，事实上，我们提出以下猜想。

猜想 2.28 （具有均匀标记分布的多自旋系统的非退化性）。 任取有限集 $\mathcal{X}$和边势 h。若 $\nu =$均匀分布 $(\mathcal{X})$，则对于每个 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$，在给定 $\mathcal{E}_n(h, c)$ 的条件下， $U_n\widehat{\ }$渐近地落在集合 $\mathfrak{G}(c)$ 中，该集合定义于 (2.24)。

3. 从条件极限到优化问题

本节利用大偏差理论和吉布斯条件化原理，将条件极限定理的分析归结为某些约束优化问题。本节的主要结果见第 3.1 节（参见其中的命题 3.3）。第 3.2–3.4 节包含证明命题 3.3 所需的若干预备结果，该命题的证明见第 3.4.3 节。

3.1. 约化为边测度上的优化问题。

3.1.1. 单模扩张。 为定义该优化问题，我们首先需要定义$\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa}[\mathcal{X}]$ 上的概率测度到 $\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]$上的概率测度的某种自然扩张。设$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa}[\mathcal{X}])$使得$\pi_\mu$是对称的。首先，对任意$\tilde{\tau} \in \mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa-1}[\mathcal{X}]$ 与 $x' \in \mathcal{X}$，我们令$\tilde{\tau} \oplus x'$ 表示$\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa}[\mathcal{X}]$ 中的树，它由向 $\tilde{\tau}$添加一个带标记 x'的额外叶子（即连接到根的顶点）得到。注意，映射 $\tilde{\tau} \mapsto \tilde{\tau} \oplus x'$实际上对每个 $\kappa \geq 1$都将$\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa-1}[\mathcal{X}]$映到$\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa}[\mathcal{X}]$。此外，定义

$$E_1(x', x)(\tau) := \{v \sim o : (\tau_v, \tau_o) = (x', x)\}, \quad x, x' \in \mathcal{X}, \tau \in \mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}],$$

等于当根标记为 x时， τ 中标记为 x' 的叶子数量，并令其在其他情况下等于$\widehat{\ }$零。接着定义星上的条件测度 $P_\mu(x,\ x')$，如下：

$$\widehat{P}_\mu(x, x')(\tilde{\tau}) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_o = x\}}}{\kappa \pi_\mu(x, x')} \mu(\tilde{\tau} \oplus x') E_1(x', x)(\tilde{\tau} \oplus x'), \quad \tilde{\tau} \in \mathcal{T}_{*,1}^{\kappa-1}[\mathcal{X}]. \tag{3.1}$$

可以验证， $\widehat{P}_\mu(x,\ x')\ \in\ \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^{\kappa-1,\ 1}[\mathcal{X}])$是（在 μ下）通过移除一个随机选取的叶子而得到的有根子树的条件分布，条件是根标记为 x 且叶子上的标记为 x' （例如参见 [34, 引理 A.2]）。回顾注 2.1 中的真实分布 η ，以及定义 1.1 中深度为h 的边缘分布定义。

令 $\mu_1=\mu$ ，对于 $h\geq 2$，按如下方式迭代定义 $\mu_h\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^{\kappa,\ h}[\mathcal{X}])$:

$$\frac{d\mu_h}{d\eta_h}(\tau):=\frac{d\mu_{h-1}}{d\eta_{h-1}}(\tau_{h-1})\prod_{v:\,d_\tau(o,v)=h-1}\frac{d\widehat{P}_\mu(X_v,X_{a(v)})}{d\widehat{P}_{\eta_1}(X_v,X_{a(v)})}(\tau(v\setminus a(v))_1),\quad \tau=(\tau,X)\in\mathcal{T}_{*,h}^\kappa[\mathcal{X}], \tag{3.2}$$

其中， $a(v)$ 表示 v 的父节点（定义见第 1.4.2 节），而 $\tau(v\setminus a(v))_1$ 表示由 v 及其除 $a(v)$ 之外的所有邻居组成的深度1树，其根为 v. 。可以证明$\widehat{\ }$， μ_h 确实是 $\mathcal{T}_*^{\kappa,\ h}[\mathcal{X}]$ 上的概率测度。注意， $P_{\eta_1}(x,\ x')$ 不依赖于 x'。此外，注意到 $\{\mu_h;\ h\in\mathbb{N}\}$ 构成了标记有根树上的概率测度相容族。因此，根据柯尔莫哥洛夫扩张定理，以下定义是良好的。

定义 3.1。给定 $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^{\kappa,\ 1}[\mathcal{X}])$， μ 的单模扩张记作 $\mathsf{UGW}_1(\mu)$，定义为 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$ 中唯一的概率测度，使得对每个 $h\in\mathbb{N}$，其在 $\mathcal{T}_*^{\kappa,\ h}[\mathcal{X}]$ 上的边缘分布均与式 (3.2) 中定义的测度 μ_h 一致。

Note “扩展”这一术语之所以合理，是因为 $(\mathsf{UGW}_1(\mu))_1=\mu$.

3.1.2. 边优化问题。 回顾式 (2.21) 中 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 的定义，并令 $J_\kappa^\nu\colon\ \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)\to[0,\infty)$ 定义如下:

$$J_\kappa^\nu(\pi):=H(\pi^o\|\nu)+\frac{\kappa}{2}H(\pi\|\pi^o\otimes\pi^o),\quad\forall\pi\in\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right). \tag{3.3}$$

注意，由于 $\mathcal{X}$ 是有限集且相对熵非负，因此 J_κ^ν 定义良好。特别地,

$$J_\kappa^\nu(\pi)=0\quad\text{if and only if}\quad\pi=\nu\otimes\nu. \tag{3.4}$$

此外，给定一个“边测度” $\pi\in\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$，定义 $\mu^{(\pi)}\in\mathcal{P}\left(\mathcal{T}_*^{\kappa,\ 1}[\mathcal{X}]\right)$ 如下:

$$\frac{d\mu^{(\pi)}}{d\eta_1}(\tau):=\frac{d\pi^o}{d\nu}(X_o)\prod_{v=1}^\kappa\frac{d\pi^{1|o}}{d\eta_1^{1|o}}(X_v\mid X_o),\quad\tau=(\tau,X)\in\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}]. \tag{3.5}$$

注意，对于任意 $x,\ x'\in\mathcal{X}$， $\eta_1^{1|o}(x|x')\ =\nu(x)$。

我们首先建立 $\mu^{(\pi)}$ 与 TIS 吉布斯测度之间的联系。

引理 3.2 (TIS 吉布斯测度作为单模扩张)。 对于任意TIS 吉布斯测度 $\boldsymbol{\rho}$ 在T^κ 上，若其规范已给定，则有

$$\boldsymbol{\rho}_1=\mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}, \tag{3.6}$$

其中 $\mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}$ 如 (3.5) 中所定义，并且

$$\boldsymbol{\rho}=\mathsf{UGW}_1(\boldsymbol{\rho}_1), \tag{3.7}$$

其中 UGW_1 是定义 *3.1* 给出的映射。

证明见附录 B。

现在我们给出本节的主要结果。

命题 3.3（化简为对边测度的优化）。 对所有 $c \neq c_{h,\ ref}$，定义

$$R_{edge}(c) := \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c)} J_\kappa^\nu(\pi) \quad \text{and} \quad \mathcal{M}_{edge}(c) := \arg\min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c)} J_\kappa^\nu(\pi) \tag{3.8}$$

其中， $\mathcal{B}_h(c)$ 是式(2.22)中定义的约束集，并令

$$\mathcal{M}(c) := \left\{ \mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi)}) : \pi \in \mathcal{M}_{edge}(c) \right\}. \tag{3.9}$$

那么，对于任意满足 $\mathcal{M}(c) \subset \mathcal{O}$ 的开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$，以下条件极限成立：

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(U_n \notin \mathcal{O} \mid \{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \geq c - \delta\right) < 0. \tag{3.10}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(U_n \notin \mathcal{O} \mid \{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \leq c + \delta\right) < 0. \tag{3.11}$$

我们将式 (3.8) 中的优化问题 $R_{edge}(c)$ 称为边优化问题。该结果的证明见第 3.4.2 节。证明依赖于第 3.2 节中陈述的、针对带有独立同分布顶点标记的随机正则图的大偏差原理，以及第 3.3 节中陈述的相关吉布斯条件化原理。后者将式 (3.10)–(3.11) 中的 $\mathcal{M}(c)$ 表示为某个关于带标记的 κ-正则树上的测度的优化问题之极小化解，见式 (3.16)。在第 3.4 节中，我们简化后一个优化问题，并证明它具有命题 3.3 所给出的表示。

3.2. **邻域和分量经验测度序列的大偏差原理**。现在我们陈述一个与第 2.1 节中定义的 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$ 值邻域经验测度序列 $\{L_n\}$ 相关的大偏差原理。回顾注 2.1 中定义的 " 真实分布 " $\eta_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$，以及式 (1.3) 中的相对熵泛函。另外，回顾一下， $\pi_\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}^2)$ 表示 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$ 下的边边缘分布，也就是说，当 (τ, X) 的分布为 μ. 时，(X_o, X_1) 的分布。定义 I_1^κ： $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}]) \to [0, \infty]$ 为

$$I_1^\kappa(\mu) := \begin{cases} H(\mu \| \eta_1) - \dfrac{\kappa}{2} H(\pi_\mu \| \pi_{\eta_1}) & \text{if } \pi_\mu \text{ is symmetric,} \\ \infty, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 H 是式 (1.3) 中定义的相对熵。现在我们声称 $H(\pi_\mu \| \pi_{\eta_1}) < \infty$，因此 I_1^κ 定义良好。要理解这一结论为何成立，注意到由于对所有 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\pi_{\eta_1} = \nu \otimes \nu$，都有 $\nu(x) > 0$，可得对所有 μ 都有 $\pi_\mu \ll \pi_{\eta_1}$。结合 π_μ 支持在有限集 $\mathcal{X}^2$ 上这一事实，即可得出该结论。下述结果将在 [34, 定理 3.2]中证明。

定理 3.4。 （邻域经验测度序列 [34, 定理 3.2] 的大偏差原理）。序列 $\{L_n\}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$ 上满足大偏差原理，其速率函数为 I_1^κ. 换言之， I_1^κ:$\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}]) \to [0, \infty]$ 是一个下半连续函数，满足以下条件：

(1)（水平集的紧性）。对于任意 $M < \infty$, $\{\mu : \ I_1^\kappa(\mu) \leq M\}$ 是$\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$的紧子集；*(2)*（大偏差原理下界）。对于任意开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$，我们有

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(L_n \in \mathcal{O}) \geq - \inf_{\mu \in \mathcal{O}} I_1^\kappa(\mu);$$

(3)（大偏差原理上界）。对于任意闭集 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$，我们有

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(L_n \in \mathcal{F}) \leq - \inf_{\mu \in \mathcal{F}} I_1^\kappa(\mu).$$

注记 3.5（速率函数的形式）。此前，已有研究在 [3, 2] 中使用 [5] 引入的彩色构型模型及其在 [11]中的标记版本，建立了这一大偏差原理结果的不同版本。然而，其中得到的速率函数形式包含许多项，这些项均以某些组合量表示。式（3.12）给出的更简洁的速率函数形式对本文的分析至关重要。

3.2.1. 分量经验测度序列的大偏差原理。接下来，我们陈述 $\{U_n\}$. 的大偏差原理。回顾第 3.1.1 节中定义的单模扩张。

定理 3.6（（分量经验测度序列的大偏差原理 [34, 定理 4。13]））。序列 $\{U_n\}$ 在 $\mathcal{P}$（$\mathcal{G}_*[\mathcal{X}]$）上满足大偏差原理，其速率函数为 I^κ. 。此外，I^κ（ρ）$=\infty$，若 $\rho \notin \mathcal{P}$（$\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]$）。此外，对于任意满足 π_μ 为对称的 $\mu \in \mathcal{P}$（$\mathcal{T}_{*,\ 1}^{\kappa}[\mathcal{X}]$），我们有$I_1^\kappa$（$\mu$）$<\infty$，并且

$$I_1^\kappa(\mu) = \min\left\{I^\kappa(\rho) : \rho_1 = \mu\right\}, \quad \textit{and} \quad \mathsf{UGW}_1(\mu) = \arg\min\left\{I^\kappa(\rho) : \rho_1 = \mu\right\}. \tag{3.13}$$

速率函数 I^κ 的显式形式见 [34, 第 4] 节。然而，由于我们的分析中并未用到 I^κ 的这一精确形式，为简洁起见，上一条定理中我们仅陈述了与分析相关的 I^κ 的性质。

3.3. **吉布斯条件化原理**。本节陈述与序列 $\{U_n\}$ 相关的吉布斯条件化原理。令 $\mathcal{A}_1(c)$ 为 $\mathcal{E}(h,\ c)$ 中满足 π_μ 对称的子集，更明确地说，定义为

$$\mathcal{A}_1(c) \coloneqq \begin{cases} \{\mu \in \mathcal{P}\left(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}]\right) : \mathbb{E}_\mu[S_h] \geq c \text{ and } \pi_\mu \text{ is symmetric}\} & \text{if } c > c_{h,\mathtt{ref}}, \\ \{\mu \in \mathcal{P}\left(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}]\right) : \mathbb{E}_\mu[S_h] \leq c \text{ and } \pi_\mu \text{ is symmetric}\} & \text{if } c < c_{h,\mathtt{ref}}. \end{cases} \tag{3.14}$$

此外，定义相应的集合

$$\mathcal{A}(c) \coloneqq \{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \rho_1 \in \mathcal{A}_1(c)\}. \tag{3.15}$$

现在陈述本节的主要结果。

命题 3.7（吉布斯条件化原理）。令 $c \in \mathbb{R}$，并令 $\mathcal{M}$（c）$\subset \mathcal{P}$（$\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]$）为约束优化问题的极小化元集合

$$R(c) := \min_{\rho \in \mathcal{A}(c)} I^\kappa(\rho), \tag{3.16}$$

其中 I^κ 是定理 *3.6* 中 $\{U_n\}$ 的大偏差速率函数。那么，对于任意满足 $\mathcal{M}$（c）$\subset \mathcal{O}$ 的开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$（$\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]$），条件极限 (3.10)-(3.11) 成立。换言之，若 $c > c_{h,\ ref}$（分别地，若 $c < c_{h,\ ref}$），那么在给定 $\{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \geq c - \delta\}$（分别地，$\{\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \leq c - \delta\}$）的条件下，$\{U_n\}$ 渐近地属于 $\mathcal{M}$（c）。

证明。我们的设定满足通常的吉布斯条件化大偏差原理所需的假设；例如参见 [27, 定理 7.1]和 [22, 命题 6]。事实上，以下结论成立：

(1) 根据定理 3.6，分量经验测度 $\{U_n\}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{G}_*[\mathcal{X}])$ 上满足大偏差原理，其速率函数 I^κ 的定义域包含于 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$。(2) 映射 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) \ni \rho \mapsto \mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \in \mathbb{R}$ 是线性且连续的。这由 (2.11) 可直接得出。(3) 约束集 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(c)$ 满足：(a) 根据定理 3.6，$\inf_{\rho\in\mathcal{A}} I^\kappa(\rho) = \inf_{\mu\in\mathcal{A}_1} I_1^\kappa(\mu) < \infty$；(b) $\mathcal{A}$ 是闭的：若 $\rho^{(k)} \to \rho$ 则 $\rho_1^{(k)} \to \rho_1$，因此有界收敛定理推出 $\mathbb{E}_{\rho_1^{(k)}}[S_h] = \mathbb{E}_{\rho_1^{(k)}}[S_h] \to \mathbb{E}_\rho[S_h]$。因此，若对所有 k，都有 $\rho^{(k)} \in \mathcal{A}$，则$\rho \in \mathcal{A}$.

(c) 令 $\delta > 0$ 并定义 $\mathcal{A}_\delta := \{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$: $\mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \geq c - \delta$，且 π_{ρ_1} 是对称的$\}$。那么 $\mathcal{A}_\delta$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$ 中是闭的，并且有：

(i) $\mathcal{A} = \cap_{\delta>0}\mathcal{A}_\delta$. 事实上，若 $\rho \in \mathcal{A}$，则 π_{ρ_1} 是对称的，且 $\mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \geq c$，这意味着对于所有 $\delta > 0.$，$\mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \geq c - \delta$。因此，对于所有 $\delta > 0$，$\rho \in \mathcal{A}_\delta$，从而$\rho \in \cap_{\delta>0}\mathcal{A}_\delta.$。反过来，若对于所有 $\delta > 0$，$\rho \in \mathcal{A}_\delta$，则对于所有 $\delta > 0.$，$\mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \geq c - \delta$。令 $\delta \to 0$，得到 $\mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] \geq c$，由此可知 $\rho \in \mathcal{A}$.

