arXiv:2603.01342v1 [math.PR] 2 Mar 2026

随机张量内射范数的基于矩的方法

Stephane Dartois

´巴黎理工学院，巴黎理工学院，洛朗·施瓦茨数学中心，法国帕莱索

本杰明·麦肯纳

*Geo*亚特兰大佐治亚理工学院数学学院，美国佐治亚州亚特兰大 *es*

Abstract. 本文提出一种技术上简单的方法，用于建立实随机张量和复随机张量的期望内射范数上界。我们的方法与随机矩阵理论中的矩方法有些类似，并基于张量内射范数的一个确定性上界，该上界本身也可能具有独立的研究价值。与以往处理这些问题的方法（自旋玻璃方法、ε-网技术、Sudakov-Fernique论证和PAC-贝叶斯证明）相比，我们的方法具有非渐近、相对初等且适用于非高斯模型的优点。我们通过多种随机张量模型展示这一方法，用更简单的论证重新得到一些已知（且猜想为紧的）上界，并给出新的上界，其中一些已被证明是紧的。从统计物理的角度看，我们的结果为实数和复数的、可能为非高斯的自旋玻璃模型的基态能量提供了严格的估计值。从量子信息的角度看，我们建立了随机玻色态以及多体施密特秩有界的随机态的几何纠缠上界，既适用于热力学极限，也适用于大局域维数的情形。

日期： 2026年3月1日

关键词和短语： 单射范数，谱范数，随机张量，大矩，高斯张量，几何纠缠，球面自旋玻璃

*2020*年数学主题分类： 81P45, 81P42, 82D30, 60B20, 15B52

Contents

1. 引言 2 2. 确定性上界 5 3. 应用：非对称张量 10 4. 应用：对称张量 15 5. 应用：有界秩张量 19 附录 A. 数值计算 24 附录 B. T 在有界秩模型中的秩 26 附录 C. 应用：数值高效的非渐近界 27 附录 D. 与先前界的比较 31

E-mail addresses: stephane.dartois@polytechnique.edu, mckenna@math.gatech.edu.

1. Introduction

本文旨在发展一种新方法，用于给出随机张量的内射范数（矩阵算子范数的张量类比）的上界。我们的方法是一种矩方法，其灵感来自随机矩阵理论中的经典矩方法；该方法经常被用于研究随机矩阵的算子范数（最早可追溯至 [FK81]）。关于矩阵背景下这一方法的论述，参见例如 [Tao12、vH17]。然而，我们的方法在技术上有所不同：它依赖于我们认为是新的确定性不等式，这些不等式通过随机秩一张量上投影的矩来控制内射范数的偶次幂。在本文考察的情形下，这一策略在概念上较为直接，且在技术上通常比现有的随机张量内射范数方法更为简洁 [ABAˇC13、TS14、DM24、Sas24、BGJ+24、Boe24、BS25、DR25]。此外，我们认为，这一机制对输入分布以及张量上的若干结构约束具有稳健性，并且应能推广到出现内射范数（或密切相关的多重线性形式）的其他情形。作为这一方法的概念验证，我们给出了各种随机张量模型的内射范数上界。在某些范围内，我们能够通过明显更为简洁的论证，重新得到被认为是紧的已知上界；在其他范围内——包括一些似乎超出既有技术能力的模型——我们得到了新的界。下面，我们将正式介绍本文研究的问题和模型，然后讨论主要结果及其背景。

1.1. 问题设定与模型。 设 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 为实数域或复数域。设 $p \in \mathbb{N}^*$ 为正整数，$d \in \mathbb{N}^*$ 且 $d_1, \dots, d_p \in \mathbb{N}^*$ 为一组正整数。对于所有 $x, y \in \mathbb{K}^{d_i}$，用 $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{d_i} \bar{x}_k y_k$ 表示它们的厄米内积。对于 $T \in \bigotimes_{i=1}^{p} \mathbb{K}^{d_i}$ 张量，我们将其内射范数 $\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}}$ 定义为以下量

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}} := \max_{\substack{x_i \in \mathbb{K}^{d_i} \\ \|x_i\|_2 = 1}} |\langle T, x_1 \otimes \dots \otimes x_p\rangle| = \max_{\substack{x_i \in \mathbb{K}^{d_i} \\ \|x_i\|_2 = 1}} \left| \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{d_p} \overline{T_{i_1,\dots,i_p}} (x_1)_{i_1} \cdot \ldots \cdot (x_p)_{i_p} \right|. \tag{1}$$

这是本文关注的主要量；更多讨论和动机见下文第 1.3 节。事实上，我们研究来自不同系综的随机张量 T 的平均内射范数，这些系综将在下文定义。我们先给出以下定义。

定义 1.1。 我们称一个 $\mathbb{R}$值随机变量 X 为 $\mathbb{R}$刚性次高斯的，若它是对称的，即 $X \overset{law}{=} -X$，且其非零矩被具有相同方差的中心高斯随机变量的矩所支配，也就是说，$\mathbb{E}[X^{2k}] \leqslant (2k-1)!!\mathbb{E}[X^2]^k$.

我们称取值于 $\mathbb{C}$ 的随机变量 Y 为 $\mathbb{C}$-刚性次高斯的，如果它是圆对称的（因此特别是中心化的），也就是说，对所有 $\theta \in \mathbb{R}$、$Y \overset{law}{=} e^{i\theta} Y$，其模的偶数阶矩均不超过具有相同方差的圆对称复高斯随机变量的相应矩，即 $\mathbb{E}[|Y|^{2k}] \leqslant k!\ \mathbb{E}[|Y|^2]^k$.

在近期的论文中，例如 [GH20、CDG23以及BCG24], ，术语“尖锐次高斯”和“严格次高斯”被用于描述这样一类随机变量：其矩母函数被具有相同方差的高斯随机变量的矩母函数所上界。我们注意到，刚性次高斯随机变量是这类随机变量的一个子类。

模型 $A_{\mathbb{K}}$。对于 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$，如果一个非对称随机张量 T 属于 $\mathbb{K}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{d_p}$，且其元素独立同分布，并且是 $\mathbb{K}$-刚性次高斯随机变量，归一化为 $\mathbb{E}[|T_{1,\ldots,1}|^2] = \frac{1}{(d_1 \cdots d_p)^{1/p}}$，则称其来自"模型$A_{\mathbb{K}}$"（$A$ 表示"非对称"）。

例 1.2. 我们给出 模型 $A_{\mathbb{R}}$ 和 $A_{\mathbb{C}}$中的随机张量示例：

- 考虑一个张量 $A \in \bigotimes_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{d_i}$，其元素是独立同分布的 *Rademacher* 变量、独立同分布的均匀$([-\sqrt{3}, \sqrt{3}])$ 变量，当然也可以是独立同分布的标准高斯变量。缩放后的张量 $T = \frac{1}{(d_1 \ldots d_p)^{\frac{1}{2p}}} A$ 是模型 $A_{\mathbb{R}}$的张量。- 作为复数情形的例子，考虑张量 $A \in \bigotimes_{i=1}^{p} \mathbb{C}^{d_i}$，其元素独立同分布且均匀分布在复单位圆上（也称为 *Steinhaus* 随机变量）。那么 $T = \frac{1}{(d_1 \ldots d_p)^{\frac{1}{2p}}} A$是模型 $A_{\mathbb{C}}$的张量。此外，T 的弗罗贝尼乌斯范数是确定的，$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_p} |T_{i_1,\ldots,i_p}|^2 = (d_1 \ldots d_p)^{1-1/p}$. 因此，$(d_1 \ldots d_p)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)} T$是一个随机量子态，我们称之为 *Steinhaus* 随机态。

模型 $S_{\mathbb{C}}$。设 γ 是一个方差为 $\mathbb{E}[|\gamma|^2] = 1/d$的 $\mathbb{C}$-刚性次高斯随机变量。若一个对称随机张量 $B \in \mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}^d)$ 满足以下条件，我们称它来自"模型 $S_{\mathbb{C}}$"（S 表示"对称"）：

- 其元素除对称性外相互独立，- $B_{i_1,\ldots,i_p}$ 的分布 $= \sqrt{\frac{|\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_p}((i_1,\ldots,i_p))|}{p!}}\,\gamma$，其中 $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_p}((i_1,\ldots,i_p))$ 表示置换群~~中稳定~~ p– 元组 $(i_1,\ldots,i_p)$ 的子群。具体而言，若 $(i_1,\ldots,i_p)$ 有 k 个不同元素，其对应重数分别为 $m_1,\ldots,m_k$，则 $B_{i_1,\ldots,i_p}$ 的分布 $= \sqrt{\frac{m_1!\cdots m_k!}{p!}}\,\gamma$。

模型 $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$。考虑一个属于模型 $A_{\mathbb{C}}$的随机张量 $T \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes p}$。若对称随机张量 $\widetilde{B} \in \mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}^d)$ 满足 $\widetilde{B} := P^{(d)}_{\text{对称 } p}(T)$，我们就称它属于模型 $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$，其中 $P^{(d)}_{\mathrm{sym},p}\colon (\mathbb{C}^d)^{\otimes p} \to \mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}^d) \subseteq (\mathbb{C}^d)^{\otimes p}$ 是对称子空间上的投影算子。等价地，$\widetilde{B}$ 是对 T的所有置换取平均所得，即 $\widetilde{B} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \sigma(T)$，其中置换群 $\mathfrak{S}_p$的作用方式将在下文的记号部分中说明。

注 1.3。我们指出，尽管模型 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$ 在高斯情形下相同，但一般而言它们并不相同；详见注 *4.1* 。

模型 $B_{\mathbb{C}}$。设 $R \in \mathbb{N}$，并设 $x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant R$ 都是一族 p 独立向量$x_m^{(i)}$，其条目为独立同分布的 $\mathbb{C}$-刚性次高斯变量，方差设为 $1/d$,；不同的i彼此独立。我们考虑随机张量 $T = \sum_{i=1}^{R} x_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes x_p^{(i)}$.。$T$ 的条目同分布但彼此相关，其方差为 $\mathbb{E}(|T_{i_1,\ldots,i_p}|^2) = \frac{R}{d^p}$。我们称此模型为复有界秩随机张量模型 $B_{\mathbb{C}}$（B 表示"有界"），或简称有界秩模型。

1.2. **结果**。我们的主要结果可以非正式地表述如下：

定理 1.4.（主要定理的非正式表述）若 T 是任意确定性张量，我们将其内射范数上界表示为它在球面上均匀随机向量方向上的平均投影（定理 *2.1*）。作为这一结果的应用，我们给出模型 $\widetilde{}$中的随机张量 $A_{\mathbb{K}}$（定理 *3.1*）、$S_{\mathbb{C}}$ 和 $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$（定理 *4.2*）以及 $B_{\mathbb{C}}$（定理 *5.3*）的上界。

这些界在许多情况下优于当前最佳水平；有关与现有方法的详细比较，请见附录 D。我们还提到，我们主要结果的实对称情形与 Lata-la [Lat06] 关于高斯混沌的矩的著名界部分可比；请见注 2.6。这些结果的证明仅依赖初等分析，主要涉及

标准微积分方法，用于研究矩的阶数趋于无穷时的渐近性。该矩方法还采用了标准的组合工具，这些工具仅在将我们的结果推广到高斯情形之外时才需要。

1.3. **背景**。 张量的内射范数出现在不同的语境中，这些语境促使我们开展了关于这一主题的研究。下面我们将介绍其中一些；另请参见我们先前工作的引言[DM24] ，其中对这一问题进行了更深入的讨论，包括内射范数在统计物理学（具体而言是自旋玻璃）和数据分析（具体而言是张量主成分分析）中的应用。

量子信息。内射范数是量子信息中的一个重要量，在该领域中，它以几何纠缠之名为人所知；参见例如 [WG03、AMM10、AMM11、AS17、DZ25]。在这一语境下，张量是一个纯量子态 $|\psi\rangle$，因此其弗罗贝尼乌斯范数为一，而内射范数是其与 $|\psi\rangle$ 可分态之间的最大重叠，因而提供了一种多体纠缠的度量。我们的工作属于研究量子态一般纠缠性质这一更广泛计划的一部分；在该计划中，人们旨在获得概率性的渐近结论和纠缠阈值。尽管这一计划在双体纠缠（即上文的矩阵情形 $p = 2$ ）方面已经产生了大量文献，研究各种不同量子态系综 [SZ04、ASY12、AN12、ASY14、HNQ+16、NM20、BHK21、DQW21、DNT22、BHK+22、PS24、CLP+24]的双体纠缠度量和判据，但多体情形（即上文的张量情形 $p \geqslant 3$ ）仍远未得到充分理解（不过可参见[GFE09、FK18、PWW23、AFLR24]）。因此，研究内射范数的一般性质及其在各种随机态下的行为似乎是很自然的。鉴于计算一般态的内射范数是一个 NP困难问题 [HL13]，这一点就更加明显了。在这一背景下，我们的主要定理给出了随机量子态纠缠的下界。

超图的谱性质与应用。 在经典的谱图论领域，人们通过研究图所关联的矩阵（例如其邻接矩阵和拉普拉斯矩阵）来了解图。随机图对应随机矩阵。然而，均匀（随机）超图 所关联的则是（随机）张量，并且研究者从多个方向发展出了对内射范数的超图论解释。例如，矩阵的第二特征值已知可以决定其作为所谓“扩张图”的性质； [FW95] 利用内射范数提出了张量第二特征值的概念，并将其与扩张超图的概念联系起来。他们的研究动机源于复杂性理论：足够优良的扩张超图可以转化为强分散器（即两种语言之间的一类特定映射）。根据 Sipser 的一条定理，已知 [Sip88]此类分散器的存在意味着**RP** （随机多项式时间）类要么坍缩为**P**，要么时间与空间之间存在强权衡。近年来，与这一问题并行，内射范数也出现在社团检测问题中（参见 [CLTZ18、LXDX25] 及其中的参考文献）。在该问题中，它发挥着“谱”探针的作用，用于检测网络中的社团。

随机矩阵理论的推广。过去几十年来，随机矩阵理论已成为数学的核心领域，并与数学物理、概率、统计学、数值线性代数和理论计算机科学 [Meh04, For10, AGZ10, PB20]等领域密切相关。在其核心主题中，一个显著的问题——无论在理论还是应用方面——都是最大特征值或最大奇异值的行为，包括其普适性 [EY17] 和极限分布[BY88, TW94, Sos99, BADG01]。从这一角度看，$p = 2$ 的内射范数就是矩阵的最大奇异值，而更高阶的 p 则为张量提供了自然的推广。正如 [DR25], 所指出的，因此我们自然会问，关于内射范数可以得出哪些结论，其精度和普适性程度如何；这与随机矩阵理论中的相应研究计划如出一辙（例如，参见 [SZ17, HS23, Sto25] ，其中有一些相关结果，出自统计物理

以及景观复杂性计划）。面临的诸多困难中，缺乏谱分解，以及针对非高斯过程越界概率的工具存在局限，最为显而易见。我们的大矩方法旨在缓解这些困难，提出一种具有一定稳健性的新方法，并希望借此推动对随机张量内射范数开展较为系统的研究。

论文结构。第 2 节陈述并证明关于确定性张量内射范数的主要上界。第 3、4 和 5 节分别应用这些界，估计模型 $A_{\mathbb{K}}$； $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$；以及 $B_{\mathbb{C}}$ 中随机张量的内射范数。论文最后有四个附录。附录 A 给出支持我们上界的数值计算。附录 B 给出一个代数几何论证，表明在有界秩模型 $B_{\mathbb{C}}$ 的勒贝格绝对连续情形下，秩不仅有上界 R （这由构造可直接得出），而且几乎处处恰好等于 R 。第 3、4 和 5 节给出了张量增长时的渐近界（即 $d \to \infty$ 或 $p \to \infty$），而附录 C 则说明，我们的方法也能在 d 和 p 固定时给出非渐近界，并且还可以高效地进行数值计算。最后，在附录 D 中，我们将这一新方法与以往方法（Kac–Rice 论证、Sudakov–Fernique 论证、ε-网论证和 PAC-贝叶斯论证）进行比较，并表明在许多情况下，我们的界优于以往的当前最佳水平。

记号。 在本文中，我们用

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\},$$

$\mathbb{R}^d$中的 $(d-1)$维单位球面，即2-范数设为1的向量 $x \in \mathbb{R}^d$ 所构成的球面。 我们用

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{d-1} := \{x \in \mathbb{C}^d : \|x\|_2 = 1\},$$

t复单位球面（它是一个具有 $2d-1$ 个实维数的实流形） .

对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathfrak{S}_n$ 表示 n 个元素上的置换群。我们经常考虑它对张量的作用：对所有 x_1, ..., $x_n \in \mathbb{K}^d$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，在简单张量上的作用为 $\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$，并线性延拓。对于张量 $T \in \mathbb{K}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K}^{d_p}$，我们用 $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ 表示Frobenius（或Hilbert-Schmidt）范数 $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{d_p} |T_{i_1, \ldots..., i_p}|^2$。

Acknowledgments

我们谨向朱一哲致以谢意，感谢他开展了富有帮助的讨论并提供了参考文献；同时也感谢 Steven Heilman 提出了有趣的建议并提供了相关参考文献。我们还感谢佐治亚理工学院数学学院以及波尔多数学研究所，在本项工作的部分期间给予我们的热情接待。S.D. 的工作部分得到了法国国家研究署项目 ANR-25-CE40-1380 和 ANR-25-CE40-5672 的资助。B.M. 的工作部分得到了 AMS-Simons 旅行资助的支持。

2. 确定性上界

本节旨在证明以下定理。

定理 2.1. 对于所有 k、 $p \in \mathbb{N}^*$，以下上界成立：

a. 设 $T \in \bigotimes_{i=1}^p \mathbb{R}^{d_i}$ 为实张量。设 $u_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_i-1}$ 为维数为 d_i的实单位球面上的相互独立的均匀随机向量。则有

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}^{2k} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{2^k \Gamma(\frac{d_i}{2} + k)}{(2k-1)!! \Gamma(\frac{d_i}{2})} \right) \mathbb{E}_u \left(\langle T, u_1 \otimes \ldots \otimes u_p \rangle^{2k} \right). \tag{2}$$

b. 设$T \in \bigotimes_{i=1}^{p} \mathbb{C}^{d_i}$ 为复张量。设 $u_i \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{d_i-1}$ 为维数为 d_i的复单位球面上的均匀随机向量。则有

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}^{2k} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{p} \binom{d_i+k-1}{k}\right) \mathbb{E}_u\left(|\langle T, u_1 \otimes \ldots \otimes u_p\rangle|^{2k}\right). \tag{3}$$

c. 设 $B \in \mathit{Sym}_p(\mathbb{C}^d) \subseteq (\mathbb{C}^d)^{\otimes p}$ 为一个复对称张量。设 $u \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{d-1}$ 为复维数为 d 的复单位球面上的均匀随机向量。则有

$$\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}^{2k} \leqslant \binom{d+pk-1}{pk} \mathbb{E}_u(|\langle B, u^{\otimes p}\rangle|^{2k}). \tag{4}$$

我们先证明复数情形的结论，这稍微简单一些。

2.1. **定理 2.1 的证明：复数情形。** 主要结论是

$$\mathbb{E}_u\left(|\langle T, u_1 \otimes \ldots \otimes u_p\rangle|^{2k}\right) = \left(\prod_{i=1}^{p} \binom{d_i+k-1}{k}\right)^{-1} \left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k} \right\rangle, \tag{5}$$

其中 $P^{(d_i)}{}_{\text{对称 } k} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \sigma$ 是对称子空间上的投影算子 $P^{(d_i)}{}_{\text{对称 } k}\colon (\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes k} \to \mathsf{Sym}_k(\mathbb{C}^{d_i})$。（回忆一下，这里 σ $(\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes k}$ 通过交换张量因子作用，即 $\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(k)}$，并按线性方式扩展。）事实上，我们首先改写

$$\begin{aligned} |\langle T, u_1 \otimes \cdots \otimes u_p\rangle|^{2k} &= \left\langle T^{\otimes k}, |(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p)^{\otimes k}\rangle\langle (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p)^{\otimes k}| \, T^{\otimes k} \right\rangle \\ &= \left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} |u_i^{\otimes k}\rangle\langle u_i^{\otimes k}|\right) T^{\otimes k} \right\rangle, \end{aligned}$$

然后对 u取平均，并利用独立性来交换期望与$\bigotimes_{i=1}^{p}$。接着我们注意到

$$\mathbb{E}_{u_i} |u_i^{\otimes k}\rangle\langle u_i^{\otimes k}| = \frac{1}{\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k})} \mathbb{E}|\varphi_i^{\otimes k}\rangle\langle \varphi_i^{\otimes k}|, \tag{6}$$

其中 $\varphi_i \in \mathbb{C}^{d_i}$ 是标准复正态随机向量，也就是说，其各个分量独立同分布，且实部和虚部均为方差 $1/2$的独立同分布的中心高斯随机变量。这是因为 u_i 与 $\varphi_i/\|\varphi_i\|_2$具有相同的分布，而具有独立同分布分量的正态向量的范数与方向是相互独立的随机变量。我们有 $\mathbb{E}|\varphi_i^{\otimes k}\rangle\langle \varphi_i^{\otimes k}| = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \sigma = k!\, P^{(d_i)}{}_{\text{对称群 } k}$，这可由维克–伊瑟利斯定理得出。[1] 由于 $\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k}) = \Gamma(d+k)/\Gamma(k)$, 这就完成了对（5）的证明。

现在，对于像空间 $\mathrm{Im}\left(\bigotimes_{i=1}^{p} P^{(d_i)}{}_{\text{对称群 } k}\right)$中的所有单位范数 v，我们有

$$\begin{aligned} \left|\left\langle T^{\otimes k}, v\right\rangle\right|^2 &= \left|\left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) v \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k}, v \right\rangle\right|^2 \\ &\leqslant \left\|\left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k}\right\|^2 \|v\|^2 = \left\langle \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k} \right\rangle \\ &= \left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k} \right\rangle, \end{aligned}$$

[1]这可以通过许多不同的方法来证明。

因为 $\left(\bigotimes_{i=1}^{p} P^{(d_i)}{}_{\text{对称群 } k}\right)$ 是一个投影算子。特别地，对于任意单位范数的 $x_i \in \mathbb{C}^{d_i}$，令 $v = x_1^{\otimes k} \otimes x_2^{\otimes k} \otimes \ldots \otimes x_p^{\otimes k}$，可得

$$\left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k} \right\rangle \geqslant \left|\langle T^{\otimes k}, x_1^{\otimes k} \otimes x_2^{\otimes k} \otimes \ldots \otimes x_p^{\otimes k} \rangle\right|^2 = \left|\langle T, x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p \rangle\right|^{2k}.$$

然后，对 x_i 的选取取最大值，可得

$$\left\langle T^{\otimes k}, \left(\bigotimes_{i=1}^{p} P_{\mathrm{sym},k}^{(d_i)}\right) T^{\otimes k} \right\rangle \geqslant \|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}^{2k}.$$

这就证明了该断言。 □

2.2.**定理的证明 2.1：对称复数情形**。我们首先回顾，对所有 $B \in$对称群$_p(\mathbb{C}^d)$，内射范数实现为 $\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}} = \max_{x \in \mathbb{C}^d, \|x\|_2=1} |\langle B, x^{\otimes p} \rangle|$（这是一个经典结果，有时在 [Ban38]，之后被称为巴拿赫定理，尽管 [Wat90] 已将该结果追溯至 [Kel28, VdCS35]）。注意到这一事实，对称版本的证明采用了与定理 2.1 的复数情形证明类似的论证。一个变化是，由于我们只有一个 u，而不是它们中的 p 个，我们将 $\otimes_{i=1}^{p} P^{(d_i)}\mathrm{sym}_k$ 替换为 $P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk}$；因此 (5) 被替换为 $\mathbb{E}_u(|\langle B, u^{\otimes p} \rangle|^{2k}) = (pk)! \, \mathbb{E}(\|\varphi\|_2^{2pk}) \langle B^{\otimes k}, P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk} B^{\otimes k} \rangle$。为得到下界，我们使用同样的线性代数技巧。对任意单位范数 $v \in \mathrm{Im}\left(P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk}\right)$，我们有 $\langle B^{\otimes k}, P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk} B^{\otimes k} \rangle \geqslant \langle B^{\otimes k}, vv^\dagger B^{\otimes k} \rangle$。特别地，对任意单位范数 $x \in \mathbb{C}^d$，我们选取 $v = x^{\otimes pk} \in \mathrm{Im}\left(P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk}\right)$，从而得到 $\langle B^{\otimes k}, P^{(d)}\mathrm{sym}_{pk} B^{\otimes k} \rangle \geqslant |\langle B^{\otimes k}, x^{\otimes pk} \rangle|^2$。最后，我们对 x 取最大值，以恢复内射范数。 □

2.3. **定理 2.1 的证明：实数情形**。我们先给出一个预备引理 .

