arXiv:2603.01350v1 [math.QA] 2 Mar 2026

量子群的对偶典范基与 $\imath$量子群 II：几何

Ming Lu 和 Xiaolong Pan

Abstract. 量子群有两种实现方式：一种通过 $\imath$Hall 代数，另一种通过第一作者与 Wang 所发展的箭图簇量子 Grothendieck 环。基于这两种实现方式，我们分别利用层和 Hall 代数，以两种不同方式建立 ADE 型$\imath$量子群的对偶典范基。本文证明这两种对偶典范基相同，从而证明它们在辫群作用下保持不变，且其结构常数是整且正的。此外，我们还证明了从 Hall基（及 PBW基）到对偶典范基的过渡矩阵的系数具有正性。

Contents

1. 引言 1 2. 量子群与 $\imath$量子群 6 3. $\imath$箭图代数与 $\imath$Hall 代数 8 4. NKS 箭图簇for $\imath$箭图 13 5. 通过层构造对偶典范基 26 6. 对偶典范基的傅里叶变换 40 7. $\mathbf{U}^\imath_v(\mathfrak{sl}_2)$ 45 参考文献 47

1. Introduction

1.1. **背景**。（泛）$\imath$量子群$\mathbf{U}^\imath = \langle B_i,\ k_i \mid i \in \mathbb{I} \rangle$ 按定义是一个Drinfeld双量子群的子代数$\mathbf{U}$ 与一个Satake图相关联，并且（$\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^\imath$）构成一个量子对称对；参见[Let99，Ko14，LW22a]。我们将Letzter的$\imath$量子群视为Drinfeld–Jimbo量子群的广泛推广，并且量子群可被视为 $\imath$对角型量子群。

$\imath$箭图代数 $\Lambda^\imath$由 [LW22a], 引入，它由一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$以及 Q上的一个对合 ϱ 构造而成。在 [LW22a], 中，第一作者与Wang引入了与 $\Lambda^\imath$相关的$\imath$霍尔代数，记作 $\mathcal{H}(\Bbbk Q, \varrho)$，以实现ADE型的拟分裂 $\imath$量子群$\mathbf{U}^\imath$；关于其向Kac–Moody情形的推广，见 [LW23] 。这一构造受到Ringel [Rin90] 和Bridgeland [Br13]通过霍尔代数实现量子群U的启发。

2020 数学学科分类。主分类17B37，18G80。关键词。对偶典范基，量子群，$\imath$量子群，霍尔代数，箭图簇。

Lusztig在 [Lus90b、Lus91、Lus93] 中使用箭图表示簇上的层 Q 来实现$\mathbf{U}^+$，并通过单层构造了$\mathbf{U}^+$ 的典范基；晶体基另见 [Ka91] 。Lusztig [Lus90b] 还使用PBW基给出了$\mathbf{U}^+$的典范基的一种初等构造；另见 [DDPW08，第11.6]节。Ringel的实现与Lusztig的范畴化之间的关系由层—函数对应给出；见 [Lus98]。Nakajima [Na01、Na04]进一步发展了Lusztig的构造，并引入了（分次的）Nakajima箭图簇。

受 Bridgeland 的构造启发， [Br13], 通过~循环箭图簇的（对偶）量子格罗滕迪克环, Qin [Q16] 给出了 ADE 型 U 的几何构造。~这种几何方法的一个额外优点，是在 U 上构造了一个正基，其中包含量子群 [Lus90b]各半部分的（在 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ 中经过温和重标定的）对偶典范基，作为其子集。Qin 的工作建立在 Hernandez-Leclerc[HL15] 的构造之上（后者利用分次 Nakajima 箭图簇实现了半量子群 $\mathbf{U}^+$ ），同时也建立在 Nakajima [Na04] 和~ ~Varagnolo–Vasserot [VV03]引入的量子格罗滕迪克环概念之上。为了研究 U 和 $\mathbf{U}^\imath$的对偶典范基，继[HL15 之后，Q16] （另见 [BG17、LW21b、Sh22]），将量子群（以及 $\imath$量子群）视为定义在 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ 上。