(ii) 对于任意 $\delta > 0$，当 n 足够大时，我们有 $\mathbb{P}(U_n \in \mathcal{A}_\delta) = \mathbb{P}(\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \geq c - \delta) > 0$。事实上，任取 $\rho \in \mathcal{A}_\delta$，由于 π_{ρ_1} 是对称的，根据深度为 $k = 2$ 的引理 3.5] 以及边缘化映射 $\rho_2 \mapsto \rho_1$ 的连续性，存在一列带标记的 κ-正则图 $\{(F_n, x^n)\}$，使得其对应的邻域经验测度 $\ell_n = \frac{1}{n}\sum_{v\in F_n}\delta_{\mathsf{cl}_v(F_n, x^n)}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,1}^\kappa[\mathcal{X}])$ 中收敛到 ρ_1。因此，对于任意固定且足够大的 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\ell_n \in \mathcal{A}_\delta$，并且 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_{L_n}[S_h] \geq c - \delta) \geq \mathbb{P}(L_n = \ell_n) > 0$。

(d) $\mathcal{A}$ 对于所有 $\delta > 0.$ 都包含在 $\mathcal{A}_\delta$ 的内部。事实上，若 $\rho \in \mathcal{A}$ 且 $\rho_k \to \rho$，则由有界收敛定理可得 $\mathbb{E}_{\rho_1^{(k)}}[S_h] \to \mathbb{E}_{\rho_1}[S_h]$，特别地，对于任意 $\delta > 0$，存在 $K_1 < \infty$，使得对所有 $k \geq K_1$，$\mathbb{E}_{\rho_1^{(k)}} \geq \mathbb{E}_{\rho_1}[S_h] - \delta \geq c - \delta$.这意味着，对于任意 $\delta > 0.$，ρ 位于 $\mathcal{A}_\delta$ 的内部

应用 [27, 定理 7.1] 即可推出 (3.10) 成立。采用相同的论证，但分别将 h 和 c 替换为 $-h$ 和 $-c$，同理可得 (3.11)。□

3.4. 优化问题的简化。 现在我们对 (3.16) 中给出的 $R_1(c)$ 的优化问题进行简化。为简便起见，我们仅讨论 $c > c_{h,\,\mathtt{ref}}$ 的情形；$c < c_{h,\,\mathtt{ref}}$ 的情形可类似处理。

3.4.1. 化简为边缘边际分布上的优化。 首先注意到，(3.14) 中定义的集合 $\mathcal{A}_1(c)$可以利用(2.22)中定义的集合 $\mathcal{B}_h(c)$重写如下：

$$\mathcal{A}_1(c) = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_\mu \in \bigcup_{c'\geq c}\mathcal{B}_h(c')\right\}. \tag{3.17}$$

此外，利用(3.13)中的关系，注意到(3.16)可化简为

$$R(c) = \min_{\mu\in\mathcal{A}_1(c)} I_1^\kappa(\mu). \tag{3.18}$$

接下来，使用(3.17)，将(3.12)中的 I_1^κ的定义代入(3.18)，并利用 $\pi_{\eta_1} = \nu\otimes\nu$这一由注 2.1 得出的事实，可得到

$$R(c) = \min_{c'\geq c}\min_{\pi\in\mathcal{B}_h(c')}\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]):\pi_\mu=\pi} I_1^\kappa(\mu) \tag{3.19}$$

$$= \min_{c'\geq c}\min_{\pi\in\mathcal{B}_h(c')}\left[\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]):\pi_\mu=\pi} H(\mu\|\eta_1) - \frac{\kappa}{2}H(\pi||\nu\otimes\nu)\right]. \tag{3.20}$$

注意到，(3.20)中方括号内的极小化问题是一个带线性约束的凸问题。下一个引理给出了其显式解。其证明推迟至附录 C。

引理 3.8。 对于任意 $\pi \in \mathcal{P}_{sym}(\mathcal{X}^2)$，在(3.5) 中定义的测度 $\mu^{(\pi)}$ 是集合 $\{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_\mu = \pi\}$ 中泛函 $H(\cdot\|\eta_1)$ 的唯一极小化元，因此也是 $I_1^\kappa(\cdot)$的唯一极小化元。此外，我们有

$$\min_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]):\pi_\mu=\pi} I_1^\kappa(\mu) = I_1^\kappa(\mu^{(\pi)}) = J_\kappa^\nu(\pi), \quad \forall\pi \in \mathcal{P}_{sym}(\mathcal{X}^2), \tag{3.21}$$

其中 J_κ^ν 的定义见 (3.3)。

3.4.2. 进一步的化简。 结合 (3.19) 和引理 3.8，立即可得

$$R(c) = \min_{c' \geq c} \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c')} J_\kappa^\nu(\pi). \tag{3.22}$$

我们现在通过证明右侧的最小值必然在 $c' = c.$ 处取得，进一步将其归约为优化问题 (3.22)。这一直观上很容易理解，因为它只是说明，实现所需非典型性的最廉价方式是采用尽可能小的偏离。不过，证明过程相当技术化且较为间接，因此我们将其证明推迟到附录 D。

引理 3.9。 对于 $c > c_{h,\ ref}$，

$$\min_{c' \geq c} \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c')} J_\kappa^\nu(\pi) = \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c)} J_\kappa^\nu(\pi). \tag{3.23}$$

同样，对于 $c < c_{h,\ ref}$，

$$\min_{c' \leq c} \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c')} J_\kappa^\nu(\pi) = \min_{\pi \in \mathcal{B}_h(c)} J_\kappa^\nu(\pi); \tag{3.24}$$

3.4.3. 命题 *3.3* 的证明。 该结果由吉布斯条件化原理（命题 3.7）、恒等式 (3.20)、引理 3.8 和引理 3.9 共同推出。□

4. Characterization of minimizers

鉴于命题 3.3，要确定条件极限，只需分析式 (3.8) 中所定义的非凸优化问题 $R_{edge}(c)$ 的极小测度集合 $\mathcal{M}_{edge}(c)$。本节刻画更大的局部极小值点，其中包括位于单纯形 $\mathcal{P}(\mathcal{X}^2)$ 内部的点，或者等价地说，在 $\mathcal{X}^2$ 上具有满支撑的点，也包括位于单纯形边界上的点。在第 4.1 节中，我们利用与无限正则树上因子模型相关联的腔方程，建立内部局部极小值点与非退化 TIS 吉布斯测度之间的联系。在第 4.2.1 节中，我们给出两个例子，说明局部极小值点可能位于边界上，甚至可能是唯一的全局极小值点；在这种情况下，它们对应于退化的 TIS 吉布斯测度（即其顶点边缘分布支撑于真子集 $\mathcal{X}^{\downarrow} \subsetneq \mathcal{X}$ 上）。这说明了为何定理 2.24 中需要将退化 TIS 吉布斯测度纳入潜在条件极限集合 $\mathfrak{G}$。在第 4.2.2 节中，我们证明每个边界局部极小值点都对应于某个退化 TIS 吉布斯测度。我们在第 4.3 节结合这些结果，证明定理 2.24。

我们首先给出若干术语的明确定义。回顾可知，优化问题 $R_{edge}(c)$ 的目标函数 J_κ^ν与约束集 $\mathcal{B}_h(c)$分别如 (3.3) 和 (2.22) 所定义。

定义 4.1（边测度优化问题的局部极小化子）**.** 称元素 $\pi_* \in \mathcal{B}_h(c)$ 为边优化问题 $R_{edge}(c)$ 的局部极小值点，若存在 $\mathcal{B}_h(c)$ 中包含 π_*的相对开集合 $\mathcal{U}$，使得对任意 $\pi \in \mathcal{U}.$ 均有 $J_\kappa^\nu(\pi_*) \leq J_\kappa^\nu(\pi)$

定义 4.2。给定任意可数离散集 $\mathcal{Z}$ 和 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$，若对于所有 $z \in \mathcal{Z}$，$\mu(z) > 0$，则称 μ 位于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的内部。否则，称 μ 位于 $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ 的边界上。所有内部的概率测度以及所有边界上的概率测度分别记为

$$\mathcal{P}^+(\mathcal{Z}) \coloneqq \{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}) : \mu(z) > 0 \, \forall z \in \mathcal{Z}\}; \tag{4.1}$$

$$\mathcal{P}^0(\mathcal{Z}) \coloneqq \{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}) : \exists z_* \in \mathcal{Z} \text{ s.t. } \mu(z_*) = 0\}. \tag{4.2}$$

我们还定义对称测度的类似子集如下:

$$\mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \coloneqq \left\{\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) : \pi(x,z) > 0 \,\forall x,z \in \mathcal{X}\right\}; \tag{4.3}$$

$$\mathcal{P}^{0}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \coloneqq \left\{\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) : \exists\, x,z \in \mathcal{X} \text{ such that } \pi(x,z) = 0\right\}. \tag{4.4}$$

我们将位于 $\mathcal{P}(\mathcal{X}^2)$ 内部/边界的（局部）极小化元称为内部/边界极小值。

4.1. Fr 从内部局部极小值点到非退化的TIS 吉布斯测度。

命题 4.3 (内部局部极小值点是TIS 吉布斯测度的边缘分布)。 固定 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$。令 h 为任意边势，并固定 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$。那么，对于边优化问题(3.8)的每个内部局部极小值点π_*，都存在 $\beta \in \mathbb{R}$和 $\boldsymbol{\rho} \in$TIS 吉布斯测度$^{\exp\{\beta h\},\ T^{\kappa}\qquad \nu}$使得$\pi_{\boldsymbol{\rho}_1} = \pi_*$。

证明。 首先，由 (3.3) 及假设 $\nu \in \mathcal{P}^{+}(\mathcal{X})$ 可知，边优化问题 (3.8) 的目标函数J^{ν}_{κ}: $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \to \mathbb{R}$可改写为

$$J^{\nu}_{\kappa}(\pi) = (\kappa - 1)H(\pi^o) - \frac{\kappa}{2}H(\pi) - \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi^o(x) \log \nu(x), \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right).$$

设 π_* 是问题 (3.8) 的一个内部局部极小值。现在我们验证调用 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 定理（见 [6, 定理 21.1]）所需的条件，以求解约束优化问题 (3.8)。首先注意到，由于 $\pi_* \in \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$, J^{ν}_{κ} 在 π_* 的某个邻域内是光滑的，并且 H, π^0 以及映射 $\pi \to H(\pi^o)$ 在 $\mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$上均为光滑的。接下来，我们检查 π_* 是一个正则点，也就是说，活跃约束（即取等号的约束）函数的梯度线性无关。由于 $\pi_* \in \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$, 活跃约束为

$$\sum_{x,z \in \mathcal{X}} \pi(x,z) = 1, \quad \sum_{x,z \in \mathcal{X}} \pi(x,z)h(x,z) = c \quad \text{and} \quad \pi(x,z) - \pi(z,x) = 0, \quad \forall x < z \in \mathcal{X},$$

其梯度分别可由 $|\mathcal{X}|\times|\mathcal{X}|$ 矩阵$[1]_{x,\ z\in\mathcal{X}}$、 $[h(x,\ z)]_{x,\ z\in\mathcal{X}}$和 $[\xi_{x'z'}(x,\ z)]_{x,\ z\in\mathcal{X}}$表示，对每个 $x' < z' \in \mathcal{X}$均成立，其中

$$\xi_{x'z'}(x,z) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } x = x', z = z'; \\ -1 & \text{if } x = z', z = x'; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明它们线性无关，设 $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\{\gamma_{x'z'}\}_{x'<z'\in\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}$ 满足

$$\alpha[1] + \lambda[h] + \sum_{x'<z' \in \mathcal{X}} \gamma_{x'z'}[\xi_{x'z'}] = [0].$$

接着，结合 $[h]^T = [h]$这一事实，由于 h 是对称的，并且根据 $\xi_{x'z'}$的定义， $[\xi_{x'z'}] + [\xi_{x'z'}]^T = [0]$，可得 $2\alpha[1] + 2\lambda[h] = [0]$。然而，由于 h 不是常函数（否则 $(\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) = \emptyset$），我们知道 $\alpha = \lambda = 0$，因此对所有 $x' < z' \in \mathcal{X}$都有 $\gamma_{x'z'} = 0$。所以，KKT 定理蕴含存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得 π_* 是映射的一个临界点

$$\mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \ni \pi \mapsto J^{\nu}_{\kappa}(\pi) - \beta\kappa \left\langle h, \pi \right\rangle. \tag{4.5}$$

¯ ¯将 [14, 命题1.7] 与 d、 Δ、 $\boldsymbol{h}$、 h、 h、 ψ、 ψ 以及其中分别对应于 κ、 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$, π、 π^0、 ℓ、 ν、函数exp $\{\beta h\}$和映射 $\pi \mapsto -J^{\nu}_{\kappa}(\pi) + \beta\kappa \left\langle h, \pi \right\rangle$的映射 Φ 相结合加以应用，表明(4.5)的任意临界点 π_* 可表示为

$$\pi_*(x,z) \propto \ell(x) \exp\{\beta h(x,z)\} \ell(z), \quad \forall x,z \in \mathcal{X},$$

¯其中 $\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$是(2.19)中CAV递推在$(\psi,\psi) = (\exp\{\beta h\},\nu)$下的不动点。因此，由引理2, 21 π_* 是 T^κ 上规范为$(\exp\{\beta h\},\nu)$且（齐次）边界律为 ℓ的TIS吉布斯测度的边边缘分布。□

注 4.4. 最后一个命题中的 β 的取值对应于优化问题中的拉格朗日乘子，如式 (4.5) 所示。利用边势 h 的结构方面的进一步知识，可以确定特定模型中的这些取值。例如，第 6 节针对双自旋系统和共识边势进行了此类分析。

注 4.5. 结合命题 4.3、命题 3.3 中的 (3.9) 以及引理 3.2，我们看到，边优化问题 $R_{edge}(c)$ 的每个内部局部极小值 π_* 都对应于一个非退化的 TIS吉布斯测度 $\boldsymbol{\rho}$ 。此外，如果 π_* 是 $R_{edge}(c)$ 的唯一（全局）极小值点，即如果 $\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\pi_*\}$，那么相应的 $\boldsymbol{\rho}$ 将是 $\{U_n\}$的条件极限。

然而，一般而言， $R_{edge}(c)$ 可能没有唯一的（全局）极小值；即便存在唯一的全局极小值，该极小值也未必位于内部，正如第 4.2.1 节的例 4.7 所示。

4.2. **边界极小值的存在及其与退化TIS 吉布斯测度的联系**。 下面给出两个例子，说明边界局部极小值和全局极小值的存在性。

4.2.1. 边界极小值的存在性与退化条件极限。

例 4.6 （即使标记分布均匀，边界局部极小值仍然存在）。 令 $\mathcal{X} = [q]$ 对于 $q \geq 2$, $\nu =$ 均匀分布于 $\mathcal{X}$，且 $\kappa \geq 3$。考虑由下式定义的边势 h

$$h(x,z) := \begin{cases} 1 & \text{if } (x,z) = (q,q); \\ -1 & \text{if } x = q \text{ or } z = q \text{ and } (x,z) \neq (q,q); \\ 0.5 & \text{if } x,z \in [q-1], \end{cases}$$

其约束值为 $c = 0.5\kappa \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) = (-\kappa, \kappa)$。那么，正如 E.1 节所证明的，

$$\pi_*(x,z) := \begin{cases} 0 & \text{if } x = q \text{ or } z = q; \\ (q-1)^{-2} & \text{if } x,z \in [q-1]; \end{cases}$$

是（3.8）中边优化问题的一个边界局部极小值点。

例4.7 （即使对于双自旋系统，也存在边界全局极小值点）。 设 $\mathcal{X} = \{1,-1\}$,$\nu(1) = 1/3$, $\nu(-1) = 2/3$ 和 $\kappa = 5$。考虑由下式定义的边势:

$$h(x,z) := \begin{cases} 7 & \text{if } (x,z) = (1,1); \\ -5 & \text{if } (x,z) = (1,-1) \text{ or } (x,z) = (-1,1); \\ 4 & \text{if } (x,z) = (-1,-1); \end{cases} \tag{4.6}$$

其约束值为 $c = \kappa \cdot h(-1, -1) = 20 \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$。然后，如 E.2.2节所示，

$$\pi_* := \delta_{(-1,-1)}$$

是边优化问题 $R_{edge}(c)$的唯一（全局）极小化元。

此外，利用命题 4.3 的 (3.9)，可得 $\mathcal{M}(c) = \left\{\mathrm{UGW}_1(\mu^{(\delta_{(-1,-1)})}) = \delta_{T^{\kappa,\ -}}\right\}$。结合命题 3.7，我们得出 $\{U_n\}$ 给定 $\mathcal{E}_n(c)$ 收敛到 $\delta_{T^{\kappa,\ -}}$，这是一个约束值为 $\mathcal{X}^{\downarrow} = \{-1\}$ 的退化 TIS吉布斯测度。

注 4.8 （一种新型退化）。 例4.7 中出现的退化不同于定理2.12(2) 中的退化，后者发生在 $p \neq 1/2$, h 是共识函数m 且约束值 $c = \kappa = \kappa m_{\max}$ 位于 $(\kappa m_{\min}, \kappa m_{\max})$ 的边界上时。在后一种情况下，退化条件极限可以用冻结温度为 $\beta = \infty$的伊辛测度来描述。相比之下，即使允许冻结温度（$\beta = \infty$ 或 $-\infty$），例4.7 中的退化条件极限也不对应于任何状态空间为 $\mathcal{X}$、规范为 $(\exp\{\beta h\}, \nu)$ 的 TIS吉布斯测度。这是因为，当 $\beta = -\infty$ 时，具有冻结温度的吉布斯测度的边缘边际分布将以 $\arg\min_{x,\, z\in\mathcal{X}} h(x, z)$ 为支撑；而当 $\beta = \infty$ 时，则以 $\arg\max_{x,\, z\in\mathcal{X}} h(x, z)$ 为支撑，但约束值为 $c = \kappa \langle h, \pi_* \rangle \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$。

4.2.2. 从边界局部极小值到退化 TIS 吉布斯测度。 例4.7展示了退化 TIS 吉布斯测度作为潜在条件极限的出现。本节将更系统地探讨边优化问题的边界局部极小值与定理 2.24 $\mathfrak{G}$中的退化 TIS 吉布斯测度之间的联系。

我们首先计算 J_κ^ν在 $\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)$中的“导数”。回顾 J_κ^ν在 (3.3) 中的定义， J_κ^ν 表示为若干相对熵之和，这些相对熵在边界附近以$\varepsilon \log \varepsilon$ 的速率发散，因此这里适当的缩放应为 $|\varepsilon \log \varepsilon|$。

引理 4.9。 固定 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 和 $\kappa \geq 2$。给定$\pi \in \mathcal{P}_{sym}(\mathcal{X}^2)$，对于任意$\xi \in \mathcal{P}_{sym}(\mathcal{X}^2)$，定义

$$\pi_\varepsilon = \pi_\varepsilon[\xi] := (1-\varepsilon)\pi + \varepsilon\xi, \quad \forall \varepsilon \in [0,1].$$

Then

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{|\varepsilon \log \varepsilon|} \left(J_\kappa^\nu(\pi_\varepsilon) - J_\kappa^\nu(\pi)\right) = (\kappa - 1) \sum_{x\in\mathcal{X}} \xi^o(x) \mathbf{1}_{\{\pi^o(x)=0\}} - \frac{\kappa}{2} \sum_{x,z\in\mathcal{X}} \xi(x,z) \mathbf{1}_{\{\pi(x,z)=0\}}. \quad (4.7)$$