引理 2.2. 设 $p \geqslant 1$ 为一个整数，$T \in \bigotimes_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{d_i}$ 为一个固定的实张量，$x_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_1-1}$、 $\ldots$ $x_p \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_p-1}$ p 为单位球面上的任意一族向量。

此外，考虑一族相互独立的标准高斯向量 $\varphi_1 \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0、\ \mathbb{1}_{d_1})$、……、$\varphi_p \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0、\ \mathbb{1}_{d_p})$.。那么，有

$$\mathbb{E}(\langle T, \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle^{2k}) \geqslant ((2k-1)!!)^p \langle T, x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \rangle^{2k}. \tag{7}$$

证明。 我们通过对 p进行递归来证明该结论。

情形 $p = 1$。 在此情形下， T只是 $\mathbb{R}^d$中的一个向量，并且 $\langle T, \varphi_1 \rangle \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \|T\|_2^2)$。因此

$$\mathbb{E}(\langle T, \varphi_1 \rangle^{2k}) = (2k-1)!! \|T\|_2^{2k}. \tag{8}$$

注意到 $\|T\|_2 =$最大值$_{x \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d-1}} |\langle T,\ x \rangle|$，因此 $\mathbb{E}(\langle T,\ \varphi_1 \rangle^{2k}) \geqslant (2k-1)!! \langle T,\ x \rangle^{2k}$. 这证明了等式（7），其中 $p = 1$。

归纳法。 现在假设对于给定的 $p \geqslant 1$，等式（7）成立。我们声称，这意味着它对 $p+1$ 也成立。为证明这一点，考虑 $T \in \bigotimes_{i=1}^{p+1} \mathbb{R}^{d_i}$，并定义 $T_{(\varphi_1)} \in \bigotimes_{i=2}^{p+1} \mathbb{R}^{d_i}$ 为在第一槽位上收缩得到的张量，即 $T_{(\varphi_1)} = [\varphi_1^t \otimes (\bigotimes_{i=2}^{p+1} \mathbb{1}_{d_i})]T$，或者逐分量地写作 $(T_{(\varphi_1)})_{i_2,\ \ldots\ldots,} \sum_{i_1=1}^{d_1} T_{i_1\, i_2 \ldots\, i_{p+1}} (\varphi_1)_{i_1}$ $\overset{i_{p+1}}{=}$ $\Phi = \varphi_2 \otimes \ldots \otimes_{,\ ,\ ,}$。

为简化记号，记随机变量为 φ_{p+1}和 $z = \varphi_1 \otimes \Phi$，于是特别有 $\langle T,\ \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{p+1} \rangle = \langle T,\ z \rangle$.。接下来注意，给定 φ_1 的条件期望满足

$$\mathbb{E}(\langle T, z \rangle^{2k} | \varphi_1) = \mathbb{E}(\langle T_{(\varphi_1)}, \Phi \rangle^{2k} | \varphi_1) \geqslant ((2k-1)!!)^p \langle T_{(\varphi_1)}, x_2 \otimes \ldots \otimes x_{p+1} \rangle^{2k},$$

最后一个不等式用到了归纳假设。于是

$$\mathbb{E}(\langle T, z\rangle^{2k}) = \mathbb{E}_{\varphi_1}[\mathbb{E}(\langle T, z\rangle^{2k}|\varphi_1)] \geqslant \mathbb{E}_{\varphi_1}\left(((2k-1)!!)^p\langle T_{(\varphi_1)}, x_2\otimes\ldots\otimes x_{p+1}\rangle^{2k}\right). \tag{9}$$

现在定义[2] $\Theta \in \mathbb{R}^{d_1}$ 通过将其最后 p个槽与向量$x_2,\ldots,x_{p+1}$进行缩并而得到的向量。更正式地说，$\Theta = [\mathbb{1}_{d_1}\otimes x_2^t\otimes\ldots\otimes x_{p+1}^t]T$，或者再次逐分量地写为，$\Theta_{i_1} = \sum_{i_2=1}^{d_2}\cdots\sum_{i_{p+1}=1}^{d_{p+1}} T_{i_1,i_2,\ldots i_{p+1}}(x_2)_{i_2}\ldots(x_{p+1})_{i_{p+1}}$. 于是，

$$\mathbb{E}_{\varphi_1}\left(\langle T_{(\varphi_1)}, x_2\otimes\ldots\otimes x_{p+1}\rangle^{2k}\right) = \mathbb{E}_{\varphi_1}(\langle\Theta,\varphi_1\rangle^{2k}) \geqslant (2k-1)!!\langle T, x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+1}\rangle^{2k} \tag{10}$$

其中，最后一个不等式由 $p=1$ 情形以及以下注记得出：$\langle\Theta, x_1\rangle = \langle T, x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+1}\rangle$根据 Θ的定义。结合方程 (9) 和 (10) 即得所述结论。□

我们用上述引理来证明不等式 (2):

实不等式的证明 (2)。 与复数情形一样，我们利用 u_j 服从= $\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_2}$，其中 φ_j 是独立标准实高斯向量 $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,\mathbb{1}_{d_j})$，从而得到

$$\mathbb{E}_u(\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k})}\mathbb{E}_{\varphi}(\langle T,\varphi_1\otimes\ldots\varphi_p\rangle^{2k}). \tag{11}$$

对任意选取的单位范数 $x_i\in\mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_i-1}$， $i\in[p]$应用引理 2.2 可得

$$\mathbb{E}_u(\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}) \geqslant \frac{((2k-1)!!)^p}{\prod_{i=1}^p\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k})}\langle T, x_1\otimes\ldots x_p\rangle^{2k},$$

将右侧对 x_i 的所有取值取最大值后，可得

$$\mathbb{E}_u(\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}) \geqslant \frac{((2k-1)!!)^p}{\prod_{i=1}^p\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k})}\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}^{2k}.$$

因此，我们得到

$$\frac{((2k-1)!!)^p}{\prod_{i=1}^p\mathbb{E}_{\varphi_i}(\|\varphi_i\|_2^{2k})}\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}^{2k} \leqslant \mathbb{E}_u(\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}).$$

注意到 $\|\varphi_i\|_2^2$ 是一个具有 d_i 个自由度的标准 χ^2 随机变量，我们知道其矩为 $\mathbb{E}(\|\varphi_i\|_2^{2k}) = 2^k\Gamma\left(\frac{d_i}{2}+k\right)/\Gamma\left(\frac{d_i}{2}\right)$。整理前面的公式，即完成证明。□

注 2.3. 复数情形的结论(4)的证明与实数情形的结论的证明类似。由于需要追踪各种厄米内积中出现的复共轭，细节会复杂一些。然而，我们没有找到一个模仿复数情形证明思路的实数情形证明。事实上，$P_{sym}^{(d_i)}$，k 被布劳尔元素的归一化和所取代，而这些和不具有投影算子性质。尽管可以利用布劳尔元素的和得到内射范数的界，但我们发现，这些界不如归纳证明所得的界紧。

注 2.4。 自然会想知道，在实数情形下是否也成立类似于 (4)的界。然而，我们对 (4) 的证明仿照了复数情形的证明，但这种方法似乎无法自然推广到实数情形（见注 *2.3*）；而实数情形下界 (2) 的证明则强烈依赖于 u_i彼此不同，这样我们才能对它们进行归纳。当然，由于界 (2) 适用于所有实张量，因此也特别适用于实对称张量。不过，对于我们的模型，由此得到的界似乎并不紧。即便不考虑证明，正确的界究竟应为

[2]为了使记号易于阅读，我们不显式写出单位范数向量 $x_2,\ldots,x_p$对 Θ的依赖关系，但读者应牢记这种隐含的依赖关系。

何，仍不清楚。根据对 (2)、(3)和 (4)的模式匹配，人们或许会猜测，实对称张量$B \in$对称群$_p(\mathbb{R}^d)$满足以下界

$$\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}^{2k} \overset{?}{\leqslant} \frac{2^{pk}\Gamma(\frac{d}{2}+pk)}{(2pk-1)!!\Gamma(\frac{d}{2})}\mathbb{E}_u\left(\left\langle B, u^{\otimes p}\right\rangle^{2k}\right). \tag{12}$$

然而，即使在矩阵情形下，这个界也不正确 $p=2$；如果 $B=\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_d)$ 是一个对角矩阵，那么 $\langle B, u^{\otimes p}\rangle = \sum_{i=1}^d b_i u_i^2$因此（由均匀单位向量各分量的显式矩可知）（12）变为

$$\max_{i=1}^d |b_i| \overset{?}{\leqslant} \frac{2(d-1)}{3d}\sum_{i=1}^d b_i^2 + \frac{d+2}{3d}\left(\sum_{i=1}^d b_i\right)^2.$$

例如，当 $d=2$、 $b_1=1$和 $b_2=-1/6$ 时，这一点不成立。

注 2.5。这些界可以表示为张量的局部酉不变多项式之和。事实上，在非对称情形下，由等式 （6）可知，这些平均值归结为

$$\mathbb{E}_u(|\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}) = \frac{1}{\mathbb{E}_\varphi(\|\varphi\|_2^{2k})^p}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p\in\mathfrak{S}_k}\langle T^{\otimes k}|\sigma_1\otimes\ldots\otimes\sigma_p|T^{\otimes k}\rangle,$$

其中， φ 是一个标准正态复 d维随机向量。对于 σ_1、…、 σ_p $\in\mathfrak{S}_k$的每一种选择，$\langle T^{\otimes k}|\sigma_1\otimes\ldots\otimes\sigma_p|T^{\otimes k}\rangle$都可被识别为由$\sigma_1$、…、 σ_p 构造的 T的 LU 酉不变量，正如文献中多次所述，例如 [*BD18*，第 *6* 节，式（*224*）][*CGL24*，第 *2* 节。2]，其对应的带色图是二分多重图 $G_{\sigma_1、\ldots、\sigma_p}=(V=V_\circ\sqcup V_\bullet、\ E=\bigsqcup_{i=1}^p E_i)$，其中白色顶点为 $V_\circ=\{1_\circ、\ldots、\ k_\circ\}$，黑色顶点为 $V_\bullet=\{1_\bullet、\ldots、\ k_\bullet\}$，边多重集 E 被划分为 i-着色的边集 E_i、 $i=1\ldots、\ p$、 $E_i=\{(v_\circ、\ \sigma_i(v)_\bullet):\ v_\circ\in V_\circ\}$。在对称情形下，类似的考虑会导出类似的结论。此时，不变量是在 $U\in U(d)$、$T\mapsto U^{\otimes p}T$ 的作用下保持不变的。相应的不变量尚未在文献中得到正式描述。然而，很容易证明，它们由张量的类似图缩并生成；此时，相应的图是二分正则p价多重图，不带边着色。本注中的全部内容都很容易推广到实数情形；在该情形下，相应的图不必是二分图。

注 2.6. 我们指出，在实非对称情形中，保留引理*2.2* 精神的界出现在*Lata-la*的著名工作 [Lat06]，中，尽管证明非常不同。引理*2.2* 给出

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}} \leqslant \left(((2k-1)!!)^{\frac{1}{k}}\right)^{-\frac{p}{2}}\|\langle T, \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\|_{2k}, \tag{13}$$

其中 $\|X\|_{2k}=\mathbb{E}[X^{2k}]^{1/(2k)}$ 是随机变量 X的 L^{2k} 范数。由于 $(2k-1)!! = {}^{(2k)}!\,2^k k!$，标准界 $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\exp(\frac{1}{12n+1}) \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n}(n/e)^n\exp(\frac{1}{12n})$给出

$$((2k-1)!!)^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{2k}{e}\exp\left(\frac{1}{k}\left(\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{24k+1}-\frac{1}{12k}\right)\right) \geqslant \frac{2k}{e},$$

从而(13)给出

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}} \leqslant e^{p/2}(2k)^{-\frac{p}{2}}\|\langle T, \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\|_{2k}. \tag{14}$$

[1]斯特林$\lim_{k\to\infty}\frac{((2k-1)!!)^k}{k^k} = \frac{2}{e}$，从而(14) 对于较大的 k并不特别有损。

相比之下， [Lat06] 的定理*1*根据确定性张量 T 的展平范数的加权和，对 $\|\langle T, \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\|_{2k}$ 给出了双边界。由于 $\|T\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{R}}$ 对应于 *Lata-la* 记号中的 $\|T\|_{\{1\},\ldots,\{d\}}$ ，他的定理 *1*表明，存在一些常数 C_p ，使得

$$(2k)^{p/2}\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}} \leqslant m_{2k}(T) \leqslant C_p\|\langle T, \varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\|_{2k}$$

其中 $m_{2k}(T)$ 定义见 [Lat06], , 因此

$$\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}} \leqslant C_p (2k)^{-p/2} \| \langle T, \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \rangle \|_{2k}. \tag{15}$$

比较 (14) 和 (15)，可以看出，我们的结果相当于为 C_p 在拉塔-拉的这一推论中给出了一个显式公式。（由于我们省略了 T的其他展平，我们的结果并未给出拉塔-拉定理*1*中常数的显式公式。）我们的论文的一个主要意义在于，我们得到的常数被猜想对于随机张量而言是紧的；下文将对此进行详细讨论。

注 *2.7.* 本文其余部分将讨论这些界对 $p \geqslant 2$ 的适用性；此处我们只指出，在简单的向量 $p = 1$ 情形下，定理 *2.1* 的界对于每个确定性 T 和每个 k实际上都是等式。基本论证是，这种向量的内射范数就是其 *2*-范数；首先，可以通过将均匀向量 u 与具有相应对称类的高斯向量 φ 联系起来，改写 $\mathbb{E}[|\langle T, u\rangle|^{2k}]$；然后，根据高斯分布的旋转对称性，$\langle T, \varphi\rangle$本身就是一个高斯变量，因此可以计算出所有矩。在实数情形下，可以通过结合（*8*）和（*11*）具体实现这一点。在复数情形下，只需将实高斯向量替换为复高斯向量；例如，（*8*）替换为 $\mathbb{E}[|\langle T, \varphi_1\rangle|^{2k}] = k! \|T\|_2^{2k}$，其中$\varphi_1$ 是标准复高斯，其矩为 $\mathbb{E}[\|\varphi_1\|_2^{2k}] = \Gamma(d+k)/\Gamma(d)$。

3. Application: Asymmetric tensors

我们令 $\psi_p^{\mathbb{K}}$: $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+)^{p-1} \to \mathbb{R}$ 为函数:

$$\psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha; \eta_2, \ldots, \eta_p) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{e}(\eta_2 \ldots \eta_p)^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^{1+\alpha}}\right)^{1/2} \left(\prod_{i=2}^p \frac{(1+\alpha\eta_i)^{1+\alpha\eta_i}}{(\alpha\eta_i)^{\alpha\eta_i}}\right)^{1/2}, & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{e}(\eta_2 \ldots \eta_p)^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{(1+\alpha/2)^{1+\alpha/2}}{(\alpha/2)^{1+\alpha/2}}\right)^{1/2} \left(\prod_{i=2}^p \frac{(1+\alpha\eta_i/2)^{1+\alpha\eta_i/2}}{(\alpha\eta_i/2)^{\alpha\eta_i/2}}\right)^{1/2}, & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16}$$

作为上述 记号的简写，我们记作 $\psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha) = \psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha; 1, \ldots\ldots, 1)$. 注意

$$\psi_p^{\mathbb{C}}(\alpha; \eta_2, \ldots, \eta_p) = \psi_p^{\mathbb{R}}(2\alpha; \eta_2, \ldots, \eta_p).$$

定理 3.1. 如果 T 来自 模型 $A_{\mathbb{K}}$，那么我们有其在各种渐近情形下的内射范数上界:

- 假设 $d_1 = \cdots = d_p = d$ 固定。那么当 $p \to \infty$ 时，我们有

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p \log p}} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}}] \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}}, \tag{17}$$

更准确地说，其收敛速率如下：对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 p_0，使得对于所有 $p \geqslant p_0$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{p \log p}} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}}] \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}} \left(1 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{\log\log p}{\log p}\right). \tag{18}$$

- 假设 $p \geqslant 2$ 固定，并且 d_1、…、$d_p \to \infty$ 满足条件 $d_i = \lfloor \eta_i d_1 \rfloor$，其中某个固定的$\eta_2, \ldots, \eta_p > 0$。那么

$$\limsup_{d_1\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}}] \leqslant \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+} \psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha; \eta_2, \ldots, \eta_p). \tag{19}$$

特别地，当 $d_1 = \ldots = d_p$ 全部趋于无穷时，有$\limsup_{d_1\to\infty} \mathbb{E}\|T\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{K}} \leqslant \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} \psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha)$，且该下确界唯一地在唯一正解 $\alpha_0^{\mathbb{K}}(p)$ 处实现，即

$$\begin{cases} \alpha_0^{\mathbb{C}}(p) \log(1 + 1/\alpha_0^{\mathbb{C}}(p)) = 1/p, & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \alpha_0^{\mathbb{R}}(p) \log(1 + 2/\alpha_0^{\mathbb{R}}(p)) = 2/p, & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \end{cases} \tag{20}$$

它们（显然）满足 $\alpha_0^{\mathbb{R}}(p) = 2\alpha_0^{\mathbb{C}}(p)$。此外，

$$\limsup_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{K}}] \leqslant \psi_p^{\mathbb{K}}(\alpha_0^{\mathbb{K}}(p)) \leqslant \sqrt{p\log p}(1+\mathrm{o}_{p\to\infty}(1)). \tag{21}$$

注 3.2. 方程 （*18*）和 （*21*）的高斯特殊情形 [DM24], 此前已在我们先前的工作中得到研究，并且其速率基本相同，即 $\log\log 2$ $^{p}_{\log p}$。（先前的工作基于截然不同的论证方法，即自旋玻璃方法和 *Kac–Rice* 公式；有关这些方法的更多讨论，请参见附录 *D* 。先前的工作还给出了高概率界，而非期望界，但两种界相同。）不过，据我们所知，非高斯情形是新的。

在 实高斯 情形下， p 固定时， （21）的匹配下界已由 [BS25] 给出（尽管是高概率界，而非期望界）。然而，在 复高斯 情形下，我们尚未发现 （21）的匹配下界。

证明依赖于下面的引理，该引理使人们能够利用高斯对应物来界定$\mathbb{K}$-rigidly次高斯张量的平均内射范数。

引理 3.3. 设 $\{u_i \in \mathbb{K}^{d_i}\}_{i=1}^p$ 为一族确定性单位范数向量，即 $\|u_i\|_2 = 1$。则若 $T \in \bigotimes_{i=1}^p \mathbb{K}^{d_i}$ 来自模型 $A_{\mathbb{K}}$，我们有

$$\mathbb{E}_T(|\langle T, u_1\otimes\cdots\otimes u_p\rangle|^{2k}) \leqslant \delta_{\mathbb{K},\mathbb{C}}\frac{k!}{(d_1\cdots d_p)^{k/p}} + \delta_{\mathbb{K},\mathbb{R}}\frac{(2k-1)!!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}. \tag{22}$$

证明。 我们将证明分为两种情形， $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$。

实数情形：$\bigotimes_{i=1}^{p}\mathbb{R}^{d_i}$ 为一个具有独立同分布 $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(0, \frac{1}{(d_1\ldots d_p)^{1/p}}\right)$ 个元素的实随机张量。我们有
设 $W \in$ e

$$\mathbb{E}_W(\langle W, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}) = \frac{(2k-1)!!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}\left(\prod_{i=1}^p\langle u_i,u_i\rangle^k\right) = \frac{(2k-1)!!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}.$$

现假设 $T \in \bigotimes_{i=1}^p \mathbb{R}^{d_i}$ 是来自模型 $A_{\mathbb{R}}$的实随机张量。则有

$$\mathbb{E}_T(\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}) = \sum_{I_1,\ldots,I_{2k}\in\prod_{i=1}^p[d_i]}\left(\prod_{s=1}^{2k}(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_s}\right)\mathbb{E}_T\left(\prod_{s=1}^{2k}T_{I_s}\right),$$

其中，我们通过引入多重指标 $I_s = (i_1^{(s)}、\ldots\ldots、 i_p^{(s)}) \in \prod_{i=1}^p[d_i]$. 来简化记号。为了处理上述求和，我们引入集合 $[2k]$的偶分拆集 $\mathcal{P}_{\mathrm{even}}([2k])$；这里的“偶”是指 b 任意划分 $\pi \in \mathcal{P}_{\mathrm{even}}([2k])$ 的每个块的大小都必须为偶数$|b| \in 2\mathbb{N}^*$. 。利用 T 各项的独立性和对称性，我们得到

$$\sum_{I_1,\ldots,I_{2k}\in\prod_{i=1}^p[d_i]}\left(\prod_{s=1}^{2k}(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_s}\right)\mathbb{E}_T\left(\prod_{s=1}^{2k}T_{I_s}\right) =$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{even}}([2k])}\sum_{\substack{I_b:b\in\pi\\ I_b\neq I_{b'},b\neq b'}}\left(\prod_{b\in\pi}(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_b}^{|b|}\right)\prod_{b\in\pi}\mathbb{E}_T\left(T_{I_b}^{|b|}\right).$$

这里我们的 $\mathbb{R}$-刚性次高斯性假设为 $\mathbb{E}_T\left(T_{I_b}^{|b|}\right) \leqslant \mathbb{E}_W\left(W_{I_b}^{|b|}\right)$，由此可得

$$\mathbb{E}_T(\langle T, u_1 \otimes \ldots \otimes u_p\rangle^{2k}) \leqslant \sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{even}([2k])}} \sum_{\substack{I_b: b\in\pi \\ I_b\neq I_{b'}}} \left(\prod_{b\in\pi}(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_b}^{|b|}\right)\prod_{b\in\pi}\mathbb{E}_W\left(W_{I_b}^{|b|}\right)$$
$$= \mathbb{E}_W\left(\langle W, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle^{2k}\right).$$

