复希尔伯特空间中单粒子高维态的远程态制备

Jun-HaiZhao[1], Si-Qi Du[1], Wen-QiangLiu[2], Dong-Hong Zhao[1] 和 Hai-Rui Wei[1]**

[1] *School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China and*

[2] *Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043*(日期：2026年3月3日)

高维量子系统凭借容量更大、抗噪能力更强等显著优势，为量子信息应用开辟了新的研究空间。我们通过确定一组正交测量基，提出了有望实际应用的方案，可在复希尔伯特空间中精确远程制备四能级和八能级赤道态。在这些资源消耗最少的方案中，我们同时考虑了预先共享的最大纠缠态和非最大纠缠态。通过调整目标量子态的参数，也可以获得复希尔伯特空间中的三、五、六和七能级赤道态。评估结果表明，我们的高维远程态制备方案有望利用现有技术实现。对于通过部分纠缠信道实现高维远程态制备方案所必需的收集操作，可以通过将计算基编码到单光子系统的空间模式中予以避免。

PACS编号：03.67.Hk、03.65.Ud 关键词：远程态制备、高维量子系统、高维纠缠贝尔态

arXiv:2603.01323v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

I. 引言

远程态制备（RSP） [1–3] 是一种无需物理传送量子系统即可远程制备量子态的重要协议。有时，RSP也被称为已知量子态的隐形传态。量子隐形传态（QT） [4–6] 和RSP都利用预先共享的最大纠缠态 [7–10] 及一些经典信息，在不物理传送粒子的情况下，将量子态从发送方传送给远距离的接收方。在QT中，要传送的量子态归发送方所有，发送方和接收方都不知道该量子态的信息；一个最大纠缠态（纠缠比特）和两个经典通信比特（经典比特）都是必要且充分的。与通常的QT不同，在RSP中，发送方完全知道待制备量子态的信息，而接收方并不知道；尤其是，发送方无需拥有该量子态。值得注意的是，对于受限态，RSP可以在纠缠比特和经典比特之间进行权衡 [2, 3, 11] ，因此比QT更经济。此外，RSP或许更适合用于避免QT所需的完整贝尔型测量；仅依靠线性光学实现这种测量，目前仍是一项突出的实验挑战 [12]。

最初的远程态制备（RSP）是针对布洛赫球上的某些特殊量子比特提出的，见 2001 [1, 2]。此后，人们提出了许多理论和实验方面的改进 [13], , 例如低纠缠远程态制备 [14], 高维远程态制备 [15, 16], 广义远程态制备 [17], 隐蔽远程态制备 [18], 连续变量远程态制备 [19], 混合态远程态制备 [20, 21], 最优远程态制备 [20], 保真远程态制备 [11], 双向远程态制备 [22], 联合远程态制备 [23], 多自由度远程态制备 [24], 和循环远程态制备 [25]。近年来，鉴于高维系统的显著特点，例如信息容量增大 [16] 、对贝尔非定域性的违背更强 [26, 27],、实验装置更简化 [28], 、计算效率提高 [29], 、量子通信的安全性更高 [29], 以及抗噪性增强 [30], , 人们日益致力于研究高维远程态制备 [31]。

尽管高维量子系统具有诸多优势，但无论在理论还是实验方面，对它们的研究都十分有限。如今，高维量子系统已广泛应用于电路构建 [32–36], 纠缠生成 [37–42], 量子算法设计 [43], 量子态生成 [44, 45], 纠缠纯化 [46], 量子密钥分发（QKD） [47, 48], 纠缠分发 [49], 高维测量[50], 和贝尔检验 [51]等领域。关于高维远程态制备，早在 2001 年，Zeng 和 Zhang [15] 就证明，远程态制备只能在二维、四维或八维实希尔伯特子空间中实现。随后在 2006 年，Yu 等人[16]提出了一种利用量子比特的最大纠缠态远程制备实系数赤道态的技术。2022 年，Ma等人 [25] 提出了三维系统中的循环受控远程态制备。然而，高维远程态制备主要聚焦于复希尔伯特空间内的实子空间，迄今尚无针对高维复希尔伯特空间中远程态制备的方案。

本文提出了在复希尔伯特空间中远程制备四维和八维赤道态的方案。我们首先提出一种利用最大纠缠对在四维复希尔伯特空间中进行远程态制备的方案。该基于最大纠缠态的方案通过采用单体冯诺依曼测量和若干单体操作来实现。随后，

*电子邮箱：hrwei@ustb.edu.cn

我们将该方案推广到非最大纠缠信道的情形。接着，我们将上述远程态制备方案扩展到八维复希尔伯特空间，并详细给出了非平凡的正交基。最后，我们评估了这些高维远程态制备方案的性能。

我们的高维远程态制备方案具有以下特点。我们的方案均通过确定一组正交测量基来实现；与POVM测量相比，这种投影测量在物理实验中更容易实现。与基于簇态的远程态制备 [25], 相比，我们的远程态制备所需的纠缠对数量更少。此外，通过调整四维（八维）最小远程态制备方案的参数，也可以实现三维（五维、六维和七维）远程态制备。值得指出的是，若将量子单元（s能级，$s=4$，8）编码在单光子系统的空间模式态中，则借助（s维集体操作可通过使用（$s-1$）个可变反射率分束器（VBS）精确实现。

本文其余部分安排如下。在第II节中，我们介绍四维复希尔伯特空间中的远程态制备。这里分别考虑预先共享最大纠缠态和非最大纠缠态的情形。在第III节中，我们将这些协议推广到八维希尔伯特空间情形。我们在第IV节评估高维远程态制备方案的性能。在第V节中，我们进行讨论并总结全文。

II. 单量子位状态的远程制备

A. 使用最大纠缠态作为量子信道的四维远程态制备

考虑一个单量子位（四能级）赤道态

$$|\psi_0\rangle = c_0|0\rangle + c_1 e^{\mathrm{i}\theta_1}|1\rangle + c_2 e^{\mathrm{i}\theta_2}|2\rangle + c_3 e^{\mathrm{i}\theta_3}|3\rangle, \quad (1)$$

其中实系数 $c_i (i=0,1,2,3)$ 满足归一化条件 $\sum_{i=0}^{3} c_i^2 = 1$，实参数 $\theta_i \in [0, 2\pi)$。关于 $|\psi_0\rangle$ 的信息只有 Alice 知道。

现在，Alice（发送方）希望在 Bob（接收方）处远程制备 $|\psi_0\rangle$。为此，Alice 和 Bob 首先需要预先共享一个最大纠缠态 $|\Psi\rangle_{AB}$。这里

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle)_{AB}. \quad (2)$$

下标 A（B）分别指 Alice（Bob）所持有的粒子 A（B）。

随后，Alice执行一次变换

$$U = \mathrm{diag}\{1, e^{\mathrm{i}2\theta_1}, e^{\mathrm{i}2\theta_2}, e^{\mathrm{i}2\theta_3}\}, \quad (3)$$

对粒子 A。然后，$|\Psi\rangle_{AB}$ 变为

$$|\Psi'\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle + e^{\mathrm{i}2\theta_1}|11\rangle + e^{\mathrm{i}2\theta_2}|22\rangle + e^{\mathrm{i}2\theta_3}|33\rangle)_{AB}. \quad (4)$$

我们将$|\Psi'\rangle_{AB}$ 在正交基$\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$中重写为，即

$$\begin{aligned}|\Psi'\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(&|\psi_0\rangle_A \otimes |\psi_0\rangle_B + |\psi_1\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B \\ &+ |\psi_2\rangle_A \otimes |\psi_2\rangle_B + |\psi_3\rangle_A \otimes |\psi_3\rangle_B).\end{aligned} \quad (5)$$

Here

$$|\psi_0\rangle = +c_0|0\rangle + c_1 e^{\mathrm{i}\theta_1}|1\rangle + c_2 e^{\mathrm{i}\theta_2}|2\rangle + c_3 e^{\mathrm{i}\theta_3}|3\rangle, \quad (6)$$

$$|\psi_1\rangle = -c_1|0\rangle + c_0 e^{\mathrm{i}\theta_1}|1\rangle - c_3 e^{\mathrm{i}\theta_2}|2\rangle + c_2 e^{\mathrm{i}\theta_3}|3\rangle, \quad (7)$$

$$|\psi_2\rangle = -c_2|0\rangle + c_3 e^{\mathrm{i}\theta_1}|1\rangle + c_0 e^{\mathrm{i}\theta_2}|2\rangle - c_1 e^{\mathrm{i}\theta_3}|3\rangle, \quad (8)$$

$$|\psi_3\rangle = -c_3|0\rangle - c_2 e^{\mathrm{i}\theta_1}|1\rangle + c_1 e^{\mathrm{i}\theta_2}|2\rangle + c_0 e^{\mathrm{i}\theta_3}|3\rangle. \quad (9)$$