受 [Na01、HL15、LeP13], Keller 和 Scherotzke [KS16、Sch19]提出了正则/奇异 Nakajima 范畴的概念 $\mathcal{R}$， $\mathcal{S}$ 它们来自无圈箭图 $\mathbb{Z}Q$ 的重复范畴的网格范畴 Q。请注意 $\mathcal{R}$， $\mathcal{S}$ 在同上中被称为广义 Nakajima 范畴，而在 [LW21b]中称为 Nakajima-Keller-Scherotzke（NKS）范畴。NKS 簇按定义（参见定义4.2）是 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$的表示簇。

对于 Dynkin $\imath$箭图（Q, ϱ），其 $\imath$箭图代数 $\Lambda^\imath$ 的模范畴可以实现为奇异 NKS 范畴 $\mathcal{S}^\imath$； $\mathcal{S}^\imath$ 上的层~的（对偶）量子 Grothendieck 环可用于实现 ADE 型的拟分裂 $\imath$量子群 $\mathbf{U}^\imath$ ；参见 [LW21b]。 [Qin 的构造16]Q 使用这类循环箭图簇来构造 Drinfeld 双 U，这些簇可视为对角型 $\mathcal{S}^\imath$ 的 NKS 簇；参见 $\imath$用于构造 Bridgeland 的 Hall 代数的箭图代数；参见 [LW22a]。

~ ~[Q16, LW21b]中的几何构造为 U 和 $\mathbf{U}^\imath$ 提供了一个具有正整数结构常数的良好基，称为对偶典范基。与 Lusztig 为 $\mathbf{U}^+$定义的典范基不同，对偶典范基是为整个 U 和 $\mathbf{U}^\imath$定义的。为避免混淆，本文有时将此基称为对偶 IC 基。在前作[LP25], 中，我们利用 Hall 基和 Lusztig 引理，为

~ ~ ~$\imath$Hall 代数 $\mathcal{H}(\Bbbk Q, \varrho)$ 构造了对偶典范基。这个对偶典范基也可以转移到 U 和 $\mathbf{U}^\imath$上。作为 BGP 反射函子和傅里叶变换的应用，我们证明了此基在辫群作用下保持不变，且与箭图的定向无关；见[LP25]。

1.2. 目标。 本文旨在证明，对于 ADE 型量子群 U~及 $\imath$量子群 $\mathbf{U}^\imath$，由反常~层通过霍尔代数给出的对偶 IC 基与对偶典范基相一致。已知存在一个从 $\imath$霍尔代数到量子 Grothendieck 环的自然同构，它由（对偶）迹映射诱导。这两类对偶典范基在该

自然同构下彼此一致。由此，我们推得 U和 U$^\imath$的对偶典范基具有与 Lusztig典范基几乎相同的优良性质，包括棒不变、整性和正性，以及在辫群作用下不变。此外，还证明了相对于对偶典范基，Hall基和 PBW基的正性。

1.3. 主要结果。给定一个 Cartan矩阵 $C = (c_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$，我们 [LP25] 引入 Drinfeld双量子群 U 的一个变体，它由 E_i, F_i, K_i, K_i' $(i \in \mathbb{I})$ 生成。Drinfeld双 U 由 U 构造而成，方法是将 K_i, K_i' $(i \in \mathbb{I})$ 变为可逆元。给定一个对合 $\varrho \in \mathrm{Aut}(C)$，我们将（泛）量子群 U$^\imath$ 定义为 U 的子代数，由 $B_i = F_i + E_{\varrho i}K_i'$, $k_i = K_iK_{\varrho i}'$ $(i \in \mathbb{I})$ 以及 k_i 的逆元生成。量子群 U$^\imath$ 的一个变体同样定义为 U 的子代数，但 k_i $(i \in \mathbb{I})$ 不可逆。

对于 Dynkin $\imath$箭图 (Q, ϱ)，[LW22a]以其泛代数 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho)$ 和 $\imath$Hall 代数 $\widehat{\mathcal{H}}(Q, \varrho)$ 的形式构造了 U$^\imath$ 的典范基（称为 Hall基）

$$\{\mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}, \tag{1.1}$$

其中 $\mathfrak{P}$ 是定义在正根集合 Φ^+ 上的 $\mathbb{N}$值函数集，而 $*$ 是（扭曲）Hall 乘积。我们还将 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$定义为具有 Hall基 $\{\mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$的泛型 $\imath$Hall 代数。令 $\widehat{\mathcal{T}}(Q, \varrho)$为由 $\mathbb{K}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$生成的子代数。受 [BG17], 启发，我们定义一个作用 $\diamond$，使 $\mathcal{T}(Q, \varrho)$作用于 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$，满足 $\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{u}_\lambda = \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{u}_\lambda$。这一构造可以推广到 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$。