这就证明了实数情形的结论。

复数情形：
论证的结构类似。这里记录所需的少量改动。我们重复前面的步骤，引入$Z \in \bigotimes_{i=1}^p \mathbb{C}^{d_i}$一个具有独立同分布 $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0, \frac{1}{(d_1\ldots d_p)^{1/p}}\right)$ 元素的随机张量。对于任意选取的复单位范数向量 $u_1, \ldots\ldots, \overline{u_p}$我们有

$$\mathbb{E}_Z\left(|\langle Z, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) = \frac{k!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}\left(\prod_{i=1}^p|\langle u_i,u_i\rangle|^k\right) = \frac{k!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}.$$

现在假设 T 是一个满足 模型 $A_{\mathbb{C}}$假设的随机张量。则有

$$\mathbb{E}_T\left(|\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) =$$
$$\sum_{\substack{I_1,\ldots,I_k\in\prod_{i=1}^p[d_i] \\ J_1,\ldots,J_k\in\prod_{i=1}^p[d_i]}}\left(\prod_{s=1}^k(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_s}(\bar{u}_1\otimes\ldots\otimes\bar{u}_p)_{J_s}\right)\mathbb{E}_T\left(\prod_{s=1}^k T_{I_s}\overline{T}_{J_s}\right),$$

这里使用多重指标 $I_s,\ J_s = (i_1^{(s)}, \ldots\ldots, i_p^{(s)}),\ (j_1^{(s)}, \ldots\ldots, j_p^{(s)}) \in [d_1]\times\ldots\times[d_p]$. 我们按独立分量对 $\mathbb{E}_T\left(\prod_{s=1}^k T_{I_s}T_{J_s}\right)$ 进行拆分。为此，引入集合$\mathcal{P}([k]\sqcup[\bar{k}])$：集合 $[k]\sqcup[\bar{k}]$ 的划分$= \{1, \ldots\ldots, k\}\sqcup\{\bar{1}, \ldots\ldots, \bar{k}\}$。集合 $[\bar{k}]$只是 $[k]$ 的一个副本，但其元素由不同符号表示。我们引入平衡划分的集合 $\mathcal{P}_{\mathrm{bal}}([k]\sqcup[\bar{k}]) \subset \mathcal{P}([k]\sqcup[\bar{k}])$，它由 $[k]\sqcup[k]$的划分 π组成，这些划分的块 $b\in\pi$满足 $|b\cap[k]| = |b\cap[\bar{k}]|$（因此特别有，对于某个 $q\in\mathbb{N}$, $|b| = 2q$）。现在我们可以进一步写为

$$\mathbb{E}_T\left(|\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) =$$
$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{bal}([k]\sqcup[\bar{k}])}\sum_{\substack{I_b\in\prod_{i=1}^p[d_i]^p: b\in\pi \\ I_b\neq I_{b'}, b\neq b'}}\left(\prod_{b\in\pi}|(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_b}|^{|b|}\right)\prod_{b\in\pi}\mathbb{E}_T\left(|T_{I_b}|^{|b|}\right),$$

这由各元素的独立性和圆对称性得出。作为 $\mathbb{C}$-刚性次高斯性的推论，有 $\mathbb{E}_T\left(|T_{I_b}|^{|b|}\right) \leqslant \mathbb{E}_Z\left(|Z_{I_b}|^{|b|}\right)$, 从而

$$\mathbb{E}_T\left(|\langle T, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) \leqslant$$
$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathrm{bal}}([k]\sqcup[\bar{k}])}\sum_{\substack{I_b\in\prod_{i=1}^p[d_i]^p: b\in\pi \\ I_b\neq I_{b'}, b\neq b'}}\left(\prod_{b\in\pi}|(u_1\otimes\ldots\otimes u_p)_{I_b}|^{|b|}\right)\prod_{b\in\pi}\mathbb{E}_Z\left(|Z_{I_b}|^{|b|}\right)$$
$$= \mathbb{E}_Z\left(|\langle Z, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right).$$

这就证明了复数情形的结论。 □

定理 3.1 的证明。令。 d_1，……， $d_p = d$ 固定，且 $p \to \infty$.

复数情形：由方程 (3) 和 (22)，我们得到如下估计

$$\sqrt{d}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \sqrt{d}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}^{2k}]^{\frac{1}{2k}} \leqslant \left(k!\binom{d+k-1}{k}^p\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{23}$$

对于任意正整数 k。基本思路是取 $k = \alpha p \log p$ 当作 $\alpha > 0$，然后利用斯特林公式求出渐近性，并对 α进行优化；最优取值为 $\alpha = d-1$，而低阶泰勒修正项给出速率 (18)。由于 k 必须是整数，我们实际使用$k = \lfloor \alpha p \log p \rfloor$。

更具体地说：通过斯特林公式计算可得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k!)^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{e}-1\right)\frac{k}{\log k} = \frac{1}{4}, \tag{24}$$

so 对于任意 $\varepsilon > 0$ 且 k 足够大（因此 p 也足够大），我们有

$$(k!)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \sqrt{\frac{k}{e}}\left(1+\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\frac{\log k}{k}\right).$$

取值为 $k = \lfloor \alpha p \log p \rfloor$时，我们有 $\log k \leqslant \log(\alpha p \log p)$。由于对于任意固定的 $\alpha > 0$，都有 $\lim_{p\to\infty} \frac{\log(\alpha p \log p)}{\log \log p} \cdot \alpha p = 1$，因此对于任意 $\varepsilon > 0$，当 p 足够大时，我们有 $\log k \leqslant (1+\varepsilon)\alpha p$。综合这些结果并吸收 ε 后可得，对于任意 α，$\varepsilon > 0$，当 p 足够大时，我们有

$$(k!)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha p \log p}{e}}\left(1+\frac{1/4+\varepsilon}{\alpha p}\right).$$

若 $k = \lfloor \alpha p \log p \rfloor$，且 β 是任意固定的正整数，则利用 $(k+1)^\beta \leqslant \frac{(\beta+k)!}{k!} \leqslant (k+\beta)^\beta$得到一个界

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\binom{\beta+k}{k}^{\frac{p}{2k}}}{\exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)}-1\right)\frac{\log p}{\log\log p} = \frac{\beta}{2\alpha}. \tag{25}$$

换言之，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\binom{d+k-1}{k}^{\frac{p}{2k}} \leqslant \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(1+(1+\varepsilon)\frac{\beta}{2\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right).$$

结合（23）、（24）和（25），可得对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\sqrt{\frac{d}{p\log p}}\cdot\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \exp\left(\frac{d-1}{2\alpha}+\frac{\log(\alpha)-1}{2}\right)\left(1+\frac{1/4+\varepsilon}{\alpha p}\right)\left(1+(1+\varepsilon)\frac{d-1}{2\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right).$$

对于所有充分大的 p。函数 $\alpha \mapsto \frac{d-1}{2\alpha} + \frac{\log(\alpha)-1}{2}$ 在 $\alpha = d-1$ 处取到最小值，其值为 $\log(d-1)/2$。修正项中的主导项为 $1+(1+\varepsilon)\frac{d-1}{2\alpha}\frac{\log\log p}{\log p}$，对于这一 α 的取值，我们有 $\frac{d-1}{2\alpha} = \frac{1}{2}$，由此完成证明。

实数情形：与复数情形类似，我们首先利用方程（2）和（22）得到

$$\sqrt{d}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \sqrt{d}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}^{2k}]^{\frac{1}{2k}} \leqslant \left((2k-1)!!\left(\frac{2^k\Gamma(\frac{d}{2}+k)}{(2k-1)!!\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^p\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{26}$$

对任意正整数 eger k。证明与之前基本完全相同；我们将（24）替换为

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{((2k-1)!!)^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{\frac{e}{2}}-1\right)k=\frac{\log 2}{4},$$

将（25）替换为

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{2^k\Gamma(\beta+k)}{(2k-1)!!\Gamma(\beta)}\right)^{\frac{p}{2k}}}{\exp\left(\frac{2\beta-1}{4\alpha}\right)}-1\right)\frac{\log p}{\log\log p}=\frac{2\beta-1}{4\alpha},$$

并利用这些结果得到，对每个 $\varepsilon>0$,

$$\sqrt{\frac{d}{p\log p}}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}]\leqslant\exp\left(\frac{d-1}{4\alpha}+\frac{\log(2\alpha)-1}{2}\right)\left(1+\frac{\frac{\log 2}{4}+\varepsilon}{\alpha p\log p}\right)\left(1+(1+\varepsilon)\frac{d-1}{4\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right)$$

对于所有足够大的 p。优化器为 $\alpha=(d-1)/2$。

II. $d_i\to\infty, p$ 固定情形。*R*

eal 情形：

设 T 是一个模型 $A_{\mathbb{R}}$的随机张量。按照（26）中的论证，我们得到

$$\mathbb{E}_T\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}\leqslant\left[2^{pk}\left(\prod_{i=1}^{p}\frac{\Gamma(d_i/2+k)}{(2k-1)!!\Gamma(d_i/2)}\right)\frac{(2k-1)!!}{(d_1\dots d_p)^{k/p}}\right]^{\frac{1}{2k}}$$

对所有正整数 k均成立。设 d_i 和 η_i 如定理陈述中所述。固定某个 $\alpha>0$，并令$k=\lfloor d_1/\alpha\rfloor$。于是可得

$$\lim_{k\to\infty}\left[2^{pk}\left(\prod_{i=1}^{p}\frac{\Gamma(d_i/2+k)}{(2k-1)!!\Gamma(d_i/2)}\right)\frac{(2k-1)!!}{(d_1\dots d_p)^{k/p}}\right]^{\frac{1}{2k}}=\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha;\eta_2,\dots,\eta_p),$$

因为对所有 $a>0$均成立

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{\lfloor ak\rfloor^k}\right)^{1/2k}=\sqrt{\frac{2}{ae}},\quad\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\lfloor ak\rfloor/2+k)}{(2k-1)!!\Gamma(\lfloor ak\rfloor/2)}\right)^{1/2k}=\frac{1}{2}a^{-a/4}(2+a)^{\frac{2+a}{4}}.$$

因此，对所有 $\alpha>0$，我们都有

$$\limsup_{d_1\to\infty}\mathbb{E}_T\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}\leqslant\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha;\eta_2,\dots,\eta_p),$$

并对 α 进行最小化，得到19）对 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$成立。现在我们证明当 $d_1=d_2=\ldots=d_p=d$时极小值点的唯一性。为此，我们计算导数

$$\psi_p^{\mathbb{R}\prime}(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{e2^{p+3}\alpha^3}}(\alpha^{-\alpha/4}(2+\alpha)^{\frac{2+\alpha}{4}})^p\left(p\alpha\log\left(1+2/\alpha\right)-2\right).$$

注意，$\psi_p^{\mathbb{R}\prime}(\alpha)$与 $f_p(\alpha)=p\alpha\log\left(1+2/\alpha\right)-2$的符号相同。容易证明，对所有 $\alpha>0$，$f_p'(\alpha)>0$（计算 f_p'在 0，$+\infty$处的极限值，并考察 $f_p''(\alpha)$的符号）。这表明$f_p(\alpha)$严格递增。此外，$\lim_{\alpha\to0^+}f(\alpha)=-2$ 且 $\lim_{\alpha\to\infty}f(\alpha)=2(p-1)$，因此 $f_p(\alpha)$只改变一次符号，$\psi_p^{\mathbb{R}\prime}(\alpha)$也如此。注意，$\lim_{\alpha\to0^+}\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha)=+\infty$ 且 $\lim_{\alpha\to\infty}\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha)=+\infty$，这足以保证 $\psi_p^{\mathbb{R}}$的最小值 $\alpha_0^{\mathbb{R}}(p)$ 的唯一性。

通过比较 $\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha)$ 在 $f_p(\alpha)=0$ 的解处的取值与其在一个较简单方程的解处的取值，可以得到当 p 较大时的渐近结论；该较简单方程由朗伯函数求解。令 $y:=\frac{2}{p\alpha}$；则 $f_p(\alpha)=0$ 等价于 $\log(1+py)=y$，也就是说，等价于 $\log(py)+\log(1+\frac{1}{py})=y$。令 y' 为 $\log(py')=y'$ 的最大解。由于对所有 $x>0$，$\log(1+px)>\log(px)$，，必定

有 $y \neq y'$。令 $p \geqslant 3$；则 y'满足$-y'e^{-y'} = -\frac{1}{p}$.最大解 y'可用朗伯函数的第二分支 $y' = -\mathcal{W}_{-1}(-1/p)$表示。当 $p \to \infty$ 时，其渐近展开可由 $\mathcal{W}_{-1}$的小参数展开得到，参见 [CGH+96，第 349-350]页。回顾如下：

$$\mathcal{W}_{-1}(x) = \log(-x) - \log(-\log(-x)) + \frac{\log(-\log(-x))}{\log(-x)} + O_{x\to 0^-}\left(\left(\frac{\log(-\log(-x))}{\log(-x)}\right)^2\right).$$

Thus

$$y' = \log(p) + \log\log(p) + \frac{\log\log(p)}{\log(p)} + O_{p\to\infty}\left(\left(\frac{\log\log(p)}{\log(p)}\right)^2\right).$$

令 $\alpha' = \frac{2}{py'}$ $\alpha' = \frac{2}{p\log p}(1 + o_p(1))$。由于 $\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha)$ 在 $\alpha_0^{\mathbb{R}}(p)$处取得唯一最小值，

$$\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha_0^{\mathbb{R}}(p)) \leqslant \psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha'),$$

而容易证明 $\psi_p^{\mathbb{R}}(\alpha') = \sqrt{p}\log p(1 + \overline{o_p(1)})$ 利用 $\alpha' = {}_p{}^2{}_{\log p}(1 + \underline{o_p(1)})$.

复数情形：

令 T 为一个 Model $A_{\mathbb{C}}$的随机张量。上述实数情形的证明方法经过细微修改后仍适用于此处。我们改为从定理 2.1中的公式（3）以及引理 3.3中的（22）开始。这得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_T\|T\|_{\text{inj}} &\leqslant \left(\prod_{i=1}^{p}\binom{d_i+k-1}{k}\mathbb{E}_Z\mathbb{E}_{u_i}\left(|\langle Z, u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right)\right)^{\frac{1}{2k}}\\ &\leqslant \left(\frac{k!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}\prod_{i=1}^{p}\binom{d_i+k-1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}.\end{aligned}$$

令对所有 $i = 2、\ldots、p$， $\eta_i > 0$、 $d_i = \lfloor \eta_i d_1\rfloor$和 $d_1 = \lfloor \alpha k\rfloor$，然后计算上面右端的极限，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k!}{(d_1\ldots d_p)^{k/p}}\prod_{i=1}^{p}\binom{d_i+k-1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}\\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{e}(\eta_2\ldots\eta_p)^{\frac{1}{2p}}}\left(\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^{1+\alpha}}\right)^{1/2}\left(\prod_{i=2}^{p}\frac{(1+\alpha\eta_i)^{1+\alpha\eta_i}}{(\alpha\eta_i)^{\alpha\eta_i}}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

我们对 α 取最小值即可得到结果。渐近大 p 结论由实数情形和前面的注 $\psi_p^{\mathbb{C}}(\alpha$推出； $\eta_2、\ldots、\eta_p) = \psi_p^{\mathbb{R}}(2\alpha;\ \eta_2、\ldots、\eta_p)$。□

注 3.4. 定理 *3.1*中的大矩界有一项优势：只需稍作修改，便可推广到 $\mathbb{K}^{d_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}^{d_p}$中的矩形张量。相比之下，在立方情形之外，通过 ***Kac–Rice*** 公式统计临界点的方法会变得复杂得多 $d_1 = \cdots = d_p$。一个重要障碍是，海森矩阵通常没有易于处理的显式极限分布，这似乎妨碍了对 Σ_p 中出现的广义对数复杂度进行直接计算 [DM24，引理 2。7]。

4. Application: Symmetric tensors

~本节致力于研究模型 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$ 的对称随机张量。对称随机张量的实数版本是球面自旋玻璃理论的基础 [ABAˇC13], ，而其复版本则是随机玻色子量子态的代表。本文受确定性界（4）的限制，仅讨论复数情形。在开始之前，我们先陈述

关于引入对称随机张量的模型 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$ 的可行性，先作如下说明。

注 *4.1*。这两个族 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$ 代表了构造具有独立元素（除对称性外）的随机对称张量的两种自然方式。这两个族存在非平凡交集。事实上，如果 γ （在模型 $S_{\mathbb{C}}$中引入）是一个高斯随机变量，并且如果 T （用于模型 $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$中 $\widetilde{B}$ 的定义）是一个元素独立同分布且分布为 γ的高斯随机张量，那么 $B \overset{law}{=} \widetilde{B}$。然而，这两个例子都不包含另一个。例如，如果 B 来自模型 $S_{\mathbb{C}}$，那么它的所有元素在重缩放意义下具有相同的分布；如果 B 来自模型 $S_{\mathbb{C}}$，那么例如B_1，…、*1*、*2*服从某个分布 γ的两个重缩放独立副本之和的分布，而 B_1，…，*1*服从某个 γ 的重缩放的分布。注意，两个独立的重缩放施泰因豪斯变量之和不是重缩放的施泰因豪斯变量[3]（它不再支撑在一个圆上，因为相位彼此独立）。因此，如果我们将一个施泰因豪斯随机态对称化，我们得到一个来自模型 $S_{\mathbb{C}}$ 的张量，而它无法由模型 $S_{\mathbb{C}}$得到，因为其 $(1、…、1)$和 $(1、…、1、2)$ 元素在重缩放意义下不具有相同的分布。类似地，如果我们在模型 $S_{\mathbb{C}}$的定义中取 γ 为施泰因豪斯变量，我们会得到一个来自模型 $S_{\mathbb{C}}$ 的张量，而它无法由模型 $S_{\mathbb{C}}$得到，因为如果可以，那么底层的 T 元素在缩放意义下就必须是施泰因豪斯变量（正如从 $(1、…、1)$ 元素可以看出的那样），但在这种情况下，$(1、…、1、2)$ 元素将不再是重缩放的施泰因豪斯变量。

首先引入函数

$$\varphi_p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \frac{1}{p^{p/2}\sqrt{e}} \alpha^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} (p+\alpha)^{\frac{1}{2}(p+\alpha)} \tag{27}$$

我们可以为模型 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$ 的对称随机张量证明以下定理。

定理 4.2。若 B 来自模型 $S_{\mathbb{C}}$ 或 $S_{\mathbb{C}}$，则在不同情形下，其内射范数满足以下上界：

- 若 d 固定且 $p \to \infty$，则有

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log p}} \mathbb{E}[\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}},$$

更精确地说，收敛速率如下：对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 p_0，使得对于所有 $p \geqslant p_0$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{\log p}} \mathbb{E}[\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}} \left(1 + (1+\varepsilon) \cdot \frac{2d-1}{4d-4} \cdot \frac{\log\log p}{\log p}\right).$$

- 若 p 固定且 $d \to \infty$，则有

$$\limsup_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+} \varphi_p(\alpha).$$

下确界在某个唯一的 $\alpha_0^S(p)$ 处取得，并且有 $\varphi_p(\alpha_0^S(p)) \leqslant \sqrt{\text{对数}}\ p(1+\overline{o_{p\to\infty}}(1))$.

与第 3 节一样，我们需要引理 3.3 的对应版本。

引理 4.3。设 $u \in \mathbb{C}^d$ 是一个单位范数向量。设 $B \in$对称群$_p(\mathbb{C}^d)$ 是一个 *Model* $S_{\mathbb{C}}$ 的随机对称张量。则，

$$\mathbb{E}_B \left(|\langle B, u^{\otimes p}\rangle|^{2k} \right) \leqslant \frac{k!}{d^k}. \tag{28}$$

类似地，若 $\widetilde{B} \in$对称群$_p(\mathbb{C}^d)$ 是一个 *Model* $\widetilde{S}_{\mathbb{C}}$ 的随机张量，则

$$\mathbb{E}_{\widetilde{B}} \left(|\langle \widetilde{B}, u^{\otimes p}\rangle|^{2k} \right) \leqslant \frac{k!}{d^k}. \tag{29}$$

[3]更一般地，　如果将“Steinhaus变量”替换为任意非稳定随机变量，这一结论就成立　le.

证明。 不等式（28）的证明采用了与引理 3.3证明中所述方法类似的思路。因此，我们在此仅回顾核心思路。设 G ∈对称群$_p(\mathbb{C}^d)$ 为一个复高斯对称张量，其各项在对称性之外相互独立，且方差与模型 $S_{\mathbb{C}}$ 中的随机张量相同。

可得

$$\mathbb{E}_G\left(|\langle G, u^{\otimes p}\rangle|^{2k}\right) = \frac{k!}{d^k}.$$

为证明当 G 被替换为 B 时的上界，我们采用与引理3.3的证明中相同的策略，即将厄米内积展开为关于 B各分量的求和，将B 对 B 各分量乘积的平均按独立分量进行分解，并用相应的以 G 分量替换 B分量后的平均来给出这些因子的上界，再将求和重新组合，从而得到 $\mathbb{E}_B\left(|\langle B,\ u^{\otimes p}\rangle|^{2k}\right) \leqslant \mathbb{E}_G\left(|\langle G,\ u^{\otimes p}\rangle|^{2k}\right)$.

不等式（29）的证明是引理3.3的推论。只需注意到，对所有单位范数复向量 $u \in \mathbb{C}^d$，有

$$\langle \widetilde{B}, u^{\otimes p}\rangle = \langle P^{(d)}_{\mathrm{sym},p}(T), u^{\otimes p}\rangle = \langle T, P^{(d)}_{\mathrm{sym},p}(u^{\otimes p})\rangle = \langle T, u^{\otimes p}\rangle,$$

其中我们利用了 $P^{(d)}_{\mathrm{sym}}$的厄米性，p 以及 $u^{\otimes p} \in$ 对称群$_p(\mathbb{C}^d)$. 。由于 T 来自模型 $A_{\mathbb{C}}$，由引理3.3 对 $u_1 = \ldots = u_p = u$ 与 $d_1 = \ldots = d_p = d$可得，

$$\mathbb{E}_{\widetilde{B}}\left(|\langle \widetilde{B}, u^{\otimes p}\rangle|^{2k}\right) = \mathbb{E}_T\left(|\langle T, u^{\otimes p}\rangle|^{2k}\right) \leqslant \frac{k!}{d^k}.$$

□

定理 *4.2* 的证明。 该定理的证明与定理 3.1 的证明非常相似。

令. d 固定且 $p \to \infty$.