也就是说，$|\psi_i\rangle = \mathrm{diag}\{1, e^{\mathrm{i}\theta_1}, e^{\mathrm{i}\theta_2}, e^{\mathrm{i}\theta_3}\} \cdot \mathcal{T}_4 |i\rangle$ $i=0$，1，2，3。这里

$$\mathcal{T}_4 = \begin{pmatrix} c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ c_1 & c_0 & c_3 & -c_2 \\ c_2 & -c_3 & c_0 & c_1 \\ c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

注意，单粒子操作diag$\{1, e^{\mathrm{i}\theta_1}, e^{\mathrm{i}\theta_2}, e^{\mathrm{i}\theta_3}\}$相对容易实现。此处及下文将不再进一步讨论diag$\{1, e^{\mathrm{i}\theta_1}, e^{\mathrm{i}\theta_2}, e^{\mathrm{i}\theta_3}\}$ 的实现。

接下来，Alice在基 A中测量她的粒子 $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$，并通过经典通信（一个经典 dits）将测量结果告知Bob。根据方程（5），可以看出，如果测量结果为 $|\psi_0\rangle_A$，则Bob处于所需的量子态 $|\psi_0\rangle_B$，成功概率为1/4。如果测量结果为 $|\psi_1\rangle_A$、$|\psi_2\rangle_A$或 $|\psi_3\rangle_A$，则远程态制备失败。这是因为Bob无法将 $|\psi_1\rangle_B$、$|\psi_2\rangle_B$或$|\psi_3\rangle_B$ 变为 $|\psi_0\rangle_B$，因为目标态的相位参数 θ_i 对Bob而言 $|\psi_0\rangle$是未知的。

注意，如果 θ_1、θ_2 和 θ_3 在方程 (1) 中给出的量子态均限制在 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$，则可以利用最大纠缠态作为量子信道，精确完成四维远程态制备。这是因为 Bob 可以通过对粒子 B施加一些经典的单量子位前馈幺正操作 V_j，将 $|\psi_j\rangle_B (j=1、2、3)$ $|\psi_0\rangle_B$ 校正为 B。在基 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$下，操作 V_j可表示为

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

因此，原则上，所提出的基于最大纠缠态的远程制备在复希尔伯特空间中的四维实子空间内的成功概率可提高至 100%。

B. 使用非最大纠缠态作为量子信道的四维远程态制备

事实上，大多数量子信息处理任务只适用于最大纠缠态。然而，在实际应用中，由于环境引起的退相干，纠缠不可避免地会退化为另一种形式。这种退化会降低量子通信的保真度和安全性。

在本小节中，我们考虑预先共享的归一化~非最大纠缠纯态 $|\Psi\rangle_{AB}$，而非方程 $|\Psi\rangle_{AB}$ （2）中给出的最大纠缠态。这里

$$|\tilde{\Psi}\rangle_{AB} = (a_0|00\rangle + a_1|11\rangle + a_2|22\rangle + a_3|33\rangle)_{AB}. \tag{14}$$

实系数 a_i 仅为 Bob 所知，且 $|a_0| > |a_1| > |a_2| > |a_3|$。

与第 IIA 节所作的类似安排，在对粒子 U 施加方程（3）给出的~单粒子变换 A 后，由 Alice $|\Psi\rangle_{AB}$ 实施，变为

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}'\rangle_{AB} = (&|\psi_0\rangle_A \otimes |\tilde{\psi}_0\rangle_B + |\psi_1\rangle_A \otimes |\tilde{\psi}_1\rangle_B \\ &+ |\psi_2\rangle_A \otimes |\tilde{\psi}_2\rangle_B + |\psi_3\rangle_A \otimes |\tilde{\psi}_3\rangle_B). \end{aligned} \tag{15}$$

Here

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_0\rangle_B = &+ a_0c_0|0\rangle + a_1c_1e^{i\theta_1}|1\rangle + a_2c_2e^{i\theta_2}|2\rangle \\ &+ a_3c_3e^{i\theta_3}|3\rangle, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_1\rangle_B = &- a_0c_1|0\rangle + a_1c_0e^{i\theta_1}|1\rangle - a_2c_3e^{i\theta_2}|2\rangle \\ &+ a_3c_2e^{i\theta_3}|3\rangle, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_2\rangle_B = &- a_0c_2|0\rangle + a_1c_3e^{i\theta_1}|1\rangle + a_2c_0e^{i\theta_2}|2\rangle \\ &- a_3c_1e^{i\theta_3}|3\rangle, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_3\rangle_B = &- a_0c_3|0\rangle - a_1c_2e^{i\theta_1}|1\rangle + a_2c_1e^{i\theta_2}|2\rangle \\ &+ a_3c_0e^{i\theta_3}|3\rangle. \end{aligned} \tag{19}$$

~如果 Alice 的测量结果为 $|\psi_0\rangle_A$， $|\Psi'\rangle_{AB}$ 将~坍缩为 $|\psi_0\rangle_B$。为了得到 $|\psi_0\rangle_B$，Bob 首先引入一个辅助量子比特 a，其初始态为 $|0\rangle_a$。随后，Bob 对粒子 B 和 a实施二量子位集体幺正变换 W 。在基 $\{|00\rangle_{aB}, |01\rangle_{aB}, |02\rangle_{aB}, |03\rangle_{aB}, |10\rangle_{aB}, |11\rangle_{aB}, |12\rangle_{aB}, |13\rangle_{aB}$、$|20\rangle_{aB}$、$|21\rangle_{aB}$、$|22\rangle_{aB}$、$|23\rangle_{aB}$、$|30\rangle_{aB}$、$|31\rangle_{aB}$、$|32\rangle_{aB}$、$|33\rangle_{aB}\}$中，操作 W 可表示为

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_8 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

其中， I_8 是 8×8 单位矩阵，且

$$w_{11} = -w_{22} = \mathrm{diag}\{\frac{a_3}{a_0}, \frac{a_3}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_3}\}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} w_{12} = w_{21} = \mathrm{diag}\{&\sqrt{1-(\frac{a_3}{a_0})^2}, \sqrt{1-(\frac{a_3}{a_1})^2}, \\ &\sqrt{1-(\frac{a_3}{a_2})^2}, 0\}. \end{aligned} \tag{22}$$

~这一变换将 $|\psi_0\rangle_B$ 转换为以下量子态

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_0'\rangle_{Ba} = a_3(&c_0|0\rangle + c_1e^{i\theta_1}|1\rangle + c_2e^{i\theta_2}|2\rangle + c_3e^{i\theta_3}|3\rangle)_B|0\rangle_a \\ &+ (c_0\sqrt{(a_0)^2-(a_3)^2}|0\rangle_B \\ &+ c_1e^{i\theta_1}\sqrt{(a_1)^2-(a_3)^2}|1\rangle_B \\ &+ c_2e^{i\theta_2}\sqrt{(a_2)^2-(a_3)^2}|2\rangle_B)|1\rangle_a. \end{aligned} \tag{23}$$

接下来，Bob 在基 $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a, |2\rangle_a, |3\rangle_a\}$ 中对辅助粒子 a 进行测量。

~如果测量结果为 $|0\rangle_a$，$|\psi_0'\rangle_{Ba}$ 将被投影到所需的量子态 $|\psi_0\rangle_B$ ，成功概率为 $|a_3|^2$。幸运的是，如果我们将范围限制在 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$，成功概率原则上可以提高到 $4|a_3|^2$。这是因为，根据 Alice 得到的测量结果 $|\psi_j\rangle_A$ （$j = 0$、1、2、3），~Bob 也可以通过在粒子 B上应用单量子位经典前馈幺正操作 V_j（由方程（11）至方程（13给出），将其转换为 $|\psi_j\rangle_B$ ，使其成为 $|\psi_0\rangle_B$ 。