证明。 这很容易通过直接计算得出（例如，参见 [15, 命题 3.2]的证明）。 □

下一个引理表明，只需对约束值 c 作出一个最小假设，我们就可以排除约束集 $\mathcal{B}_h(c)$ 中甚至不存在单个内部概率测度的情况。

引理 4.10. 任取标记分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$、边势 h 和 $\kappa \geq 2$。当且仅当 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$ 时，$\mathcal{P}^+_{sym}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$。此外，如果 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) \setminus$值域$(\kappa h)$，那么对于任意满足 $\mathcal{P}_{sym}\left(\left(\mathcal{X}^\downarrow\right)^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$ 的 $\mathcal{X}^\downarrow \subseteq \mathcal{X}$，都有 $\mathcal{P}^+_{sym}\left(\left(\mathcal{X}^\downarrow\right)^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$。

证明。 我们先证明引理第一个断言的“仅当”方向。将 $\mathcal{X}^2$划分为由下式定义的集合 $\mathcal{H}_>(c)$ $\mathcal{H}_<(c)$ 和 $\mathcal{H}_=(c)$：

$$\mathcal{H}_{\gtreqless}(c) := \left\{(x,z) \in \mathcal{X}^2 : \kappa h(x,z) \gtreqless c\right\}.$$

由 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$ 可知， $\mathcal{H}_>(c) \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{H}_<(c) \neq \emptyset$. 。令 ξ^+ 和 ξ^- 分别为 $\mathcal{H}_>(c)$ 和 $\mathcal{H}_<(c)$ 上均值分别为 $\langle \kappa h, \xi^+ \rangle = c^+ > c$ 和 $\langle \kappa h, \xi^- \rangle = c^- < c$ 的均匀测度。注意，由于 h 对称， ξ^+ 和 ξ^- 均属于 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)$。此外，由于$c^+ > c > c^-$，存在 $\alpha \in (0,1)$，使得 $\alpha c^+ + (1-\alpha) c^- = c$。于是， $\xi := \alpha\xi^+ + (1-\alpha)\xi^-$ 满足 $\langle \kappa h, \xi \rangle = c$。若 $\mathcal{H}_=(c) = \emptyset$，则 ξ属于 $\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c)$。否则， ξ与 $\mathcal{H}_=(c)$ 上的均匀测度的平均值将属于 $\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c)$。无论哪种情况，$\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$，因此引理第一个断言的“仅当”方向得证。

对于第一个断言的“若”方向，注意到若 $c \notin (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$，那么我们甚至有$\mathcal{P}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c) = \emptyset$。事实上，若 $c = \kappa h_{\max}$，则对任意 $\xi \in \mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)$，都有 $\langle \kappa h, \xi \rangle < \kappa h_{\max}$，因此 $\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2) \cap \mathcal{B}_h(c) = \emptyset$，矛盾。

现在转而证明第二个断言。假设 $c \in (\kappa h_{\min},\ \kappa h_{\max}) \setminus$ 值域(κh)，且 $\mathcal{X}^{\downarrow} \subseteq \mathcal{X}$满足 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\left(\mathcal{X}^{\downarrow}\right)^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$。于是可得

$$c \in [\kappa \cdot \min_{x,z\in\mathcal{X}^{\downarrow}} h(x,z), \kappa \cdot \max_{x,z\in\mathcal{X}^{\downarrow}} h(x,z)] \setminus \mathsf{Range}(\kappa h) \subseteq (\kappa \cdot \min_{x,z\in\mathcal{X}^{\downarrow}} h(x,z), \kappa \cdot \max_{x,z\in\mathcal{X}^{\downarrow}} h(x,z)).$$

因此，根据本引理的第一条断言，可得 $\mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\left(\mathcal{X}^{\downarrow}\right)^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c) \neq \emptyset$。至此，引理得证。□

下一个引理表明，对于任意自旋系统，任何边界局部极小值点的边缘分布都必须在至少一个自旋取值上赋予零质量。

引理 *4.11*（边界局部极小值点必定退化）。设 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 且 $\kappa \geq 2$。固定一个边势 h 和 $c \in \mathbb{R}$，使得 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$。若 π_* 是式 *(3.8)* 中边优化问题 $R_{edge}(c)$ 的边界局部极小值点，则 $\pi_*^o \in \mathcal{P}^0(\mathcal{X})$。此外，若进一步假设 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) \setminus \mathit{Range}(\kappa h)$，那么对于式 *(3.8)* 中边优化问题 $R_{edge}(c)$ 的任意边界局部极小值点 π_*，存在唯一的非空集合 $\mathcal{X}^{\downarrow} \subsetneq \mathcal{X}$，使得

$$\pi_* \in \mathcal{P}^{+}_{sym}\left(\left(\mathcal{X}^{\downarrow}\right)^2\right).$$

证明。固定边优化问题的一个边界局部极小值点 π_*，以及 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$。我们通过反证法证明第一个断言。反设，对于所有 $x \in \mathcal{X}$，都有 $\pi_*^o(x) > 0$。由引理 4.10 以及 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$ 这一事实，可知存在 $\xi \in \mathcal{B}_h(c) \cap \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$。于是令 $\pi_\varepsilon := (1-\varepsilon)\pi_* + \varepsilon\xi$，并注意到 $\pi_\varepsilon \in \mathcal{B}_h(c) \cap \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$；由引理 4.9，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{|\varepsilon \log \varepsilon|}\left(J^{\nu}_{\kappa}(\pi_\varepsilon) - J^{\nu}_{\kappa}(\pi_*)\right) &= (\kappa-1)\sum_{x\in[q]} \xi^o(x)\mathbf{1}_{\{\pi_*^o(x)=0\}} - \frac{\kappa}{2}\sum_{x,z\in[q]} \xi(x,z)\mathbf{1}_{\{\pi_*(x,z)=0\}} \\ &= -\frac{\kappa}{2}\sum_{x,z\in[q]} \xi(x,z)\mathbf{1}_{\{\pi_*(x,z)=0\}} \\ &< 0,\end{aligned}$$

其中第二行用到了我们的假设：对于所有 $x \in \mathcal{X}$，都有 $\pi_*^o(x) > 0$；最后一行则用到了 $\xi \in \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 和 $\pi_* \in \mathcal{P}^{0}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$。这与 π_* 是边优化问题的局部极小值点这一假设矛盾，因此第一个断言得证。

第一个断言意味着，若 $\mathcal{X}^{\downarrow} := \mathsf{supp}\ \pi_*^o$，则 $\mathcal{X}^{\downarrow} \subsetneq \mathcal{X}$；显然，$\pi_*(x,\ z) = 0 \mathsf{if} x \notin \mathcal{X}^{\downarrow} \mathsf{or}$ $z \notin \mathcal{X}^{\downarrow}$，因此 $\pi_* \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\left(\mathcal{X}^{\downarrow}\right)^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c)$。于是，若 $c \in (\kappa h_{\min},\ \kappa h_{\max}) \setminus \mathsf{Range}(\kappa h)$，则由引理 4.10 可知 $\pi_* \in \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\left(\mathcal{X}^{\downarrow}\right)^2\right)$。这就证明了第二个断言。 □

4.3. **定理 2.24 的证明**。固定任意的边势 h、标记分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 以及 $c \in (\kappa h_{\min},\ \kappa h_{\max}) \setminus \mathsf{Range}(\kappa h)$，使得 $c \neq c_{h,\ \mathtt{ref}}$。根据定义 2.17 和命题 3.7 中的吉布斯条件化原理，只需证明 $\mathfrak{G}(c)$ 包含集合 $\mathcal{M}(c)$，其中该集合由 (3.16) 中关于 $R(c)$ 的极小化问题的极小化元构成。应用命题 3.3 可得

$$\mathcal{M}(c) = \{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi)}) : \pi \in \mathcal{M}_{edge}(c)\}.$$

此外，引理 4.11 表明，对于每个 $\pi_* \in \mathcal{M}_{edge}(c)$，都存在 $\mathcal{X}^{\downarrow} \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\pi_* \in \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^{\downarrow 2}\right) \cap \mathcal{B}_h(c)$。结合恒等式 $J^{\nu^{\downarrow}}_{\kappa}(\pi) = J^{\nu}_{\kappa}(\pi) + \log \nu(\mathcal{X}^{\downarrow})$（该式对任意 $\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^{\downarrow 2}\right)$ 均由 (3.3) 得出），以及 π_* 是映射 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \cap \mathcal{B}_h(c)$ 的一个（全局）极小值这一事实

$\pi \mapsto J_\kappa^\nu(\pi)$，可知 π_*也必然是受限映射$\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^{\downarrow 2}\right) \cap \mathcal{B}_{h^\downarrow}(c) \ni \pi \mapsto J_\kappa^{\nu^\downarrow}(\pi)$的一个（全局）极小值，其中边势为 $h^\downarrow := h\,|_{\mathcal{X}^\downarrow \times \mathcal{X}^\downarrow}$，参考测度为$\nu^\downarrow = \nu(\cdot \mid \mathcal{X}^\downarrow)$。结合命题 4.3 可推出

$$\mathcal{M}_{edge}(c) \subseteq \bigcup_{\mathcal{X}^\downarrow \subseteq \mathcal{X}} \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \left\{ \pi_{\rho_1} : \rho \in \mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp\{\beta h^\downarrow\}, \nu^\downarrow} \right\} \bigcap \mathcal{B}_h(c).$$

另一方面，引理 3.2 表明，每个 $\rho \in \mathsf{TIS}$ 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\exp\{\beta h^\downarrow\}\ \nu^\downarrow}$，都满足 $\rho = \mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi_{\rho_1})})$。结合最后两个公式以及 (2.23) 中 $\mathfrak{G}(c)$ 的定义，即可证明该定理。

5. Sufficient conditions for non-degeneracy of conditional limits

第 5.1 节介绍了一个充分条件，使自旋系统具有非退化的条件极限。第 5.2 节验证了具有均匀标记分布的双自旋系统满足该条件。接着，如第 5.3 节所示，定理 2.27 的证明可直接作为推论得出。

5.1. 非退化的一个充分条件。

命题 5.1 (（全局）极小化元位于内部时的条件极限)。 设标记空间 $\mathcal{X}$、标记分布 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$、边势 h 和约束值 $c \neq c_{h,\ ref}$满足以下条件：

$$c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max}) \quad and \quad \mathcal{M}_{edge}(c) \subseteq \mathcal{P}^+_{sym}\left(\mathcal{X}^2\right), \tag{5.1}$$

其中， $\mathcal{P}^+_{sym}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 是式(4.3)中引入的 $\mathcal{X}^2$ 上的内部对称测度集合，而 $\mathcal{M}_{edge}(c)$ 是(3.8)中优化问题 $R_{edge}(c)$ 的极小化元集合。于是， $\{U_n\}$ 给出的$\widehat{}$序列 $\mathcal{E}_n(h, c)$ 渐近地属于(2.24)中定义的集合 $\mathfrak{G}(c)$ 。

证明。 设 $\mathcal{M}(c)$为针对(3.16)中的 $R(c)$的极小化问题的极小化元集合。根据定义 2.17 和命题 3.7 中的吉布斯条件化原理，只需证明$\backsim\mathcal{M}(c)$包含于 $\mathfrak{G}(c)$。为此，首先应用命题 3.3 的(3.9)，然后利用假设 $\mathcal{M}_{edge}(c) \subseteq \mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$、事实 $\mathcal{M}_{edge}(c) \subseteq \mathcal{B}_h(c)$以及命题 4.3，最后调用引理 3.2，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(c) &= \{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi)}) : \pi \in \mathcal{M}_{edge}(c)\} \\
&\subseteq \left\{ \mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi_{\rho_1})}) : \rho \in \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp\{\beta h\}, \nu} \right\} \bigcap \{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_{\rho_1} \in \mathcal{B}_h(c)\} \\
&= \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathsf{TISGM}_{T^\kappa}^{\exp\{\beta h\}, \nu} \bigcap \{\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}]) : \pi_{\rho_1} \in \mathcal{B}_h(c)\}.
\end{aligned}$$

$\widehat{}$由于最后一个公式的右端与 $\mathfrak{G}(c)$ 相同，因此这就证明了该命题。 □

注5.2. 鉴于上一个命题，要证明猜想 2.28，只需证明具有均匀标记分布的多自旋系统满足命题 5.1 中的 (5.1)；等价地，对于所有 h 和有效的 c，任意（全局） $\mathcal{M}_{edge}$ 都位于内部。

在下面的命题 5.3 中，我们验证命题 5.1 的 (5.1) 对具有均匀标记分布的双自旋系统成立。自然会问，将标记分布限制为均匀是否必要。定理2.12(1)表明，对于某些以 $h = m$ 为共识泛函的双自旋系统，即使标记分布并非均匀，该条件仍然成立。然而，由例4.7可见，若希望该条件对所有 h 及可容许的 c均成立，则限制为均匀标记分布确实可能是必要的。

5.2. **某些双自旋模型中猜想的验证。**

命题 5.3 （极小化元位于内部的情形）**.** 设 $|\mathcal{X}| = 2$ 与 $\nu =$ 均匀分布$(\mathcal{X})$。对任意边势 h 及 $c \in (\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$，由(3.8)定义的极小化元集合 $\mathcal{M}_{edge}(c)$ 满足

$$\mathcal{M}_{edge}(c) \subseteq \mathcal{P}^{+}_{sym}\left(\mathcal{X}^2\right). \tag{5.2}$$

特别地，当 $|\mathcal{X}| = 2.$ 时，猜想 *2.28* 成立。

注 5.4. 请注意，当 c 位于区间 $(\kappa h_{\min}, \kappa h_{\max})$ 的边界 上时，极小点位于内部这一性质 (5.2) 未必成立。例如，取 $\mathcal{X} = \{1, -1\}$ 和边势 h，使得对于所有满足 $(x, z) \neq (1, 1)$ 的情形， $h(1,1) > h(x, z)$。若 $c = \kappa h_{\max} = \kappa h(1, 1)$，则 $\mathcal{B}_h(c) = \left\{\delta_{(1,1)}\right\}$。因此， $\delta_{(1,1)}$ 是唯一极小化元，但 $\delta_{(1,1)} \notin \mathcal{P}^{+}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$。

如例 4.6 所示，即使对于命题 5.3 中考虑的模型子类，局部极小值点也未必位于内部。在第 5.2.2 节中，我们得到了局部极小值点的一个刻画，并在第 5.2.3 节中利用这一刻画证明边界局部极小值不可能是全局极小点，从而证明了命题 5.3。这些论证用到了第 5.2.1 节中引入的双自旋系统优化问题的重新参数化。

5.2.1. 双自旋模型的边优化问题的重新参数化。当 $|\mathcal{X}| = 2$ 时，$\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 的元素是定义在四维空间上的对称概率测度，因此只有两个自由度。为明确起见，以下假设 $\mathcal{X} = \{1, -1\}$，并将 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 重新参数化如下：

$$\pi = \pi[s, t] \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right), \qquad (s, t) \in \Delta := \{[s', t'] \in [0, 1]^2 : s' \geq t', s' + t' \leq 1\}, \tag{5.3}$$

with

$$\pi(1, 1) = s - t, \quad \pi(1, -1) = \pi(-1, 1) = t, \quad \pi(-1, -1) = 1 - s - t. \tag{5.4}$$

请注意，在此参数化下，我们有 $\pi^o(1) = s$，其中 π^o 是 π的边缘分布，定义见第 1.4 节。因此， $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$ 上的任意泛函或子集都可以表示为 Δ上的泛函或子集。特别地，对于式 (3.3) 中的目标函数，我们令（对重新参数化后的版本沿用相同记号）

$$J^{\nu}_{\kappa}(s, t) \coloneqq J^{\nu}_{\kappa}(\pi[s, t]), \quad \forall (s, t) \in \Delta, \tag{5.5}$$

其显式形式为

$$J^{\nu}_{\kappa}(s, t) = \left(s \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) - \log\left(2\nu(-1)\right)\right) + J^{(2)}_{\kappa}(s, t), \quad \forall (s, t) \in \Delta, \tag{5.6}$$

其中 $J^{(2)}_{\kappa}(s, t) \coloneqq J^{\mathsf{Unif}(\mathcal{X})_{\kappa}}(\pi[s, t])$ 等于

$$\begin{aligned} J^{(2)}_{\kappa}(s, t) = {} & \log 2 - (\kappa - 1)\left(s \log s + (1 - s)\log(1 - s)\right) \\ & + \frac{\kappa}{2}\left((s - t)\log(s - t) + 2t \log t + (1 - s - t)\log(1 - s - t)\right), \quad \forall (s, t) \in \Delta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

为后续之用，定义 Δ的内部为

$$int(\Delta) \coloneqq \left\{(s', t') \in (0, 1)^2 : s' > t', s' + t' < 1\right\}. \tag{5.8}$$

于是我们有

$$\partial_s J^{(2)}_{\kappa}(s, t) = (1 - \kappa)\log\left(\frac{s}{1 - s}\right) + \frac{\kappa}{2}\log\left(\frac{s - t}{1 - s - t}\right), \quad \forall (s, t) \in int(\Delta) \tag{5.9}$$

$$\partial_t J^{(2)}_{\kappa}(s, t) = -\frac{\kappa}{2}\log\left(\frac{(s - t)(1 - s - t)}{t^2}\right), \quad \forall (s, t) \in int(\Delta). \tag{5.10}$$

最后，请注意，约束集 $\mathcal{B}_h(c)$ 可以重新参数化为

$$\{(s,t)\in\Delta:(h(1,1)-h(-1,-1))s+h(-1,-1)-\frac{c}{\kappa}=(h(1,1)+h(-1,-1)-2h(1,-1))t\}. \quad (5.11)$$

因此，如果 $h(1,1)+h(-1,-1)-2h(1,-1)\neq 0$，则有

$$\mathcal{B}_h(c)=\{(s,t)\in\Delta:t=w(h)s\},\quad w(h):=\frac{h(1,1)-h(-1,-1)}{h(1,1)+h(-1,-1)-2h(1,-1)}, \quad (5.12)$$