由方程 (4) 和 (28) 或 (29)，可得

$$\sqrt{d}\mathbb{E}[\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \sqrt{d}\mathbb{E}[\|B\|^{2k}_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}]^{\frac{1}{2k}} \leqslant \left(k!\binom{d+pk-1}{pk}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

对任意正整数 k。现在取 $k = \lfloor \alpha \log p \rfloor$ 当 $\alpha > 0$ 时的值，待定。仿照 (24) 中的推导，我们发现，对任意 $\varepsilon > 0$ 以及足够大的 k (等价地，足够大的 p)，都有

$$(k!)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \sqrt{\alpha \log p}e\left(1 + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\frac{\log k}{k}\right).$$

若 $k = \lfloor \alpha \log p \rfloor$，则 $\frac{\log k}{\log \log p} \leqslant \frac{\log(\alpha p)\log\log p - 1}{\log\log p}$，并且由于 $\lim_{p\to\infty} \frac{\log(\alpha p)\log\log p - 1}{\log\log p} \cdot \frac{\alpha}{\log p} = 1$，我们发现，对任意 α，$\varepsilon > 0$ 以及足够大的 p，都有

$$(k!)^{\frac{1}{2k}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha \log p}{e}}\left(1 + (1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{4\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right).$$

（这是与之前的主要区别；现在修正项的阶为 $\log\log p \log p$ 而非 $\frac{1}{p}$，因此它会对定理陈述中的修正项有所贡献。）我们将（25）替换为

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\binom{\beta+pk}{pk}^{\frac{1}{2k}}}{\exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)} - 1\right)\frac{\log p}{\log\log p} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

对于 $k=\lfloor \alpha \log p \rfloor$，并利用这些结果得到：对于每个 $\varepsilon>0$，

$$\sqrt{\frac{d}{\log p}}\mathbb{E}[\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \exp\left(\frac{d-1}{2\alpha}+\frac{\log(\alpha)-1}{2}\right) \times \left(1+(1+\varepsilon)\cdot\frac{1}{4\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right)\left(1+(1+\varepsilon)\frac{d-1}{2\alpha}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}\right).$$

分式 $\alpha \mapsto \frac{d-1}{2\alpha}+\log\frac{(\alpha)-1}{2}$ 在 $\alpha=d-1$ 处取得最小值，此时其值为 $\log(d-1)/2$。修正项中的主导项实际上是交叉项，其形式为

$$(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{4\alpha}+\frac{2(d-1)}{4\alpha}\right)\frac{\log\log p}{\log p}=(1+\varepsilon)\frac{2d-1}{4d-4}\cdot\frac{\log\log p}{\log p}.$$

II. p 固定且 $d\to\infty$.

再次，由定理2.1，式 (4) 和引理 4.3，式 (28) 和 (29)，可得

$$\mathbb{E}_B\|B\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}} \leqslant \left(\binom{d+pk-1}{pk}\frac{k!}{d^k}\right)^{1/2k}$$

并令 $d=\lfloor \alpha k \rfloor$ 后，容易验证

$$\lim_{k\to\infty}\left(\binom{\lfloor \alpha k\rfloor+pk-1}{pk}\frac{k!}{\lfloor \alpha k\rfloor^k}\right)^{1/2k}=\varphi_p(\alpha), \tag{30}$$

对 α 最小化后即可得到第一个结论。现在我们来考察 $p\to\infty$ 时的渐近行为。为此，我们采用与定理 3.1 的证明相同的方法。对 $\varphi_p(\alpha)$ 求导可知，导数当且仅当函数 $h_p(\alpha):=\alpha\log\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)-1$ 为零时才会消失。可以证明，h_p 在正半轴上恰有一个正零点。该零点是 φ_p 的唯一最小值。我们用类似的技巧给出 φ_p 的上界。令 $y=p/\alpha$，使得 $h_p(\alpha)=0\Leftrightarrow p(\log y+\log(1+1/y))=y$。我们改为考虑关于辅助变量 y' 的方程 $p\log y'=y'$。利用朗伯函数，该方程的解为 $y'=-p\mathcal{W}_{-1}(-1/p)$。因此，我们得到 $\alpha'=p/y'=\frac{1}{\log p}\left(1-\frac{\log\log p}{\log p}+o\left(\frac{\log\log p}{\log p}\right)\right)\log$，这足以证明最后一个结论。□

注 4.4。我们指出，结合 *Friedland* 和 *Kemp* 的先前结果 [FK18]，，我们的结果表明，刚性次高斯玻色态几乎达到了可能的最大纠缠程度。事实上，固定 $d\geqslant 2$ 并令 $p\to\infty$。令 B 来自 模型 $S_{\mathbb{C}}$，并定义

$$|\psi_B\rangle := \frac{B}{\|B\|_{\mathrm{HS}}}.$$

推论 *D.3*表明 上极限$_{p\to\infty}\mathbb{E}[\||\psi_B\rangle\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}]\leqslant\sqrt{\frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}$；另一方面，[FK18] 的定理 ***1.1*** 表明，对于每个确定的 d和 p，都有$\||\psi_B\rangle\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}\geqslant\left(\binom{d+p-1}{p}\right)^{-1/2}$。由于 $p\to\infty$，其尺度为 $\sqrt{\frac{(d-1)!}{p^{d-1}}}(1+o_{p\to\infty}(1))$。因此，我们的结果表明，$\||\psi_B\rangle\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}$ 距离可能的最小值仅差一个 $\sqrt{(d-1)}$(对数 p) 因子，因此（由于纠缠度是内射范数负对数的两倍）确实接近最大纠缠。

注 4.5。在物理学文献中，广为流传的一种说法是：当对称张量与其非对称对应物的弗罗贝尼乌斯范数都归一化为 *1* 时，对称张量的纠缠程度较低（也就是说，它们的内射范数较大）。（关于这一直觉的评论，参见例如 [FK18、NM20]以及 [FLN25；图 7] 中的数值计算与这一观察结果相符，适用于 $p=3$ 情形。）在本注中，我们将说明如何用我们的结果将这一启发式观点形式化。

确实，设 T 是模型 $A_{\mathbb{C}}$中的一个张量，其底层分布为 $\mathbb{C}$-刚性次高斯分布 γ，并设 B 和 B 分别是模型 $S_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$中的张量，它们具有相同的底层 γ。令 $|\psi_T\rangle = T/\|T\|_{\mathrm{HS}}$，$|\psi_B\rangle = B/\|B\|_{\mathrm{HS}}$，以及 $|\psi_{\tilde{B}}\rangle = B/\|B\|_{\mathrm{HS}}$。具体起见，取 d固定且 $p \to \infty$的情形。我们声称，对于每个 $\varepsilon > 0$，只要 p 足够大，就有

$$\mathbb{E}[\| |\psi_T\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{(d-1)p\log p}{d^p}} \ll \frac{1}{\sqrt{\binom{d+p-1}{p}}} \leqslant \min(\| |\psi_B\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}, \| |\psi_{\tilde{B}}\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}). \tag{31}$$

在(31)中，第三个不等式确定性地成立，并如上所述由 [FK18]推出；第二个不等式 $\ll$ 只是对 $\leqslant$的强调性表述，强调左侧以指数速度随 p衰减，而右侧仅以多项式速度随 p衰减；第一个不等式则是我们现在要证明的。若 G 是事件 $\|T\|_{\mathrm{HS}} \leqslant (1-\delta)d^{(p-1)/2},$，那么由于$\| |\psi_T\rangle \|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}} = \|T\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}/\|T\|_{\mathrm{HS}}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\| |\psi_T\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] &\leqslant \frac{1}{(1-\delta)d^{(p-1)/2}}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] + \mathbb{E}[\| |\psi_T\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}\mathbb{1}_G] \\ &\leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\sqrt{\frac{(d-1)p\log p}{d^p}} + \mathbb{P}(G).\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了定理*3.1*以及确定性不等式$\| |\psi_T\rangle \|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}} \leqslant 1$。由于 $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}\Big(\frac{d\|T\|_{\mathrm{HS}}^2}{d^p} \leqslant (1-\delta)^2\Big)$，且 $d\|T\|_{\mathrm{HS}}^2$是 d^p个均值为一且具有有限指数矩的独立随机变量之和，*Chernoff* 界表明，对每个 $\delta > 0$，都存在 $I(\delta)$ 使得 $\mathbb{P}(G) \leqslant$指数$(-d^p I(\delta))$。由于这一项趋于零的速度远快于第一项，我们可以通过重新定义 ε 和 δ将其吸收。

在高斯情形下，（31）中的第一个不等式也可由我们先前的工作 [DM24]，推出；据我们所知，非高斯情形则是新的。

5. Application: Bounded-rank tensors

本节中，我们考虑模型 $B_{\mathbb{C}}$中的随机张量。

注 5.1。这类随机张量可用于模拟具有有限多体施密特秩纠缠的随机量子态 [EB01，Sev06]。这些量子态的多体施密特秩有界，意味着其关于任意二分划分的双体施密特秩也有上界 R （例如参见[Lan11]，其结论可由张量展平矩阵的秩推出）。因此，这些量子态具有局域键维数为 $D_i \leqslant R$ 的矩阵乘积态表示，对所有 $1 \leqslant i \leqslant p$ 均成立（这是 [Sch11第 4.1 节所述算法的推论。3]）。它们更容易通过算法（也可能在量子计算机上通过实验）制备，因为可以用低深度量子电路实现 [MSWC24]。值得注意的是，这些量子态被用于计算量子化学的近似方法 [BJWM00第 2 节，4] 以扩展基于乘积态的较简单近似方案。

根据上面的注，从量子信息的角度来看，考虑有界秩随机复张量是很自然的，因为它们在若干问题中构成了一类相关的对象。不过，也可以设想存在一些问题，其中类似的有界秩实随机张量模型同样适用。我们预计，将本节内容推广到这种实模型并不存在障碍。不过，为求简洁，我们在此仅讨论复版本。

关于张量实现的秩模型 $B_{\mathbb{C}}$，我们首先注意到，当 R 小于 d时，具有如下性质

命题 5.2。设 $p > 2$、$R < d$，且随机向量 $x_k^{(i)}$ 的分量服从相对于勒贝格测度绝对连续的分布。则 $T = R$ 的秩几乎处处成立。

我们在附录 B中证明这一结果。文中回顾了相关定义，包括张量秩的概念。下面给出我们关于该模型的主要结果。

定理 5.3. 设 T 服从秩为 模型 $B_{\mathbb{C}}$ 的有界秩随机张量分布R。那么，对所有固定的 d， $k \in \mathbb{N}^*$，

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \frac{1}{d^{p/2}} \left((k!)^2 \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^R, \sum_s \mathbf{a}_s = k} \prod_{s=1}^{R} (\mathbf{a}_s!)^{p-2} \right)^{\frac{1}{2k}}. \tag{32}$$

此外，

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj},\mathbb{C}}] = 1. \tag{33}$$

注 5.4. 在简单情形 $R = 1$ 下， $T = x_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_p^{(1)}$是一个秩为1的随机张量。那么，对于 T 的每个实现，其内射范数为

$$\|T\|_{\text{inj}} = \prod_{k=1}^{p} \left\langle x_k^{(1)}, \frac{x_k^{(1)}}{\|x_k^{(1)}\|_2} \right\rangle = \prod_{k=1}^{p} \|x_k^{(1)}\|,$$

也就是说，它是 p 个相互独立的复高斯向量的范数之积。证明 $\lim_{d\to\infty} \mathbb{E}_T \|T\|_{\text{inj}} = 1$. 是一道简单的习题

注 5.5. 人们很容易将定理 *5.3*中的界与定理 (19)中对$\eta_i = 1$ 的界进行比较，该界见定理 *3.1*。然而，这样做需要将张量各元素的方差统一起来。对元素进行重缩放，使两种情形下的方差都等于 1 ，这表明在高斯情形下，内射范数的尺度为 $\sqrt{d p \log p}$，而在有界秩情形下，尺度为 $\sqrt{d^p/R}$.

注 5.6。 文献中此前曾多次出现过此类模型。大多数已有结果针对的是我们模型的实对称类比模型，即 $\sum_{j=1}^{R} (x^{(j)})^{\otimes p}$，其中 $\{x^{(j)}\}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的一组随机向量。这些模型有多种名称，例如“*Wishart* 张量”[4] ——之所以如此称呼，是因为在矩阵情形 $p = 2$ 下，它 [归结为经典的 Wishart 28]随机矩阵 $W = GG^T$，其中 G 是以这些随机向量为列 $x^{(j)}$ 的矩阵——以及“简单张量”。涉及此类模型的论文包括 [DT24、Zhi24、AV26、ACS25、CS25]。

其中，与 模型 $B_{\mathbb{C}}$ 最接近的是 [CS25]。其定理 *2.1* 的一个特殊情形给出了以下结果：设 $R \in \mathbb{N}$，并设 $x_1^{(i)}$、……、$x_p^{(i)}$对于每个 $1 \leqslant i \leqslant R$，是一个由 p 个独立向量组成的族，其条目为独立同分布的中心化次高斯条目，方差设为 $1/d$, ，且对不同的i彼此独立。考虑随机张量 $T = \sum_{i=1}^{R} x_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_p^{(i)}$。则存在一个序列 (C_p) 使得

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj},\mathbb{R}}] \leqslant C_p \frac{R}{d^{p/2}} \left[\left(\frac{dp}{R} \right)^{1/2} + \frac{1}{R} (d + \log(R))^{p/2} \right],$$

如果这些条目实际上服从高斯分布，那么相应的下界为 C_p ，其中 (c_p)被另一个序列所替代。如果 p 和 R 是固定的，并且 $d \to \infty$，那么这些下界的渐近行为分别类似于 C_p和 c_p。尽管这些结果处理的是不同的模型，因而无法直接比较，但定理 *5.3* 表明，在我们的对应结果中，可以渐近地取 $c_p = C_p = 1$ 。不过， [CS25，定理 2。1] 处理了更一般的情形：其中的 $x_1^{(i)}$ 变量取值于某个希尔伯特空间，并具有不一定是恒等算子的协方差算子，同时允许条目服从次高斯分布，但不一定是刚性次高斯的。

[4] [Bon24] 将 Wishart 张量这一名称用于另一类随机张量，而这一名称目前尚未有标准用法。我们的模型情况也略有不同，因为缺乏对称性，因此 $p = 2$ 这一情形无法成为 Wishart随机矩阵情形。

证明依赖于以下段落中详细陈述的引理。首先介绍一些记号。对于所有 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots\ldots, i_k) \in [R]^k$ 多重指标，我们将 $q(\mathbf{i}) = (q_1(\mathbf{i}), \ldots\ldots, q_R(\mathbf{i}))$ 记为 $\mathbf{i}$ 的重数向量，其条目为 $q_j(\mathbf{i}) = \#\{i_s\colon i_s = j\}$。对于所有 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots\ldots, i_k) \in [R]^k$，我们将 $\{\mathbf{i}\}$ 或 $\{i_1, \ldots\ldots, i_k\}$ 记为相应的多重集。为避免引入过多记号，我们也将相关的重数向量记为 $q(\mathbf{i})$。

引理 5.7. 设 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k), \mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in [R]^k$ 为多重指标。设族 $\{x_c^{(i)}\}_{i\in[R], c\in[p]}$ 为模型 模型 $B_{\mathbb{C}}$ 中的随机向量。对于所有 $u_c \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{d-1}$ 单位范数复向量，

$$\langle u_c^{\otimes k} | \mathbb{E}_{\{x_c^{(i)}\}} \left(|x_c^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes x_c^{(i_k)}\rangle\langle x_c^{(j_1)} \otimes \ldots \otimes x_c^{(j_k)}| \right) | u_c^{\otimes k} \rangle \leqslant \delta_{\{i_1,\ldots,i_k\},\{j_1,\ldots,j_k\}} \prod_{s=1}^{R} q_s(\mathbf{i})!. \tag{34}$$

证明。 首先考虑一族高斯向量 $\{y_c^{(i)}\}$，其条目独立同分布、圆对称，方差为 $1/d$。那么，证明

$$\langle u_c^{\otimes k} | \mathbb{E}_{\{y_c^{(i)}\}} \left(|y_c^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes y_c^{(i_k)}\rangle\langle y_c^{(j_1)} \otimes \ldots \otimes y_c^{(j_k)}| \right) | u_c^{\otimes k} \rangle = \delta_{\{i_1,\ldots,i_k\},\{j_1,\ldots,j_k\}} \prod_{s=1}^{R} q_s(\mathbf{i})!$$

是一个计算 过程。需要考虑的关键点是，对于 $i \neq j$， $y_c^{(i)}, y_c^{(j)}$相互独立，因此 t

a. 多重指标 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 作为多重集来看时必须相同 $\{\mathbf{i}\} = \{\mathbf{j}\}$ ，期望才不为零。b. 期望按具有相同值的指标组 i_s 分解。

其余部分可由复高斯向量的性质以及以下事实推出：$\langle u_c, u_c\rangle = 1$。

我们还需证明

$$\langle u_c^{\otimes k} | \mathbb{E}_{\{x_c^{(i)}\}} \left(|x_c^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes x_c^{(i_k)}\rangle\langle x_c^{(j_1)} \otimes \ldots \otimes x_c^{(j_k)}| \right) | u_c^{\otimes k} \rangle \leqslant \langle u_c^{\otimes k} | \mathbb{E}_{\{y_c^{(i)}\}} \left(|y_c^{(i_1)} \otimes \ldots \otimes y_c^{(i_k)}\rangle\langle y_c^{(j_1)} \otimes \ldots \otimes y_c^{(j_k)}| \right) | u_c^{\otimes k} \rangle.$$

这与引理3.3的证明方法相同。我们比较刚性次高斯与高斯情形。特别地，由于上文的b. 点，只需证明：对于所有 $q \in \mathbb{N}$， u为均匀单位球面向量， x 为具有圆对称 $\mathbb{C}$-刚性次高斯独立同分布元素、方差为 $1/d$, ，且 y 为具有独立同分布圆对称元素、方差为$1/d$,的高斯向量时，均有

$$\langle u^{\otimes q} | \mathbb{E}_x \left(|x^{\otimes q}\rangle\langle x^{\otimes q}| \right) | u^{\otimes q} \rangle \leqslant \langle u^{\otimes q} | \mathbb{E}_y \left(|y^{\otimes q}\rangle\langle y^{\otimes q}| \right) | u^{\otimes q} \rangle.$$

展开左边后，得到

$$\langle u^{\otimes q} | \mathbb{E}_x \left(|x^{\otimes q}\rangle\langle x^{\otimes q}| \right) | u^{\otimes q} \rangle = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in [d] \\ j_1,\ldots,j_p \in [d]}} (u^{\otimes q})_{i_1,\ldots,i_p} (\bar{u}^{\otimes q})_{j_1,\ldots,j_p} \mathbb{E}_x \left(\prod_{\eta=1}^{q} x_{i_\eta} \bar{x}_{j_\eta} \right).$$

我们可以将 $\mathbb{E}_x$ 的期望按独立分量分解，方法是将它们分组。形式上，我们写作

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in [d] \\ j_1,\ldots,j_p \in [d]}} (u^{\otimes q})_{i_1,\ldots,i_p} (\bar{u}^{\otimes q})_{j_1,\ldots,j_p} \mathbb{E}_x \left(\prod_{\eta=1}^{q} x_{i_\eta} \bar{x}_{j_\eta} \right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{bal}([q] \sqcup [\bar{q}])} \sum_{\substack{i_b \in [d] : b \in \pi \\ i_b \neq i_{b'}, \forall b \neq b'}} \prod_{b \in \pi} |u_{i_b}|^{|b|} \prod_{b \in \pi} \mathbb{E}_x \left(|x_{i_b}|^{|b|} \right), \end{aligned}$$

利用刚性次高斯性质 $\mathbb{E}_x\left(|x_{i_b}|^{|b|}\right) \leqslant \mathbb{E}_y\left(|y_{i_b}|^{|b|}\right)$，并将上文右侧的求和重新整理，同时用 $\mathbb{E}_y\left(|y_{i_b}|^{|b|}\right)$ 替换 $\mathbb{E}_x\left(|x_{i_b}|^{|b|}\right)$，我们得到

$$\langle u^{\otimes q}|\mathbb{E}_x\left(|x^{\otimes q}\rangle\langle x^{\otimes q}|\right)|u^{\otimes q}\rangle \leqslant \langle u^{\otimes q}|\mathbb{E}_y\left(|y^{\otimes q}\rangle\langle y^{\otimes q}|\right)|u^{\otimes q}\rangle,$$

正如所述，这足以证明该引理。 □

引理 5.8。 设 $p>2$ 和 $k \geqslant R+1$ 为整数。则有

$$\left(\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^R, \sum_s \mathbf{a}_s = k} \prod_{s=1}^{R} (\mathbf{a}_s!)^{p-2}\right)^{\frac{1}{2k}} \leqslant e^{\frac{1}{2}(p-2)(\log k - 1)} \mathfrak{P}(k) \tag{35}$$

其中 极限$_{k\to\infty}\mathfrak{P}(k) = 1$.