如果测量结果为 $|1\rangle_a$，则~$|\psi_0'\rangle_{Ba}$ 中的量子态将坍缩为一个较小尺寸的量子态

$$\begin{aligned} |\psi_{\mathrm{small}}\rangle_B = &c_0\sqrt{(a_0)^2-(a_3)^2}|0\rangle_B \\ &+ c_1e^{i\theta_1}\sqrt{(a_1)^2-(a_3)^2}|1\rangle_B \\ &+ c_2e^{i\theta_2}\sqrt{(a_2)^2-(a_3)^2}|2\rangle_B. \end{aligned} \tag{24}$$

显然，方程（24）并非所需的量子态 $|\psi_0\rangle_B$ ，即方程（1）中给出的量子态。也就是说，该方案失败了。但这并不意味着所得的较小尺寸量子态，即方程（24）是无用的。

基于第 II A 节和第 IIB节，我们可以看出，通过非最大纠缠

态实现的高维远程态制备方案，其成功概率和效率低于通过最大纠缠态实现的对应方案。通过非最大纠缠态实现远程态制备所需的量子资源多于通过最大纠缠态实现的对应方案。此外，方程（20）中所述的双量子位集体操作较难实现。

III. 单量子奈特（八能级）量子态的远程制备

A. 以最大纠缠态为量子信道的八维远程态制备

Alice 想要让 Bob 制备的单量子奈特（此处考虑八能级）归一化赤道态为

$$\begin{aligned}|\phi_0\rangle = {} & d_0|0\rangle + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{25}$$

其中，实参数 d_i 和 ϑ_j 只有 Alice 知道。为实现上述目的，Alice 与 Bob 共享的最大纠缠态可写为

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(&|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle + |44\rangle \\ &+ |55\rangle + |66\rangle + |77\rangle)_{AB}.\end{aligned} \tag{26}$$

为了在八维复希尔伯特空间中实现远程态制备，Alice 首先对粒子 A 施加酉变换 X。其中 X 为

$$\begin{aligned}X = \mathrm{diag}\{&1, e^{\mathrm{i}2\vartheta_1}, e^{\mathrm{i}2\vartheta_2}, e^{\mathrm{i}2\vartheta_3}, e^{\mathrm{i}2\vartheta_4}, e^{\mathrm{i}2\vartheta_5}, \\ &e^{\mathrm{i}2\vartheta_6}, e^{\mathrm{i}2\vartheta_7}\},\end{aligned} \tag{27}$$

然后 $|\Phi\rangle_{AB}$ 将变换为

$$\begin{aligned}|\Phi'\rangle_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(&|00\rangle + e^{\mathrm{i}2\vartheta_1}|11\rangle + e^{\mathrm{i}2\vartheta_2}|22\rangle \\ &+ e^{\mathrm{i}2\vartheta_3}|33\rangle + e^{\mathrm{i}2\vartheta_4}|44\rangle + e^{\mathrm{i}2\vartheta_5}|55\rangle \\ &+ e^{\mathrm{i}2\vartheta_6}|66\rangle + e^{\mathrm{i}2\vartheta_7}|77\rangle)_{AB}.\end{aligned} \tag{28}$$

在一组新的正交向量 $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \cdots, |\phi_7\rangle\}$ 中，量子态 $|\Phi'\rangle_{AB}$ 可以展开为

$$|\Phi'\rangle_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{7} |\phi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B. \tag{29}$$

Here

$$\begin{aligned}|\phi_0\rangle = {} & + d_0|0\rangle + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}|\phi_1\rangle = {} & - d_1|0\rangle + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle - d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & - d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & - d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}|\phi_2\rangle = {} & - d_2|0\rangle + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle - d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & - d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle - d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}|\phi_3\rangle = {} & - d_3|0\rangle - d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & - d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle - d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}|\phi_4\rangle = {} & - d_4|0\rangle + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle - d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle - d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & - d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}|\phi_5\rangle = {} & - d_5|0\rangle - d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle - d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & - d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}|\phi_6\rangle = {} & - d_6|0\rangle - d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle - d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle - d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}|\phi_7\rangle = {} & - d_7|0\rangle + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle - d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle - d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle \\ & + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle - d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle \\ & + d_0 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle.\end{aligned} \tag{37}$$

也就是说，$|\phi_j\rangle = \mathrm{diag}\{1, e^{\mathrm{i}\vartheta_1}, e^{\mathrm{i}\vartheta_2}, \cdots, e^{\mathrm{i}\vartheta_7}\} \cdot \mathcal{T}_8|j\rangle$，$j = 0, 1, \cdots, 7$。这里

$$\mathcal{T}_8 = \begin{pmatrix} d_0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & -d_5 & -d_6 & -d_7 \\ d_1 & d_0 & d_3 & -d_2 & d_5 & -d_4 & -d_7 & d_6 \\ d_2 & -d_3 & d_0 & d_1 & d_6 & d_7 & -d_4 & -d_5 \\ d_3 & d_2 & -d_1 & d_0 & d_7 & -d_6 & d_5 & -d_4 \\ d_4 & -d_5 & -d_6 & -d_7 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_5 & d_4 & -d_7 & d_6 & -d_1 & d_0 & -d_3 & d_2 \\ d_6 & d_7 & d_4 & -d_5 & -d_2 & d_3 & d_0 & -d_1 \\ d_7 & -d_6 & d_5 & d_4 & -d_3 & -d_2 & d_1 & d_0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

请注意，单粒子操作 $\mathrm{diag}\{1, e^{\mathrm{i}\vartheta_1}, \cdots, e^{\mathrm{i}\vartheta_7}\}$ 比 $\mathcal{T}_8$ 容易实现得多。

随后，Alice 对粒子 A 在基 $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \cdots, |\phi_7\rangle\}$ 上进行单粒子测量，并通过经典通信（一个经典比特）将测量结果告知 Bob。如果 Alice 的测量结果为 $|\phi_0\rangle_A$，则量子态 $|\Phi'\rangle_{AB}$ 在方程（29）中所示的量子态将

以 1/8 的成功概率坍缩为所需量子态 $|\phi_0\rangle_B$；如果测量结果为 $|\phi_j\rangle_A$，且 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$，则当前的远程态制备方案会失败。

值得注意的是，如果我们将范围限制为 $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_7 = 0$，Bob 可以通过在粒子$B$上应用某种经典单量子位前馈幺正操作 Y_j，将 $|\phi_j\rangle_B(j = 1, 2, \cdots, 7)$ 校正为 $|\phi_0\rangle_B$。在基 $\{|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |7\rangle\}$ 中，单量子奈特操作Y_j 可表示为

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\sigma_y \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_z & 0 & 0 \\ \sigma_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_2 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\sigma_y \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ \sigma_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$Y_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\sigma_y \\ \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma_y & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$Y_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_2 \\ 0 & 0 & -\sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$Y_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma_y \\ 0 & 0 & -\sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & 0 \\ -i\sigma_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

其中

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

也就是说，原则上，利用最大纠缠态作为量子信道，可以确定性地实现复希尔伯特空间中八维实子空间内所提出的远程态制备。

B. 使用非最大纠缠态作为量子信道的八维远程态制备

我们考虑信道噪声将方程（26）中给出的最大纠缠态转换为以下归一化的非最大纠缠态

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}\rangle_{AB} = (&b_0|00\rangle + b_1|11\rangle + b_2|22\rangle + b_3|33\rangle \\ &+ b_4|44\rangle + b_5|55\rangle + b_6|66\rangle + b_7|77\rangle)_{AB}. \end{aligned} \tag{47}$$

这里，实系数 $b_i(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ 7)$ 仅由 Alice 知晓，且 $|b_0| > |b_1| > \cdots > |b_7|$。

采用第IIIA节中的相同步骤，在 Alice 对粒子 X施加由方程（27）给出的变换˜后，量子态 $|\Phi\rangle_{AB}$ 可展开为

$$|\Phi'\rangle_{AB} = \sum_{i=0}^{7} |\phi_i\rangle_A \otimes |\tilde{\phi}_i\rangle_B. \tag{48}$$