对于 Dynkin $\imath$箭图 (Q, ϱ)，令 $\mathcal{S}^\imath$ 和 $\mathcal{R}^\imath$ 为 [LW21b]中构造的奇异/正则 $\imath$NKS 范畴，见定义4.6。令 R$^\imath$ 为 [LW21b]中构造的 $\imath$NKS 簇的量子 Grothendieck 环。它有一个基，与 NKS 簇 $\mathcal{M}_0(\mathrm{w}\ \mathcal{R}^\imath) = \mathrm{rep}(\mathrm{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中各分层对应的交叉上同调（简称 IC）层的基互为对偶，称为对偶 IC 基。我们用 R$^\imath$ 表示 R$^\imath$的某种局部化；见 §4.4。

令 $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$。其整形式为 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 上由 $\widehat{\mathbf{R}}^\imath$ 是由以下子空间对偶 IC 基张成，并且我们可以类似地定义 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 的整形式，其中 R$^\imath$。根据的构造可知，$\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 和 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 是 $\mathcal{Z}$上的代数。另一方面，$\imath$Hall 代数 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$ 的整形式是定义在由 (1.1) 张成的（自由） $\mathcal{Z}$模上的 $\mathcal{Z}$-代数。对于 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$也同样如此。

根据 [LW22a]和 [LW21b]的结果（见定理 4.18和引理3.4），我们可以定义同构

$$\widehat{\Omega} : \widehat{\mathcal{H}}(Q, \varrho) \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}^\imath, \quad \widetilde{\Omega} : \widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{R}}^\imath.$$

令人惊讶的是，这些同构保留了整形式。

定理 A（定理 5.3）。同构 Ω: $\mathcal{H}(Q, \varrho) \to \mathbf{R}^\imath$ 和 Ω: $\mathcal{H}(Q, \varrho) \to \mathbf{R}^\imath$保留其整形式。

利用 $\imath$量子群与 $\imath$霍尔代数之间的同构（见定理 4.18），U$^\imath$ （以及U$^\imath$）的条形对合诱导出 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$（以及 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$）的条形对合。由轨道闭包 [Lus90b] 给出的 $\mathfrak{P}$ 上的偏序在 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}} \times \mathfrak{P}$上诱导出一个偏序 $\prec$。借助这一偏序，我们可以将Lusztig 引理 [BZ14] 应用于重标度Hall基

$\{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$ 的 $\widehat{\mathcal{H}}(Q, \varrho)$；见 [LP25]。这使我们能够构造一个棒不变整基 $\{\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda} := \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \lambda \in \mathfrak{P}\}$ 在 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 上，称为对偶典范基。

我们将此构造用于偶数有限域 $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ 的代数闭包上的箭图表示簇 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$ 上的函数，其中 $\mathcal{S}^\imath$，来实现 $\imath$Hall 代数 $\mathcal{H}(\Bbbk Q, \varrho)$（回忆一下，我们有 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath) \cong \mathcal{M}_0(\mathbf{w}, \mathcal{R}^\imath)$）；参见 §5.2。我们还按照 [Lus90b, §9]构造了 $\widetilde{\mathbf{M}}^*(Q, \varrho)$，即 $\mathcal{H}(\Bbbk Q, \varrho)$的一个泛型版本。

由于正特征下横截切片定理并不适用，我们无法直接定义 $\mathbf{R}^\imath$ 在 $\mathbb{F}$ 上的类似物以应用层-函数对应。为克服这一困难，我们转而考虑 Gorenstein投射$\mathcal{S}^\imath$-模的子簇 $\mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$。其优点是诱导的分层与轨道分层相吻合，从而使我们能够直接定义 $\mathbb{F}$上的量子 Grothendieck 环 $\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}}$。我们还考察了半导出Hall代数的相应泛型形式 $\widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{Gp}}(Q, \varrho)$；根据 [LW22a, Appendix A.4], 中的结果，它与 $\mathbf{M}^*(Q, \varrho)$ 同构。对偶迹映射继而给出从 $\mathbf{F}^{\mathrm{Gp}}(Q, \varrho)$ 到 $\mathbf{R}^{\imath,\mathrm{Gp}}$的同构，并将对偶典范基映到对偶IC基。结合 [SS16] 的结果（推广至 $\imath$箭图），关于定理 A 中的同构 Ω 也可得出相同结论。