证明。首先按非零$\mathbf{a}_s$ 值的个数对求和进行拆分，得到

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^R, \sum_s \mathbf{a}_s = k} \prod_{s=1}^{R} (\mathbf{a}_s!)^{p-2} = \sum_{m=1}^{R} \binom{R}{m} C_{m,k}^{(p)}, \quad C_{m,k}^{(p)} := \sum_{\mathbf{a}\in(\mathbb{N}^*)^m, \sum_s \mathbf{a}_s = k} \prod_{s=1}^{m} (\mathbf{a}_s!)^{p-2}.$$

利用 [Gro18，公式 (76) 和公式 (112)]

$$\Gamma(z) < \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z e^{\frac{1}{12z}},$$

从而

$$C_{m,k}^{(p)} \leqslant \sum_{\mathbf{a}\in(\mathbb{N}^*)^m, \sum_s \mathbf{a}_s = k} \prod_{s=1}^{m} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi(\mathbf{a}_s+1)}}\right)^{p-2} e^{(p-2)[(\mathbf{a}_s+1)\log(\mathbf{a}_s+1) - \mathbf{a}_s - 1] + \frac{(p-2)}{12(\mathbf{a}_s+1)}}\right].$$

对于 $m \in \{1,\ldots,R\}$ 的每个取值，将变量替换为 $\mathbf{a} = kx$, 其中 $x \in \Delta^{\text{int}}{}_{,m}{}^{k} \subset \Delta_m$ 是一个概率向量，位于标准单纯形 Δ_m的子集 $\Delta^{\text{int}}{}_{,m}{}^{k}$ 中，定义为

$$\Delta_m^{\text{int},k} := \{x \in \Delta_m : \forall s \in [m], \exists i_s \in \mathbb{N}^*, x_s = i_s/k\}.$$

因此，

$$\begin{aligned} C_{m,k}^{(p)} &\leqslant \sum_{x\in\Delta_m^{\text{int},k}} \prod_{s=1}^{m} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi(kx_s+1)}}\right)^{p-2} e^{(p-2)[(kx_s+1)\log(kx_s+1) - kx_s - 1] + \frac{(p-2)}{12(kx_s+1)}}\right] \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}(p-2)} \sum_{x\in\Delta_m^{\text{int},k}} e^{(p-2)k(\log(k)-1)} e^{(p-2)\frac{m}{2}\log(k)} e^{(p-2)\sum_{s=1}^{m}\left[\left(kx_s+\frac{1}{2}\right)\log(x_s+\frac{1}{k}) - 1 + \frac{1}{12(kx_s+1)}\right]}. \end{aligned}$$

注意到，

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{m}\left[(kx_s+1/2)\log\left(x_s+\frac{1}{k}\right) - 1 + \frac{1}{12(kx_s+1)}\right] \\ &\leqslant k\sum_{s=1}^{m}\left(x_s+\frac{1}{2k}\right)\log\left(x_s+\frac{1}{k}\right) \leqslant 2k\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

该结论成立，因为 $m \leqslant R \leqslant k$。因此，通过对 $\Delta^{\text{int}}{}_{,m}{}^{k}$中概率向量的简单计数，

$$C_{m,k}^{(p)} \leqslant (2\pi)^{-\frac{m}{2}(p-2)} e^{(p-2)k[\log(k) - 1 + 2\log(1+1/k)]} e^{\frac{m}{2}(p-2)\log(k)} \binom{k-1}{m-1}.$$

我们得到

$$\sum_{m=1}^{R}\binom{R}{m}C_{m,k}^{(p)} \leqslant \sum_{m=1}^{R}(2\pi)^{-\frac{m}{2}(p-2)}e^{(p-2)k[\log(k)-1+2\log(1+1/k)]}e^{\frac{m}{2}(p-2)\log(k)}\binom{R}{m}\binom{k-1}{m-1}$$
$$\leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{2}(p-2)}e^{(p-2)k[\log(k)-1+2\log(1+1/k)]}e^{\frac{R}{2}(p-2)\log(k)}R!\frac{(k-1)^{R+1}-(k-1)}{k-2}$$

其中我们粗略地给出上界：

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}(p-2)} \leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{2}(p-2)},\ e^{\frac{m}{2}(p-2)\log(k)} \leqslant e^{\frac{R}{2}(p-2)\log(k)},\ \binom{R}{m} \leqslant R!,\ \binom{k-1}{m-1} \leqslant (k-1)^m.$$

因此，定义

$$\mathfrak{P}(k) := \left(R!(2\pi)^{-\frac{1}{2}(p-2)}e^{2(p-2)k\log(1+1/k)}e^{\frac{R}{2}(p-2)\log(k)}\frac{(k-1)^{R+1}-(k-1)}{k-2}\right)^{1/2k},$$

有

$$\left(\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^R,\sum_s \mathbf{a}_s=k}\prod_{s=1}^{R}(\mathbf{a}_s!)^{p-2}\right)^{1/2k} \leqslant e^{\frac{1}{2}(p-2)(\log(k)-1)}\mathfrak{P}(k).$$

这是一个简单的练习，可以验证 $\lim_{k\to\infty}\mathfrak{P}(k)=1$，从而证明该结论。 □

现在我们可以开始证明定理 5.3。

定理 *5.3* 的证明。我们使用定理 2.1 中关于内射范数的上界，即公式（3），并对其在 T 上取平均，其中 T 是一个有界秩模型 $B_{\mathbb{C}}$中的随机张量。因此，我们需要计算

$$\mathbb{E}_T\mathbb{E}_{u_i}\left(|\langle T,u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) =$$
$$\sum_{\substack{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)\in[R]^k\\ \mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_k)\in[R]^k}}\prod_{c=1}^{p}\mathbb{E}_{u_c}\mathbb{E}_T(\langle u_c^{\otimes k},x_c^{(i_1)}\otimes\ldots\otimes x_c^{(i_k)}\rangle\langle x_c^{(j_1)}\otimes\ldots\otimes x_c^{(j_k)},u_c^{\otimes k}\rangle)$$

我们利用引理5.7 将其归结为

$$\mathbb{E}_T\mathbb{E}_{u_i}\left(|\langle T,u_1\otimes\ldots\otimes u_p\rangle|^{2k}\right) \leqslant \frac{1}{d^{pk}}\sum_{\substack{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)\in[R]^k\\ \mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_k)\in[R]^k}}\delta_{\{i_1,\ldots,i_k\},\{j_1,\ldots,j_k\}}\prod_{s=1}^{R}(q_s(\mathbf{i})!)^p$$
$$= \frac{1}{d^{pk}}\sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)\in[R]^k}\frac{k!}{\prod_{s=1}^{R}q_s(\mathbf{i})!}\prod_{s=1}^{R}(q_s(\mathbf{i})!)^p = \frac{(k!)^2}{d^{pk}}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^R,\sum_s \mathbf{a}_s=k}\prod_{s=1}^{R}(\mathbf{a}_s!)^{p-2}.$$

取 $(2k)^{\text{th}}$ 根并应用詹森不等式，即可证明第一个结论。此外，根据定理 2.1和引理 5.8，对所有 $k \geqslant R+1$,

$$\mathbb{E}_T\|T\|_{\text{inj},\mathbb{C}} \leqslant \left[(k!^2)\binom{d+k-1}{k}^p\right]^{\frac{1}{2k}}\frac{1}{d^{p/2}}e^{\frac{1}{2}(p-2)(\log k-1)}\mathfrak{P}(k).$$

现在令 $d=\lfloor\alpha k\rfloor$ 为 $\alpha>0$，并计算左侧在 $k\to\infty$. 时的极限。对 α最小化该结果，得到

$$\lim_{d\to\infty}\mathbb{E}_T\|T\|_{\text{inj}} \leqslant \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+}\frac{1}{e^{p/2}}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}(1+\alpha)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)}\right)^p. \tag{36}$$

容易证明，对 α 取下确界为 1，并在 $\alpha \to +\infty$时达到，从而完成上界的证明。

为了得到匹配下界，我们首先注意到，对于任意 $T = \sum_{i=1}^{R} x_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes x_p^{(i)}$，通过将内射范数与$T$中第一项的归一化版本作内积，可以得到其下界：

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \geqslant \mathbb{E}\left[\left|\left\langle T, \frac{x_1^{(1)}}{\|x_1^{(1)}\|_2} \otimes \ldots \otimes \frac{x_p^{(1)}}{\|x_p^{(1)}\|_2} \right\rangle\right|\right] \geqslant \left|\mathbb{E}\left[\left\langle T, \frac{x_1^{(1)}}{\|x_1^{(1)}\|_2} \otimes \ldots \otimes \frac{x_p^{(1)}}{\|x_p^{(1)}\|_2} \right\rangle\right]\right|.$$

由于我们假设刚性次高斯随机变量具有对称分布，因此随机变量 $\langle x_k^{(i)}, x_k^{(1)}\rangle / \|x_k^{(1)}\|_2$ 对 $i > 1$ 的均值为零，且对不同的 k 值相互独立；于是

$$\mathbb{E}\left[\left\langle T, \frac{x_1^{(1)}}{\|x_1^{(1)}\|_2} \otimes \ldots \otimes \frac{x_p^{(1)}}{\|x_p^{(1)}\|_2} \right\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{p} \|x_k^{(1)}\|_2 + \sum_{i=2}^{R} \prod_{k=1}^{p} \left\langle x_k^{(i)}, \frac{x_k^{(1)}}{\|x_k^{(1)}\|_2} \right\rangle\right] = \mathbb{E}[\|x_1^{(1)}\|_2]^p.$$

若 x 是一个长度为 d的随机向量，其元素为均值为零、方差为 $1/d$，的独立同分布复数项，则对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\mathbb{E}[\|x\|_2] \geqslant \mathbb{E}[\|x\|_2 \mathbb{1}_{\|x\|_2^2 \geqslant (1-\varepsilon)^2}] \geqslant (1-\varepsilon)\mathbb{P}(\|x\|_2^2 \geqslant (1-\varepsilon)^2).$$

由弱大数定律可知，后一个概率在$d \to +\infty$时趋于一；取 $\varepsilon \to 0$，得到 $\liminf_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|x\|_2] \geqslant 1$。因此 $\liminf_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}] \geqslant 1$，证明完毕。 □

Appendix附录 A. Numerics

在本附录中，我们展示若干图，用以说明大局部维数 d下随机张量期望内射范数的数值实验结果。所有数值计算均在一台配备 24gb 内存的 Mac mini M4 Pro 上运行，耗时数小时。在图1 中，我们展示具有独立同分布 Steinhaus 项的满张量情形，以说明来自模型 $A_{\mathbb{K}}$的一个例子。

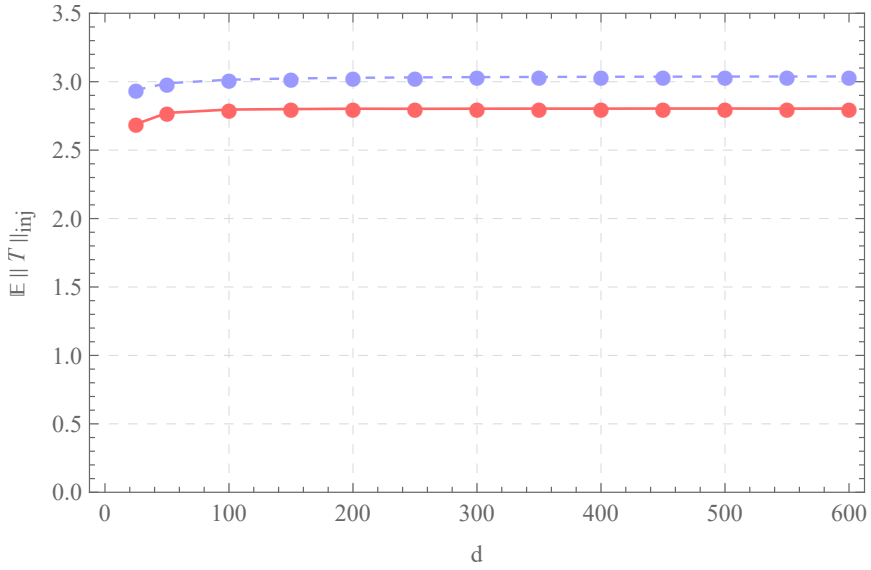

FIGURE 1. 上图叠加展示了：红色实线表示对不同维数下的 Steinhaus 随机张量，通过梯度上升计算内射范数（下界）的结果（每个局部维数取值下 64 次实现的平均结果 d）；蓝色虚线表示相应的最优非渐近上界（见附录C和命题C.1）。

在图2 中，我们绘制了在秩 $R = 3$ 下、对于模型 $B_{\mathbb{C}}$ 与高斯 $x_c^{(i)}$，由梯度上升算法得到的数值计算，以及在 k 上有限 d、k 界（方程（32））的数值最小值。此外，我们还展示了极限 $d \to \infty$ 界（33），其由定理5.3得到。

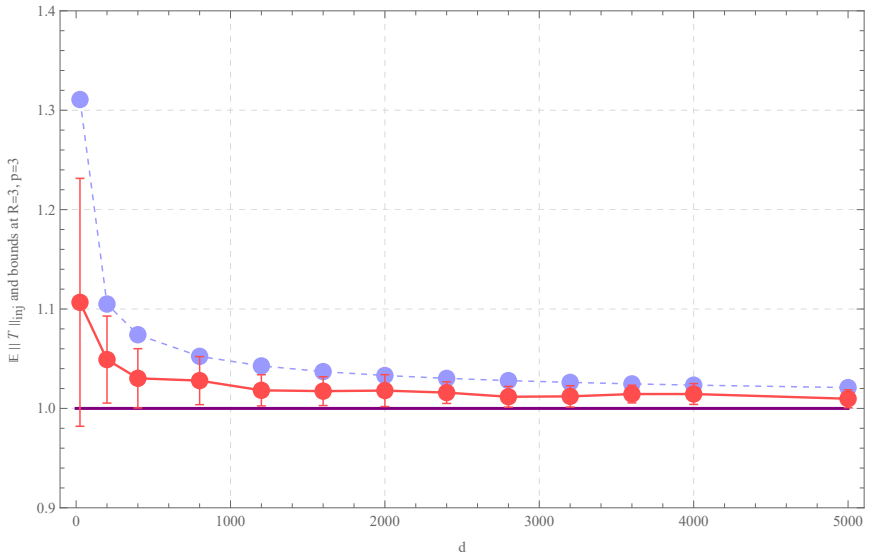

FIGURE 2. 上图针对 d的每个取值展示了：浅蓝色虚线表示有限的非渐近上界取值；浅红色实线表示 40 次实现和 35 次重新启动的数值结果。图中还以紫色曲线表示（33）的极限期望。

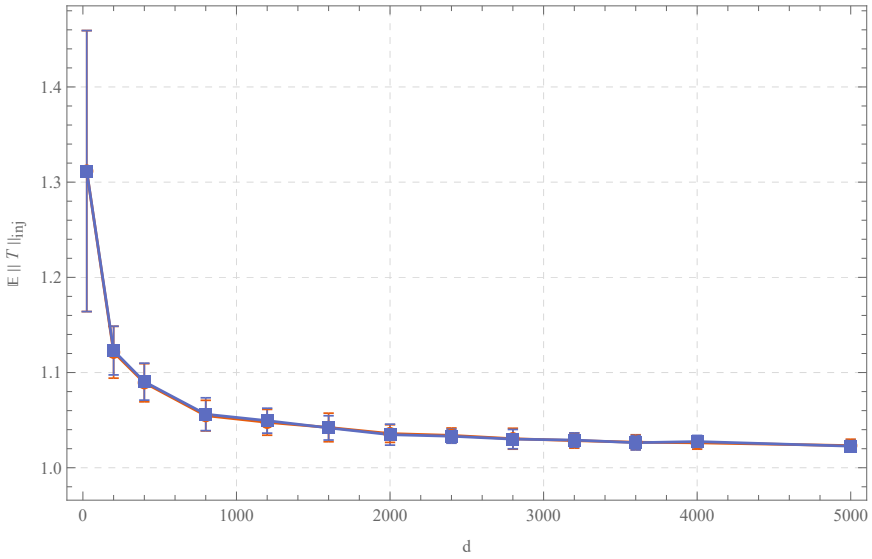

FIGURE 3. 秩为 $R = 25$ 的随机有界秩张量的平均内射范数数值计算。比较了两种方法：交替最小二乘法（红色）和（带噪声的投影）梯度上升法（蓝色）。误差条表示标准差。两种方法得到的数值几乎相同，因此红色数据几乎被蓝色数据遮住。对于每个维数，结果均在 40 次实现上取平均。每种算法都使用 35 次重新启动来提高估计值的质量。

在图 3中，我们绘出了数值计算结果，采用了两种不同的优化方法（交替最小二乘法和梯度法），秩为 $R = 25$，针对 模型 $B_{\mathbb{C}}$，其中高斯 $x_c^{(i)}$。结合图 2，这表明在我们所选的归一化方式下，极限值不依赖于秩[5]，当 $d \to \infty$时。

APPENDIX B. RANK OF T IN THE BOUNDED-RANK MODEL

在本附录中，我们证明命题 5.2。关于所需定义和数学知识，一本很好的教材是 [Lan11]，重点讲解第5章。下面回顾证明中所用的定义。

秩的定义如下（针对本文语境略作简化）。

定义 B.1. 若 $T \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes p}$，则 T 的秩为

$$\operatorname{rank} T := \min\{r \in \mathbb{N}^* : \exists x_k^{(j)} \in \mathbb{C}^d, 1 \leqslant k \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant r, T = \sum_{j=1}^{r} x_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes x_p^{(j)}\}.$$

证明使用经典的几何工具来定义和研究张量秩，我们在此回顾其中一部分。设 $N = d^p - 1$，并用 $\mathbb{P}^N$ 表示维数为N的复射影空间。设 $T \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes p}$为一个张量。我们用 $\langle T \rangle$表示它在 $\mathbb{P}^N$中的等价类。

定义 B.2 (塞格雷嵌入)。 我们称典范嵌入 $\sigma : \quad (\mathbb{P}^{d-1})^{\times p} \to \mathbb{P}^N$为塞格雷嵌入。令 $s_1, \ldots,$ $s_p \in \mathbb{P}^{d-1}$。在射影坐标 $s_i = \langle (s_i)_1 : \ldots : \quad (s_i)_p \rangle$ 中，令

$$\sigma(s_1, \ldots, s_p) = \langle (s_1)_1 (s_2)_1 \ldots (s_p)_1 : (s_1)_1 (s_2)_1 \ldots (s_p)_2 : \ldots : (s_1)_d (s_2)_d \ldots (s_p)_d \rangle.$$

[5]不过，我们回顾一下，方差与秩有关。

我们用 $Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}) := \sigma((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})$. 表示

$\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})$是可分态的空间，或者说，除去整体标量后，它就是秩为 1 的张量空间。秩至多为 r 的张量空间被形式化为 $\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})$ 的 r-割线簇，我们现在对其作出定义。

定义 B.3 (见 [Lan11])。 两个簇 X、$Y \subset \mathbb{P}^N$ 的连接 $J(X, Y)$ 是由任意点 $x \in X$、$Y \in Y$ 之间的直线所成集合的 *Zariski* 闭包，即 $J(X, Y) = \bigcup_{(x,\ y)\in X\times Y} \overline{\mathbb{P}^1_{x,\ y}}$。簇的连接$^{x\neq y}$

k簇 $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{P}^N$ 通过归纳法定义 $J(X_1, \ldots, X_k) := J(X_1, J(X_2, \ldots, X_k))$. 簇 X 的割线簇是 $k-\sigma_k(X) := J(X, \underbrace{\ldots X,}_{k\ times})$.

根据 [Lan11，定义 5.2.11] 及其下方的注释，我们可得秩 $T = \min\{r \in \mathbb{N}^* : \langle T\rangle \in \sigma_r(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))\}$. 这给出了张量秩的几何刻画，适用于我们要证明的结论。

注 B.4。 请注意，根据构造 $\sigma_{r-1}(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})) \subseteq \sigma_r(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))$。然而，根据 [Lan11，命题 5.3.16]，对于 $R < d$,

$$\dim \sigma_{R-1}(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})) < \dim \sigma_R(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})),$$

因此 $\sigma_{R-1}(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p})) \subsetneq \sigma_R(Seg_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))$.

命题 5.2 的证明。 我们已具备证明命题 5.2 所需的要素。设 T 是有界秩模型中的一个张量。显然，根据构造 $\langle T\rangle \in \sigma_R(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))$。我们需要证明 $\mathbb{P}(\langle T\rangle \in \sigma_{R-1}(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))) = 0$. 为此，我们注意到

$$\Phi : ((\mathbb{C}^d)^{\times p})^R \to \mathbb{C}^{d^p}, \quad \{x_k^{(i)}\}_{k,i} \mapsto T = \sum_{i=1}^{R} x_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes x_p^{(i)},$$

是一个多项式映射，且 $\dim \mathrm{Im}(\Phi) = Rp(d-1) + R$。

根据注 B.4， $\{T : \langle T\rangle \in \sigma_{R-1}(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))\}$ 是一个严格包含于$\{T : \langle T\rangle \in \sigma_R(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))\}$的代数锥。因此，原像 $\Phi^{-1}(\{T : \langle T\rangle \in \sigma_{R-1}(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))\})$ 在 $((\mathbb{C}^d)^{\times p})^R$ 中勒贝格测度为零，所以

$$\mathbb{P}(\langle T\rangle \in \sigma_{R-1}(\mathrm{Seg}_p((\mathbb{P}^{d-1})^{\times p}))) = 0.$$

□

Appendix C. Application: Numerically efficient non-asymptotic bounds

在前面的章节中，我们给出了一些示例，说明如何使用定理 2.1，在某种极限意义下获得 $\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj}}]$ 的解析上界，例如当 $T \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ 且 $d \to \infty$ 或$p \to \infty$时。然而，定理 2.1 也可用于在 $\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj}}]$ 上给出此类张量的非渐近界，其中 d 和 p 均为固定值。本节旨在说明如何以数值高效的方式实现这一点。

为具体起见，我们讨论 T 来自 模型 $A_{\mathbb{C}}$的情形，为简便起见，设 $d_1 = \cdots = d_p = d$。结合（3）和引理 3.3，可得

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant \mathbb{E}[\|T\|^{2k}_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}]^{\frac{1}{2k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{d}} \left(k! \binom{d+k-1}{k}^p\right)^{\frac{1}{2k}}$$

对每个 k，因此只需取.....的下确界，即可对任意固定的 d 和 p 简单地得到 $\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\ \mathbb{C}}]$ 的界

$$M_{d,p}(k) := \frac{1}{\sqrt{d}} \left(k! \binom{d+k-1}{k}^p\right)^{\frac{1}{2k}}$$

在 离散的 $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$。（第 3 节中的证明基于对该公式渐近性的研究，但也可以从非渐近的角度来看。）原则上，这可能需要对不同的 k 值进行任意多次计算。然而，下面的结果给出了所需计算次数的理论上界，该上界以计算高效的方式取决于 d 和 p。

命题 C.1. 对于每个固定的 $d \geqslant 2$ 和 $p \geqslant 3$，$\inf_{k\in\mathbb{N}} M_{d,\,p}(k)$ 在某个 $k \in\{1, \ldots, 2pd\log(pd) + 1\}$处取得。此外，$\inf_{k\in\mathbb{N}} M_{d,\,p}(k)$ 可以通过对表达式$M_{d,\,p}(k)$进行 $O(\log(pd))$ 次求值来求得。

命题 *C.1*的证明。 注意，作为连续 k的函数，量 $M_{d,\,p}(k)$ 可以改写为

$$M_{d,p}(k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \exp\left[\frac{1}{2k}\left(\log(\Gamma(k+1)) + p\log\left(\frac{\Gamma(d+k)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)}\right)\right)\right] =: \frac{1}{\sqrt{d}} \exp\left(\frac{1}{2} g_{d,p}(k)\right).$$

假设我们可以证明 $g_{d,\,p}$ 在连续的 $k > 0$范围内有唯一的最小值，该最小值在某个k_*处取得，并且我们可以给出其显式上界 $k_* \leqslant k_u$。那么 (a) $\operatorname{argmin}_{k\in\mathbb{N}} g_{d,\,p}(k) = \operatorname{argmin}_{k\in\mathbb{N}} M_{d,\,p}(k)$ 必为 $k_0 := \lfloor k_* \rfloor$ 或 $k_0 + 1$；(b) k_u 也是 k_0的上界；(c) 因此，可以通过二分搜索算法搜索 k_0，其复杂度根据 CLRS [CLRS22] 中的主定理可知为 $O(\log(k_u))$。

因此，结论由下文的引理 C.2 推出。该引理本质上是关于特殊函数的微积分练习，只不过（按其中的记号）我们需要为 Lambert $\mathcal{W}$ 项给出一个更简单的上界。为此，我们使用众所周知的上界 $-\mathcal{W}_{-1}(x) \leqslant -\log(-x) + \log(-\log(-x)) + 1/2 \leqslant -2\log(-x)$，例如，可得

$$k_* := x_0 \leqslant -2(2 + x_*)\log\left(\frac{e^{\frac{x_*-1}{2+x_*}}}{2 + x_*}\right) - 1 \leqslant 2(2 + x_*)\log(2 + x_*) \leqslant 2pd\log(pd).$$

□

引理 C.2。 令 $h_{d,\,p} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，$h_{d,\,p}(x) := x^2 \frac{d}{dx} g_{d,\,p}(x)$。令 $x_* = x_*(d, p) = p(d-1) - 3/2$。当 $d \geqslant 2$ 且 $p \geqslant 3$，$h_{d,\,p}$ 在 x_0处有唯一零点，并且

$$x_0 \leqslant -(2 + x_*)\mathcal{W}_{-1}\left(-\frac{e^{\frac{x_*-1}{2+x_*}}}{2 + x_*}\right) - 1,$$