Here

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_0\rangle_B = &+ d_0 b_0|0\rangle + d_1 b_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_2 b_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle \\ &+ d_3 b_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle + d_4 b_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_5 b_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle \\ &+ d_6 b_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle + d_7 b_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_1\rangle_B = &- d_1 b_0|0\rangle + d_0 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle - d_3 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &+ d_2 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle - d_5 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle + d_4 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &+ d_7 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle - d_6 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_2\rangle_B = &- d_2 b_0|0\rangle + d_3 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle + d_0 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &- d_1 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle - d_6 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle - d_7 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &+ d_4 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle + d_5 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_3\rangle_B = &- d_3 b_0|0\rangle - d_2 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle + d_1 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &+ d_0 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle - d_7 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle + d_6 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &- d_5 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle + d_4 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_4\rangle_B = &- d_4 b_0|0\rangle + d_5 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle + d_6 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &+ d_7 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle + d_0 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle - d_1 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &- d_2 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle - d_3 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_5\rangle_B = &- d_5 b_0|0\rangle - d_4 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle + d_7 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &- d_6 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle + d_1 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle + d_0 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &+ d_3 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle - d_2 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_6\rangle_B = &- d_6 b_0|0\rangle - d_7 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle - d_4 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\ &+ d_5 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle + d_2 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle - d_3 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\ &+ d_0 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle + d_1 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle, \end{aligned} \tag{55}$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\phi}_7\rangle_B = & -d_7 b_0|0\rangle + d_6 b_1 e^{i\vartheta_1}|1\rangle - d_5 b_2 e^{i\vartheta_2}|2\rangle \\
& - d_4 b_3 e^{i\vartheta_3}|3\rangle + d_3 b_4 e^{i\vartheta_4}|4\rangle + d_2 b_5 e^{i\vartheta_5}|5\rangle \\
& - d_1 b_6 e^{i\vartheta_6}|6\rangle + d_0 b_7 e^{i\vartheta_7}|7\rangle.
\end{aligned} \tag{56}
$$

随后，Alice 对她的粒子 A在基 $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \cdots, |\phi_7\rangle\}$下进行单粒子投影测量，并将她的测量结果告知 Bob。

根据方程 (48)，我们可以发现，如果 Alice 的测量结果是 $|\phi_0\rangle_A$，那么 $|\Phi'\rangle_{AB}$ 将坍缩为 $|\phi_0\rangle_B$。为了从 $|\phi_0\rangle_B$中提取出方程 (25) 中所示的目标量子态 $|\phi_0\rangle_B$，Bob 首先借用一个辅助qudit a，其初始态为 $|0\rangle_a$，然后对粒子 B 和 a执行双qudit集体操作 Z。Z 在基 $\{|00\rangle_{aB}, |01\rangle_{aB}, |02\rangle_{aB}, |03\rangle_{aB}, |04\rangle_{aB}, |05\rangle_{aB}, |06\rangle_{aB}, |07\rangle_{aB}, \cdots, |70\rangle_{aB}, |71\rangle_{aB}, |72\rangle_{aB}, |73\rangle_{aB}, |74\rangle_{aB}, |75\rangle_{aB}, |76\rangle_{aB}, |77\rangle_{aB}\}$下的矩阵表示为

$$
Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 \\ z_{21} & z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{48} \end{pmatrix}, \tag{57}
$$

其中

$$
z_{11} = -z_{22} = \mathrm{diag}\Big\{\frac{b_7}{b_0}, \frac{b_7}{b_1}, \frac{b_7}{b_2}, \frac{b_7}{b_3}, \frac{b_7}{b_4}, \frac{b_7}{b_5}, \frac{b_7}{b_6}, \frac{b_7}{b_7}\Big\}, \tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{12} = z_{21} = \mathrm{diag}\Big\{ & \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_0})^2}, \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_1})^2}, \\
& \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_2})^2}, \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_3})^2}, \\
& \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_4})^2}, \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_5})^2}, \\
& \sqrt{1-(\frac{b_7}{b_6})^2}, 0\Big\}.
\end{aligned} \tag{59}
$$

对粒子 B 和 a 应用操作 Z 后，量子态 $|\phi_0\rangle_B$ 转化为

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\phi}_0'\rangle_{Ba} = & b_7(d_0|0\rangle + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}|1\rangle + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}|2\rangle \\
& + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}|3\rangle + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}|4\rangle + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}|5\rangle \\
& + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}|6\rangle + d_7 e^{\mathrm{i}\vartheta_7}|7\rangle)_B|0\rangle_a \\
& + \big(d_0\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_0})^2}|0\rangle \\
& + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_1})^2}|1\rangle \\
& + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_2})^2}|2\rangle \\
& + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_3})^2}|3\rangle \\
& + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_4})^2}|4\rangle \\
& + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_5})^2}|5\rangle \\
& + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_6})^2}|6\rangle\big)_B|1\rangle_a.
\end{aligned} \tag{60}
$$

最后，Bob在基$\{|0\rangle_a, |1\rangle_a, \cdots, |7\rangle_a\}$上测量辅助粒子 a。

若Bob的测量结果为 $|0\rangle_a$，由粒子 a和 B 组成的系统将被投影到所需量子态 $|\phi_0\rangle_B$，成功概率为 $|b_7|^2$。注意，若我们限制为 $\vartheta_1 = \cdots = \vartheta_7 = 0$，根据Alice的测量结果 $|\phi_j\rangle_A\,(j = 2, \cdots, 7)$，Bob可以通过对量子态 $|\phi_j\rangle_B$执行方程(39)-方程(45)中给出的 Y_j，将方案的成功概率提升至 $8|b_7|^2$，其中~这意味着

$$
Y_j|\tilde{\phi}_j\rangle_B = |\tilde{\phi}_0\rangle_B,\ j = 1, 2, \cdots, 7. \tag{61}
$$

若测量结果为 $|1\rangle_a$，方程(60中的量子态$|\tilde{\phi}_0'\rangle_{Ba}$ 将被投影到一个维数较低的量子态

$$
\begin{aligned}
|\phi_{\mathrm{small}}\rangle_B = & (d_0\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_0})^2}|0\rangle \\
& + d_1 e^{\mathrm{i}\vartheta_1}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_1})^2}|1\rangle \\
& + d_2 e^{\mathrm{i}\vartheta_2}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_2})^2}|2\rangle \\
& + d_3 e^{\mathrm{i}\vartheta_3}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_3})^2}|3\rangle \\
& + d_4 e^{\mathrm{i}\vartheta_4}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_4})^2}|4\rangle \\
& + d_5 e^{\mathrm{i}\vartheta_5}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_5})^2}|5\rangle \\
& + d_6 e^{\mathrm{i}\vartheta_6}\sqrt{1-(\frac{b_7}{b_6})^2}|6\rangle)_B.
\end{aligned} \tag{62}
$$

这意味着该方案失败了。

IV. 高维远程态制备方案的评估

高维量子系统、高维纠缠态、方程（ $\mathcal{T}_4$中给出的单体幺正操作10）和 $\mathcal{T}_8$ 方程（38）中给出的双体集体操作 W 方程（20）和 Z 方程（57）中给出的操作，是我们方案的关键组成部分。本节将评估这些组成部分的性能。

A. 高维量子系统和高维纠缠态的评估

高维系统已在多种物理系统中实现，包括光子 [52–55], 离子阱 [56], 氮空位中心 [57], 核磁共振 [58], 分子磁体 [59], 以及超导体 [60]。在这些平台中，光子凭借其众多类似量子位的正交光学模式 [61], （如路径、轨道角动量（OAM）、时间箱和频率），已被视为最具代表性的天然候选者之一。在空间（路径）模式[61, 62], 、OAM [63–66], 以及能量-时间 [67] 自由度上，已有高维纠缠态的相关报道。在所有这些自由度（DOF）中，空间自由度具有出色的维度可扩展性、极高的保真度，且易于操控。因此，在我们的方案中，计算基 $|j\rangle$ 编码在单光子系统的路径（$j=0$，1，2，.....）上。

B. 变换 $\mathcal{T}_4$ 和 $\mathcal{T}_8$的评估

互为无偏基 [68–70]是高维系统中一类重要的正交测量基，在量子态表征、密码学和纠缠态认证中发挥着重要作用。冯·诺依曼测量是用于远程制备单体态的远程态制备方案的核心组成部分。

众所周知，Reck [71]和 Clements [72] 方案表明，通过采用马赫-曾德尔干涉仪（MZI）和相移器（PS），可以实现任意空间变换。如图 1(b) 所示，标准 MZI 由两个 50:50 分束器（BS）和一个相移器 PS [71]， $U_{\mathrm{MZI}}(2\theta)=U_{\mathrm{BS}_1}\cdot U_{\mathrm{PS}}(2\theta)\cdot U_{\mathrm{BS}_2}$。50:50 分束器、相移器 PS(2$\theta$) 和 MZI 的矩阵形式如下：

$$U_{\mathrm{BS}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$U_{\mathrm{PS}}(2\theta)=\begin{pmatrix}e^{\mathrm{i}2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$U_{\mathrm{MZI}}(2\theta)=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}. \tag{65}$$