其中 w（h）称为约束线段的斜率。

5.2.2. 双自旋系统的边界局部极小值的刻画。

引理 5.5（边界局部极小值的刻画）。设 $\mathcal{X}=\{1,-1\}$ 和 ν =均匀分布（$\mathcal{X}$）。给定边势 h 和 $c\in$（$\kappa h_{\min},\kappa h_{\max}$），当且仅当存在边界局部极小值点 π_*，使其属于（3.8）中的边优化问题 R_{edge}（c），则

$$h(1,1)+h(-1,-1)-2h(1,-1)\neq 0,$$

并且，在（5.12）中定义的约束线段 $w=w$（h）的斜率与值 c 满足以下性质之一：

$$\begin{cases}-\dfrac{\kappa-2}{\kappa}<w<0 \quad and \quad c=\kappa h(1,1);\\ 0<w<\dfrac{\kappa-2}{\kappa} \quad and \quad c=\kappa h(-1,-1).\end{cases} \quad (5.13)$$

此外，当满足 (5.13) 时，π_* 是唯一的，并明确表示为

$$\pi_*=\begin{cases}\delta_{(1,1)} & if\ -\dfrac{\kappa-2}{\kappa}<w<0;\\ \delta_{(-1,-1)} & if\ 0<w<\dfrac{\kappa-2}{\kappa}.\end{cases} \quad (5.14)$$

证明。固定 $c\in(\kappa h_{\min},\kappa h_{\max})$。根据引理 4.10，$\mathcal{B}_h(c)\cap\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)\neq\emptyset$；根据引理 4.11，边优化问题的任意边界局部极小值 π_* 均满足 $\pi_*^o\in\mathcal{P}^0(\mathcal{X})$。由于$\mathcal{X}=\{1,-1\}$，唯一的候选边界局部极小值为 $\delta_{(1,1)}$ 和 $\delta_{(-1,-1)}$。我们重点考虑 $\pi_*=\delta_{(-1,-1)}$的情形，另一种情形利用对称性可以完全类似地分析。利用 (5.4) 中的参数化，我们得到 $\pi_*=\pi[0,0]$。此外，当且仅当 $h(-1,-1)=\kappa c$时，(0，0) 属于 (重新参数化的) 约束集 $\mathcal{B}_h(c)$，其中约束集由 (5.11) 给出；在此情况下，约束集化为

$$\{(s,t)\in\Delta:(h(1,1)-h(-1,-1))s=(h(1,1)+h(-1,-1)-2h(1,-1))t\}.$$

如果 $h(1,1)+h(-1,-1)-2h(-1,1)=0$，那么约束集变为 $\{s=0\}\cap\Delta=\{0,0\}$。根据 (5.3)，这对应于 $\mathcal{B}_h(c)=\{\delta_{\{-1,-1\}}\}$，这与性质 $\mathcal{B}_h(c)\cap\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)\neq\emptyset$ 矛盾。因此，我们必须有 $h(1,1)+h(-1,-1)-2h(-1,1)\neq 0$，而在这种情况下，约束集的形式为 $\{(s,t)\in\Delta:\ t=ws\}$，其中 $w=w(h)$ 是由 (5.12) 得出的。性质 $\mathcal{B}_h(c)\cap\mathcal{P}^+_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)\neq\emptyset$ 随即意味着我们还必须有 $0<w<1$。

接下来，将引理 4.9 应用于 $\pi=\pi_*=\delta_{(-1,-1)}$ 和测度 $\xi:=\pi[1,\frac{w}{1+w}]$，即应用于

$$\xi(1,1)=\frac{1-w}{1+w},\qquad \xi(-1,1)=\xi(1,-1)=\frac{w}{1+w},\qquad \xi(-1,-1)=0,$$

以及 $\pi_\varepsilon = (1-\varepsilon)\pi_* + \varepsilon\xi$，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{|\varepsilon\log\varepsilon|}\left(J_\kappa^{(2)}(\pi_\varepsilon) - J_\kappa^{(2)}(\pi_*)\right) &= (\kappa-1)\sum_{x\in\mathcal{X}}\xi^o(x)\mathbf{1}_{\{\pi_*^o(x)=0\}} - \frac{\kappa}{2}\sum_{x,z\in\mathcal{X}}\xi(x,z)\mathbf{1}_{\{\pi_*(x,z)=0\}}\\ &= (\kappa-1)\frac{1}{1+w} - \frac{\kappa}{2}\\ &= \frac{1}{2(1+w)}\left(\kappa-2-\kappa w\right).\end{aligned}$$

当且仅当 $-1 < w < \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 时，后一个量严格为正；当且仅当 $w = \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 时，该量为零。此外，由于 $w \in (0,1)$，这意味着当 $0 < w < \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 且 $c = \kappa h(-1,-1)$ 时，$\pi_* = \delta_{(-1,-1)}$ 是一个局部极小值点；而当 $w > \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 时，它不是局部极小值点。对于 $w = \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 的情形，无法从上述计算中得出结论，但我们可以直接计算 $J_\kappa^{(2)}(s, \frac{\kappa-2}{\kappa}s)$ 在 $s=0$ 处的导数，即利用中值定理、(5.9) 和 (5.10)，可得

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\left(J_\kappa^{(2)}\left(s,\frac{\kappa-2}{\kappa}s\right) - J_\kappa^{(2)}(0,0)\right)\\ &\quad= \lim_{s\to 0^+}\left[\frac{d}{ds}J_\kappa^{(2)}\left(s,\frac{\kappa-2}{\kappa}s\right)\right] &(5.15)\\ &\quad= \lim_{s\to 0^+}\left[\partial_s J_\kappa^{(2)}\left(s,\frac{\kappa-2}{\kappa}s\right) + \frac{\kappa-2}{\kappa}\partial_t J_\kappa^{(2)}\left(s,\frac{\kappa-2}{\kappa}s\right)\right] &(5.16)\\ &\quad= \log\left(\frac{2}{\kappa}\right) + (\kappa-2)\log\left(\frac{\kappa-2}{\kappa}\right), &(5.17)\end{aligned}$$

该值严格为负。这表明，当 $w = \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 且 $c = \kappa h(-1,-1)$ 时，$\pi_* = \delta_{(-1,-1)}$ 不是局部极小值点。注意，对于 $J_\kappa^{(\nu)} = J_{(2)\kappa} = J_{\text{均匀分布}(\mathcal{X})\kappa}$，(5.17) 中计算出的导数在 $\nu \neq \text{Unif}(\mathcal{X})$ 时可能不是负值。总之，我们已经证明，当且仅当 $0 < w < \frac{\kappa-2}{\kappa}$ 且 $c = \kappa h(-1,-1)$ 时，$\pi_* = \delta_{(-1,-1)}$ 是一个局部极小值点。对于 $\pi_* = \delta_{(1,1)}$ 的情形，论证完全类似，故略去。□

注 5.6。由上述证明可知，当 $\nu =$ 均匀分布$(\{1,-1\})$ 时，$\pi[0,0] = \delta_{\{-1,-1\}}$ 是局部极小值点，当且仅当

$$0 < w < \frac{\kappa-2}{\kappa} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_h(c) = \{(s,t)\in\Delta : t = ws\}, \tag{5.18}$$

类似地，论证可得，$\delta_{(1,1)}$ 是局部极小值点，当且仅当 if

$$-\frac{\kappa-2}{\kappa} < w < 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_h(c) = \{(s,t)\in\Delta : t = w(s-1)\}. \tag{5.19}$$

5.2.3. 命题 *5.3* 的证明。证明的核心思路是说明：如果 $J_\kappa^{(2)}$ 在 $\mathcal{B}_h(c)$ 中存在一个边界局部极小值点，那么 $\mathcal{B}_h(c) \cap \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}^+(\mathcal{X}^2)$ 中必定也存在一个取值严格更小的元素，因此该边界极小值点不可能是全局极小值点。由注 5.6 可知，边界局部极小值存在，当且仅当式 (5.12) 中定义的约束线段 $w = w(h)$ 的斜率满足 $|w| < \frac{\kappa-2}{\kappa}$，$w \neq 0$. 不失一般性，假设 $w \in (0, \frac{\kappa-2}{\kappa})$。于是，根据第 5.2.1 节中 $\pi = \pi[s,t]$、$J_\kappa^{(2)}$ 和 $\mathcal{B}_h(c)$ 的参数化，并应用引理 5.5 和注 5.6，可得 $(s, t) = (0, 0)$ 是 $J_\kappa^{(2)}(s, t)$ 的严格局部极小值点，而 $\mathcal{B}_h(c)$ 由式 (5.18) 给出，我们称其为约束线段。此外，考虑曲线

$$\mathcal{C} := \{(s,t)\in\Delta : \partial_t J_\kappa^{(2)}(s,t) = 0\} = \{(s,t)\in\Delta : t = s(1-s)\},$$

等式由式 (5.10) 得出。

接下来，我们证明以下两个性质成立：

（i） $J_\kappa^{(2)}(s,\ t)$ 在曲线 $\mathcal{C}$ 上分别于 (0，0) 和 (1，0) 处取得严格极大值；（ii） 约束线段在某点 $(s^\dagger,\ t^\dagger)$ 与 $\mathcal{C}$ 相交，其中 $s^\dagger \notin \{0,1\}$。

这两个性质共同推出

$$\min\left\{J_\kappa^{(2)}(s,t) : t = ws, (s,t) \in \Delta\right\} \le J_\kappa^{(2)}(s^\dagger, t^\dagger) < J_\kappa^{(2)}(0,0),$$

这表明 (0，0) 不是全局极小值点。

现在只需证明性质（i）和（ii）。先证明（i）。沿曲线 $\mathcal{C}$ 求导，并利用 (5.9) 以及 $\partial_t J_\kappa^{(2)}(s,\ s(1-s))$ 在第二行中的事实 $= 0$，可知对所有 $s \in (0,\ 1)$，

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}J_\kappa^{(2)}(s, s(1-s)) =& \partial_s J_\kappa^{(2)}(s, s(1-s)) + (1-2s)\partial_t J_\kappa^{(2)}(s, s(1-s)) \\ =& (1-\kappa)\log\left(\frac{s}{1-s}\right) + \frac{\kappa}{2}\log\left(\frac{s - s(1-s)}{1-s-s(1-s)}\right) \\ =& \log\left(\frac{s}{1-s}\right), \end{aligned} \tag{5.20}$$

其符号与$s - \frac{1}{2}$.的符号一致。这意味着$J_\kappa^{(2)}(s,t)$沿曲线$\mathcal{C}$ 的值在(0,0)或(1,0)处达到最大值。

接下来，我们转向性质(ii)。这是直接的，因为曲线 $\mathcal{C}$ 是二次的，包含点(0,0)和$(1,0)$，并且在 $s = 0$处的导数等于1。因此，任何经过$(0,0)$且斜率为 $0 < w <$ $(\kappa-2)/\kappa$ 的约束线段都必须在内部再次与 $\mathcal{C}$ 相交。□

5.3. **双自旋系统中猜想 2.28 的验证**。 现在，我们将定理 2.27 作为迄今已证结果的一个简单推论得出。

定理 *2.27* 的证明。 这由命题 3.7 中的吉布斯条件化原理、命题 3.3 中将极小化问题从(3.16)简化为(3.8)、命题 5.3 表明(3.8)的（全局）极小化元位于内部、命题 4.3 将内部局部极小值点 $\pi_* \in \mathcal{M}_{edge}(c)$刻画为非退化 TIS 吉布斯测度的边缘分布、(3.9)中对 $\mathcal{M}(c)$的相应刻画，以及引理 3.2 所建立的 TIS 吉布斯测度与其边缘边际分布之间的关系得出。□

6. Two-spin systems with consensus as the edge potential

本节中，我们通过刻画 (3.8) 中边优化问题 $R_{edge}(c)$ 的全局极小点集合 $\mathcal{M}_{edge}(c)$，来证明定理 2.12，其中 $\mathcal{X} = \{1,-1\}$ and $h(x,\ y) = \mathsf{m}(x,\ y) = xy$。我们将定理 2.12 的证明分为两种情况： c 是 m 值域的凸包的极点（见第 6.1 节），以及 c 位于内部（见第 6.2 节）。全文中，我们将采用双自旋系统边测度 $\pi = \pi[s,t]$ 和目标函数 $J_\kappa^\nu(s,\ t) :\ \Delta \to \mathbb{R}$，的参数化，分别如 (5.3)-(5.4) 和 (5.5)-(5.7) 所示。注意，在此参数化下，

$$\mathbb{E}_{\pi[s,t]}\left[X_o\right] = 2s - 1, \quad \forall (s,t) \in \Delta. \tag{6.1}$$

此外，请注意，当 $h = m$ 时， $\mathcal{B}_h(c)$ 的参数化版本 (5.11) 化为

$$\mathcal{B}_m(c) = \left\{(s,t) \in \Delta : s \in [t(c), 1-t(c)], t = t(c)\right\}, \quad t(c) \coloneqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{c}{\kappa}\right). \tag{6.2}$$

6.1. 当 $c \in \{-\kappa, \kappa\}$ 时的情形。注意，定理 2.27 的一般结果并不涵盖 c 为（广义）共识泛函值域的极值点这一情形。我们现在在双自旋情形下处理该情形。

当 $c \in \{-\kappa, \kappa\}$ 时定理 2.12 的证明。首先，固定 $c = -\kappa$，并令 $\pi \in \mathcal{B}_m(-\kappa)$。因此，根据 (2.22) 和 (2.2) 中 $\mathcal{B}_m$ 和 m 的定义，以及 $\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}(\mathcal{X}^2)$这一事实，我们有 $-\kappa = \kappa\mathbb{E}_\pi[X_o X_1] = \kappa(\pi(1,1) + \pi(-1,-1) - 2\pi(1,-1) = \kappa(1 - 4\pi(1,-1))$，这意味着$\pi(1,-1) = \pi(-1,1) = 1/2$，进而意味着 $\pi(1,1) = \pi(-1,-1) = 0$。因此，$\mathcal{B}_m(c)$ 仅含有一个元素，即 $\pi^{\mathtt{alt}} := \frac{1}{2}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,-1)}$。于是，$\mathcal{M}_{edge}(c)$ 也同样如此，而命题 3.3 蕴含 $\mathcal{M}(c) = \{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})})\}$。由 (3.5)，我们有

$$\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})} = \frac{1}{2}\delta_{T_1^{\kappa,\pm}} + \frac{1}{2}\delta_{T_1^{\kappa,\mp}},$$

其中，$T^{\kappa,\pm}$ 和 $T^{\kappa,\mp}$ 是带有交替顶点标记的无限 κ-正则树（定义见定义 2.11 之前），下标 1 表示它们的深度为 1 的子树（定义见第 1.4.2 节）。为确定其单模扩张，注意由 (3.1) 得到的星上的条件测度 $(P_{\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})}}(x, x'))_{x, x' \in \mathcal{X}}$为

$$\widehat{P}_{\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})}}(1,-1) = \delta_{T_1^{\kappa-1,\pm}} \quad \text{and} \quad \widehat{P}_{\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})}}(-1,1) = \delta_{T_1^{\kappa-1,\mp}},$$

因此，回顾 (2.8) 中 $\Phi_\kappa^\sharp(-\infty)$ 的定义，可得

$$\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi^{\mathtt{alt}})}) = \frac{1}{2}\delta_{T^{\kappa,\pm}} + \frac{1}{2}\delta_{T^{\kappa,\mp}} = \Phi_\kappa^\sharp(-\infty).$$

于是命题 3.7 表明，给定 $\mathcal{E}_n(c)$ 时，U_n 收敛到 $\Phi_\kappa^\sharp(-\infty)$。

接下来，假设 $c = \kappa$。由 (6.2) 得 $t(c) = 0$，再利用 (5.6) 和 (5.7)，可得

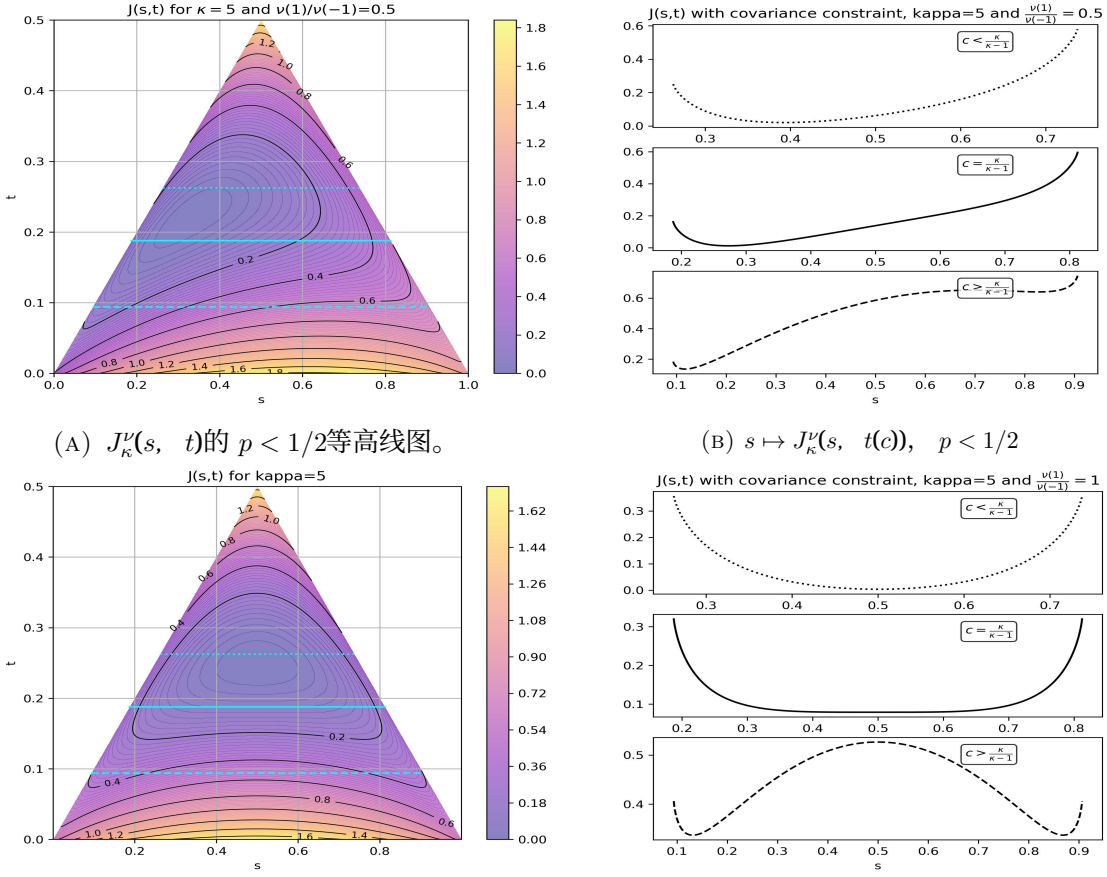
$$J_\kappa^\nu(s,0) = \left\{-s\log\nu(1) - (1-s)\log\nu(-1) + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) H([s, 1-s])\right\}.$$