定理B (推论5.16，命题 5.20)。 定理 A 中的同构 $\boldsymbol{\Omega}$ 将 $\widetilde{\mathbf{R}}^\imath$的对偶典范基 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 映到 $\mathbf{R}^\imath$的对偶*IC*基。

这进而使得我们能够表述 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho)$ 的对偶典范基所具有的各种正性性质，例如，其结构常数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

对于 Dynkin $\imath$箭图 (Q, ϱ)，若 (Q', ϱ) 是通过反转若干箭由 (Q, ϱ) 构造而成的，则傅里叶变换 $\Phi_{Q',Q}: \widehat{\mathcal{H}}(\Bbbk Q, \varrho) \to \widehat{\mathcal{H}}(\Bbbk Q', \varrho)$ 和 $\Phi_{Q',Q}: \widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q, \varrho) \to \widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q', \varrho)$ 是按照 [LP25, 定理 C] 构造的。利用定理 A 中的同构，它们可以转移到 (Q, ϱ) 和 (Q', ϱ) 的量子 Grothendieck 环 $\mathbf{R}^\imath$ 和 $'\mathbf{R}^\imath$ 上，换言之，存在同构 $\Psi = \Psi_{Q',Q}: \mathbf{R}^\imath \to {}'\mathbf{R}^\imath$。

为证明 Ψ 保持对偶 IC 基，我们考虑自然嵌入 $i: E_{Q,\mathbf{w}} \to \mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$，其中 $E_{Q,\mathbf{w}}$ 是 Q 的表示簇。簇 $E_{Q,\mathbf{w}}$ 可识别为某个 $\mathbb{G}_m$-作用的不动点子簇，因此拉回函子 i^* 将$\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 映入 Lusztig 范畴 $\mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$，其定义见 [Lus93, §9]。这一观察使我们能够定义一个嵌入

$$\iota: \widehat{\mathbf{R}}^+ \longrightarrow \widetilde{\mathbf{R}}^\imath$$

其中 $\mathbf{R}^+$ 是 Q 的箭图簇的量子 Grothendieck 环（构造见[HL15]），$B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是与 $E_{Q,\mathbf{w}}$ 中轨道相关联的 IC 层 $\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的对偶基。利用 Lusztig 引理，我们可以据此从 $\iota(B(\mathbf{v},\mathbf{w}))$ 构造出 $L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，这意味着对偶典范基在 Ψ 作用下保持不变。

定理 C (定理 6.4)。 对于箭图 (Q, ϱ) 的另一种定向 (Q', ϱ)，傅里叶变换 $: \mathbf{R}^\imath \to {}'\mathbf{R}^\imath$ 保持对偶 *IC* 基。因此，傅里叶变换 $\Phi_{Q',Q}: \widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho) \to \widetilde{\mathcal{H}}(Q', \varrho)$ 保持对偶典范基。

Lusztig在 [Lus90b] 中证明了与$E_{Q,\mathbf{w}}$中的轨道相关联的IC层的纯性。这转化为（重标度）Hall基相对于对偶典范基的正性

$\widetilde{\mathbf{R}}^+$上。利用嵌入 $\imath$还可以确立重标度Hall基相对于对偶典范基的正性。PBW基的正性也随之成立，见命题6.8。

定理D (定理6.6)。相对于对偶典范基，重标度*Hall*基的过渡矩阵系数属于$\mathcal{A}=\mathbb{N}[v,v^{-1}]$。

$\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$的对偶典范基$\mathbf{U}^\imath$定义为 $L(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 在定理 4.18给出的同构下的像。根据定理 C，该基与$\imath$箭图的定向无关，这使对偶典范基的唯一性得以确立。

1.4. **展望**。 本文讨论的 ADE 型$\widetilde{\mathbf{U}}$（以及$\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$）的对偶典范基，可视为Lusztig 为$\mathbf{U}^+$定义的对偶典范基的理想扩展。我们预期，这种基（整、棒不变且在辫群作用下不变）也存在于其他类型，并且对称型下还是正的。由于 $\imath$量子群的类型远多于量子群，即使对于准分裂型，寻找所有类型$\mathbf{U}^\imath$ 的对偶$\widetilde{\mathbf{U}}$典范基的代数刻画和算法，仍是一个艰巨而重要的开放问题。