模块 $T(\phi,\ \theta)$ 的矩阵形式可计算为：

$$T(\phi,\theta)=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\begin{pmatrix}e^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta & \cos\theta\\ e^{\mathrm{i}\phi}\cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}. \tag{66}$$

整体相位 $\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}$ 此后省略，因为它是虚数——与量子信息处理任务相关。注意，方程（66）本质上是可变分束器的矩阵形式，而反射率系数可以通过调节 ϕ 和 θ来改变。

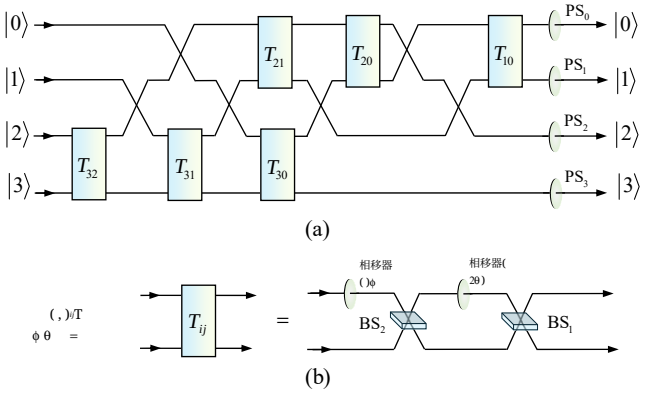

图1: （a）使用 $c_0=c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$ 和 $0\ \pi\ \pi\ \pi$ 实现 $\mathcal{T}_4$ 的示意图。相移，，，分别用于相移器 $\mathrm{PS}_0,\mathrm{PS}_1,\mathrm{PS}_2,\mathrm{PS}_3$，。（b）实现块 $T(\phi,\theta)$ [71]的示意图。相移器 PS(θ) $=e^{\mathrm{i}\theta}$。BS 是一个 50:50 分束器。

方程中给出的空间单量子位操作 $\mathcal{T}_4$ 以及方程中给出的 $\mathcal{T}_8$ （38）原则上可以通过采用一系列$T_{\phi、\theta}$ 来实现。为清晰起见，我们以 $\mathcal{T}_4$ 具有 $c_0=c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$ 的情形作为代表性示例。如图1（a）所示， $\mathcal{T}_4$具有 $c_0=c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$ 可以分解为

$$\mathcal{D}\cdot T_{10}\cdot T_{20}\cdot T_{21}\cdot T_{30}\cdot T_{31}\cdot T_{32}, \tag{67}$$

其中

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{68}$$

$$T_{32}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \tag{69}$$

$$T_{31}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$T_{30}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\tag{71}$$

$$T_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{72}$$

$$T_{20}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\0&1&0&0\\-\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{73}$$

$$T_{10}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\tag{74}$$

与 $\mathcal{T}_4$ 与 $c_0=c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$、参数 θ_{ij} 和 ϕ_{ij} 之间的对应关系见表 I。

表 I: $\mathcal{T}_4$ 与$c_2=c_3=1/2$ θ_{ij} ϕ_{ij} $c_0=c_1=$ 、以及之间的对应关系。

$T_{ij}(\theta_{ij},\ \phi_{ij})$	θ_{ij}	ϕ_{ij}
T_{32}	$\pi/4$	π
T_{31}	反正切($\sqrt{2}$)	π
T_{30}	$\pi/3$	0
T_{21}	$\pi/3$	π
T_{20}	反正切($\sqrt{2}$)	0
T_{10}	$\pi/4$	0

C. 集体操作 W和 Z的评估

已知一些高维单粒子门，例如泡利 X 和SUM门，已在轨道角动量中得到实验演示 [73]。然而，多粒子高维门的实现通常在理论和实验上都具有挑战性 [74–76]。幸运的是，在我们基于非最大纠缠态的远程态制备方案中，双量子比特集体操作 W（方程（20））和 Z（方程（57））可通过将计算基编码到单光子系统的空间自由度中加以避免。

如图 2所示，如果 Bob 已知系数 a_0，a_1，a_2，以及a_3，则式（~14）中给出的基于空间模式的部分纠缠量子态 $|\Psi\rangle_{AB}=(a_0|00\rangle+a_1|11\rangle+a_2|22\rangle+a_3|33\rangle)_{AB}$可以通过集中转化为最大纠缠态$|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{2}(|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle+|33\rangle)_{AB}$

通过设置三个可变反射率分束器 VBS_0, VBS_1, 和 VBS_2，分别作用于光子 B 的空间模式 0、1 和 2，从而实现方程（2）给出的变换。这里，将 $\mathrm{VBS}_0, \mathrm{VBS}_1,$和 VBS_2的反射系数分别调节为 $\frac{a_3}{a_0}$，$\frac{a_3}{a_1}$和$\frac{a_3}{a_2}$。也就是说，这三个 VBS 实现以下变换

$$\begin{aligned}a_0|0\rangle &\xrightarrow{\mathrm{VBS}_0} a_3|0\rangle+\sqrt{(a_0)^2-(a_3)^2}|0'\rangle,\\ a_1|1\rangle &\xrightarrow{\mathrm{VBS}_1} a_3|1\rangle+\sqrt{(a_1)^2-(a_3)^2}|1'\rangle,\\ a_2|2\rangle &\xrightarrow{\mathrm{VBS}_2} a_3|2\rangle+\sqrt{(a_2)^2-(a_3)^2}|2'\rangle.\end{aligned}\tag{75}$$

Therefore, three VBSs transform $|\tilde{\Psi}\rangle_{AB}$ into

$$\begin{aligned}|\overline{\Psi}_{AB}\rangle_{AB}=a_3(|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle+|33\rangle)_{AB}\\+\sqrt{(a_0)^2-(a_3)^2}|00'\rangle_{AB}\\+\sqrt{(a_1)^2-(a_3)^2}|11'\rangle_{AB}\\+\sqrt{(a_2)^2-(a_3)^2}|22'\rangle_{AB}.\end{aligned}\tag{76}$$

根据方程 (76)，可以看出，任何一个探测器发生点击都意味着该方案失败。否则，由粒子 A 和 B 组成的系统将坍缩到归一化量子态 $|\Psi_0\rangle_{AB}$，其成功概率为 $4|a_3|^2$。

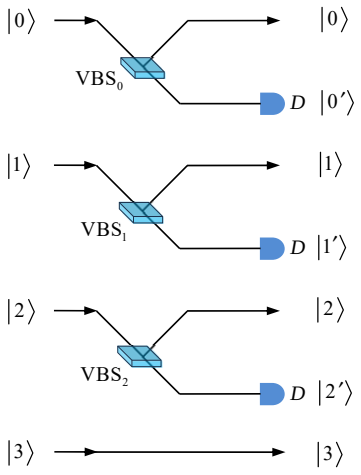

图 2：用于浓缩 $|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{2}(|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle+|33\rangle)_{AB}$ $|\Psi\rangle_{AB}=a_0|00\rangle+a_1|11\rangle+a_2|22\rangle+a_3|33\rangle)_{AB}$（来自 ( )）的量子电路。VBS 是可变反射率分束器，可通过图 1(b) 实现。 D是单光子探测器。

~与图2中的设置类似，$|\Phi\rangle_{AB}=(b_0|00\rangle+b_1|11\rangle+b_2|22\rangle+b_3|33\rangle+b_4|44\rangle+b_5|55\rangle+b_6|66\rangle+b_7|77\rangle)_{AB}$由方程（47）描述的方案，通过在光子B的空间模式0、1、 ···和6上分别设置反射系数为 $\frac{b_7}{b_0}$、 $\frac{b_7}{b_1}$、 $\frac{b_7}{b_6}$的$\mathrm{VBS}_0, \mathrm{VBS}_1$、 ··· ··· 和$\mathrm{VBS}_6$,，可以浓缩为$|\Phi\rangle_{AB}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle+|22\rangle+|33\rangle+|44\rangle+|55\rangle+|66\rangle+|77\rangle)_{AB}$由方程（26）描述的方案。