其中 $\mathcal{W}_{-1}$ 表示 *Lambert* $\mathcal{W}$ 函数的实下分支。

证明。 首先回顾

$$h_{d,p}(x) = x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_{d,p}(x) = -\log(\Gamma(x+1)) - p\log\left(\frac{\Gamma(d+x)}{\Gamma(d)\Gamma(x+1)}\right) + x(1-p)\psi(x+1) + xp\psi(d+x),$$

其中 ψ 表示伽马函数的对数导数（即伽马函数的对数导数）。令

$$\ell_{d,p}(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_{d,p}(x) = x(p\psi'(d+x) - (p-1)\psi'(1+x)), \tag{37}$$

利用性质 $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$，可将其改写为

$$\ell_{d,p}(x) = x\left(\psi'(1+x) - p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(x+j)^2}\right). \tag{38}$$

注意，$h_{d,\,p}(0) = h'_{d,\,p}(0) = 0$，并且对于 $d \geqslant 2$

$$h''_{d,p}(0) = \ell'_{d,p}(0) = p\psi'(d) - (p-1)\frac{\pi^2}{6} \leqslant p\psi'(2) - (p-1)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2 - 6p}{6}$$

当 $p \geqslant 2$ 时为负。因此$h_{d,\,p}$ 在零点附近必须为负；由于 $\lim_{x\to+\infty} h_{d,\,p}(x) = +\infty$，它必有一个零点；为了证明这个零点是唯一的，只需证明当 x 从 0 增大到无穷大时，$\ell_{d,\,p}$ 在某个区间内为负，而在其余部分为正。

为此，我们首先考虑$m_{d,\,p}(x) := \psi'(1+x) - p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(x+j)^2}$，从而$\ell_{d,\,p}(x) = x\, m_{d,\,p}(x)$.我们使用以下关于多伽马函数的不等式（多伽马函数是伽马函数的对数导数的导数）。这些不等式可见于 [QGG10，引理 3]，例如，并且对任意 $t \in (0,\ \infty)$均成立：

$$\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2} < \psi'(t) < \frac{t+1}{t^2}, \quad -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} < \psi''(t) < -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}. \tag{39}$$

由（39），我们得到

$$m_{d,p}(x) > \frac{x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2} - p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(x+j)^2} \geqslant \frac{x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2} - p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-x_*}{(x+1)^2}. \tag{40}$$

因此，$m_{d,\,p}$ （从而 $\ell_{d,\,p}$）对于 $x \geqslant x_*$严格为正。我们还注意到

$$m_{d,p}(0) = \psi'(1) - p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{j^2} \leqslant \psi'(1) - 2\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{j^2} \leqslant \psi'(1) - 2 = \frac{\pi^2}{6} - 2 < 0.$$

因此，为了证明 $h_{d,\,p}$ 具有唯一的零点，只需证明 $m_{d,\,p}$ 在 $[0,\ x_*]$上严格递增。根据 d 和 p的取值，我们分三种情况进行证明。

- **情形** 1 （$p \geqslant 4$）**：** 利用（39），我们得到

(41)

$$\begin{aligned} m'_{d,p}(x) &= \psi''(1+x) + 2p\sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(x+j)^3} > -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + 2p\int_{j=1}^{d} \frac{1}{(x+j)^3}\,\mathrm{d}j \\ &= \frac{-x^3 + (-3-2d-2p+2dp)x^2 + (-6d-d^2-3p+2dp+d^2p)x + (d^2p-p-3d^2)}{(1+x)^3(x+d)^2}. \end{aligned}$$

为证明其在 $(0, x_*)$ 上为正，只需证明最后一个表达式的分子（记作 $n_{d,p}(x)$）在 $(0, x_*)$ 上严格为正。由于 $n_{d,p}(x)$ 是关于 x 的三次式，且首项系数为负，因此 $n'_{d,p}(x)$ 是关于 x 的二次式，且首项系数为负；于是，若能证明 $n'_{d,p}(0) > 0$，则必有 $n'_{d,p}$ 在 $(0,\infty)$ 上有唯一零点 z，且在 $(0, z)$ 上递增，在其余部分递减。若还能证明 $n_{d,p}(0) \geqslant 0$ 和 $n_{d,\,p}(x_*) > 0$，则必有 $n_{d,p} > 0$ 在 $(0, x_*)$ 上。

因此只剩下三个计算：
– 注意到 $n_{d,\,p}(0) = d^2(p-3) - p$，它对所有 $d \geqslant 2$ 和 $p \geqslant 4$ 均非负。– 还需注意

$$n_{d,p}(x_*) = \frac{8p^3(d-1)^3 - 4(d-1)^2(3+2d)p^2 - 2(d-1)(4d^2+2d-13)p - 3(3-2d)^2}{8}.$$

我们声称，对于 $d \geqslant 2$ 和 $p \geqslant 4$，这个分数的分子为正；事实上，对于这样的 d，它是关于 p 的三次多项式，首项系数为正，在 $p = 4$ 处的值为 $352d^3 - 1468d^2 + 1948d - 835 > 0$；其关于 p的导数在 $p = 4$处为 $312d^3 - 1116d^2 + 1310d - 506 > 0$；其关于 p的二阶导数在 $p = 4$处为 $8(d-1)^2(22d-27) > 0$。这意味着它在 p 上是凸且递增的，对于 $p \geqslant 4$，因此对于这样的 p它为正；这意味着，对于这样的 d 和 p，$n_{d,\,p}(x_*) > 0$ 。– 对于 $d \geqslant 2$ 和 $p \geqslant 4$，我们也有

$$n'_{d,\,p}(0) = p(d+3)(d-1) - d(d+6) \geqslant 4(d+3)(d-1) - d(d+6) = d(3d+2) - 12 \geqslant 4 > 0.$$

- 情形 2（$p = 3$ 和 $d \geqslant 3$）：这里，类似于上面的论证可知$n_d,\ {}_3(x_*) > 0$，但针对的是 $d \geqslant 3$ 而非 $d \geqslant 2$。现在我们在区间 $[1,\ x_*]$上重复上面的论证；对于 $d \geqslant 3$，有 $n_d,\ {}_3(1) = -22 + 2d(2+d) > 0$；对于 $d \geqslant 3$，有 $n'_d,\ {}_3(1) = -30 + 2d(4+d) > 0$。因此我们得出结论：$m'_d,\ {}_3(x)$ 在 $(1,\ x_*)$上为正，但$m_d,\ {}_3(1) < 0$也成立，所以我们知道，$m_d,\ 3$ 在 $x > 1$上有唯一的零点，剩下只需证明 $m_d,\ {}_p$ 在 $x \in [0,\ 1]$上为负。但对于这样的 x，我们有

$$m_{d,3}(x) \leqslant \frac{x+2}{(x+1)^2} - 3\sum_{j=1}^{d-1}\frac{1}{(x+j)^2} \leqslant \frac{x+2}{(x+1)^2} - 3\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{(x+j)^2} = \frac{x^3-6x-7}{(2+3x+x^2)^2}$$

当 $x \in [0,\ 1]$时为负。

- **情形 3（$p = 3$ 且 $d = 2$）：**这里我们不再用积分估计该和，而是将（41）替换为更简单的估计

$$m'_{d,p}(x) = \psi''(1+x) + \frac{6}{(x+1)^3} \geqslant -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{6}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(1+x)^3}.$$

对于 $x < 3$，该式为正；这已足够，因为 $x_*(2,\ 3) = 3/2$。

由此证明了$h_{d,\ p}$ 有唯一零点。

为了对该零点进行界定，我们利用（40）来界定 $\ell_{d,\ p}(x) \geqslant x\frac{(x-x_*)}{(x+1)^2}$。因此，由于 $\ell_{d,\ p}(0) = 0$，对于任意$y \geqslant 0$，有

$$h_{d,p}(y) = \int_0^y \ell_{d,p}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^y t\frac{(t-x_*)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

右端可以显式积分，得到

$$h_{d,p}(y) \geqslant (1 + x_* + y + 1) - \frac{1+x_*}{y+1} - 1 - (2+x_*)\log(y+1).$$

特别地，$h_{d,p}(y)$ 的零点位置不超过 $(1 + x_* + y + 1) - \frac{1+x_*}{y+1} - 1 - (2+x_*)\log(y+1)$ 在 $(0,\ +\infty)$上的唯一零点的位置。作变量代换$\omega := 1 + y, \omega \in (1, +\infty)$ 后，我们需要求解方程

$$\log(\omega) - \frac{\omega}{2+x_*} + \frac{1+x_*}{2+x_*}\cdot\frac{1}{\omega} = \frac{x_*}{2+x_*}.$$

引理 C.3 结合 $s = x_*$ 即可得到所需结论。 □

引理 C.3. 设 $s \geqslant 3/2$ 为实数。考虑方程

$$\log(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1+s}{2+s}\cdot\frac{1}{\omega} = \frac{s}{2+s}. \tag{42}$$

该方程在区间 $(1, +\infty)$上有唯一解 ω_0，且该解还位于区间 $[1+s, w_+]$内，其中 w_+ 是 $[1+s, +\infty)$ 内方程的唯一解

$$\log(\omega) - \frac{1}{2+s}\omega = \frac{s}{2+s}. \tag{43}$$

特别地，该解可以用 *LambertW* 函数的实下分支显式表示为

$$w_+ = -(2+s)\mathcal{W}_{-1}\left(-\frac{e^{\frac{s-1}{2+s}}}{2+s}\right). \tag{44}$$

证明。定义 $\kappa_s\colon\ [1,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ 为 $\omega \mapsto \log(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{\omega} - \frac{s}{2+s}$注意，对于所有 s，$\kappa_s(1) = 0$ 都成立；对于所有严格为正的 s，我们有 $\lim_{\omega\to\infty}\kappa_s(\omega) = -\infty$。计算 κ_s 的导数，得到

$$\kappa'_s(\omega) = \frac{(1+s-\omega)(\omega-1)}{(2+s)\omega^2}.$$

因此， $\kappa_s'(\omega)$ 在区间 $[1,\ 1+s]$ 上为正，在其他地方为负。因此，特别是， κ_s 在 $\omega \in (1,\ +\infty)$上必定有且仅有一个零点，位于某个 $\omega_0 > 1+s$处。现在我们可以将分析范围限制为 ω 在 $[1+s,\ +\infty)$.中的取值

考虑 $g_s\colon\ [1+s,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为 $\omega \mapsto \log(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1}{2+s} - \frac{s}{2+s}$。注意， g 在 $\omega \geqslant 1+s$ 上有唯一的零点 ω_* ，且该零点还满足 $\omega_* > 2+s$。这是因为$g_s(1+s) = \log(1+s) - \frac{2s}{2+s}$ 为正，并且 $g_s'(\omega) = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2+s}$ 在 $\omega < 2+s$ 时为正，在 $\omega > 2+s$ 时为负。此外，这里还需注意，对所有 $\omega \in [1+s,\ +\infty)$. 都有 $\frac{1}{2+s} = \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{1+s} > \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{\omega}$。因此，注意到在后一段区间上 $g_s(\omega) - \kappa_s(\omega) = \frac{1}{2+s} - \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{\omega} \geqslant 0$，可得 $g_s(\omega) \geqslant \kappa_s(\omega)$.。所以， $g_s(\omega)$ 在 $[1+s,\ +\infty)$ 上的唯一零点，是 $\kappa_s(\omega)$在该区间上唯一零点的上界。

我们通过注意到以下事实来完成证明:

$$g_s(\omega) = 0 \ \Leftrightarrow\ \log(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1-s}{2+s} = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{\omega}{2+s}e^{-\frac{\omega}{2+s}} = -\frac{e^{\frac{s-1}{2+s}}}{2+s}.$$

这个方程的最后一种写法，其解记为 w_+，可通过朗伯函数的下实分支求解 $\omega \geqslant 2+s$：

$$w_+ = -(2+s)\mathcal{W}_{-1}\left(-\frac{e^{\frac{s-1}{2+s}}}{2+s}\right), \tag{45}$$

$s-1$事实上，对于所有 $s \geqslant 3/2,$，都有 $-\frac{e}{2+s}^{\frac{2+s}{}} > -\frac{1}{2+s} > -1/e$，这意味着存在两个实根，分别由朗伯函数的上分支（$\mathcal{W}_0$）和下分支（$\mathcal{W}_{-1}$）给出，满足 $\mathcal{W}_{-1}(-\frac{e}{2+s}^{\frac{2+s}{}}) < -1 <_{s-1} \mathcal{W}_0(-\frac{e}{2+s}^{\frac{2+s}{}})$。由于上述论证表明 $\frac{-\omega_*}{2+s} < -1$，我们得出结论，所取分支必为下分支，证明至此完成。□

注 C.4. 有趣的是，我们可以通过迭代改进这个界。事实上，我们现在知道$\omega_0 \in [1+s, w_+]$ 并且利用这个上界，可以构造一个函数 $g_s^{(1)}(\omega)\colon\ [1+s, w_+] \to \mathbb{R}, \omega \mapsto$ 对数$(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{w_+} - \frac{s}{2+s}$。由于 $\forall \omega \in [1+s, w_+],\ \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{w_+} \leqslant \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{\omega}$，在 $[1+s, w_+]$上有 $g_s^{(1)}(\omega) \leqslant \kappa_s(\omega)$。因此， $g_s^{(1)}(\omega)$ 的零点 $\omega_-^{(1)}$ 给出 ω_0的下界；又因为 $\frac{1+s}{2+s}\frac{1}{w_+}$ 为常数，$\omega_-^{(1)}$ 可以再次用朗伯函数显式表示。利用这个下界，我们便知道 $\omega_0 \in [\omega_-^{(1)}, w_+]$. 。我们可以用这个新区间的左端点定义 $g_s^{(2)}(\omega)\colon\ [\omega_-^{(1)}, w_+] \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto$ 对数$(\omega) - \frac{\omega}{2+s} + \frac{1+s}{2+s}\frac{1}{\omega^{(1)}} - \frac{s}{2+s}$，并注意到现在 $g_s^{(2)}(\omega) \geqslant \kappa_s(\omega)$，它可用于在更小的区间 $[\omega_-^{(1)}, w_+]$内为 ω_0 给出上界，从而得到更好的上界。最后，进一步迭代这一论证，可以证明 ω_0 满足一个涉及朗伯函数的显式不动点方程，因此可以通过数值方法求得。不过，这远超我们在此所需。

Appendix D. Comparison with prior bounds

本节将我们新提出的矩方法与此前用于上界估计内射范数的四种方法进行比较：Kac–Rice 论证、Sudakov–Fernique 论证、ε-网论证和 PAC-贝叶斯论证。

D.1. **Kac–Rice 论证**。 Kac–Rice 公式可用于统计高斯过程的临界点数量。如果 M 是一个良好集合，且 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑的高斯过程，那么

$$\max\{f(t)\colon\ t \in M\} = \inf\{u \in \mathbb{R}\colon\ f\text{在 }\{t \in M\colon\ f(t) \geqslant u\}\text{ 中没有临界点}\ \}$$

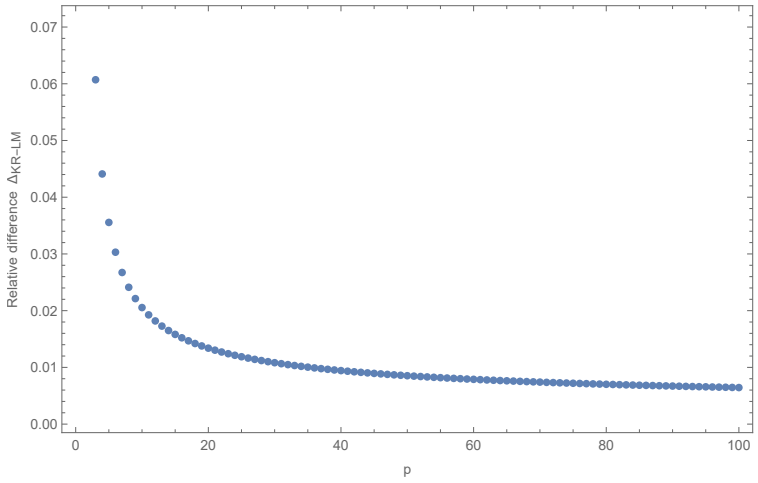

FIGURE 4. Kac–Rice 方法与我们的大矩方法在p情况下所得上界和下界的相对差的图示：$\Delta_{\text{KR-LM}} = \frac{|\sqrt{pE_0(p)} - \psi_p(\alpha_0(p))|}{\sqrt{pE_0(p)}}$

因此，可以使用 Kac–Rice 来确定 max f。这是自旋玻璃中的常见论证；参见 [AT07、AW09]，其中有教科书式论述；另见 [ABA˘C13、Sub17]，其中展示了这一策略的经典应用实例。

如果 T 是一个具有独立同分布的高斯条目的随机张量，那么其内射范数可以看作一个高斯过程的最大值，因此原则上可以通过这种方式定位。因此，一些自旋玻璃结果可以事后重新解释为关于随机张量内射范数的陈述；在我们先前的工作 [DM24]，中，我们便采用这一策略给出了上界，针对的是我们现在称为模型 $A_{\mathbb{K}}$ 且具有高斯条目的情形。（在将 [DM24] 发布到 arXiv 后，作者了解到，使用 Kac–Rice 公式研究随机张量内射范数这一总体思路曾在 [Evn21]中被提出，但并未付诸实施。）Bates 和 Sohn 最近为我们的部分结果找到了匹配下界 [BS25]，，但没有使用 Kac–Rice 方法。因此，可以对这些方法进行比较。

首先，我们要指出，Kac–Rice 公式处理的是高斯过程。因此，本文考察的大多数随机张量模型（例如有界秩 模型 $B_{\mathbb{C}}$，或 $A_{\mathbb{K}}$条目为次高斯但非高斯的模型）都超出了它的适用范围，因为我们尚不清楚如何将它们的内射范数表示为某个高斯过程的最大值。

其次，尽管原则上 Kac–Rice 公式可用于有限的 d和 p，但它要求我们理解一个大小为 $p(d-1) \times p(d-1)$的随机矩阵行列式的期望绝对值。由于我们主要了解这类行列式在矩阵大小趋于无穷时的渐近性（例如来自 [BABM22]），在实践中，Kac–Rice 公式只能给出在以下情形取极限时的界：要么是 $p \to \infty$，要么是 $d \to \infty$（或两者皆是）。

与这两种方法相比，本文提出的方法适用范围更广：它可以处理非高斯模型，并给出非渐近结果。其技术上也简单得多。然而，在极限 $d \to \infty$下，Kac–Rice 公式给出的界更紧；该界本质上为 $\sqrt{pE_0(p)}$，其中 $E_0(p)$ 是一个来自自旋玻璃的常数，已知其尺度为 $\sqrt{\log p}$（当 $p \to \infty$时）。目前我们无法用现有方法得到 $E_0(p)$。不过，对于每个 p，我们的界仅略差于此（见图 4 和图 5 进行比较），而且具有相同的尺度 $\sqrt{p \log p}$（当 $p \to \infty$ 时；重要的是，常数为 1，而不只是 $O(\sqrt{p \log p})$）。

D.2. **Sudakov–Fernique 论证。** 一种经典且广为人知的论证（至少可追溯至 [DS01]；教科书式论述可参见，例如 [Ver18，第 7 节。3]）使用 Sudakov–Fernique 不等式，为具有独立同分布高斯条目的随机矩阵 的算子范数给出一个紧的上界。（在文献的某些地方，所用的不等式称为“Slepian 不等式”，而不是“Sudakov–Fernique 不等式”；另一些地方则将“Slepian”一词专用于要求方差相同的高斯比较引理。）本节将这一论证自然地推广到随机张量，并说明在许多值得关注的情形下，该方法得到的界不如我们的界。

我们还要指出，Sudakov–Fernique 仅适用于高斯过程，因此存在与 Kac–Rice 论证相同的局限。不过，与 Kac–Rice 论证不同，Sudakov–Fernique 论证是非渐近的。

引理 D.1. ***(Sudakov-Fernique* 界*)*** 设 T 来自模型 $A_{\mathbb{R}}$，并假设其元素不仅是刚性次高斯的，而且实际上是高斯的。那么

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{\sqrt{d_j}}{(d_1 \cdot \ldots \cdot d_p)^{1/(2p)}}. \tag{46}$$

在证明该界之前，我们先讨论它的含义。在矩阵情形下 $p = 2$，Sudakov-Fernique 界（46）变为 $(d_1/d_2)^{1/4} + (d_2/d_1)^{1/4}$, 这是紧的（且优于我们的界）。（应用 Sudakov-Fernique 时，必须选取一个比较高斯过程。矩阵情形下的经典比较过程可以自然地推广到张量，这也是我们用于引理 D.1的比较过程；我们不排除采用另一种比较过程能够得到更优界的可能性。）

然而，在张量情形下 $p \geqslant 3$，若为简便起见，取 $d_1 = \cdots = d_p = d$，则 Sudakov-Fernique 界（46）变为 p，而定理3.1 给出的界渐近地按$\sqrt{p(\log p)(d-1)/d}$,的尺度增长，其中 $p \to \infty$ 为 d 固定值。特别是，Sudakov-Fernique 界无法捕捉 p中的正确尺度。若改为固定 p 并令 $d_1 = \cdots = d_p = d \to \infty$，则我们的界（19）变为

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \inf_{\alpha>0} \frac{2^{-(p-1)/2}}{\sqrt{e}} \left(\frac{(2+\alpha)^{2+\alpha}}{\alpha^{2+\alpha}}\right)^{1/4} \left(\frac{(2+\alpha)^{2+\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{(p-1)/4}. \tag{47}$$

在图5中，我们计算了 $p = 3$、4、.....、8 时的结果，并将其与 Sudakov-Fernique 界以及我们此前论文 [DM24]中的 Kac–Rice 方法所得界进行比较。请注意，尽管当 $p = 3$时，Sudakov–Fernique 界优于矩界，但矩界渐近地优于 p 中的 Sudakov–Fernique 界（定理3.1表明，矩界的尺度增长为 $\sqrt{p}\log p$，与 Kac–Rice 界相同），而且从数值结果来看，对于所有 $p \geqslant 4$，矩界似乎都优于 Sudakov–Fernique 界。

我们指出，当 $\eta_j \equiv 1$ 时，这是式（19）的一个特例；对于更一般的 η_j，了解我们的界与 Sudakov-Fernique 界之间的关系将会很有趣。

引理 *D.1* 的证明。设 $g^{(1)}$，...，$g^{(p)}$ 是相互独立的实高斯向量，满足

$$g_j \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(0, \frac{1}{(d_1 \cdot \ldots \cdot d_p)^{1/p}} \mathbb{1}_{d_j}\right).$$

考虑由下式定义的高斯过程 X, Y： $\mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_1-1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_p-1} \to \mathbb{R}$

$$X(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \left\langle T, x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(p)} \right\rangle.$$
$$Y(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}) = \left\langle g^{(1)}, x^{(1)} \right\rangle + \cdots + \left\langle g^{(p)}, x^{(p)} \right\rangle.$$