大多数拟分裂的 $\imath$Kac-Moody型量子群都可以通过 $\imath$Hall 代数 [LW23]来实现。我们将利用 $\imath$这一一般框架下Hall 代数的Hall基，尤其是仿射 $\imath$量子群的Hall基，构造对偶典范基。将 [LW21b] 中给出的几何实现推广到Kac-Moody型是有趣且重要的，而$\widetilde{\mathbf{U}}$层可能成为 $\mathbf{U}^\imath$的对偶典范基；这可与Lusztig对Kac-Moody型量子群的几何实现 [Lus90a、Lus90b、Lus93]相比较。

对于修正量子群$\dot{\mathbf{U}}$（A型）及其具有正性的典范基，已有一种完全不同的几何构造 [BLM90, Lus93], ，该构造与Khovanov-Lauda-Rouquier（KLR）范畴化 [KL10, R08]相容。此外，对于修正 $\imath$量子群 $\dot{\mathbf{U}}^\imath$ （AIII型）及其 $\imath$具有正性的典范基，也已有一种几何构造 [BKLW18, LiW18, BW18b], ，它同样与KLR型范畴化 [BSWW18]相容。自然会问，这些关于修正量子群和典范基的构造（相应地，关于 $\imath$量子群和 $\imath$典范基的构造）与 [Q16, SS16, BG17] 中Drinfeld双和对偶典范基的几何构造（相应地， [LW21b] 及本文中的构造）之间是否存在联系。

另一方面，本文有望使量子对称对及其（对偶）典范基向量子簇代数更近一步（参见 [So24] 关于 $\imath$AI 型量子群的簇实现），因为量子群与簇代数之间已有种种联系，见诸 [GLS13,GY21, HL15, KKKO18, Q14, Q16] 等工作及其参考文献。事实上，利用簇代数方法，Shen [Sh22] 构造了量子群$\mathbf{U}$ 的一个基，该基是整的、正的，并且在辫群作用下不变。将这一基与对偶（双）典范基加以比较颇有意思，因为它们具有这些良好性质。对于量子 $\mathfrak{sl}_2$，它们彼此重合（参见 [Sh22]），但对于高秩情形则仍很神秘。

1.5. **结构安排**。 本文安排如下。在 §2 中，我们回顾量子群以及 $\imath$与 Dynkin（$\imath$）箭图相关的量子群的基础知识。这里我们将采用不同的表示，遵循 [BG17], 并相应地修改辫群作用。

这种表示将简化借助 $\imath$Hall 代数和量子 Grothendieck 环进行的实现；这两者分别在 §3 和§4中回顾。此外，我们还将 [SS16] 的结果推广到 $\imath$箭图。

我们比较 $\imath$Hall 代数的对偶典范基与量子 Grothendieck 环的对偶 IC 基，见§5。我们首先通过 $\imath$表示簇上的函数构造 Hall 代数 $\Lambda^\imath$，然后按照 [Lus90b，§9]，构造一个泛型版本。通过平移到 Gorenstein 投射模的子簇，并利用 [SS16] 在§4中证明的上述结果，我们证明定理**B**。

利用§5中给出的函数实现，我们在§6 中定义量子 Grothendieck 环的傅里叶变换，并证明对偶典范基在这些同构下保持不变。我们还推导出 $\imath$Hall 代数的重标度 Hall 基相对于对偶典范基的过渡矩阵系数具有正性。

在$\mathbf{U}^\imath_v(\mathfrak{sl}_2)$，并在此情形下建立了关于生成元的$\widetilde{L}(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$的闭式公式。

致谢。 我们感谢王伟强在相关项目中的合作，也感谢他提出的宝贵意见并参与富有启发性的讨论。ML 的部分研究经费由国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12171333、12261131498）。

2. Quantum groups and $\imath$quantum groups

本节回顾量子群和 $\imath$量子群的基本构造，如 [LP25]。

2.1. 量子群。 设 $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$ 为指标集。设 $C = (c_{ij})_{i,\ j\in\mathbb{I}}$ 为单边半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan矩阵。设 $\Delta^+ = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的单根集，并将根格记为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$：$= \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n$。设 Φ^+ 为正根集。

设 v 为一个未定元。对于 r，$m \in \mathbb{N}$，记作：

$$[r] = \frac{v^r - v^{-r}}{v - v^{-1}}, \quad [r]! = \prod_{i=1}^{r}[i], \quad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \frac{[m][m-1]\ldots[m-r+1]}{[r]!}.$$