五、讨论与结论

在我们提出的方案中，分别设计了复希尔伯特空间和实子空间中四维（八维）单体态的远程态制备。此外，在我们的远程态制备中，最大纠缠和非最大纠缠量子信道均被纳入考虑。值得指出的是，如表II所示，三级系统中的远程态制备是方程（1）的特例，即 $c_3 = 0$。类似地，方程（25）的情形也如此，五级、六级和七级远程态制备分别对应于 $d_5 = d_6 = d_7 = 0$、$d_6 = d_7 = 0$和 $d_7 = 0$。

表 II：当前高维远程态制备方案的特殊情形。取 $\theta_0 = 0$ 和 $\vartheta_i = 0$。

多能级态	3 级	5 级	6 级	7级
$\sum_{i=0}^{4} c_i e^{\mathrm{i}\theta_i}\|i\rangle$	$c_3 = 0$			
$\sum_{i=0}^{7} d_i e^{\mathrm{i}\vartheta_i}\|i\rangle$		$d_{5,6,7} = 0$	$d_{6,7} = 0$	$d_7 = 0$

通过将量子位和量子单位编码在单光子系统的空间模式上，我们的高维远程态制备可以通过使用线性光学元件来实现，包括分束器、可变分束器和相移器，见第 IV B 节和第 IVC节。然而，在实际应用中，不理想的分束器和相移器会降低远程态制备的保真度。如图1（b）所示，两个不理想的 50:50 分束器的变换矩阵可表示为 [79]

$$\tilde{U}_{\mathrm{BS}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon + 2}} \begin{pmatrix} 1+\epsilon & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1+\epsilon \end{pmatrix}, \tag{77}$$

其中，ϵ 表示透射比的不完美性，其与 50% 略有偏差。不理想相移器（2θ）和相移器（ϕ）的酉变换矩阵可表示为 [79]

$$\tilde{U}_{\mathrm{PS}(2\theta)} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

$$\tilde{U}_{\mathrm{PS}(\phi)} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}(\phi-\delta\phi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{79}$$

其中，$(\theta - \delta\theta)$ 和 $(\phi - \delta\phi)$ 是马赫-曾德尔干涉仪两臂之间的实际相位差。因此，模块 $T(\phi,\ \theta)$ 的变换变为

$$\tilde{T}(\phi,\theta) = \frac{1}{(1+\epsilon)^2+1} \begin{pmatrix} \left((1+\epsilon)^2 e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} - 1\right) e^{\mathrm{i}(\phi-\delta\phi)} & \mathrm{i}(1+\epsilon)\left(e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} + 1\right) \\ \mathrm{i}(1+\epsilon)\left(e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} + 1\right) e^{\mathrm{i}(\phi-\delta\phi)} & (1+\epsilon)^2 - e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} \end{pmatrix} \tag{80}$$

不失一般性，$T(\phi,\ \theta)$ 的输入态制备为

$$|\chi_{\mathrm{in}}\rangle = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle. \tag{81}$$

根据方程（66），在理想情况下，$T(\phi,\ \theta)$ 的输出态可计算为

$$\begin{aligned} &|\chi_{\mathrm{out}}\rangle_{\mathrm{idea}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\left[(e^{\mathrm{i}2\theta}-1)e^{\mathrm{i}\phi}\cos\alpha + \mathrm{i}(e^{\mathrm{i}2\theta}+1)\sin\alpha\right]\right)|0\rangle \\ &+ \left(\frac{1}{2}\left[\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}2\theta}+1)e^{\mathrm{i}\phi}\cos\alpha + (1-e^{\mathrm{i}2\theta})\sin\alpha\right]\right)|1\rangle. \end{aligned} \tag{82}$$

根据方程（80），在现实情况下，$T(\phi,\ \theta)$ 的输出态可计算为

$$\begin{aligned} &|\chi_{\mathrm{out}}\rangle_{\mathrm{real}} \\ &= \left(\frac{1}{(1+\epsilon)^2+1}\left[\left((1+\epsilon)^2 e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)} - 1\right)e^{\mathrm{i}(\phi-\delta\phi)}\cos\alpha \right.\right. \\ &\left.\left. + \mathrm{i}(1+\epsilon)\left(e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)}+1\right)\sin\alpha\right]\right)|0\rangle \\ &+ \left(\frac{1}{(1+\epsilon)^2+1}\left[\mathrm{i}(1+\epsilon)\left(e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)}+1\right)e^{\mathrm{i}(\phi-\delta\phi)}\cos\alpha \right.\right. \\ &\left.\left. + \left((1+\epsilon)^2 - e^{\mathrm{i}2(\theta-\delta\theta)}\right)\sin\alpha\right]\right)|1\rangle. \end{aligned} \tag{83}$$

$\bar{F} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |_{\mathrm{idea}}\langle\chi_{\mathrm{out}}|\chi_{\mathrm{out}}\rangle_{\mathrm{real}}|^2 \mathrm{d}\alpha$ 的平均保真度为 $T(\phi,\ \theta)$ 如图3所示。这里取 $\overline{\delta\theta} = \delta\phi$，$\theta = \pi/3$，以及 $\phi = 0$。其效率为 $T(\phi,\ \theta)$ 原则上为单位值。暗计数以及单光子探测中的暗计数也会降低 $T(\phi,\ \theta)$ 的性能（5%-10%）。

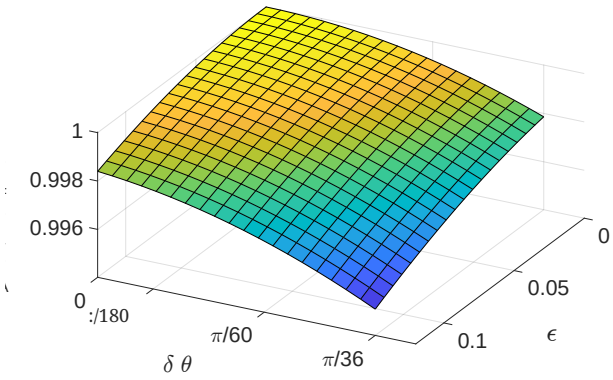

图3：$\bar{T}(\phi,\ \theta)$ 的平均保真度。取 $\delta\theta = \delta\phi$、$\theta = \pi/3$ 和 $\phi = 0$。

总之，我们提出了适用于四维和八维系统的多种远程赤道态制备方案。以往基于量子比特的远程态制备主要关注复希尔伯特空间中的实子空间，并使用最大纠缠对 [1, 2]。Yu等人 [16] 提出了一种远程态制备方案，其中量子位被制备到复希尔伯特空间实子空间中的一组量子比特上。我们提出的远程态制备方案支持在复希尔伯特空间和实希尔伯特空间中制备四能级和八能级赤道态，并将预共享的最大纠缠态和部分纠缠态都纳入

考虑范围。我们确定了一组正交测量基来实现这些方案。与复杂的正算子值测量相比，这种投影测量在实验上相对更容易实现。值得注意的是，三能级（五、六和七能级）赤道态的远程态制备也可以通过我们的四能级（八能级）远程态制备方案实现。对这些方案的评估表明，当前技术或许能够实现我们的方案。对于基于部分纠缠的远程态制备，可以通过将量子位编码到单光子系统的空间模式中，避免执行集合操作。基于空间模式的单qudit操作可以通过使用一些线性光学元件实现[71, 72, 77, 78, 80]。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金项目（批准号：62371038）的资助，以及河北省教育厅科学研究项目（批准号：QN2025054）和中央高校基本科研业务费专项资金项目（批准号：FRF-TP-19-011A3）的资助。