利用映射 $s \mapsto H([s,1-s]) = -s\log s - (1-s)\log(1-s)$ 的凹性，容易验证 $[0,1] \ni s \to J_\kappa^\nu(s, 0)$ 有两个局部极小值，分别在 $s = 0$ 和 $s = 1$ 处取得。

我们现在考虑三种子情形。若 $\nu(1) > \nu(-1)$，则全局最小值在$s = 1$处取得，此时 $\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\delta_{(1,1)}\}$，因而再次由 (3.9)，$\mathcal{M}(c) = \{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\delta_{(1,1)})})\}$。然后，按上文论证，由 (3.5) 我们有 $\mu^{(\delta_{(1,1)})} = \delta_{T^{\kappa,+}}$，其中 $T^{\kappa,+}$ 是无穷 κ-正则树的深度为 1 的子树，且所有顶点标记均为 1，因而由定义 3.1，$\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\delta_{(1,1)})}) = \delta_{T^{\kappa,+}} = \Phi_\kappa^+(\infty)$，其中 $\Phi_\kappa^+(\infty)$ 如 (2.7) 所规定。接下来，若 $\nu(-1) > \nu(1)$，则可类似地论证 $\mathcal{M}(c) = \{\delta_{T^{\kappa,-}} = \Phi_\kappa^-(\infty)\}$，其中 $\Phi_\kappa^-(\infty)$ 如 (2.7) 所规定。最后，在均匀情形下，当 $\nu(1) = \nu(-1)$ 时，显然 $J_\kappa^\nu(1,0) = J_\kappa^\nu(0,0)$，从而$\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\delta_{(1,1)}, \delta_{(-1,-1)}\}$。因此，由 (3.9) 以及（上文所论证的）事实 $\mathsf{UGW}_1(\delta_{(1,1)}) = \Phi_k^+(\infty)$ 与 $\mathsf{UGW}_1(\delta_{(-1,-1)}) = \Phi_k^-(\infty)$，可得 $\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^+(\infty)\ \Phi_\kappa^-(\infty)\}$。结合命题 3.7，这就完成了定理 2.12 在 $|c| = \kappa$. □情形下的证明

6.2. 当 $c \in (-\kappa, \kappa)$ 时。在证明这种情形之前，我们先在图 2 中绘制目标函数的数值图像，以了解全局极小点的行为。首先，当 $\nu \neq$服从均匀分布$(\mathcal{X})$时，图 2b 中对三个不同的 c 值绘制的映射 $s \mapsto J_\kappa^\nu(s, t(c))$ 表明，即使 $s \mapsto J_\kappa^\nu(s, t(c))$ 关于 s. 可能不是凸函数，仍始终存在唯一的（全局）极小化元。接下来，图 2d 展示了当 $\nu =$ 服从均匀分布$(\mathcal{X})$ 时的相应图像，该图表明，对于所有充分大的 c，都应存在相变，并且相变之后恰有两个全局极小点。

由定理 2.24 可知，条件极限是 TIS 伊辛测度（可能是退化的）；但根据引理 2.6 和定义 2.7，在某些参数范围内可能存在多个 TIS 伊辛



(A) $J^{\nu}_{\kappa}(s,\ t)$的 $p < 1/2$等高线图。

(B) $s \mapsto J^{\nu}_{\kappa}(s,\ t(c)),\quad p < 1/2$

(C) $J^{(2)}_{\kappa}(s,\ t)$的等高线图

(D) $s \mapsto J^{(2)}_{\kappa}(s,\ t(c))$

FIGURE 2. $\kappa = 5$的双自旋共识泛函。上图：非均匀标记分布 ν （无相变）。下图：均匀标记分布 ν（相变）。

测度。接下来的引理将用于确定每种情况下的确切 TIS 伊辛测度。

引理 6.1（某些伊辛测度下的根磁化强度与共识）。设 Φ 是温度参数为 β、外场为 B 、边界律为 $\ell \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$ 的 T^{κ} 上的一个TIS 伊辛测度 Φ，该边界律对应于下文注 *6.2* 中所述的伊辛腔映射的一个不动点 $\theta \in \mathbb{R}$。根据注 *2.13*，取 $\nu \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$ 使得 $\nu(1) = p$，其中$B = \log(p/(1-p))$，并在每种情况下相对于 ν 定义 c_{ref}。那么以下结论成立：

(1) 在铁磁区域（$\beta > 0$）中：*(a)* 若 $B > 0$，则 $\Phi^{+}_{\kappa}(\beta, B)$是唯一具有正根磁化强度的 TIS 伊辛测度。此外，在 $\Phi^{+}_{\kappa}(\beta, B)$下的共识高于典型值，即

$$\mathbb{E}_{\Phi^{+}_{\kappa}(\beta,B)}[S_m] > c_{ref}. \tag{6.3}$$

(b) 若 $B < 0$，则 $\Phi^{-}_{\kappa}(\beta, B)$ 是唯一具有负根磁化的 TIS 伊辛测度。此外，在 $\Phi^{-}_{\kappa}(\beta, B)$ 下的共识高于典型值，

也就是说，

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^-(\beta,B)}[S_m] > c_{ref}. \tag{6.4}$$

(c) 若 $B = 0$，则在唯一性区域 $\beta \le \beta_*(\kappa,0)$ 中，我们有

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^*(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = 0 \quad and \quad \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^*(\beta,0)}[S_m] = \kappa\tanh(\beta) > c_{ref} = 0. \tag{6.5}$$

在非唯一性区域 $\beta > \beta_*(\kappa,0)$ 中，我们有

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^+(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] > \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = 0 > \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^-(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] \tag{6.6}$$

and

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^+(\beta,0)}[S_m] = \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^-(\beta,0)}[S_m] > \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,0)}[S_m] = \kappa\tanh(\beta) > c_{ref} = 0. \tag{6.7}$$

(2) 在反铁磁区域（$\beta < 0$）中：

(a) 若 $B > 0$，则

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)}[\boldsymbol{\sigma}_o] > 0 \quad and \quad \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)}[S_m] < c_{ref}. \tag{6.8}$$

(b) 若 $B < 0$，则

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)}[\boldsymbol{\sigma}_o] < 0 \quad and \quad \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)}[S_m] < c_{ref}. \tag{6.9}$$

(c) 若 $B = 0$，则

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = 0 \quad and \quad \mathbb{E}_{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,0)}[S_m] = \kappa\tanh(\beta) < c_{ref} = 0. \tag{6.10}$$

下文给出的引理证明将依赖于以下两个观察。

注 6.2（伊辛腔映射 Γ 与伊辛测度的 CAV 之间的关系）。固定 $\kappa \ge 2$。概率质量函数 $\ell \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$ 是式 (2.19) 中映射 CAV 的一个不动点，其中 $\psi = \exp\{\beta m\}$，且 $\bar{\psi} = \nu$，当且仅当对 $x \in \{1,-1\}$，有 $\ell(x) = e^{\theta\cdot\mathrm{sgn}(x)}/(e^{\theta}+e^{-\theta})$；其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 是式 (2.5) 中定义的伊辛腔映射 $\Gamma = \Gamma(\kappa,\ \beta,\ B(p))$ 的一个不动点，其中 $B(p) = \log(p/(1-p))$ 是与 ν 对应的外场，且 ν根据注 2.13，$(1) = p$。

注 6.3（TIS 伊辛测度的根磁化强度与共识）。固定 $\kappa \ge 2$、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 $B \in \mathbb{R}$。给定温度参数为 β、外场为 B、边界律为 $\ell \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$，定义在 T^κ 上的 TIS 伊辛测度 Φ，利用式 (2.20) 给出的边边缘分布刻画，以及注 6.2 中规定的 $\ell \in \mathcal{P}(\{1,-1\})$ 与 $\theta \in \mathbb{R}$ 之间的对应关系，可得其根磁化强度与共识的以下形式： Φ

$$\mathbb{E}_{\Phi}[\boldsymbol{\sigma}_o] = \left(e^{-2\beta} + \cosh(2\theta)\right)^{-1}\sinh(2\theta) \tag{6.11}$$

$$\mathbb{E}_{\Phi}[S_m] = \kappa\cdot\left(\frac{e^{2\beta}\cosh(2\theta)-1}{e^{2\beta}\cosh(2\theta)+1}\right) = \kappa\cdot\left(\frac{2\sinh^2(\theta)+(1-e^{-2\beta})}{2\cosh^2(\theta)-(1-e^{-2\beta})}\right). \tag{6.12}$$

引理 *6.1* 的证明。*(1a)* 由 (6.11) 可见，$\mathrm{sgn}\left(\mathbb{E}_{\Phi}[\boldsymbol{\sigma}_o]\right) = \mathrm{sgn}(\theta)$。结合引理 2.6 (1)，这证明了唯一性。接下来我们证明 (6.3)。注意，在铁磁区域中，由于 $1-e^{-2\beta} > 0$，由 (6.12) 我们有

$$\mathbb{E}_{\Phi}[S_m] > \kappa\tanh^2(\theta). \tag{6.13}$$

此外，由于 $B > 0$，伊辛腔映射 Γ 的唯一正不动点 θ^+ 满足

$$\theta^+ = B + (\kappa-1)\tanh^{-1}\left(\tanh(\beta)\tanh(\theta^+)\right) > B,$$

结合（6.13）和双曲正切函数的单调性，我们得到

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^+(\beta,B)}[S_m] > \kappa\tanh^2(\theta^+) > \kappa\tanh^2(B) = c_{\mathtt{ref}}.$$

(1b) 将 θ^+ 替换为 θ^-，利用引理 2.6 (2)、（6.13）以及单调性论证，即可类似地得到该结论。

(1c) 由 (6.11) 和引理 2.6 (3) 可知，在唯一性区域内，$\theta = 0$ 和 $\mathbb{E}_{\Phi^*_\kappa(\beta,0)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = 0$。此外，由于 $\theta = 0$ 和 $\beta > 0$，(6.12) 推出 $\mathbb{E}_{\Phi^*_\kappa(\beta,0)}[S_m] = \kappa\tanh(\beta) > 0 = c_{\mathtt{ref}}$。在非唯一性区域内，由 (6.11) 和引理 2.6 (3) 可推出 (6.6)。此外，由于当 $B = 0$ 时，伊辛腔映射是奇函数，因此可知 $|\theta^+| = |\theta^-| > 0 = |\theta^\sharp|$。应用 (6.12)，并利用 cosh 是关于 $[0,\infty)$ 的偶函数且严格递增这一事实，可得 (6.7)。

(2a) 根据引理 2.6，在反铁磁区域中，由于 $B > 0$，总存在唯一不动点 $\theta^\sharp$，且 $\mathrm{sgn}(\theta^\sharp) = \mathrm{sgn}(B) > 0$。结合 (6.11)，我们得出$\mathbb{E}_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,\ B)}[\boldsymbol{\sigma}_o] > 0$。接下来，注意到由于 $\theta^\sharp > 0$ 和 $B > 0$，

$$\theta^\sharp = B + (\kappa - 1)\tanh^{-1}\Big(\tanh(\beta)\tanh(\theta^\sharp)\Big) < B,$$

因此 $|\theta^\sharp| < |B|$。结合 (6.12)、$1 - e^{-2\beta} < 0$ 这一事实，以及 $[0,\infty) \ni x \mapsto \tanh^2(x)$ 是递增函数这一事实，我们有

$$\mathbb{E}_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,B)}[S_m] < \kappa\tanh^2(\theta^\sharp) < \kappa\tanh^2(B) = c_{\mathtt{ref}}.$$

(2b) 证明类似，只不过这次 $\mathrm{sgn}(\theta^\sharp) = \mathrm{sgn}(B) < 0$，因此 $\mathbb{E}_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,\ B)}[\boldsymbol{\sigma}_o] < 0$。此外，$0 > \theta^\sharp > B$，因此同样有 $|\theta^\sharp| < |B|$。所以，(2b) 中的共识部分也相应成立。

(2c) 若 $B = 0$，则根据引理 2.6 的反铁磁部分，唯一不动点为$\theta^\sharp = 0$，因此 (6.11) 意味着 $\mathbb{E}_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,\ B)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = 0$，而 (6.12) 意味着

$$\mathbb{E}_{\Phi^\sharp_\kappa(\beta,0)}[S_m] = \kappa\tanh(\beta) < 0 = c_{\mathtt{ref}}.$$

□

现在我们转向 c 位于 S_m的值域的凸包内部的情形 .

定理 *2.12* 在 $c \in (-\kappa,\kappa)$. 下的证明。我们根据 ν 是否均匀分布分为两种情况，再进一步根据 $s \mapsto J^\nu_\kappa(s,t(c))$ 是否为凸分为不同情形。在每种情况下，证明都分为两个主要步骤：首先，我们利用双自旋系统的参数化显式求出边优化问题的（全局）极小值点，然后确定与这些极小值点对应的伊辛测度。在开始之前，注意到$c \in (-\kappa,\kappa)$ 意味着

$$t(c) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{c}{\kappa}\right) \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{6.14}$$

情形 *1*：假设 $\nu =$服从$\mathcal{X}$的均匀分布。我们首先建立目标函数 $J^{(2)}_\kappa$ 的性质。首先，注意到根据 $J^{(2)}_\kappa$ 的定义 (5.7)，不难看出

$$s \mapsto J^{(2)}_\kappa(s,t(c)) \text{ is continuous at } s = t(c) \text{ and } s = 1 - t(c) \tag{6.15}$$

and

$$s \mapsto J^{(2)}_\kappa(s,t(c)) \text{ is smooth in } (t(c), 1 - t(c)). \tag{6.16}$$

此外，

$$J^{(2)}_\kappa(s,t) = J^{(2)}_\kappa(1 - s,t), \quad \forall (s,t) \in \Delta. \tag{6.17}$$

接下来，(5.9) 意味着

$$\partial_s J^{(2)}_\kappa(\frac{1}{2}, t(c)) = 0 \tag{6.18}$$

and

$$\partial_s J^{(2)}_\kappa(s,t(c)) \to -\infty \text{ as } s \downarrow t(c) \quad \text{and} \quad \partial_s J^{(2)}_\kappa(s,t(c)) \to \infty \text{ as } s \uparrow 1 - t(c). \tag{6.19}$$

此外，由于对 (5.9) 取导数可得

$$\partial_s^2 J_\kappa^{(2)}(s,t) = \frac{1-\kappa}{s(1-s)} + \frac{\kappa(1-2t)}{2(s-t)(1-s-t)},$$

我们有

$$\operatorname{sgn}(\partial_s^2 J_\kappa^{(2)}(s,t(c))) = \operatorname{sgn}(W_c(s)), \quad \forall s \in (t(c), 1-t(c)), \tag{6.20}$$

其中 $W_c(s)$是如下首项系数为正的二次多项式:

$$\begin{aligned} W_c(s) &\coloneqq 2(1-\kappa)(s-t(c))(1-s-t(c)) + \kappa s(1-s)(1-2t(c)) \\ &= \left(\frac{3\kappa - c - 4}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(\kappa+c)(\kappa+c-\kappa c)}{8\kappa^2}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

其中最后一个等式用到了 $t(c) = \frac{1}{4}(1 - \frac{c}{\kappa})$。注意,

$$c < \kappa \text{ and } \kappa \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\kappa - c - 4}{2} > 0, \tag{6.22}$$

$$c \leq \frac{\kappa}{\kappa - 1} \quad \Leftrightarrow \quad W_c(\frac{1}{2}) = \frac{(\kappa+c)(\kappa+c-\kappa c)}{8\kappa^2} \geq 0. \tag{6.23}$$

此外，由于（6.14），我们有

$$c \in (-\kappa, \kappa) \quad \Rightarrow \quad W_c(t(c)) = W_c(1-t(c)) > 0. \tag{6.24}$$

因此，当 $c \leq \kappa/(\kappa-1)$时，根据（6.20）、（6.22）和（6.23），可得

$$\partial_s^2 J_\kappa^{(2)}(s,t(c)) > 0, \quad \forall s \in (t(c), 1-t(c)) \setminus \{\frac{1}{2}\} \quad \text{if } c \leq \frac{\kappa}{\kappa-1} \tag{6.25}$$

另一方面，当 $c > \kappa/(\kappa-1)$ 时，(6.20)、(6.22)–(6.24) 以及 (6.21) 所蕴含的 W_c 关于 $s = 1/2$ 的对称性，共同推出存在 r，使得 $\{\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\} \subset (t(c)\ 1 - t(c))$,- 从而

$$\operatorname{sgn}(\partial_s^2 J_\kappa^{(2)}(s, t(c))) = \operatorname{sgn}\left((s - \frac{1}{2} + r)(s - \frac{1}{2} - r)\right), \quad \forall s \in (t(c), 1-t(c)) \quad \text{if } c > \frac{\kappa}{\kappa-1} \tag{6.26}$$

注： 上述性质 (6.15)– (6.26) 在情形中同样可以且将会用到 2

我们现在进一步将情形 1 细分为更多情形，具体取决于 $J_\kappa^{(2)}$ 是否为凸函数。

情形 *1A*： 当 $c \leq \kappa/(\kappa-1)$ 时，结合 (6.18)、(6.15)、(6.19) 和 (6.25)，可知 $s = \frac{1}{2}$ 是映射 $[t(c)\ 1 - t(c)] \ni s \mapsto J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 的唯一的全局极小值点。因此，$\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\pi_*\}$，其中 $\pi_* = \pi[\frac{1}{2}, t(c)]$。接下来，由 (3.9) 可得 $\mathcal{M}(c) = \{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi_*)})\}$。然后，命题 4.3、 $\nu = \mathsf{Unif}(\mathcal{X})$ 这一事实及注 2.13，再加上引理 3.2，共同推出对于某些 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $B = 0$, $\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi_*)}) = \Phi$ 是一个 TIS 伊辛测度。

我们现在 i 识别此伊辛测度 Φ。注意，由 (6.1)， Φ i 的根磁化强度 s

$$\mathbb{E}_{\mathsf{UGW}_1(\mu^{(\pi_*)})}[\boldsymbol{\sigma}_o] = \mathbb{E}_{\pi[\frac{1}{2}, t(c)]}[\mathbf{X}_o] = 0.$$

由引理 6.1 的 (1c) 和 (2c)，我们看到，要么 $\Phi = \Phi_\kappa^*(\beta, 0)$ 处于铁磁唯一性区域，即当 $\beta \in (0, \beta_*]$ 时，要么在其他情况下为 $\Phi = \Phi_\kappa^\sharp(\beta, 0)$，即当 $\beta \in (-\infty, 0) \cup (\beta_*, \infty)$ 时。此外，在所有情形中，共识 c 等于 $\kappa\tanh(\beta)$，这意味着 $\beta = \beta(c) := \tanh^{-1}(c/\kappa)$。与 (6.5)、(6.7) 和 (6.10) 比较后，便得到如下推论：(i) 当 $0 < c \leq \kappa/(\kappa-1)$ 时， β 位于区间 $(0, \tanh^{-1}(1/(\kappa-1)))$ 内；根据定义 2.7(1a)，该区间包含于唯一性区域，从而 $\Phi = \Phi_\kappa^*(\tanh^{-1}(c/\kappa), 0)$。（ ii) 当 $c < 0$、 $\beta\ (c) < 0$，因此 $\Phi = \Phi\ \ ^\sharp_\kappa(\tanh^{-1}(c/\kappa), 0)$.