$d \to +\infty$，高斯	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$
Kac–Rice 界	2.87	3.59	4.22	4.80	5.33	5.83
矩界	3.04	3.75	4.37	4.94	5.47	5.97
Sudakov–Fernique 界	3	4	5	6	7	8

$d=100$，高斯	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$
Kac–Rice 界	—	—	—	—	—	—
矩界	3.03	3.72	4.35	4.91	5.44	5.94
Sudakov–Fernique 界	3	4	5	6	7	8

$d=100$，刚性次高斯 $p=3$		$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$
Kac–Rice 界	—	—	—	—	—	—
矩界	3.03	3.72	4.35	4.91	5.44	5.94
Sudakov–Fernique 界	—	—	—	—	—	—

FIGURE 5. 在这幅图中，我们非正式地总结了$\mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj的三种上界，}\mathbb{R}}]$ 适用于 T 来自模型 $A_{\mathbb{R}}$的情况，其中 p 固定，且$d_1 = \cdots = d_p = d$（在 $d \to +\infty$ 表格中，该界针对 $\limsup_{d\to\infty} \mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj，}\mathbb{R}}]$）。“Kac–Rice 界”是对 $\alpha(p)$中所称量 [DM24定理11]的数值计算；“矩界”是对表格中式（47）右侧的数值计算，也是对 $d \to \infty$ 表格中式（26）右侧（除以 $\sqrt{d}$）的数值计算；“Sudakov–Fernique 界”是式（46）的右侧。

这些是中心高斯过程，其上确界为 $X = \|T\|_{\text{inj},\mathbb{R}^{\circ}}$。我们断言 tha t

$$\mathbb{E}[(X(x^{(1)},\dots,x^{(p)}) - X(\tilde{x}^{(1)},\dots,\tilde{x}^{(p)}))^2] = \frac{1}{(d_1\cdot\ldots\cdot d_p)^{1/p}} \sum_{i_1,\dots,i_p} (x_{i_1}^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_{i_p}^{(p)} - \tilde{x}_{i_1}^{(1)}\cdot\ldots\cdot\tilde{x}_{i_p}^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{(d_1\cdot\ldots\cdot d_p)^{1/p}} \left(2 - 2\prod_{j=1}^{p} \left\langle x^{(j)}, \tilde{x}^{(j)} \right\rangle\right).$$

事实上，第一个等式是显然的；对于第二个等式，可以令 $\mathfrak{x} = x^{(1)} \otimes \ldots \otimes x^{(p)}$ 与 $\tilde{\mathfrak{x}} = \tilde{x}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{x}^{(p)}$，从而考虑 $\mathfrak{x}, \tilde{\mathfrak{x}} \in \mathbb{R}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^{d_p}$。我们有 $\sum_{i_1,\dots,i_p} (x_{i_1}^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_{i_p}^{(p)} - \tilde{x}_{i_1}^{(1)}\cdot\ldots\cdot\tilde{x}_{i_p}^{(p)})^2 = \|\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}}\|_{\text{HS}}^2 = \|\mathfrak{x}\|_{\text{HS}}^2 + \|\tilde{\mathfrak{x}}\|_{\text{HS}}^2 - 2\langle \mathfrak{x}, \tilde{\mathfrak{x}}\rangle$。由于 $\|\mathfrak{x}\|_{\text{HS}}^2 = \|\tilde{\mathfrak{x}}\|_{\text{HS}}^2 = 1$与 $\langle \mathfrak{x}, \tilde{\mathfrak{x}}\rangle = \prod_{j=1}^{p} \langle x^{(j)}, \tilde{x}^{(j)}\rangle$，我们得到该断言。接下来，我们还可以计算

$$\mathbb{E}[(Y(x^{(1)},\dots,x^{(p)}) - Y(\tilde{x}^{(1)},\dots,\tilde{x}^{(p)}))^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p} \left\langle g^{(j)}, x^{(j)} - \tilde{x}^{(j)}\right\rangle\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(d_1\cdot\ldots\cdot d_p)^{1/p}} \sum_{j=1}^{p} \|x^{(j)} - \tilde{x}^{(j)}\|_2^2 = \frac{1}{(d_1\cdot\ldots\cdot d_p)^{1/p}} \sum_{j=1}^{p} \left(2 - 2\left\langle x^{(j)}, \tilde{x}^{(j)}\right\rangle\right).$$

通过归纳法，可以很容易地证明，只要 $a_j \in [-1,\ 1]$ 就有 $1 - \prod_{j=1}^{p} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{p} (1 - a_j)$（在归纳步骤中，注意到 $A = \prod_{j=1}^{p-1} a_j$ $[-1\ 1]$ $1 - \prod_{j=1}^{p} a_j = 1 - Aa_p \leqslant$ 也属于，，因此）；这意味着 $(1 - A) + (1 - a_p)$

$$\mathbb{E}[(X(x^{(1)},\dots,x^{(p)}) - X(\tilde{x}^{(1)},\dots,\tilde{x}^{(p)}))^2] \leqslant \mathbb{E}[(Y(x^{(1)},\dots,x^{(p)}) - Y(\tilde{x}^{(1)},\dots,\tilde{x}^{(p)}))^2]$$

f对所有论证均成立。因此，根据 Sudakov-Fernique 不等式，我们得出 th at

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] &= \mathbb{E}\left[\sup_{x^{(1)},\dots,x^{(p)}} X(x^{(1)},\dots,x^{(p)})\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{x^{(1)},\dots,x^{(p)}} Y(x^{(1)},\dots,x^{(p)})\right] \\ &= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}\left[\sup_{x^{(j)}\in\mathbb{S}_{\mathbb{R}}^{d_j-1}} \left\langle g^{(j)}, x^{(j)}\right\rangle\right] = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}[\|g^{(j)}\|_2] \leqslant \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}[\|g^{(j)}\|_2^2]^{1/2}\end{aligned} \tag{48}$$

现在，(48) 的右端等于 (46) 的右端。 □

D.3. **先前的 ε-网界**。

经典做法是将空间离散化为所谓的“ε-网”，从而对连续参数空间上 Lipschitz 随机过程的最大值进行界定。对于随机张量的内射范数，至少有两类广为人知的论文采用了这一策略。一类源自量子信息论 [GFE09，FK18], 专门研究我们模型 $A_{\mathbb{C}}$ 和 $S_{\mathbb{C}}$的高斯情形；另一类源自随机矩阵领域 [BGJ+24，Boe24],研究这些模型的推广形式，允许存在方差轮廓或条目间的某些相关性。正如我们将要说明的，第二类论文所处理的模型更一般，但应用于我们的模型时，其界往往不如第一类，因为它们并未针对这一特殊情形进行优化；第一类论文通常能得到正确的阶，但常数不准确。

我们首先讨论量子信息领域的论文 [GFE09、 FK18]。ε-网论证可以给出非渐近界；不过，在这里我们将效仿这些论文，将 d 固定（$d=2$ 在 [GFE09]， $d\geqslant 2$ 在 [FK18]）和 $p\to\infty$视为固定，也就是说，给出对足够大的 p 有限值成立的界。

为了与 [GFE09、 FK18], 保持一致，我们现在从两个方面转换视角：我们关注复张量而非实张量，并关注归一化张量，将其记作 $|\psi_T\rangle = T/\|T\|_{\mathrm{HS}}$。注意，$\|\,|\psi_T\rangle\|_{\mathrm{inj},\,\mathbb{C}} = \|T\|_{\mathrm{inj},\,\mathbb{C}}/\|T\|_{\mathrm{HS}}$，在我们感兴趣的所有情形中，该量实际上是确定性的（因为它是许多独立随机变量之和），因此问题的大部分难点都在于未归一化的内射范数$\|T\|_{\mathrm{inj},\,\mathbb{C}}$。例如，参见 [DM24，定理 3 的证明。4] 关于如何处理归一化的细节。

论文 [GFE09] 研究非对称张量，此处对应于 $|\psi_T\rangle$，其中 T 来自非对称高斯模型 $A_{\mathbb{C}}$，具体来说是“量子比特情形” $d=2$。正如我们在先前工作 [DM24 的命题 1.3], [GFE09] 中所讨论的，该命题基本上表明，当$p\to\infty$时，以高概率有$\|\,|\psi_T\rangle\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}} \leqslant C^{\sqrt{p}}\log_{2^{p/2}} p$，其中某个 C 足够大（另见 [AS17]，其中有教科书式论述，以及某个 c 足够小时形如 $\geqslant c^{\sqrt{p}}\log_{2^{p/2}} p$ 的下界）。我们先前的 Kac–Rice 论证[DM24] 表明，对于任意 ε，都可以取 $C=1+\varepsilon$；由于我们当前的方法能够达到 Kac–Rice 界，因此也能表明可以取 $C=1+\varepsilon$，尤其给出了比 [GFE09] 更紧的界（不过这是在期望意义下，而非以高概率成立）。

该论文 [FK18] 研究了 [GFE09], 的一般 $d\geqslant 2$对称类比，在我们的记号中，这对应于研究$\|\,|\psi_B\rangle\|_{\mathrm{inj},\,\mathbb{C}}$其中 $|\psi_B\rangle = B/\|B\|_{\mathrm{HS}}$ 以及 B来自对称高斯 模型 $S_{\mathbb{C}}$。他们的主要定理给出了一个高概率上界，其概率以非常快的速度趋近于一；通过重新运用他们的论证，以获得一个更紧的上界，同时使概率以较慢的速度趋近于一，可以证明如下结论。

引理 D.2。 （基本上归功于 [FK18]）对每个 ε 和 $d\geqslant 2$，都有

$$\mathbb{P}\left(\|\,|\psi_B\rangle\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}} \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2(d+1)}\cdot\sqrt{\frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}\right) = 1-\mathrm{o}_{p\to\infty}(1).$$

（本小节中的所有证明均推迟到文末给出。）相比之下，我们的结果可以给出以下界。

推论 D.3。 对于每个 ε 和 $d \geqslant 2$，当 p 足够大时，我们有

$$\mathbb{E}[\| \, |\psi_B\rangle \, \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}] \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}.$$

因此，我们的方法可以将引理 D.2 的结果提高 $\sqrt{2(d+1)}$倍；对于所有 $d \geqslant 2$，该因子都大于 1，并且随着 d发散。然而，引理 D.2 同样给出了一个高概率界，而本文主要关注的是对期望进行界定。

现在我们转而考虑随机矩阵所得到的结果，并回到未归一化实张量的情形。论文 [BGJ+24] 研究了如下形式的所谓结构化张量

$$T = \sum_{k=1}^{n} g_k T_k, \tag{49}$$

其中 g_k 是独立同分布标准高斯变量，而 T_k 是属于 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes r}$ 的实确定性张量。任何具有联合高斯元素的张量都可以用这种方式表示。Bandeira 等人给出了所谓的 ℓ_p 单射范数的上界

$$\|T\|_{\mathcal{I}_p} = \sup_{x_1 \in B_p^{d_1}, \ldots, x_r \in B_p^{d_r}} \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{d_p} T_{i_1,\ldots,i_p} (x_1)_{i_1} \cdot \ldots \cdot (x_p)_{i_p}.$$

其中 $B_p^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\|_p \leqslant 1\}$ 现在是 ℓ_p 中的单位球。在本文中，我们只处理 $p=2$（并且我们的 p是他们的 r）；通过取结构张量 为张量 、……、 $_{i_p)}$ 的（重缩放），其中该张量在 $(i_1,$ ……， $i_p)$ 位置为 1，其余位置为零，即可得到我们的高斯模型 $A_{\mathbb{R}}$ 。作为他们结果的一个特例，可以得到以下结论。

引理 D.4. （[BGJ+24]的特例）若 T来自高斯模型 $A_{\mathbb{R}}$，且 $d_1 = \cdots = d_p = d$，则存在常数 C_p 使得

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] \leqslant C_p \log d.$$

定 理 3.1 给出了该界的一个不含对数 d 且具有显式 C_p的版本。

论文 [Boe24] 讨论了（49）的一个特例，其中 T_k仅有一个非零元素，但该元素的值可随 k 变化。换言之， [Boe24] 中的张量具有独立高斯元素，其方差可能不同。在所有方差相同的情形下，Boedihardjo 的结果可化为如下形式。

引理 D.5. （[Boe24]的特例）设 T 来自高斯模型 $A_{\mathbb{R}}$ ，且 $d_1 = \cdots = d_p = d$。则存在通用常数 $C \geqslant 1$ 使得

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \sqrt{2} p^{3/2} + C \cdot \frac{p^3 (\log d)^2}{\sqrt{d}}.$$

与引理 D.4相比，此处 d中的标度更好，且 p中的标度是显式的；然而，定理 3.1 给出了渐近阶为 $\sqrt{\binom{d-1}{d}} p \log p$的界，这一结果更好。但我们再次强调， [~~BGJ+24~~] 与 [Boe24]所关注的模型都比仅具独立元素、固定方差的模型 $A_{\mathbb{R}}$更为一般。

引理的证明 *D.2.* 符号对应关系：我们的 $\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}}$ 是他们的 $\|T\|_\infty$，而他们定义 $E(T) = -2\log_2(\|T\|_\infty) = -2\log_2(\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}})$。我们的 p是他们的 m，我们的 d是他们的 n。转换成我们的

语言后，他们的命题3.10变为如下结论：对于每个 d，都存在某个 $K_d \leqslant 2^{d+1}d^d$使得

$$\mathbb{P}(\| |\psi_B\rangle \|_{\mathrm{inj},\mathbb{C}} \geqslant t) \leqslant K_d \exp\left(2(d-1)\log\left(\frac{p}{t}\right) - \frac{2\binom{d+p-1}{p}-1}{4}t^2\right) = K_d \exp(g_{p,d}(t)).$$

我们的目标是在仍能确保右侧在 $p \to \infty$ 时趋于零的前提下，尽可能减小 $t = t(p,\ d)$；原则上，这一数值可以计算得极其精确，但我们只追踪 d 和 p 中的主阶。由于我们只关心渐近性，以下忽略 K_d。令

$$t(p,d) = s(p,d)\sqrt{\frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}$$

对某个待选取的 $s(p,\ d)$。我们有

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\frac{2\binom{d+p-1}{p}-1}{4} \cdot \frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}{\log p} = \frac{d-1}{2}$$

因此，对于每个 ε，当 p 足够大时，我们有

$$\begin{aligned} g_{p,d}(t(p,d)) \leqslant &\left(2(d-1) - \frac{(1-\varepsilon)s(p,d)^2(d-1)}{2} + (d-1)^2\right)\log p \\ &- 2(d-1)\log(s(p,d)\sqrt{(d-1)!(d-1)(\log p)}). \end{aligned} \tag{50}$$

首先，假设我们选择 $s(p,\ d)$ 使其仅依赖于 d；那么只要使 $\log\ p$ 的系数为负，即满足 $s(p,\ d) > \sqrt{2(d+1)/(1-\varepsilon)}$，该式就会趋于负无穷；通过重新定义 ε，我们至少在这一类 $s(p,\ d)$ 中得到了所需结果。由于我们希望获得紧的上界，唯一可能的改进方式是取更小的 s；但当 s 减小时，界（50）会变差，因此（忽略我们所忽略的低阶修正）这已经是我们能做到的最好结果。□

推论 D.3 的证明。首先，我们声称 $\|B\|_{\mathrm{HS}}$ 和 $|\psi_B\rangle = \frac{B}{\|B\|_{\mathrm{HS}}}$ 相互独立（在高斯情形下）。在非对称高斯情形中，这一点显然成立，原因基本上有两个：张量T 可以看作一个长向量，其元素就是张量元素 $T_{i_1,\ldots,i_p}$；也可以看作所有非对称张量构成的有限维向量空间中的一个元素，并在基 $(E_{i_1,\ldots,i_p})_{(i_1,\ldots,i_p)}$ 下展开（这里 $E_{(i_1,\ldots,i_p)}$ 是仅在位置 $(i_1,\ldots,i_p)$处为 1、其他位置均为零的张量），该基关于 Frobenius内积是正交归一的。无论采用哪种观点，高斯模型 $A_{\mathbb{C}}$ 都是一个协方差为常数乘恒等算子的复高斯向量，而这类向量 X 的范数 $\|X\|_{\mathrm{HS}}$ 和方向$X/\|X\|_{\mathrm{HS}}$总是相互独立的。

在对称情形下，这里考虑的只有后一种视角才是恰当的。空间 $\mathrm{Sym}_p(\mathbb{C}^d)$ 的维数为 $\binom{d+p-1}{p}$，可以将这样的张量存储为一个长度为 $\binom{d+p-1}{p}$的向量，其中包含了所有足以利用对称性重构该张量的元素。模型 $A_{\mathbb{C}}$ 是该空间中的一个高斯向量，其协方差矩阵并非常数乘恒等算子；而且，该空间中向量的朴素长度也不再对应弗罗贝尼乌斯范数，因为它忽略了由对称性带来的不同重数。相反，恰当的策略是构造一个由如下对称张量组成的基：$E_{1,\ 1,\ 1}$ 和 $(1/\sqrt{3})(E_{1,1,3} + E_{1,3,1} + E_{3,1,1})$；不同的归一化方式是必要的，这样才能使它们构成关于 Frobenius内积的标准正交基。在这个基下，长度对应于弗罗贝尼乌斯范数；而且，按照我们对张量元素的归一化选择，来自模型 $S_{\mathbb{C}}$ 的高斯张量在这个新基下的协方差实际上是常数乘恒等算子，因此如前所述，其范数和方向相互独立。

因此 $\mathbb{E}[\|B\|_{\text{inj},\ \mathbb{C}}] = \mathbb{E}[\|B\|_{\text{HS}}]\mathbb{E}[\|\,|\psi_B\rangle\|_{\text{inj},\ \mathbb{C}}]$，以及（现在回想一下我们实际采用的归一化）$\mathbb{E}[\|B\|_{\text{HS}}^2] = \frac{\text{维数(对称群}_p(\mathbb{C}^d))}{d}$。高斯向量范数的集中性给出

$$\mathbb{E}[\|B\|_{\text{HS}}] = \sqrt{\frac{\dim(\text{Sym}_p(\mathbb{C}^d))}{d}}(1+\text{o}_{p\to\infty}(1)),$$

且由于维数为$(\text{对称群}_p(\mathbb{C}^d)) = \binom{d+p-1}{p} = \frac{p^{d-1}}{(d-1)!}(1+\text{o}_{p\to\infty}(1))$，定理 4.2 给出

$$\mathbb{E}[\|\,|\psi_B\rangle\|_{\text{inj},\mathbb{C}}] = \frac{\mathbb{E}[\|B\|_{\text{inj},\mathbb{C}}]}{\mathbb{E}[\|B\|_{\text{HS}}]} \leqslant (1+\varepsilon)\frac{\sqrt{\log p}\sqrt{\frac{d-1}{d}}}{\sqrt{\frac{p^{d-1}}{d!}}} = (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{(d-1)!(d-1)(\log p)}{p^{d-1}}}.$$

□

引理 *D.4* 的证明。BGJ 的主要结果 [BGJ+24] 针对对称张量给出。然而，其定义 4.13 提供了一种将结果扩展到非对称张量的方法，T 即将其结果应用于所谓的“对称嵌入”[6]。T在我们的情形中，$T \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ 的对称嵌入是一个对称张量 $\text{sym}(T) \in (\mathbb{R}^{pd})^{\otimes p}$，其元素为

$$\text{sym}(T)_{i_1,\ldots,i_p} = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_p} \delta_{i_{\pi(1)}\in[\![1,d]\!]}\delta_{i_{\pi(2)}\in[\![d+1,\ldots,2d]\!]}\cdot\ldots\cdot\delta_{i_{\pi(p)}\in[\![(p-1)d+1,pd]\!]}T_{i_{\pi(1)},i_{\pi(2)}-d,\ldots,i_{\pi(p)}-(p-1)d}$$

对于 i_1，……，$i_p \in [\![1,\ pd]\!]$。注意，如果将 $(1,\ \ldots\ldots,\ pd)$ 划分为 p 个部分 $(1,\ \ldots\ldots,\ d)$、$(d+1,\ \ldots\ldots,\ 2d)$，依此类推，那么 $\text{sym}(T)_{i_1,\ \ldots\ldots,\ i_p}$ 仅当每个 i_j 都属于不同部分时才非零；我们称这样的有序元组 $(i_1,\ \ldots\ldots,\ i_p)$ 为优。特别地，$\text{sym}(T)_{i_1,\ \ldots\ldots,\ i_p}$ 中满足$i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p$的非零元素仅具有以下形式

$$\text{sym}(T)_{i_1,d+i_2,\ldots,(p-1)d+i_p} = T_{i_1,\ldots,i_p}$$

对于 i_1，……，$i_p \in [\![1,\ d]\!]$。特别地，$\text{sym}(T)_{i_1,\ldots,i_p}$的各项彼此独立，$i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p$，且 $\mathbb{E}[\text{sym}(T)] = 0$，因此 [BGJ+24] 的定理 2.1 适用于该张量。按照其中的记号，sym $A \in (\mathbb{R}^{pd})^{\otimes p}$ 的“方差张量”(T) 的各项为

$$A_{i_1,\ldots,i_p} = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{if } (i_1,\ldots,i_p) \text{ is good,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

他们的定理 2.1 用 ℓ_1 张量 A 的内射范数以及 A的各种缩并来表述；任意张量的ℓ_1 内射范数是该张量任一项绝对值中的最大值（例如参见他们对推论 2.2 的证明），因此很容易计算。举例来说，$\|A\|_{\mathcal{I}_1} = 1/d$。令$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{pd}$ 为全 1 向量，且 $q < p$，他们将 $(\mathbb{R}^{pd})^{\otimes(p-q)}$ 中各项为 $A\mathbf{1}^{\otimes q}$ 的张量记作

$$(A\mathbf{1}^{\otimes q})_{i_{q+1},\ldots,i_p} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_q=1}^{pd} A_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \frac{1}{d}\#\{(i_1,\ldots,i_q) : (i_1,\ldots,i_p) \text{ is good}\}. \tag{51}$$

如果 $(i_{q+1}$、……、$i_p)$ 的每个元素都位于不同的部分中，那么 (51) 的右端为 $d^{-1}d^q q!$，因为有 $q!$ 种方法可以将前 q 个指标分配到各个部分，并且每个指标有 d 个可能取值。否则，(51) 的右端为零。当 $q = p$ 时，按照惯例，我们取 $A\mathbf{1}^{\otimes q}$ 为 d^{-1} 乘以良好元素总数的标量计数，即 $d^p p!$。因此，对所有 $\|A\mathbf{1}^{\otimes q}\|_{\mathcal{I}_1} = d^{q-1}q!$，均有 $1 \leqslant q \leqslant p$，于是 BGJ 的定理 2.1 表明，存在常数 C_p 使得

$$\mathbb{E}[\|\text{sym}(T)\|_{\text{inj},\mathbb{R}}] \leqslant C_p\left(\log d + \max_{2\leqslant q\leqslant p}\left[d^{\frac{q-1}{2q}}(q!)^{\frac{1}{2q}}d^{-\frac{q-1}{2q}}\right]\right) = C_p\left(\log d + (p!)^{\frac{1}{2p}}\right).$$