[1] A. K. Pati，远程制备和测量量子比特所需的最少经典比特， *Phys. Rev. A* 63(1), 014302 (2001). [2] H. K. Lo，分布式量子信息处理中的经典通信代价：量子通信复杂度的推广， *Phys. Rev. A* 62(1), 012313 (2000). [3] C. H. Bennett、D. P. DiVincenzo、P. W. Shor、J. A. Smolin、B. M. Terhal 和 W. K. Wootters，远程态制备， *Phys. Rev. Lett.* 87(7), 077902 (2001). [4] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´ epeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters，通过经典信道和爱因斯坦–波多尔斯基–罗森信道传送未知量子态， *Phys. Rev. Lett.* 70(13), 1895 (1993). [5] X. M. Hu、Y. Guo、B. H. Liu、C. F. Li 和 G. C. Guo，量子隐形传态的进展， *Nat. Rev. Phys.* 5(6), 339-353 (2023). [6] H. Dai、Q. Shen、C. Z. Wang、S. L. Li、W. Y. Liu、W. Q. Cai 和 J. W. Pan，迈向基于卫星的量子安全时间传递， *Nat. Phys.* 16(8), 848-852 (2020). [7] T. Li 和 G. L. Long，基于单光子贝尔态测量的量子安全直接通信， *New J. Phys.* 22(6), 063017 (2020). [8] H. Zhou、T. Li 和 K. Xia，面向量子网络的并行预报多量子比特纠缠生成， *Phys. Rev. A* 107(2), 022428 (2023). [9] C. G. Liu、C. W. Lu、N. N. Zhang 和 Q. Ai，束缚态增强量子计量的量子模拟， *Phys. Rev. A* 109(4), 042623 (2024). [10] J. Li、Z. Xie、Y. Li、Y. Liang、Z. Li 和 T. Li，面向容错分布式量子计算的纠错保护逻辑量子比特间预报纠缠， *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 67(2), 220311 (2024). [11] M. Y. Ye、Y. S. Zhang 和 G. C. Guo，利用有限经典比特和非最大纠缠态实现保真远程态制备， *Phys. Rev. A* 69(2), 022310 (2004). [12] N. L¨utkenhaus、J. Calsamiglia 和 K. A. Suominen，适用于量子隐形传态的贝尔测量， *Phys. Rev. A* 59(5), 3295 (1999). [13] J. T. Barreiro、T. C. Wei 和 P. G. Kwiat，单光子“混合”纠缠态和矢量偏振态的远程制备， *Phys. Rev. Lett.* 105 (3), 030407 (2010). [14] I. Devetak 和 T. Berger，低纠缠远程态制备， *Phys. Rev. Lett.* 87(19), 197901 (2001). [15] B. Zeng 和 P. Zhang，高维远程态制备与可平行化流形， S^{n-1}, *Phys. Rev. A* 65 2 022316 2002 ( ), ( ). [16] C. S. Yu、H. S. Song 和 Y. H. Wang，利用量子比特最大纠缠态远程制备量子位， *Phys. Rev. A* 73(2), 022340 (2006). [17] A. Abeyesinghe 和 P. Hayden，广义远程态制备：在量子通信中权衡经典比特、量子比特和纠缠比特， *Phys. Rev. A* 68(6), 062319 (2003). [18] D. W. Leung 和 P. W. Shor，无知远程态制备， *Phys. Rev. Lett.* 90(12), 127905 (2003). [19] Y. X. Huang 和 M. S. Zhan，多体纯态的远程制备， *Phys. Lett. A* 327(5-6), 404-408 (2004). [20] D. W. Berry 和 B. C. Sanders，最优远程态制备， *Phys. Rev. Lett.* 90(5), 057901 (2003). [21] W. Wu、W. T. Liu、P. X. Chen 和 C. Z. Li，纯偏振态和混合偏振态的确定性远程制备， *Phys. Rev. A* 81(4), 042301 (2010). [22] V. Sharma、C. Shukla、S. Banerjee 和 A. Pathak，噪声环境下的受控双向远程态制备：一种广义观点， *Quantum Inf. Process.* , - ( ). 14 3441 3464 2015 [23] N. B. An 、 L. T. Dat 和 J. Kim，用于联合远程制备任意维度的一般量子态及混合纠缠的非标准协议， *Phys. Rev. A* ( ), 98 4 042329 2018 ( ). [24] M. Y. Wang、F. L. Yan 和 T. Gao，远程制备

利用超纠缠态远程制备具有两个自由度的单光子态，*Front. Phys.* 16(4), 41501 (2021). [25] P. C. Ma、G. B. Chen、X. W. Li 和 Y. B. Zhan，三维系统中的循环受控远程态制备，*Laser Phys. Lett.* 19(11), 115204 (2022). [26] X. M. Hu、Y. Guo、B. H. Liu、Y. F. Huang、C. F. Li 和 G. C. Guo，利用纠缠四能级量子态突破超密编码的信道容量极限，*Sci. Adv.* 4(7), eaat9304 (2018). [27] K. C. Chang、X. Cheng、M. C. Sarihan 和 C. W. Wong，时间可逆且完全时间分辨的超窄带双光子频率梳，*APL Quantum* 1 1 016106 2024 ( ), ( ).

[28] T. Durt、D. Kaszlikowski 和 M. ˙Zukowski，在由最高维度为 N =16 *Phys. Rev. A* 64 2 024101 2001 的希尔伯特空间描述的量子系统中对局域实在论的违背，( ), ( ).

[29] H. H. Lu、Z. Hu、M. S. Alshaykh、A. J. Moore、Y. Wang、P. Imany、A. M. Weiner 和 S. Kais，利用单光子时频量子多能级态进行量子相位估计，*Adv. Quantum Technol.* 3(2), 1900074 (2020). [30] F. Bouchard、R. Fickler、R. W. Boyd 和 E. Karimi，高维量子克隆及其在量子黑客攻击中的应用，*Sci. Adv.* 3(2), e1601915 (2017). [31] M. Huber 和 M. Pawlowski，设备无关量子密钥分发中的弱随机性及使用高维纠缠的优势，*Phys. Rev. A* 88 3 032309 2013 ( ), ( ). [32] W. Zi、Q. Li 和 X. Sun，多重受控量子位门的最优合成，载于 *2023 60th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC)* 1 6 2023 第 - 页（IEEE, ）。[33] G. L. Jiang 、 W. Q. Liu 和 H. R. Wei，一般多量子三能级计算的最优量子电路，*Adv. Quantum Technol.* 7 (7), 2400033 (2024). [34] F. F. Du 和 X. M. Ren，具有弱交叉克尔非线性的确定性量子位依赖型高维光子量子门，*Opt. Laser Technol.* 180, 111440 2025( ). [35] F. F. Du、X. M. Ren、G. Fan 和 J. Guo，基于克尔效应的改进型高维量子门，*Opt. Lett.* ( ), - ( ). 50 4 1113 1116 2025

[36] X. L. Li、Z. Tao、K. Yi、K. Luo、L. Zhang、Y. Zhou、S. Liu、T. Yan、Y. Chen 和 D. Yu，超导量子电路中硬件高效且快速的三量子比特门，*Front. Phys.* 19(5), 51205 (2024). [37] C. Schaeff、R. Polster、M. Huber、S. Ramelow 和 A. Zeilinger，利用集成光学实验探测高维纠缠量子系统，*Optica* 2 6 523 529 2015 ( ), - ( ).

[38] K. C. Chang 、 X. Cheng 、 M. C. Sarihan 、 A. K. Vinod 、 Y. S. Lee、T. Zhong、Y. X. Gong、Z. Xie、J. H. Shapiro、F. N. C. Wong 和 C. W. Wong，双光子频率梳中的 648 维希尔伯特空间：形成纠缠与施密特模分解，*npj Quantum Inform.* 7 1 48 2021 ( ), ( ).

[39] X. Cheng、K. C. Chang、M. C. Sarihan、A. Mueller、M. Spiropulu、M. D. Shaw、B. Korzh、A. Faraon、F. N. C. Wong、J. H. Shapiro 和 C. W. Wong，单滤波双光子频率梳中的高维时频纠缠，*Commun. Phys.* 6(1), 278 (2023). [40] L. Zhou、Q. Xu、T. Feng 和 X. Zhou，三光子非对称最大纠缠态的实验实现纠缠态及其在量子态传输中的应用，*Sci. Adv.* 10(25), eadj9251（2024）。[41] F. F. Du、M. Ma、Z. Y. Bai 和 Q. L. Tan，任意高维量子位基纠缠态的生成，*Phys. Rev. A* 111(3), 032604（2025）。[42] K. C. Chang、X. Cheng、M. C. Sarihan 和 C. W. Wong，高维量子频率梳的最新进展，*Newton* 1(1), 100024（2025）。[43] A. Bocharov、M. Roetteler 和 K. M. Svore，使用三能级量子位进行因式分解：在三进制和元复量子架构上运行Shor算法，*Phys. Rev. A* 96(1)，012306（2017）。[44] H. R. Wei、W. Q. Liu 和 L. C. Kwek，利用非幺正部分交换门高效融合光子W态，*New J. Phys.* 22(9)，093051（2020）。[45] D. Zia、R. Checchinato、A. Suprano、T. Giordani、E. Polino、L. Innocenti、A. Ferraro、M. Paternostro 和 N. Spagnolo，光的高维角动量态回归，*Phys. Rev. Res.* 5(1), 013142（2023）。[46] I. Nape、V. Rodr´ıguez-Fajardo、F. Zhu、H. C. Huang、J. Leach 和 A. Forbes，高维纠缠态维数与纯度的测量，*Nat. Commun.* ( )，( )。12 1 5159 2021