结合命题 3.7，这些观察分别证明了定理 2.12 中的 (3a) 和情形 $p = 1/2$（1）。

情形 1B：当 $c > \kappa/(\kappa-1)$ 时，由 (6.18) 和 (6.26) 可知，$\partial_s J_\kappa^{(2)}(\frac{1}{2}-r, t(c)) > 0$，并且 $(t(c), 1-t(c)) \ni s \mapsto J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 恰有两个拐点，分别位于 $\frac{1}{2}-r$ 和 $\frac{1}{2}+r$。结合 (6.19) 以及由 (6.16) 可知 $(t(c), 1-t(c)) \ni s \to \partial_s J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 是连续的这一事实，可推出存在 $s_* \in (t(c), \frac{1}{2}-r)$，使得 s_*，因此由 (6.17)，$1-s_*$ 也都是映射 $(t(c), 1-t(c)) \ni s \mapsto J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 的临界点。此外，由于恰有两个拐点的函数至多有三个临界点，我们知道 s_*、$\frac{1}{2}$、$1-s_*$ 是 $J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 的仅有的三个临界点。进一步地，(6.15) 和 (6.19) 表明，任何局部极小值点都必须位于 $(t(c), 1-t(c))$；(6.26) 表明 $s \mapsto J_\kappa^{(2)}(s, t(c))$ 在 $\frac{1}{2}$ 处严格凹，在 s_* 和 $1-s_*$ 处严格凸；而 (6.17) 表明两个局部极小值点对应的 $J_\kappa^{(2)}(s_*, t(c)) = J(2)_\kappa(1-s_*, t(c))$ 值相同。因此，s_* 和 $1-s_*$ 必定对应两个全局极小点。于是，我们有 $\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\pi[s_*, t(c)], \pi[1-s_*, t(c)]\}$。接下来，(3.9) 表明 $\mathcal{M}(c) = \left\{\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi[s_*,t(c)])}\right), \mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi[1-s_*,t(c)])}\right)\right\}$。然后，命题 4.3、$\nu = \mathsf{Unif}(\mathcal{X})$ 这一事实、注 2.13 和引理 3.2 一起表明，$\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi[s_*,t(c)])}\right)$ 和 $\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi[1-s_*,t(c)])}\right)$ 是某些具有 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $B = 0$ 的 TIS 伊辛测度。

现在，我们确定与 $\mathcal{M}(c)$中的两个全局极小值点相对应的伊辛测度。由 (6.1) 以及 $s_* < \frac{1}{2}$ 这一事实可知，这两个 TIS 伊辛测度的根磁化强度均非零。由引理 6.1 的 (6.5)、(6.7) 和 (6.10)，可知 $\tanh^{-1}(1/(\kappa-1)) \beta >$（否则不存在根磁化强度非零的 TIS 伊辛测度），且它们对应的伊辛测度分别为 $\Phi_\kappa^-(\beta, 0)$ 和 $\Phi_\kappa^+(\beta, 0)$。结合命题 3.7，即完成了定理 2.12 中 (3b) 的证明。

情形 *2*：设 $\nu \neq$ 均匀分布$(\mathcal{X})$。在此情形下，不失一般性，我们假设$p = \nu(1) < 1/2$。对于任意 $s \in (t(c), 1-t(c))$，由 (6.14) 得 $(s, t(c)) \in int(\Delta)$，其中 $int(\Delta)$ 是 (5.8) 中定义的 Δ 的内部。结合 (5.6) 和 (5.9)，可得

$$\partial_s J_\kappa^\nu(s, t(c)) = \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) + \partial_s J_\kappa^{(2)}(s, t(c)) > \partial_s J_\kappa^{(2)}(s, t(c)), \tag{6.27}$$

$$\partial_s^2 J_\kappa^\nu(s, t(c)) = \partial_s^2 J_\kappa^{(2)}(s, t(c)). \tag{6.28}$$

我们再次根据 $c \leq \kappa/(\kappa-1)$ 或 $c > \kappa/(\kappa-1)$ 分成两种情形。

情形 2A：假设 $c \leq \kappa/(\kappa-1)$。注意，(6.27) 和 (6.18) 推出 $\partial_s J_\kappa^\nu(\frac{1}{2}, t(c)) > 0$；(6.27) 和 (6.19) 推出，当 $s \downarrow t(c)$ 时，$\partial_s J_\kappa^\nu(s, t(c)) \to -\infty$。由于根据 (6.27) 和 (6.16)，$(t(c), \frac{1}{2}) \ni s \mapsto \partial_s J_\kappa^\nu(s, t(c))$ 是连续的，这意味着 $s \mapsto J_\kappa^\nu(s, t(c))$ 在 $s_* \in (t(c), \frac{1}{2})$ 处有一个临界点。由 (6.28) 和 (6.25)，以及 (5.6) 和 (6.15)，可知 s_* 是映射 $[t(c), 1-t(c)] \ni s \mapsto J_\kappa^\nu(s, t(c))$ 的唯一的全局极小值点。因此，$\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\pi_*\}$，其中 $\pi_* = \pi[s_*, t(c)]$。进而，由 (3.9) 可知 $\mathcal{M}(c) = \left\{\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)\right\}$；随后，命题 4.3、引理 3.2 和注 2.13 一起推出 $\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right) = \Phi$ 是某个 $\beta \in \mathbb{R}$ 的 TIS 伊辛测度，并且 $B = \log\left(\frac{\nu}{\nu}(1)\,(-1)\right) < 0$。

接下来，为了识别对应于全局极小值点 $\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)$ 的伊辛测度 Φ，首先注意到，根据 (6.1)，Φ 的根磁化强度为

$$\mathbb{E}_{\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = \mathbb{E}_{\pi[s_*,t(c)]}[\mathbf{X}_o] = 2s_* - 1 < 0.$$

根据引理 6.1 的 (1b) 和 (2b)，可知当 $c > c_{\mathtt{ref}}$ 时，对于某个 $\beta > 0$，$\Phi = \Phi_\kappa^-(\beta, B)$；当 $c < c_{\mathtt{ref}}$ 时，对于某个 $\beta < 0$，$\Phi = \Phi_\kappa^\sharp(\beta, B)$。总之，若 $c_{\mathtt{ref}} < c \leq \kappa/(\kappa-1)$ 且 $\mathcal{M}(c)$，则对于某个 $\beta > 0$，$\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^-(\beta, B)\}$；若 $-\kappa < c < c_{\mathtt{ref}}$，则对于某个 $\beta < 0$，$= \{\Phi_\kappa^\sharp(\beta, B)\}$

情形 *2B*：当 $c > \kappa/(\kappa-1)$ 时，由于 (6.27) 和 (6.19)，若令 s_* 为 $s \mapsto J_\kappa^{(2)}(s,\ t(c))$ 的临界点，且该点位于 $(t(c),\ _{12})$ 中（如情形 *1B*中所述），则

$$\partial_s J_\kappa^\nu(s,t(c)) \to -\infty \text{ as } s \downarrow t(c) \quad \text{and} \quad \partial_s J_\kappa^\nu(s_*,t(c)) = \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) > 0. \tag{6.29}$$

因此，映射 $(t(c)\ 1-t(c)) \ni s \mapsto \partial_s J_\kappa^\nu(s,t(c))$ 的连续性意味着，在 $(t(c)\ s_*)$ 中存在 $s \mapsto J_\kappa^\nu(s,t$ $(c))$ 的一个临界点 $\tilde{s}_*$。事实上，尽管 $\tilde{s}_*$ 未必是 $J_\kappa^\nu(s,t(c))$ 的唯一临界点，但它是位于 $(t(c),\frac{1}{2}]$ 中的唯一临界点，因为 (6.28) 和 (6.26) 蕴含 $\mathrm{sgn}(\partial_s^2 \mathrm{J}_\kappa^\nu(\mathrm{s},\mathrm{t(c)})) > 0,\ \forall s \in (\bar{t}(c)\ s_*)$，而 (6.27)、$s_*$ 是 $(t(c),1\ 2\ )$ 中 $s \mapsto J(2)_\kappa(s,t(c))$ 的唯一临界点这一事实，以及 $(t(c),1\ 2\ ) \ni s \mapsto \partial_s J_\kappa^{(2)}(s,$ $t(c))$ 的连续性，蕴含 $\partial_s J_\kappa^\nu(s,t(c)) > \partial_s J^{(2)}(s,t(c)) \geq 0,\ \forall s \in [s_*,\frac{1}{2}]$。接下来，我们用反证法说明，$J_\kappa^\nu(s,t(c))$ 的任一全局极小值点 s'_* 必定位于 $[t(c),\frac{1}{2}]$。事实上，若非如此，则根据 (5.6)、(6.17) 以及假设 $\nu(-1) > \nu(1)$ 和 $s'_* > 1/2$，由 $J_\kappa^{(2)}(1-s'_*,t(c)) = J(2)_\kappa(s'_*,t(c))$ 可推出 $J_\kappa^\nu(1-s'_*,t(c)) < J_\kappa^\nu(s'_*,t(c))$，这与 s'_* 是 $J_\kappa^\nu(s,t(c))$ 的全局极小值点这一事实矛盾。此外，注意到由 (5.6)、(6.15) 和 (6.29)，$s = t(c)$ 不可能是全局极小值点。这保证临界点 $\tilde{s}_*$ 实际上是 $[t(c)\ 1-t(c,t(c))$ 的唯一全局极小值点。因此，$\mathcal{M}_{edge}(c) = \{\pi_*\}$，其中 $\pi_* = \pi[\tilde{s}_*,t(c)]$。接下来，(3.9) 蕴含 $\mathcal{M}(c) = \left\{\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)\right\}$。然后，命题 4.3、引理 3.2 和注 2.13 合起来蕴含 $\Phi = \mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)$ 是一个 TIS 伊辛测度，其中某个 $\beta \in \mathbb{R}$ 且 $B = \log\left(\frac{\nu}{\nu}(1)\ (-1)\right) < 0$。

为了确定与 Φ 对应的伊辛测度，注意由 (6.1)，Φ 的根磁化强度为：

$$\mathbb{E}_{\mathsf{UGW}_1\left(\mu^{(\pi_*)}\right)}[\boldsymbol{\sigma}_o] = \mathbb{E}_{\pi[\tilde{s}_*,t(c)]}[\mathbf{X}_o] = 2\tilde{s}_* - 1 < 0.$$

于是，引理 6.1 的 (1b) 与 (2b) 表明：若 $c > c_{\mathtt{ref}}$，则对某个 $\beta > 0$ 有 $\Phi = \Phi_\kappa^-(\beta,B)$，并且若 $c < c_{\mathtt{ref}}$，则对某个 $\beta < 0$ 有$\Phi = \Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)$。总之，若$c > \max\{c_{\mathtt{ref}},\kappa/(\kappa-1)\}$，则对某个 $\beta > 0$ 有 $\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^-$ $(\beta,B)\}$，并且若 $c_{\mathtt{ref}} > c > \kappa/(\kappa-1)$.，则对某个 $\beta < 0$ 有 $\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)\}$

综合情形 *2A* 与情形 *2B*中的结论，我们看到：若 $c > c_{\mathtt{ref}}$，则对某个$\beta > 0$ 有 $\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^-(\beta,B)\}$，并且若 $c < c_{\mathtt{ref}}$，则对某个 $\beta < 0$ 有 $\mathcal{M}(c) = \{\Phi_\kappa^\sharp(\beta,B)\}$。结合命题 3.7，这就完成了当 $c \in (-\kappa,\kappa)$ 且 $\nu \neq$均匀分布$(\mathcal{X})$ 时定理 2.12 的证明。□

Appendix A. From minimizing edge marginals toTIS Gibbs measures

证明。引理 2.21]引理中的一一对应关系和前两项断言由 [21, 定理 12.12 和推论 12.17]得出。特别地，对于任意 $\ell \in \Delta^*$，利用 (2.18) 定义的 T_r^κ、$r \in \mathbb{N}$ 上的概率分布构成一个相容的概率测度族。根据柯尔莫哥洛夫扩张定理，它们是某个$\rho \in \mathcal{P}\left(\mathcal{X}^{T^\kappa}\right)$的边缘分布。根据定义 2.18，$\rho$属于 TIS 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\psi\ \bar{\psi}}$、。因此，该 TIS吉布斯测度 ρ 的深度 1 边缘分布为

$$\boldsymbol{\rho}_1(\tau) = \boldsymbol{\rho}_{T_1}(\tau) = \frac{1}{Z_{T_1}}\bar{\psi}(x_o)\prod_{i=1}^{\kappa}\psi(x_o,x_i)\ell(x_i), \quad \forall \tau = (x_o,x_1,\ldots,x_\kappa) \in \mathcal{X}^{T_1^\kappa}.$$

结合这一点以及 ψ的对称性，在下式第二行交换求和与乘积，并在第三行使用 $\ell \in \Delta^*$，我们得出对于任意 x、 $z \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\pi_{\boldsymbol{\rho}_1}(x,z) &= \frac{1}{Z_{T_1}} \sum_{x_o,x_1,x_2,\ldots,x_\kappa \in \mathcal{X}} \bar{\psi}(x_o) \prod_{i=1}^{\kappa} \psi(x_o,x_i)\ell(x_i)\mathbf{1}_{\{x_1=x,x_o=z\}} \\ &= \frac{1}{Z_{T_1}} (\psi(x,z)\ell(x)) \cdot \bar{\psi}(z) \left(\sum_{y\in\mathcal{X}} \psi(z,y)\ell(y) \right)^{\kappa-1} \\ &= \frac{\zeta}{Z_{T_1}} \ell(x)\psi(x,z)\ell(z),\end{aligned}$$

其中 ζ 是（2.19）中的归一化常数。这就证明了（2.20）。

□

Appendix B. Proof of the unimodular extension property for TIS Gibbs measures

本节将证明引理 3.2。我们先给出一个观察。回顾注 2.1 中的 $\eta \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_*^\kappa[\mathcal{X}])$，以及定义 1.1 中其深度为$h$ 的边缘分布 $\eta_h \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,\ h}^{\kappa}[\mathcal{X}])$。

注 B.1。 对于任意 $h \geq 1$，结合注释 1.3， η_h 是（2.18）中定义的 TIS 吉布斯测度，$\bar{}$满足 $\psi \equiv 1$, $\psi(x) = \nu(x)$ $\ell(x) = \nu(x)$，且归一化常数为 $Z_{T_r} = 1$.