[6] Th非对称矩阵的标准厄米化或对称化的张量版本

最后，他们的引理 4.16 表明，$\|T\|_{\text{inj},\,\mathbb{R}} = \frac{p^{p/2}}{p!}\,\|$对称群$(T)\|_{\text{inj},\,\mathbb{R}}$确定性地成立，从而完成了证明。（我们将所有 p 的因子都吸收到陈述中，因为 C_p 无论如何都没有明确给出。）□

引理 *D.5* 的证明。 这是以下结果的直接推论： [Boe24，定理1。1]其中 $b_{i_1,\dots,i_r} = \frac{1}{\sqrt{d}}$对所有 d均成立。（注意，Boedihardjo 的 r 就是我们的 p。）□

D.4. **先前的 PAC-贝叶斯界。**

最近，Aden-Ali 使用 PAC-贝叶斯引理（一种用于控制某些随机过程上确界的变分工具）研究了随机张量的内射范数 [Ade25]。Aden-Ali 考察了 ℓ_p 形如（49）的结构化张量的单射范数，但 [Ade25] 允许 g_k 为次高斯分布，而不一定是高斯分布。在我们的模型这一特殊情形下，Aden-Ali 的结果可化为以下结论。

引理 D.6。 （ [Ade25] 的推论）若 T 来自 模型 $A_{\mathbb{R}}$，则

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj},\mathbb{R}}] \leqslant (d_1 \cdot \ldots \cdot d_p)^{-\frac{1}{2p}} \sqrt{p\left(\sum_{i=1}^{p} d_i + p \max_{2\leqslant \ell \leqslant p}\left(\sum_{\substack{I\subseteq[p]\\|I|=p-\ell}} d_{\hat{I}}\right)^{\frac{1}{\ell}}\right)},$$

其中 $d_{\hat{I}} = \prod_{j\notin I} d_j$。特别地，在 $d_1 = \cdots = d_p = p$ 的情形下，这可化为

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\text{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \sqrt{p^2\left(1 + \binom{p}{2}^{1/2}\right)} \tag{52}$$

（52）的右端在 $\sqrt{p^3/2}$ 较大时按 p的量级变化；可与引理 D.5比较，若先取 $p^{3/2}$ ，该引理同样按 $d \to \infty$的量级变化。相比之下，定理（3.1）的界渐近地按 $\sqrt{\binom{d-1}{d}p\log p}$的量级变化，但 [Ade25] 讨论的是更一般的模型。

引理 *D.6*的证明。 若 T来自模型 $A_{\mathbb{R}}$，则 $\widetilde{T} = (d_1 \cdot \ldots \cdot d_p)^{1/(2p)} T$可写为

$$\widetilde{T} = \sum_{(i_1,\dots,i_p)} \xi_{(i_1,\dots,i_p)\in[d_1]\times\cdots\times[d_p]} E_{(i_1,\dots,i_p)},$$

其中 $\xi_{(i_1,\ \ldots\ldots,\ i_p)\in[d_1]\times\cdots\times[d_p]}$ 是 $\mathbb{R}$–刚性次高斯的，从而蕴含次高斯性。推论 1.3（见 [Ade25] ）给出该界

$$\mathbb{E}[\|\widetilde{T}\|_{\text{inj},\mathbb{R}}] \leqslant \sqrt{p\left(\sigma^2_{(1,2)} + p\max_{2\leqslant\ell\leqslant p}\sigma^{\frac{2}{\ell}}_{(\ell,2)}\sigma^{\frac{2\ell-2}{\ell}}_{(0,2)}\right)}, \tag{53}$$

其中，Aden-Ali 的记号对应于我们的记号如下

$$\sigma^2_{(\ell,2)} = \sigma^2_{(\ell,p)}(T) = \sup_{x_1\in B_2^{d_1},\dots,x_p\in B_2^{d_p}} \sum_{\substack{I\subseteq[p]\\|I|=p-\ell}} \sum_{k=1}^{n} \|T_k^{\pi_I}(x_{\pi_I(1)},\dots,x_{\pi_I(p-\ell)},\cdot,\dots,\cdot)\|^2_{\text{HS}}.$$

这里， $A(x_1,\dots,x_k,\cdot,\dots,\cdot)$ 表示通过与向量 k 收缩张量A 的前 $x_1,\dots,x_k$条腿而得到的张量，而 π_I 是一个张量算子，它会对指标进行置换，使得进行收缩的腿位于最前面的位置（记号的详细说明见 [Ade25] ）。在我们的情形下，这变为

$$\sigma^2_{(0,2)} = \sup_{x_1\in B_2^{d_1},\dots,x_p\in B_2^{d_p}} \sum_{(i_1,\dots,i_p)} (x_1)^2_{i_1}\cdot\ldots\cdot(x_p)^2_{i_p} = 1$$

在 $\ell=0$的情形下。比如，对于 $\ell=1$ 和 $p=3$，我们有

$$\sigma^2_{(1,2)}=\sup_{x\in B_2^{d_1},y\in B_2^{d_2},z\in B_2^{d_3}}\left(\sum_{(i,j,k)}x_i^2y_j^2+\sum_{(i,j,k)}x_i^2z_k^2+\sum_{(i,j,k)}y_j^2z_k^2\right)=d_1+d_2+d_3,$$

更一般地，也可以用类似的方法计算

$$\sigma^2_{(\ell,2)}=\sum_{\substack{I\subseteq[p]\\|I|=p-\ell}}d_{\hat{I}}.$$

Pl将其代入（53）即可得到结果。当 $d_1=\cdots=d_p=p$ 时，这可简化为

$$\mathbb{E}[\|T\|_{\mathrm{inj},\mathbb{R}}]\leqslant\frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{p\left(pd+p\max_{2\leqslant\ell\leqslant p}\left(\binom{p}{\ell}\right)^{\frac{1}{\ell}}d\right)},$$

且最大值在 $\ell=2$ 处取得。 □

References

[ABA ˇC13] Antonio Auffinger、G´érard Ben Arous 和 Jiˇr´ı ˇCern´y。《随机矩阵与自旋玻璃的复杂度》。*Comm. Pure Appl. Math.*, 66 2 165 201, 2013 2, 15, 32 ( ): – 。 ACS Omar Al-Ghattas、Jiaheng Chen 和 Daniel Sanz-Alonso。《简单随机张量的尖锐集中》。 *Information and Inference: A Journal of the IMA* 14 4 029, 11 2025 20 , ( ):iaaf 。 Ade Ishaq Aden-Ali。《随机张量之和的内射范数与高斯混沌的矩》。*arXiv preprint arXiv:2503.10580v1*, 2025。 39[AFLR24] Chris Akers、Thomas Faulkner、Simon Lin 和 Pratik Rath。《随机张量网络中的反射熵：第三部分：三路割》。 *J. High Energy Phys.*, 2024 12 209, 69, 2024 4 ( ):论文编号 。 AGZ Greg W. Anderson、Alice Guionnet 和 Ofer Zeitouni。 *An introduction to random matrices*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 2010 4 第118卷。剑桥大学出版社，剑桥，。 AMM Martin Aulbach、Damian Markham 和 Mio Murao。《用几何测度刻画最大纠缠对称态》。 *New Journal of Physics* 12 7 073025, 2010 4 , ( ): 。 AMM Martin Aulbach、Damian Markham 和 Mio Murao。《对称态的几何纠缠与马约拉纳表示》。载于 *Theory of quantum computation, communication, and cryptography*, 6519 141 158 2011 4 第 *Lecture Notes in Comput. Sci.*卷，页码 – 。施普林格，柏林，。 AN Guillaume Aubrun 和 Ion Nechita。《随机态的重排》。, ( ):102210, 16, 2012。 4[AS17] Guillaume Aubrun 和 Stanis *Alice and Bob meet Banach* 223 *Mathematical Surveys and Monographs* 4, 35 2017 , 第 *Phys. Rev. A*卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，。《渐近几何分析与量子信息论的交汇》。 85 030302, 2012 4 ASY Guillaume Aubrun、Stanislaw J. Szarek 和 Deping Ye。《随机态的相变与部分转置的半圆律》。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 67 1 129 171, 2014 4 : 3月。 ASY Guillaume Aubrun 、 Stanislaw J. Szarek 和 Deping Ye。《随机诱导态的纠缠阈值》。 *Random fields and geometry*, 2007 32 ( ): – 。 AT Robert J. Adler 和 Jonathan E. Taylor。 *J. Theoret. Probab.*。《施普林格数学专著》。施普林格，纽约， 39 1 3, 12, 2026 20 。 AV Pedro Abdalla 和 Roman Vershynin。《通过矩阵偏差研究简单张量的维数无关集中》。 *Level sets and extrema of random processes and fields*, 2009 32 ( ):论文编号 。 AW Jean-Marc Azaıs 和 Mario Wschebor。 *Probab. Math. Phys.*。John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，NJ, 3 4 731 789, 2022 32 。 BABM Gerard Ben Arous、Paul Bourgade 和 Benjamin McKenna。《超越不变性的随机行列式指数增长》。 *Probab. Theory Related Fields* 120 1 1 67, 2001 ( ): – 。 BADG G. Ben Arous、A. Dembo 和 A. Guionnet。《球面自旋玻璃的老化》。 *L^2 Studia Mathematica* 7 1 36 44, 1938 7 , ( ): – 。 *Electron.* Ban Stefan Banach。《关于 *J. Probab.* 29 62, 28, 2024 2 中的齐次多项式》。, ( ): – 。 BCG S. G. Bobkov、G. P. Chistyakov 和 F. Gotze。《严格次高斯概率分布》。 *J. Phys. A*, :论文编号 。BD Valentin Bonzom 和 Stephane Dartois。《四次蜜瓜张量模型的团状拓扑递归》。, 51(32):325201, 51, 2018。 9

[BGJ+24] Afonso S Bandeira、Sivakanth Gopi、Haotian Jiang、Kevin Lucca 和 Thomas Rothvoss。《从几何角度看随机张量之和的内射范数》。*arXiv preprint arXiv:2411.10633*, 2024。2, 35, 36, 38

[21] BHK Eugenio Bianchi、Lucas Hackl 和 Mario Kieburg。《费米高斯态的Page曲线》。*Phys. Rev.*, :6月。4

[+22] *B* 103 241118, 2021

BHK Eugenio Bianchi、Lucas Hackl、Mario Kieburg、Marcos Rigol 和 Lev Vidmar。《典型纯量子态的体积律纠缠熵》。*PRX Quantum* 3 030201, 2022 4, :7月。

[00] BJWM Michael H Beck、Andreas Jackle、Graham A Worth 和 H-D Meyer。《多组态含时Hartree（MCTDH）方法：一种高效传播波包的算法》。*Physics Reports* 324 1 1 105, 2000, ( ): –。

[24] 19 Boe March T Boedihardjo。《具有独立元素的随机张量的内射范数》。*arXiv preprint arXiv:2412.21193* 2024, 。

[24] 2, 35, 36, 39 Bon Remi Bonnin。《随机张量的Wigner-Gurau极限的普适性》。*arXiv preprint arXiv:2404.14144* 2024, 。

[25] 20 BS Erik Bates 和 Youngtak Sohn。《平衡多物种自旋玻璃》。*arXiv preprint arXiv:2507.06522*, 2025。

[88] 2, 11, 32 BY Z. D. Bai 和 Y. Q. Yin。《Wigner矩阵最大特征值几乎必然收敛的充要条件》。*Ann. Probab.*, 16 4 1729 1741, 1988 4 ( ): –。

[23] CDG Nicholas A. Cook、Raphael Ducatez 和 Alice Guionnet。《次高斯 Wigner 矩阵最大特征值的完整大偏差原理》。*arXiv preprint arXiv:2302.14823*, 2023 2。

[+96] CGH R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth。《关于Lambert W 函数》。*Adv. Comput. Math.*, 5 4 329 359, 1996 15 ( ): –。

[24] CGL Benoît Collins、Razvan Gurau 和 Luca Lionni。《张量Harish-Chandra-Itzykson-Zuber积分 I：Weingarten演算与单调Hurwitz数的推广》。*J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 26 5 1851( ): –1897, 2024 9。

[+24] CLP Newton Cheng、Cecilia Lancien、Geoff Penington、Michael Walter 和 Freek Witteveen。《具有非平凡连边的随机张量网络》。*Ann. Henri Poincaré*, 25 4 2107 2212, 2024 4 ( ): –。

[22] CLRS Thomas H Cormen、Charles E Leiserson、Ronald L Rivest 和 Clifford Stein。*Introduction to algorithms*。MIT出版社, 2022 28。第四版。

[18] CLTZ T.-H. Hubert Chan、Anand Louis、Zhihao Gavin Tang 和 Chenzi Zhang。《超图拉普拉斯的谱性质与近似算法》。*J. ACM*, 65 3 15, 48, 2018 4 ( ):文献编号 。

[25] CS Jiaheng Chen 和 Daniel Sanz-Alonso。《简单随机张量的尖锐集中 II：非对称性》。*arXiv preprint arXiv:2505.24144v1*, 2025 20。

[24] DM Stephane Dartois 和 Benjamin McKenna。《实与复随机张量的内射范数 I：从自旋玻璃到几何纠缠》。*arXiv preprint arXiv:2404.03627*, 2024。2, 4, 11, 15, 19, 32, 33, 34, 35

[22] DNT Stephane Dartois、Ion Nechita 和 Adrian Tanasa。《玻色与费米诱导系综的纠缠判据》。*Quantum Inf. Process.*, 21 11 376, 46, 2022 4 ( ): 论文编号 。

[21] DQW Xi Dong、Xiao-Liang Qi 和 Michael Walter。《全息纠缠负性与副本对称性破缺》。*J. High Energy Phys.*, 2021 6 024, 40, 2021 4 ( ):论文编号 。

[25] DR Stephane Dartois 和 Parham Radpay。《随机费米态与反对称张量的内射范数》。*arXiv preprint arXiv:2510.25474*, 2025 2, 4。

[01] DS Kenneth R. Davidson 和 Stanislaw J. Szarek。《局部算子理论、随机矩阵与Banach空间》。载于 *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*，页码317–366。North-Holland，阿姆斯特丹，2001。

33[DT24] R´emy Dhoyer 和 Ciprian A. Tudor。《Wiener混沌中高维情形下Wishart张量的极限行为》。*J. Theoret. Probab.*, 37 2 1445 1468, 2024 20 ( ): –。

[25] DZ Stephane Dartois 和 Gilles Zemor。《CSS量子纠错码的内射范数》。*preprint arXiv:2510.23736* 2025, 。

[01] 4 EB Jens Eisert 和 Hans J. Briegel。《将Schmidt测度作为量化多粒子纠缠的工具》。*Phys. Rev. A*, 64 022306, 2001 19 :7月。

[21] Evn Oleg Evnin。《蜜瓜主导与大型随机张量的最大特征值》。*Lett. Math. Phys.*, 111 3 66, 18, 2021 ( ):论文编号 。

[17] 32 EY Laszlo Erdos 和 Horng-Tzer Yau。*A dynamical approach to random matrix theory* 28 *Courant*，第 *Lecture Notes in Mathematics* 卷。Courant数学科学研究所，纽约；美国数学会，普罗维登斯，RI, 2017 4。

[81] *Combinatorica* 1 3 233 241, 。

FK Z. Furedi 和 J. Komlos。《随机对称矩阵的特征值》。, ( ): –。1981 2

[FK18] Shmuel Friedland 和 Todd Kemp。大多数玻色子量子态都近乎最大纠缠。 *Proc.*，（）：–。

Amer. Math. Soc. 146 12 5035 5049, 2018 4, 18, 19, 35

[25] FLN Khurshed P. Fitter、Cecilia Lancien 和 Ion Nechita。随机多体量子态纠缠的估计。 *Quantum* 9 1870, 2025 18，：October。For P. J. Forrester。

[10] *Log-gases and random matrices* 34 *London Mathematical Society Monographs* 卷，出自 *Series* 2010 34 *London Mathematical Society Monographs*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。 *Series* 2010 4

[95] FW Joel Friedman 和 Avi Wigderson。关于超图的第二特征值。 *Combinatorica* 15 1 43 65,，（）：–。[GFE09] D. Gross、S. T. Flammia 和 1995 4

J. Eisert。大多数量子态的纠缠程度过高，无法用作计算资源。 *Phys. Rev. Lett.*，102 19 190501, 4, 2009 4, 35（）：。GH Alice Guionnet 和 Jonathan Husson。Rademacher矩阵最大

[20] 特征值的大偏差。*Ann. Probab.*，48 3 1436 1465, 2020 2（）：–。Gro T. H. Gronwall。积分学中的伽马函数。

[18] *Ann. of Math. (2)*，20 2 35 124, 1918 22（）：–。HL

[13] Christopher J. Hillar 和 Lek-Heng Lim。大多数张量问题都是NP难的。，（）：第45条，39，2013 4。[HNQ+16] Patrick Hayden、Sepehr Nezami、Xiao-Liang Qi、Nathaniel Thomas、Michael Walter 和 Zhao Yang。随机张量网络中的全息对偶。 *J. High Energy Phys.*，2016(11):009，前置部分+55，2016 4。[HS23] Brice Huang 和 Mark Sellke。球面 Parisi 公式的构造性证明。 *arXiv preprint arXiv:2311.15495* 2023 4

，。[28] Kel O. D. Kellogg。关于多变量有界多项式。 *Math. Z.*，27 1 55 64, 1928 7

（）：–。Lan Joseph M Landsberg。

[11] *Tensors: geometry and applications* 128 34 *London Mathematical Society Monographs*，第 *Series* 2010 34 *London Mathematical Society Monographs* 卷。美国数学会，2011 19, 26, 27。 *Series* 2010 3, 9, 10

[06] Lat Rafal Latala。高斯混沌的矩与尾部估计。 *Ann. Probab.*，34(6):2315–2331，2006。[25] LXDX Wei Lin、Qikui Xu、Limei Dong 和 Li Xu。通过张量方法检测超图网络社团检测中的相变。 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 669 130609,，：。[Meh04] Madan Lal Mehta。

2025 4 *Random matrices*，第142卷，属 *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*。Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，第三版，2004 4。MSWC Daniel Malz、Georgios Styliaris、Zhi-Yuan Wei 和 J. Ignacio Cirac。用对

[24] 数深度量子电路制备矩阵乘积态。 *Phys. Rev. Lett.*，132 040404, 2024 19：Jan。NM

[20] Yoshifumi Nakata 和 Mio Murao。具有对称性的量子态的普遍纠缠熵。 *Entropy* 22 6 684, 2020 4, 18，（）：。PB Marc Potters 和 Jean-Philippe Bouchaud。 *A first course in random matrix theory: for physicists engineers and data scientists* 4 2020，。剑桥大学出版社，。

[24] PS Leonid Pastur 和 Victor Slavin。以随机矩阵为单体哈密顿量的自由费米子的纠缠熵。 *Entropy* 26 7 564, 2024 4，（）：。PWW Geoff Penington、Michael Walter 和 Freek Witteveen。副本

[23] 趣谈：张量网络和引力中的三分划分。 *J. High Energy Phys.*，2023 5 8, 29, 2023 4（）：论文编号。QGG Feng Qi、Senlin Guo 和 Bai-Ni Guo。涉及多伽马函数的一些函数的完全单调性。 *J. Comput. Appl. Math.*，

[10] 233 9 2149 2160, 2010 29（）：–。Sas Naoki Sasakura。复三阶随机张量的带符号特征值/向量分布。

[24] *PTEP.*，（）：论文编号 A。

Prog. Theor. Exp. Phys. 2024 5 053 04, 31, 2024 2

[11] Sch Ulrich Schollwock。矩阵乘积态时代的密度矩阵重整化群。 *Ann.*，（）：–。

Physics 326 1 96 192, 2011 19

[06] Sev Simone Severini。具有最大 Schmidt测度的二着色图态。 *Phys. Lett. A*，356(2):99–103, 2006 19。Sip Michael Sipser。扩展图、随机性，或时间与空间。 *Journal of Computer and System Sciences*，36 3 379 383，1988（）：–。

[88] 4

[99] Sos Alexander Soshnikov。Wigner随机矩阵谱边缘的普适性。 *Comm. Math.*，（）：–。

Phys. 207 3 697 733, 1999 4

[25] Sto Mihailo Stojnic。多体 p *arXiv*-自旋模型的基态能量——部分提升的 RDT 视角。，。 *preprint arXiv:2509.05916* 2025 4

[17] Sub Eliran Subag。球面 p-自旋模型的复杂度——二阶矩方法。 *Ann. Probab.*，45 5 3385 3450，2017（）：–。

32

[04] SZ Hans-Jurgen Sommers 和 Karol Życzkowski。随机密度矩阵的统计性质。 *J. Phys.*，（）：–。

A 37 35 8457 8466, 2004 4

[SZ17] Eliran Subag 和 Ofer Zeitouni。纯 p-自旋球面自旋玻璃模型临界点的极值过程。 *Probab. Theory Related Fields*, 168 3 4 773 820, 2017 4 （-）：–。Tao Terence Tao。 *Graduate Studies in Mathematics*，第 [12] *Topics in random matrix theory* 132 *Graduate Studies in Mathematics*卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， 2012 2 。TS Ryota Tomioka 和 Taiji [14] Suzuki。随机张量的谱范数。 *arXiv preprint arXiv:1407.1870*，2014。2[TW94] Craig A. Tracy 和 Harold Widom。间距分布与艾里核。 *Comm. Math. Phys.*，159 1 151（）：– 174, 1994 4 。VdCS J. G. Van der Corput 和 G. Schaake。多项式与三角多项式的不等式。*Compositio Math.*， [35] 2 321 361, 1935 7 ：–。Ver Roman Vershynin。 [18] *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Prob-* ，第 *abilistic Mathematics* 2018 *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Prob-* 卷，出自 *abilistic Mathematics* 2018 *High-dimensional probability* 47 *Cambridge Series in Statistical and Prob-* 。剑桥大学出版社，剑桥，。数据科学应用导论，Sara van *abilistic Mathematics* 2018 33 de Geer 作序。[17] vH Ramon van Handel。结构化随机矩阵。载于 *Convexity and concentration* 161 *IMA* ，第 *Vol. Math. Appl.* 107 156 2017 *Convexity and concentration* 161 *IMA* 卷，出自 *Vol. Math. Appl.* 107 156 2017 *Convexity and concentration* 161 *IMA* ，第–页。施普林格，纽约，。 *Vol. Math. Appl.* 107 156 2017 2 [90] Wat William C. Waterhouse。对称多重线性形式的绝对值估计。 *Linear Algebra* 7 *Appl.* 128 97 105, 1990 ，：–。[03] WG Tzu-Chieh Wei 和 Paul M. Goldbart。纠缠几何度量及其在双体和多体量子态中的应用。 *Phys. Rev. A*, 68 042307, 2003 4 ： Oct。Wis John Wishart。来自正态多元总体样本的广义乘积矩分布。 [28] *Biometrika* 20 1 2 32 52, 12 1928 20 ，A（-）：–。Zhi Nikita Zhivotovskiy。通过变分原理得到独立矩阵之和与简单张量的无维数依赖界。 [24] *Electron. J. Probab.*，29：论文编号13，28，2024。20