[47] C. Lee、D. Bunandar、Z. Zhang、G. R. Steinbrecher、P. B. Dixon、F. N. C. Wong、J. H. Shapiro、S. A. Hamilton 和 D. Englund，用于提升量子密钥分发速率的大字母表编码，*Opt. Express* 27(13)，17539-17549（2019）。[48] K. C. Chang、M. C. Sarihan、X. Cheng、Z. Zhang 和 C. W. Wong，利用色散光学实现大字母表时间-bin量子密钥分发与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引，*Quantum Sci. Technol.* 9(1)，015018（2024）。[49] L. Achatz、L. Bulla、S. Ecker、E. A. Ortega、M. Bartokos、J. C. Alvarado-Zacarias、R. Amezcua-Correa、M. Bohmann、R. Ursin 和 M. Huber，通过多芯光纤同时传输三个自由度上的超纠缠，*npj Quantum Inform.* ( )，( )。9 1 45 2023

[50] M. Ioannou、P. Sekatski、S. Designolle、B. D. Jones、R. Uola 和 N. Brunner，高维量子测量的可模拟性，*Phys. Rev. Lett.* 129(19)，190401（2022）。[51] X. M. Hu、C. Zhang、B. H. Liu、Y. Guo、W. B. Xing、C. X. Huang、Y. F. Huang、C. F. Li 和 G. C. Guo，不存在探测漏洞的高维贝尔检验，*Phys. Rev. Lett.* 129 6 060402 2022 ( )，( )。[52] X. Gao、M. Erhard、A. Zeilinger 和 M. Krenn，受计算机启发的高维多方量子门概念，*Phys. Rev. Lett.* 125(5), 050501（2020）。[53] Y. B. Sheng 和 L. Zhou，首次实现高维受控量子隐形传态，*Sci. China Phys. Mech. Astron.* 67(3), 230331（2024）。[54] F. F. Du、X. M. Ren、M. Ma 和 G. Fan，基于量子位的高维受控非门，*Opt. Lett.* 49(5)，1229-1232（2024）。[55] F. F. Du、X. M. Ren 和 J. Guo，具有稳健保真度的错误预警高维量子门，*Opt. Ex-press* ( )，- ( )。32 18 31633 31643 2024

[56] A. B. Klimov、R. Guzm´an、J. C. Retamal 和 C. Saavedra，囚禁离子三能级量子计算机，*Phys. Rev. A* 67 6 062313 2003 ( )，( )。

[57] P. Rembold、N. Oshnik、M. M. M¨uller、S. Montangero、T. Calarco 和 E. Neu，面向金刚石中氮-空位中心量子传感的量子最优控制简介， *AVS Quantum Sci.* 2(2)，024701（2020）。[58] S. Dogra 和 K. Dorai，利用实验核磁共振三能级量子比特确定排列的奇偶性，

Phys. Lett. ( )，- ( )。*A* 378 46 3452 3456 2014

[59] M. N. Leuenberger 和 D. Loss，分子磁体中的量子计算，*Nature* 410(6830)，789-793（2001）。[60] A. Morvan、V. V. Ramasesh、M. S. Blok、J. M. Kreike- baum、K. O'Brien、L. Chen、B. K. Mitchell、R. K. Naik 和 I. Siddiqi，三能级量子比特随机基准测试，

Phys. ( )，( )。*Rev. Lett.* 126 21 210504 2021

[61] X. M. Hu、W. B. Xing、C. Zhang、B. H. Liu、M. Pivoluska、M. Huber、Y. F. Huang、C. F. Li 和 G. C. Guo，多光子高维层状量子态的实验制备， *npj Quantum Inform.* 6(1)，88（2020）。[62] T. J. Bell、J. F. Bulmer、A. E. Jones、S. Paesani、D. P. McCutcheon 和 A. Laing，由非相互作用光子发射体阵列生成高维纠缠的方案， *New J. Phys.* 24(1)，013032（2022）。[63] M. Malik、M. Erhard、M. Huber、M. Krenn、R. Fickler 和 A. Zeilinger，高维多光子纠缠， *Nat. Photonics* 10 (4)，248-252（2016）。[64] B. C. Hiesmayr、M. J. A. De Dood 和 W. L¨offler，四光子轨道角动量纠缠的观测，*Phys. Rev. Lett.* 116(7)，073601（2016）。[65] M. Erhard、M. Malik、M. Krenn 和 A. Zeilinger，超越量子比特的实验性 Greenberger-Horne-Zeilinger纠缠， *Nat. Photonics* 12(12)，759-764（2018）。[66] A. Babazadeh、M. Erhard、F. Wang、M. Malik、R. Nouroozi、M. Krenn 和 A. Zeilinger，高维单光子量子门：概念与实验， *Phys. Rev. Lett.* 119(18)，180510（2017）。[67] T. Zhong、H. Zhou、R. D. Horansky、C. Lee、V. B. Verma、A. E. Lita、A. Restelli、J. C. Bienfang、R. P. Mirin、T. Gerrits、S. W. Nam、F. Marsili、M. D. Shaw、Z. Zhang、L. Wang、D. Englund、G. W. Wornell、J. H. Shapiro 和 F. N. C. Wong，利用高维编码和时间-能量纠缠实现高光子效率量子密钥分发， *New J. Phys.* 17(2)，022002（2015）。[68] S. Bandyopadhyay、P. O. Boykin、V. Roychowdhury 和 F. Vatan，关于互相无偏置基， *Algorithmica* 34，512-528（2002）。[69] C. Spengler 和 B. Kraus，互无偏基的图态形式体系，*Phys. Rev. A* 88(5)，052323（2013）。[70] K. C. Chang、M. C. Sarihan、X. Cheng、P. Erker、N. K. H. Li、A. Mueller、M. Spiropulu、M. D. Shaw、B. Korzh、M. Huber 和 C. W. Wong，基于时间-能量测量的高维纠缠认证与量子导引实验，arXiv:2310.20694（2023）。[71] M. Reck、A. Zeilinger、H. J. Bernstein 和 P. Bertani，任意离散酉算符的实验实现，*Phys. Rev. Lett.* 73(1)，58（1994）。[72] W. R. Clements、P. C. Humphreys、B. J. Metcalf、W. S. Kolthammer 和 I. A. Walmsley，通用多端口干涉仪的优化设计， *Optica* 3(12)，1460-1465（2016）。[73] X. Gao、M. Krenn、J. Kysela 和 A. Zeilinger，飞行量子位的任意 d 维泡利 X 门，

Phys. Rev. ( )，( )。*A* 99 2 023825 2019

[74] Q. P. Su、Y. Zhang、L. Bin 和 C. P. Yang，由一个超导三能级量子位和一个猫态三能级量子位构成的混合受控求和门及其在混合纠缠态制备中的应用， *Phys. Rev. A* 105(4)，042434（2022）。[75] Z. Meng、W. Q. Liu、B. W. Song、X. Y. Wang、A. N. Zhang 和 Z. Q. Yin，具有超高保真度与高效率的高维量子门的实验实现， *Phys. Rev. A* 109(2)，022612（2024）。[76] G. L. Jiang、J. B. Yuan、W. Q. Liu 和 H. R. Wei，混合线性光学系统上高效且确定性的高保真高维受控交换门， *Phys. Rev. Appl.* 21 (1)，014001（2024）。[77] K. Goswami、C. Giarmatzi、M. Kewming、F. Costa、C. Branciard、J. Romero 和 A. G. White，量子开关中的不定因果序， *Phys. Rev. Lett.* 121(9)，090503（2018）。[78] K. Goswami、Y. Cao、G. A. Paz-Silva、J. Romero 和 A. G. White，通过序的叠加提高通信容量，*Phys. Rev. Res.* 2(3)，033292（2020）。[79] H. Meng，利用路径与偏振自由度的确定性线性光学量子控制门，*Phys. Rev. A* 105 (3)，032607（2022）。[80] Y. Wei、S. Wang、Y. Zhu 和 T. Li，发送方控制的测量设备无关多方量子通信， *Front. Phys.* 17(2)，21503（2022）。