引理 3.2 的证明。 固定任意规范 $(\psi, \bar{\psi})$。利用 (3.5) 中 $\mu^{(\pi)}$ 的定义，并通过相同的 Ulam-Harris-Neveu 标记（如注释 1.3 所述）将 $\mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}$与 η_1都视为 $\mathcal{X}^{T_1^\kappa}$上的测度，我们看到

$$\mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}(\tau) = \pi^o_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o) \cdot \prod_{v=1}^{\kappa} \left(\frac{\pi_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o,x_v)}{\pi^o_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o)} \right), \quad \tau = (x_o,x_1,\ldots,x_\kappa) \in \mathcal{X}^{T_1^\kappa}.$$

然后给定 $\boldsymbol{\rho} \in$TIS 吉布斯测度$_{T^\kappa}^{\psi\ \bar{\psi}}$,其具有（齐次）边界律 $\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，在第二行使用 (2.20)、在第四行使用 (2.19)，我们得到，对任意 $\tau = (x_o,x_1,\ldots,x_\kappa) \in \mathcal{X}^{T_1^\kappa}$,

$$\begin{aligned}\mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}(\tau) &= \pi_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o,x_1) \cdot \prod_{v=2}^{\kappa} \left(\frac{\pi_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o,x_v)}{\pi^0_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_o)} \right) \\ &\propto \ell(x_o)\psi(x_o,x_1)\ell(x_1) \prod_{v=2}^{\kappa} \left(\frac{\ell(x_o)\psi(x_o,x_v)\ell(x_v)}{\sum_{z\in\mathcal{X}} \ell(x_o)\psi(x_o,z)\ell(z)} \right) \\ &= \ell(x_o)\psi(x_o,x_1)\ell(x_1) \cdot \left(\sum_{z\in\mathcal{X}} \psi(x_o,z)\ell(z) \right)^{1-\kappa} \cdot \prod_{v=2}^{\kappa} \psi(x_o,x_v)\ell(x_v) \\ &\propto \bar{\psi}(x_o) \prod_{v=1}^{\kappa} \psi(x_o,x_v)\ell(x_v).\end{aligned}$$

这就证明了 (3.6)。

接下来，令 $\rho' := \mathrm{UGW}_1(\boldsymbol{\rho}_1)$，我们用归纳法证明，对每个 $r \in \mathbb{N}$, $\rho'_r = \boldsymbol{\rho}_r$。注意，根据定义 $\rho'_1 = \boldsymbol{\rho}_1$。假设对于某个 $r \in \mathbb{N}$，有 $\rho'_r = \boldsymbol{\rho}_r$，那么由于 $\boldsymbol{\rho}_1 = \mu^{(\pi_{\boldsymbol{\rho}_1})}$，式 (3.1) 中定义的星上的条件测度变为

$$\widehat{P}_{\boldsymbol{\rho}_1}(z,z')(\tau) = E_1(z',z)(\tau \oplus z') \prod_{v\in N_\tau(o)} \pi_{\boldsymbol{\rho}_1}^{1|o}(x_v|x_o), \quad \tau \in \mathcal{T}_{*,1}^{\kappa-1}[\mathcal{X}], z, z' \in \mathcal{X},$$

因此

$$\frac{d\widehat{P}_{\boldsymbol{\rho}_1}(z,z')}{d\widehat{P}_{\eta_1}(z,z')}(\tau)=\prod_{v\in N_\tau(o)}\frac{d\pi^{1|o}_{\boldsymbol{\rho}_1}}{d\eta_1^{1|o}}(x_v|x_o),\quad \tau\in\mathcal{T}^{\kappa-1}_{*,1}[\mathcal{X}],z,z'\in\mathcal{X},\tag{B.1}$$

回忆第 1.4.2 节中祖先 $a(v)$ 的定义。第一行使用 (3.2) 中 ρ'_{r+1} 的定义，第二行使用归纳假设和 (B.1)，第三行使用 (2.18)、(2.20) 和注 B.1 中 $\boldsymbol{\rho}_r$ 的定义，第四行使用 ℓ 是 (2.19) 中空腔映射的不动点这一事实，以及每个顶点（根除外）的子节点数为 $\kappa-1$ 这一事实，最后一行使用 (2.18) 和注 B.1 中 $\boldsymbol{\rho}_{r+1}$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho'_{r+1}}{d\eta_{r+1}}(\tau_{r+1})&=\frac{d\rho'_r}{d\eta_r}(\tau_r)\prod_{v_r\in\tau_r\setminus\tau_{r-1}}\frac{d\widehat{P}_{\boldsymbol{\rho}_1}(x_{v_r},x_{p(v_r)})}{d\widehat{P}_{\eta_1}(x_{v_r},x_{p(v_r)})}(\tau_{r+1}(v_r\setminus p(v_r))_1)\\
&=\frac{d\boldsymbol{\rho}_r}{d\eta_r}(\tau_r)\prod_{v_r\in\tau_r\setminus\tau_{r-1}}\prod_{v_{r+1}\in N_{\tau_{r+1}}(v_r)\cap\tau_{r+1}}\frac{d\pi^{1|o}_{\boldsymbol{\rho}_1}}{d\eta_1^{1|o}}(x_{v_{r+1}}|x_{v_r})\\
&=\frac{1}{Z_{T_r^\kappa}}\prod_{\{u,v\}\in E(T_r^\kappa)}\psi(x_u,x_v)\prod_{v_{r-1}\in T^\kappa_{r-1}}\frac{\bar\psi(x_{v_{r-1}})}{\nu(x_{v_{r-1}})}\prod_{v_r\in T^\kappa_r\setminus T^\kappa_{r-1}}\left(\frac{\ell(x_{v_r})}{\nu(x_{v_r})}\prod_{\substack{v_{r+1}\in T^\kappa_{r+1}\\ v_{r+1}\sim v_r}}\frac{\psi(x_{v_r},x_{v_{r+1}})\frac{\ell(x_{v_{r+1}})}{\nu(x_{v_{r+1}})}}{\sum_{z\in\mathcal{X}}\psi(x_{v_r},z)\ell(z)}\right)\\
&=\frac{1}{Z'}\prod_{\{u,v\}\in E(T_r^\kappa)}\psi(x_u,x_v)\prod_{v_{r-1}\in T^\kappa_{r-1}}\bar\psi(x_{v_{r-1}})\prod_{v_r\in T^\kappa_r\setminus T^\kappa_{r-1}}\left(\frac{\bar\psi(x_{v_r})}{\nu(x_{v_r})}\prod_{\substack{v_{r+1}\in T^\kappa_{r+1}\\ v_{r+1}\sim v_r}}\psi(x_{v_r},x_{v_{r+1}})\frac{\ell(x_{v_{r+1}})}{\nu(x_{v_{r+1}})}\right)\\
&=\frac{d\boldsymbol{\rho}_{r+1}}{d\eta_{r+1}}(\tau_{r+1}),
\end{aligned}$$

其中 $Z'=Z_{T_r}/\zeta$，且 ζ 由 (2.19) 给出。最后请注意，任意测度 $\rho\in\mathcal{P}(\mathcal{T}_{*,\ 1}[\mathcal{X}])$ 都可以由其边缘分布 $(\rho_r)_{r\in\mathbb{N}}$ 唯一确定。证毕。

□

Appendix C. Proof of the first reduction of the optimization problem

引理 *3.8* 的证明。 根据 (3.5) 中 $\mu^{(\pi)}$ 的定义，显然边边缘分布 $\pi_{\mu^{(\pi)}}=\pi$。接下来，我们通过证明对于任意满足 $\pi_\mu=\pi$ 的 $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}^\kappa_{*,\ 1}[\mathcal{X}])$，都有以下结论，来说明 $\mu^{(\pi)}$ 是集合 $\{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}^\kappa_{*,\ 1}[\mathcal{X}])$ 中 $\mu\mapsto H(\mu\|\eta_1)$ 的唯一极小化元：$\pi_\mu=\pi\}$

$$H(\mu\|\eta_1)=H(\mu\|\mu^{(\pi)})+H(\mu^{(\pi)}\|\eta_1)\geq H(\mu^{(\pi)}\|\eta_1),\tag{C.1}$$

除非 $\mu=\mu^{(\pi)}$，否则不等式严格成立

设 $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{T}^\kappa_{*,1}[\mathcal{X}])$ 满足 $\pi_\mu=\pi$。我们首先证明 $\mu\ll\mu^{(\pi)}$。事实上，假设 $(\tau,X)\in\mathcal{T}^\kappa_{*,1}[\mathcal{X}]$ 且 $\mu^{(\pi)}(\tau,X)=0$。那么，对于某个 $v\in N_\tau(o)$，要么 $\pi^o(X_o)=0$，要么 $\pi(X_o,X_v)=0$。在第一种情况下，$0=\pi^o(X_o)=\mu_o(X_o)\geq\mu(\tau,X)$。在第二种情况下，$0=\pi(X_o,X_v)=\pi_\mu(X_o,X_v)=\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_\mu\left[\sum_{u=1}^\kappa\mathbf{1}_{\{(\mathbf{x}_o,\mathbf{X}_u)=(X_o,X_v)\}}\right]\geq\frac{1}{\kappa}\mu(\tau,X)$。无论哪种情况，$\mu(\tau,X)=0$，因此可得 $\mu\ll\mu^{(\pi)}$。

利用 $\mu \ll \mu^{(\pi)}$ 这一事实，以及 η_1 具有满支撑这一事实（因为 ν 具有满支撑），我们可以写出

$$H(\mu\|\eta_1) = H(\mu\|\mu^{(\pi)}) + \mathbb{E}_\mu\left[\log\left(\frac{d\mu^{(\pi)}}{d\eta_1}\right)\right]. \tag{C.2}$$

利用相对熵的链式法则、(3.5) 中 $\mu^{(\pi)}$ 的形式、注 2.1 中 η_1 的定义，以及 $\pi_\mu = \pi = \pi_{\mu^{(\pi)}}$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu\left[\log\left(\frac{d\mu^{(\pi)}}{d\eta_1}\right)\right] &= \mathbb{E}_{\pi^o}\left[\log\left(\frac{d\pi^o}{d\nu}\right)\right] + \mathbb{E}_{\mu^{(\pi)}}\left[\log\left(\prod_{v=1}^{\kappa}\frac{\pi^{1|o}(X_v \mid X_o)}{\nu(X_v)}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\pi^o}\left[\log\left(\frac{d\pi^o}{d\nu}\right)\right] + \kappa\mathbb{E}_\pi\left[\log\left(\frac{\pi^{1|o}(X_1 \mid X_o)}{\nu(X_1)}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{(\pi)}}\left[\log\left(\frac{d\mu^{(\pi)}}{d\eta_1}\right)\right] \\
&= H(\mu^{(\pi)}\|\eta_1).
\end{aligned}$$

代回 (C.2) 后，即得 (C.1)。

接下来，我们证明 (3.21)。首先利用 (3.12) 中 I_1^κ 的定义，再利用 (3.5) 中 $\mu^{(\pi)}$ 的定义，由此可得 $\pi_{\mu^{(\pi)}} = \pi$；然后利用注 2.1 中 η_1 的定义，由此可得 $\pi_{\eta_1} = \nu \otimes \nu$；最后利用第四行中 π 的对称性，我们得出

$$\begin{aligned}
I_1^\kappa(\mu^{(\pi)}) &= H(\mu^{(\pi)}\|\eta_1) - \frac{\kappa}{2}H(\pi_{\mu^{(\pi)}}\|\pi_{\eta_1}) \\
&= \mathbb{E}_{\mu^{(\pi)}}\left[\log\frac{d\pi^o}{d\nu}(\mathbf{X}_o) + \sum_{v\in N_{\boldsymbol{\tau}}(o)}\log\frac{d\pi^{1|o}}{d\nu}(\mathbf{X}_v|\mathbf{X}_o)\right] - \frac{\kappa}{2}H(\pi\|\nu\otimes\nu) \\
&= H(\pi^o\|\nu) + \frac{\kappa}{2}\mathbb{E}_\pi\left[2\log\frac{\pi(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_o)}{\nu(\mathbf{X}_1)\pi^o(\mathbf{X}_o)} - \log\frac{\pi(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_o)}{\nu(\mathbf{X}_1)\nu(\mathbf{X}_o)}\right] \\
&= H(\pi^o\|\nu) + \frac{\kappa}{2}\mathbb{E}_\pi\left[\log\frac{\pi(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_o)}{\pi^o(\mathbf{X}_1)\pi^o(\mathbf{X}_o)}\right] \\
&= H(\pi^o\|\nu) + \frac{\kappa}{2}H(\pi\|\pi^o\otimes\pi^o).
\end{aligned}$$

由 (3.3)，这等于 $J_\kappa^\nu(\pi)$。

□

Appendix D. Proof that minimizers achieve equality constraint

引理 *3.9* 的证明。 令 $c > c_{h,\ \mathtt{ref}}$. 显然，我们有

$$\min_{c'\geq c}\min_{\pi\in\mathcal{B}_h(c')} J_\kappa^\nu(\pi) \leq \min_{\pi\in\mathcal{B}_h(c)} J_\kappa^\nu(\pi).$$

假设上一个公式左侧的最小值在某个满足 $c' > c.$ 的 $\tilde{\pi} \in \mathcal{B}_h(c')$ 处取得。由于 $\mathbb{E}_{\tilde{\pi}}[h(X_o,\ X_1)] = c' > c,$ 存在一个完全包含在约束集内的 $\tilde{\pi}$ 附近的小邻域。因此， $\tilde{\pi}$ 必须是该映射的局部极小值（因而也是驻点）

$$\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right) \ni \pi \mapsto J_\kappa^\nu(\pi) \in \mathbb{R}. \tag{D.1}$$

在 [14, 命题 1.7] 中应用其中对应于 κ、 $\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right)$, π、 π^0、 ℓ、 ν 和常函数 1 的 d、 Δ、 $\boldsymbol{h}$、 $\bar{h}$、 h、 $\bar{\psi}$ 和 ψ，并将 [14, 方程 (9)] 与 (3.3) 进行比较,

由此得出， [14] 中的泛函 Φ 对应于映射 $-J_\kappa^\nu$，因此 J_k^ν 的任意驻点 $\tilde{\pi}$ 都具有如下形式

$$\tilde{\pi}(x,z) \propto \ell(x)\ell(z), \quad x,z \in \mathcal{X},$$

对于某个 $\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$，它是空腔映射 $\mathsf{CAV}: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 在¯中定义的、满足 $(\psi,\psi) = (\nu,1)$ (2.19) 的不动点，也就是说，

$$\mathsf{CAV}\hbar(x) = \frac{1}{Z}\nu(x)\left(\sum_{x'\in\mathcal{X}} \hbar(x')\right)^{\kappa-1}, \quad x \in \mathcal{X},$$

其中 Z 是归一化常数（注意，映射 CAV 的不动点集合在 [14] 中记为 $\mathcal{H}^*$ ）。由于 $\hbar \in \mathcal{P}(\mathcal{X}),$ ，上述映射化简为平凡映射 $\mathsf{CAV}\hbar = \nu,$ ，显然它以 ν 为唯一不动点。这证明了 $\ell = \nu$ ，从而表明 $\tilde{\pi} = \nu \otimes \nu$是 (D.1) 中映射的唯一局部极小值点。然而，由于$c' > c > c_{h,\mathtt{ref}}$，根据 (2.12)、注 2.1 和 (2.22)，可得 $\nu \otimes \nu \notin \mathcal{B}_h(c'),$ ，这与最初假设的 $\tilde{\pi} \in \mathcal{B}_h(c')$ 矛盾。因此，任何在 (3.23) 左侧取得最小值的数对 $(c',\tilde{\pi})$ 都必须满足 $c' = c$ 且 $\tilde{\pi} \in \mathcal{B}_h(c)$. 这证明了 (3.23)。完全类似的论证可证明当 $c < c_{h,\mathtt{ref}}$. □时 (3.24)。

Appendix E. Existence of boundary minimizers

E.1. 例 4.6 的论证。对于 $q \in \mathbb{N}$，定义 $J_{(q)\kappa} \coloneqq J_\kappa^{\mathsf{Unif}([q])}$，根据 (3.3)，它可表示为

$$J_\kappa^{(q)}(\pi) = \log q + (\kappa-1)H(\pi^o) - \frac{\kappa}{2}H(\pi), \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left(\mathcal{X}^2\right), \tag{E.1}$$

其中 H 是在 (1.1) 中定义的熵泛函。我们首先通过计算满足约束的所有方向上 $J_\kappa^{(q)}$ 的变化，证明 π_* 确实是一个局部极小值点。事实上，沿可行方向对 π^* 的任意此类扰动，都可以通过对 π_* 与某个 $\xi \in \mathcal{B}_h$（c）进行插值得到。因此，固定 $\mathcal{B}_h$（c），并取充分小的 $\varepsilon > 0$ ，使得 $\pi_\varepsilon \coloneqq$（$1-\varepsilon$）$\pi_* + \varepsilon\xi \in \mathcal{B}_h$（$c$）。于是，根据引理 4.9 以及上文给出的 π_* 的形式，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{|\varepsilon\log\varepsilon|}\left(J_\kappa^{(q)}(\pi_\varepsilon) - J_\kappa^{(q)}(\pi_*)\right) &= (\kappa-1)\sum_{x\in[q]} \xi^o(x)\mathbf{1}_{\{\pi_*^o(x)=0\}} - \frac{\kappa}{2}\sum_{x,z\in[q]} \xi(x,z)\mathbf{1}_{\{\pi_*(x,z)=0\}} \\ &= (\kappa-1)\xi^o(q) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi(q,q) + 2\sum_{x\in[q-1]} \xi(q,x)\right). \end{aligned} \tag{E.2}$$

由于 a 任意 $\xi \in \mathcal{B}_h$（c）都满足约束且是一个概率测度，因此可知 t

$$\begin{aligned}\xi(q,q) - 2\sum_{x\in[q-1]} \xi(q,x) + \frac{1}{2}\sum_{x,z\in[q-1]} \xi(x,z) &= \frac{1}{2} \\ \xi(q,q) + 2\sum_{x\in[q-1]} \xi(q,x) + \sum_{x,z\in[q-1]} \xi(x,z) &= 1.\end{aligned}$$

这意味着存在某个 $p \in [0,1/8]$ 使得

$$\left(\xi(q,q), \sum_{x\in[q-1]} \xi(q,x), \sum_{x,z\in[q-1]} \xi(x,z)\right) = (6p, p, 1-8p). \tag{E.3}$$

特别地，这意味着 $\xi^0(q) = 7p$；结合 (E.2) 以及 $\kappa \geq 3$ 这一事实，我们对 $p > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{|\varepsilon \log \varepsilon|} \left(J_\kappa^{(q)}(\pi_\varepsilon) - J_\kappa^{(q)}(\pi_*) \right) = 3\kappa p - 7p \geq 2p > 0. \tag{E.4}$$

若 $p = 0$，则有 $\xi^o(q) = 0$。注意，约束(E.3)对任意测度 $\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left([q-1]^2\right)$自动成立。因此，由(3.4)可知，$\pi_*|_{\mathcal{P}_{\mathtt{sym}}([q-1]^2)}$，即 $[q-1]^2$上的均匀测度，是 $J_\kappa^{(q-1)}$的唯一的全局极小值点。此外，对任意在自旋值 q上不赋质量的$\pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left([q]^2\right)$，我们有

$$J_\kappa^{(q)}(\pi) = J_\kappa^{(q-1)}(\pi) + \log \frac{q}{q-1}.$$

因此,

$$\{\pi_*\} = \arg\min \left\{ J_\kappa^{(q)}(\pi) : \pi \in \mathcal{P}_{\mathtt{sym}}\left([q]^2\right), \pi^o(q) = 0 \right\}.$$

结合(E.4)，我们已证明 π_* 是一个局部极小值点。 □

E.2. **边界全局极小值：当 ν 非均匀时**。在本节中，我们首先借助E.2.1节中的一个具体例子，说明全局极小点从内部转移到边界的转变。然后，我们在E.2.2节中严格论证例4.7。

E.2.1. 建立退化全局极小值点存在性的启发式方法。假设 $\mathcal{X} = \{1, -1\}$，并使用(5.4)中的参数化 $\pi = \pi[s,t]$、(5.5)中的 $J_\kappa^\nu(s,t)$，以及对于满足 $h(1,1) + h(-1,-1) - 2h(1,-1) \neq 0$的边势，(5.12)中定义的约束线段 $\mathcal{B}_h(s,t) = \{t = w(h)s : (s,t) \in \Delta\}$。我们在图3a中绘制了情形$\nu(-1) = 2/3$、$\nu(1) = 1/3$ 和 $\kappa = 5$下 $J_\kappa^\nu(s,t)$的等高线，其中每条虚线表示某个边势 h 和约束值 $c = \kappa h(-1,-1)$所对应的约束线段$t = w(h)s$ 。对图3b的检视（其中包含函数 $s \mapsto J_5^\nu(s, w(h)s)$ 的相应图像）表明以下几点：(i) 存在一个临界斜率 w^*，使得当 $w(h) < w^*$时，$s = 0$ 是 $s \mapsto J_5^\nu(s, w(h)s)$的唯一的全局极小值点，这意味着 $\pi[0,0] = \delta_{(-1,-1)}$是边优化问题的唯一的全局极小值点；(ii) 当 $w(h) = w^*$时，恰好存在两个全局极小点，一个位于内部，一个位于边界；(iii) 当 $w(h) > w^*$时，全局极小值点是唯一的且位于内部。下面，我们将这些观察严格化，以证明例4.7中边界全局极小值点的存在性。

E.2.2. 例*4.7*的论证。定义

$$w^* := \inf \{ w : \exists s \in (0,1] \text{ such that } (s, ws) \in \Delta \text{ and } J_\kappa^\nu(s, ws) \leq J_\kappa^\nu(0,0) \}. \tag{E.5}$$

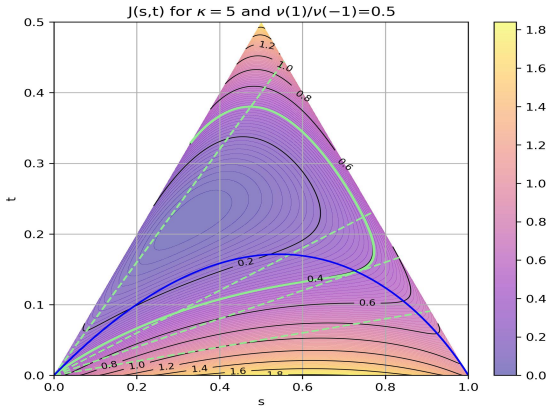
我们声称，在 $\kappa = 5$ and $\nu(1) = 1/3$, $\nu(-1) = 2/3$ 的设定下，有 $w^* = 1/5$。那么，按照（4.6）中的定义，取 h，由（5.12）可知，（5.12）中定义的斜率 $w(h)$ 等于

$$w(h) = \frac{7-4}{7+4-2\cdot(-5)} = \frac{1}{7} < \frac{1}{5}.$$

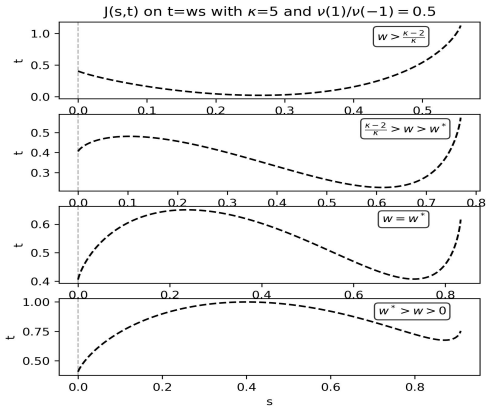
因此，$s = 0$是映射 $s \mapsto J_\kappa^\nu(s, w(h)s)$ 的唯一的全局极小值点；否则，存在另一个满足 $J_\kappa^\nu(s', w(h)s') \leq J_\kappa^\nu(0,0)$ 的 $s' \neq 0$，这将与我们的断言$w^* = 1/5$相矛盾。因此，在此设定下，$\pi_* = \pi[0,0] = \delta_{(-1,-1)}$ 是边优化问题的唯一的全局极小值点。

下面，我们通过证明在范围 $D := \{(s,t) \in \Delta : t \leq s/5\}$内，$J_\kappa^\nu(s,t)$ 的最小值为 $J_\kappa^\nu(0,0)$，且仅在两点 $(0,0)$ 和 $(4/5, 4/25)$ 处取得，来证实我们的论断：$w^* = 1/5$，即

$$\arg\min \{ J_\kappa^\nu(s,t) : (s,t) \in D \} = \{(0,0), (4/5, 4/25)\}. \tag{E.6}$$



(A) $J_5^\nu(s,\ t)$ 的等高线图：绿色实线等高线表示 $\{(s,\ t):\ J_5^\nu(s,\ t)\ =\ J_5^\nu(0,\ 0)\}$；绿色虚线表示不同的约束线段。



(B) 沿约束线段 $t = ws$ 的 $J_5^\nu(s,\ t)$ 值

FIGURE 3. $J_5^\nu(s,\ t)$，其标记分布为非均匀分布 $\nu(1)\ = 1/3,\ \nu(-1)\ = 2/3$

注意，极小值点是良定义的，因为 J_κ^ν 是紧集 D 上的连续函数。为证明 (E.6)，我们将 D 划分为四种情形，并分别分析每种情形下的极小化元:

(1) $D_0 := D \cap \{(s,\ t) \in \Delta:\ s \neq 0,\ t \neq s/5,\ 1-s-t \neq 0\}$: 我们将在下文证明，$J_\kappa^\nu$ 在 D_0中没有临界点，因此也没有局部极小值点。注意，(5.6) 和 (5.10) 蕴含

$$\partial_t J_\kappa^\nu(s,t) = \partial_t J_\kappa^{(2)}(s,t) = 0 \quad \text{if and only if} \quad t = s(1-s).$$

因此，在第一行中使用 (5.6) 和 (5.9)，然后代入 $t = s(1-s)$，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_s J_\kappa^\nu(s,t)\mid_{t=s(1-s)} &= \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) + \partial_s J_\kappa^{(2)}(s,t)\mid_{t=s(1-s)} \\ &= \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) + (1-\kappa)\log\left(\frac{s}{1-s}\right) + \frac{\kappa}{2}\log\left(\frac{s^2}{(1-s)^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{\nu(-1)}{\nu(1)}\right) + \log\left(\frac{s}{1-s}\right),\end{aligned}$$

当且仅当 $s = \nu(1)$ 时，该式为零。这表明，当且仅当 $(s,t)\ = (\nu(1)\ \nu(1)\nu(-1))$ 且 $(\nu(1)\ \nu(1)\nu(-1))$ $= (1/3, 2/9) \notin D$ 时，$\nabla J_\kappa^\nu(s,t)\ = (0,0)$。

(2) $D_1 := D \cap \{(s,t) \in \Delta:\ 1-s-t = 0, s \neq 1\}$: 对任意点 $(s,t) \in D_1$，取经过 $(0,0)$ 和 (s,t) 的约束线段 Γ。根据引理 4.11，$\pi[s,t]$ 不可能是对应于 Γ 的边优化问题的局部极小值点。结合 $\Gamma \subset D$ 这一事实可知，(s,t) 不可能在 D 上取得 $J_\kappa^\nu(s,t)$ 的最小值;

(3) $D_2 := D \cap \{(s,t) \in \Delta:\ t = 0\}$: 对于任意点 $(s,\ 0) \in D_2$，第一行使用 (5.6)，第二行利用熵非负这一事实，可得

$$\begin{aligned}J_\kappa^\nu(s,0) &= (s+1)\log 2 - \log\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(s\log s + (1-s)\log(1-s)\right) \\ &\geq \log 2 - \log\left(\frac{4}{3}\right),\end{aligned}$$

当且仅当 $s = 0$时等号成立。这表明 J_κ^ν在 D_2 中的唯一的全局极小值点是$(0,0)$;

(4) $D_3 := D \cap \{(s,t) \in \Delta : t = s/5\}$: 通过直接计算，对于 $s \in (0, 5/6)$，我们有

$$\frac{d}{ds} J_\kappa^\nu(s, \frac{1}{5}s) = -3\log 2 - \log s + 4\log(1-s) - 3\log(5-6s);$$
$$\frac{d^2}{ds^2} J_\kappa^\nu(s, \frac{1}{5}s) = \frac{1}{s(1-s)(5-6s)}\,(9s-5)\,.$$

因此， $s = 4/5$ 是一个局部极小值点，因为上述结果意味着

$$\frac{d}{ds} J_\kappa^\nu(s, \frac{1}{5}s) \mid_{s=\frac{4}{5}} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2}{ds^2} J_\kappa^\nu(s, \frac{1}{5}s) \mid_{s=\frac{4}{5}} > 0.$$

此外，由于 $(0, 5/6) \ni s \mapsto J_\kappa^\nu(s, \frac{1}{5}s)$ 是一个光滑函数，且在 $s = 5/9$ 处有唯一的拐点，因此 $s = 4/5$ 必定是 $(0, 5/6)$ 中唯一的局部极小值点。此外，由于对于每个 $(s,t) \in D_3$，都有 $s \in [0, 5/6]$，并且 $J_\kappa^\nu(5/6, 1/6) > J_\kappa^\nu(4/5, 4/25) = J_\kappa^\nu(0,0)$，我们得出结论：$(0,0)$ 和 $(4/5, 4/25)$ 是 D_3 中仅有的两个全局极小点。

□

备注 E.1. 由图 3 可知，临界斜率应与经过 $(0,0)$ 的等值曲线的切线重合，也就是说，

$$w^* = \inf\left\{\frac{t}{s} : J_\kappa^\nu(s,t) = J_\kappa^\nu(0,0), s \neq 0\right\}.$$

然而，要证明这一点需要更精细的计算，这并非上述论证的重点，因此我们采用了一个不那么直观但更简单的论证。

Appendix F. An example of a ferromagnetic Ising measure with a consensus that is lower than typical

在铁磁唯一性区域内，唯一伊辛测度的共识总是高于典型水平。然而，在非唯一性区域内情况并非总是如此。尽管具有与参考测度 ν 相同偏差的边界条件所对应的铁磁伊辛测度仍会产生较高的共识，但相反边界条件下的伊辛测度可能产生低于非典型水平的共识。下面我们通过一个数值示例展示这一现象。

例 F.1. 设 $\kappa = 6$, $(\beta, B) = (1.75, 5.4)$。则 $h^- \approx -3.22177$ 是空腔映射 Γ的不动点，并且根据 (6.12),

$$\mathbb{E}_{\Phi_\kappa^-(\beta,B)}\left[\sum_{v=1}^{\kappa} m(X_o, X_v)\right] = \kappa \cdot \frac{e^{2\beta}\cosh(2h^-) - 1}{e^{2\beta}\cosh(2h^-) + 1} \approx 5.99884722 < 5.9995104 \approx \kappa \cdot \tanh^2(B) = c_{\texttt{ref}}.$$

References

[1] David Aldous与Russell Lyons。幺模随机网络上的过程。 *Electronic Journal of Probability*，12 1454 1508，2007年：–。[2] Rangel Baldasso、Roberto Oliveira、Alan Pereira与Guilherme Reis。带标记稀疏随机图的大偏差及其在相互作用扩散中的应用。 *arXiv:2204.08789v1*，2022年。[3] Rangel Baldasso、Alan Pereira与Guilherme Reis。给定度序列的带标记随机图：局部拓扑上的大偏差及其应用。 *ALEA*，23:83–103，2026年。[4] Charles Bordenave。随机图与概率组合优化讲义。 *Available at https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/charles.bordenave/_media/coursrg.pdf* 2016 ，。

[5] Charles Bordenave与Pietro Caputo。稀疏随机图中经验邻域分布的大偏差。 *Probability Theory and Related Fields*，163(1):149–222，2015年。[6] Edwin Chong与Stanislaw Zak。 *An Introduction to Optimization.* John Wiley & Sons，霍博肯，新泽西州，第4版，2013年。

[7] Amin Coja-Oghlan、Philipp Loick、Bal´azs F Mezei与Gregory B Sorkin。随机正则图上的伊辛反铁磁体与最大割。*SIAM Journal on Discrete Mathematics*，36(2):1306–1342，2022年。[8] H. Cram´er。*Sur un nouveau théorème–limite de la théorie des probabilités.* 载于Actualit´es Scientifiques et Industrielles（《科学与工业时讯》），第736号，收入Colloque consacr´e `a la th´eorie des probabilit´es（《概率论专题讨论会》）。Hermann，巴黎，1938年。[9] Imre Csisz´ar。Sanov性质、广义I-投影与条件极限定理。*The Annals of Probability* 768 793, 1984，第 – 页。[10] Imre Csisz´ar、Thomas Cover与Byoung-Seon Choi。马尔可夫条件化下的条件极限定理。*IEEE Transactions on Information Theory*，33(6):788–801，1987年。[11] Payam Delgosha与Venkat Anantharam。标记有根图上随机过程的一种熵概念。*arXiv preprint arXiv:1908.00964*，2019年。[12] Amir Dembo与Andrea Montanari。稀疏随机图上的吉布斯测度与相变。*Braz.*，（）：–。[13] Amir Dembo与Andrea Montanari。局部类树图上的伊辛模型。*Annals of Applied Probability*，20 2 565 592，2010年（）：–。[14] Amir Dembo 、 Andrea Montanari 、 Allan Sly 与 Nike Sun。d- 正则图上波茨模型的副本对称解。*Communications in Mathematical Physics*，327(2):551–575，2014年。[15] Amir Dembo、Andrea Montanari与Nike Sun。局部类树图上的因子模型。*J. Probab. Stat.* 24 2 137 211, 2010*The Annals of Probability* 4162 4213, 2013，第 – 页。[16] Amir Dembo与Ofer Zeitouni。*Large deviations techniques and applications*。Springer Berlin Heidelberg，2010年。[17] Rick Durrett。*Probability: Theory and Examples*，第49卷。剑桥大学出版社，2019年。[18] Richard S Ellis。大偏差理论概述及其在统计力学中的应用。*Scandinavian Actuarial Journal*，1995(1):97–142，1995年。[19] Richard S Ellis。大偏差理论：从玻尔兹曼1877年的计算到二维湍流中的平衡宏观态。*Physica D: Nonlinear Phenomena*，133(1-4):106–136，1999年。[20] Richard S Ellis。*Entropy, large deviations, and statistical mechanics*，第271卷。Springer Science & Business Media，2012年。[21] Hans-Otto Georgii。*Gibbs measures and phase transitions*，第9卷。Walter de Gruyter，2011年。[22] Steve n S Kim与Kavita Ramanan。高维 ℓp 球面的条件极限定理。*Journal of Applied Probability* 55 4 1060 1077, 2018，（）：–。[23] C. K¨ulske、U. A. Rozikov与R. M. Khakimov。凯莱树上波茨模型的平移不变分裂吉布斯测度的描述。*Journal of Statistical Physics*，156(1):189–200，2014年7月。[24] Daniel Lacker、Kavita Ramanan与Ruoyu Wu。相互作用过程稀疏网络的局部弱收敛。*The Annals of Applied Probability*，33(2):843–888，2023年。[25] Oscar E. Lanford。经典统计力学中的熵与平衡态。载于A. Lenard编，*Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*，第20卷，第1页。1973年。[26] Oscar E Lanford。经典统计力学中的熵与平衡态。载于*Statistical mechanics and mathematical problems* 1 113 2007，第 – 页。Springer，。[27] Christian L´eonard。熵投影与支配点。*ESAIM: Probability and Statistics*，14:343– 381，2010年。[28] Ana Meda与Peter Ney。马尔可夫链的吉布斯条件化原理。*Perplexing Problems in Probability: Festschrift in Honor of Harry Kesten* 385 398, 1999，第 – 页。[29] Andrea Montanari、Elchanan Mossel与Allan Sly。局部类树图上伊辛模型的弱极限。*Probability Theory and Related Fields*，152(1):31–51，2012年。[30] Roberto I Oliveira、Guilherme H Reis与Lucas M Stolerman。稀疏图上的相互作用扩散：由局部弱极限得到的流体动力学。*Electronic Journal of Probability*，25:1–35，2020年。[31] Yoshitsugu Oono。大偏差与统计物理。*Progress of Theoretical Physics Supplement*，99:165– 205，1989年。[32] Christopher J Preston。*Gibbs states on countable sets*，第68卷。剑桥大学出版社，1974年。[33] Kavita Ramanan。稀疏随机图上的相互作用随机过程。载于*Mathematicians International Congress of* 4394 4425 2023，第 – 页。欧洲数学学会-EMS-Publishing House GmbH，。[34] Kavita Ramanan与Sarath Yasodharan。关于带标记稀疏随机图的大偏差速率函数。*arXiv preprint arXiv:2312.16103*，2023年。[35] UA Rozikov。凯莱树上波茨模型的吉布斯测度：综述与应用。*Reviews in Mathematical Physics* 33 10 2130007, 2021，（）：。[36] Utkir A. Rozikov。*Gibbs Measures on Cayley Trees* 40 *World Scientific Series on Directions in Condensed Matter Physics* 2013，卷。世界科学出版社，新加坡，。[37] I. N. Sanov。关于随机变量大偏差的概率。*Mat. Sbornik*，42(84):11–44，1957年。

[38] Frank Spitzer. 无限树上的马尔可夫随机场。 *The Annals of Probability*, 3(3):387–398, 1975. [39] Hugo Touchette. 统计力学的大偏差方法。 *Physics Reports*, 478(1-3):1–69, 2009. [40] Oldrich Alfonso Vasicek. 条件大数定律。 *The Annals of Probability*, pages 142–147, 1980. [41] Stan Zachary. 可数状态空间马尔可夫随机场与树上的马尔可夫链。 *The Annals of Probability* 11 4 894 903, 1983 , ( ): – November . [42] Stan Zachary. 树上和一维格点上的有界、吸引型与排斥型马尔可夫规范。 *Stochastic Processes and their Applications*, 20(2):247–256, September 1985. [43] Lenka Zdeborov´a and Stefan Boettcher. 关于随机正则图中最大割与二分宽度的一个猜想。 *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010年(02):P02020, 2010年.

Ivan Lee: Department of Statistics and Data Science, Yale University, New Haven CT 06511, USAemail: ivan.lee@yale.eduI-Hsun Chen: Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence RI 02912, USAemail: i-hsun chen@brown.edu

Kavita Ramanan: Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence RI 02912, USAemail: kavita ramanan@brown.edu

Sarath Yasodharan: Department of Industrial Engineering and Operations Research, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai 400076, Indiaemail: sarath yasodharan@iitb.ac.in