按照 [BG17]，Drinfeld双 $\widehat{\mathbf{U}} := \widehat{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{g})$ 定义为由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数：E_i、F_i、K_i、K'_i、$i \in \mathbb{I}$，并满足以下关系：对于 i，$j \in \mathbb{I}$，

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}(v^{-1} - v)(K_i - K'_i), \qquad [K_i, K_j] = [K_i, K'_j] = [K'_i, K'_j] = 0, \tag{2.1}$$

$$K_iE_j = v^{c_{ij}}E_jK_i, \qquad K_iF_j = v^{-c_{ij}}F_jK_i, \tag{2.2}$$

$$K'_iE_j = v^{-c_{ij}}E_jK'_i, \qquad K'_iF_j = v^{c_{ij}}F_jK'_i, \tag{2.3}$$

以及 Serre关系。

我们定义 $\widetilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{g})$ 为由 $\widehat{\mathbf{U}}$ 构造出的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数，方法是使 $K_i, K'_i (i \in \mathbb{I})$ 可逆。于是 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$ 通过设定 deg $E_i = \alpha_i$、deg $F_i = -\alpha_i$、deg $K_i = 0 =$ degK'_i 成为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$-分次的。

$\widehat{\mathbf{U}}$ 对由不同元素生成的理想取模，K_i 也 $K'_i - 1\ (i \in \mathbb{I})$。事实上，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 是由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数：E_i，F_i，K_i，K_i^{-1}，$i \in \mathbb{I}$，其满足由（2.1）–（2.3）修改而来的关系，其中 K'_i 替换为 K_i^{-1}。

令 $\widehat{\mathbf{U}}^+$ 为由 E_i $(i\in\mathbb{I})$生成的 $\widehat{\mathbf{U}}$的子代数，$\widehat{\mathbf{U}}^0$ 为由 K_i, K_i' $(i\in\mathbb{I})$生成的 $\widehat{\mathbf{U}}$的子代数，而$\mathbf{U}^-$ 为由 F_i $(i\in\mathbb{I})$,$\widetilde{\mathbf{U}}$生成的$\mathbf{U}$的子代数。$\mathbf{U}^+$、$\mathbf{U}^0$ 和$\mathbf{U}^-$ 这几个$\mathbf{U}$的子代数，以及$\mathbf{U}^+$、$\mathbf{U}^0$ 和$\mathbf{U}^-$ 这几个$\widehat{\mathbf{U}}$ $\widetilde{\mathbf{U}}$的子代数，也类似地定义。于是，代数$\mathbf{U}$、$\mathbf{U}$和$\mathbf{U}$具有三角分解:

$$\widehat{\mathbf{U}}=\widehat{\mathbf{U}}^+\otimes\widehat{\mathbf{U}}^0\otimes\widehat{\mathbf{U}}^-,\qquad \widetilde{\mathbf{U}}=\widetilde{\mathbf{U}}^+\otimes\widetilde{\mathbf{U}}^0\otimes\widetilde{\mathbf{U}}^-,\qquad \mathbf{U}=\mathbf{U}^+\otimes\mathbf{U}^0\otimes\mathbf{U}^-.$$

显然，$\mathbf{U}^+\cong\widetilde{\mathbf{U}}^+\cong\widehat{\mathbf{U}}^+$、$\mathbf{U}^-\cong\widetilde{\mathbf{U}}^-\cong\widehat{\mathbf{U}}^-$、$\widehat{\mathbf{U}}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i,K_i'\mid i\in\mathbb{I}]$、$\widetilde{\mathbf{U}}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i^{\pm1},(K_i')^{\pm1}\mid i\in\mathbb{I}]$ 以及 $\mathbf{U}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i^{\pm1}\mid i\in\mathbb{I}]$。注意，$\mathbf{U}^0\cong\widehat{\mathbf{U}}^0/(K_iK_i'-1\mid_\sim i\in\mathbb{I})$。对于任意 $\mu=\sum_{i\in\mathbb{I}}m_i\alpha_i\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$，我们将 $\mathbf{U}$ 中的 $K_\mu=\prod_{i\in\mathbb{I}}K_i^{m_i}$、$K_\mu'=\prod_{i\in\mathbb{I}}(K_i')^{m_i}$ 记为；如果 $\mu\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，我们可以将 K_μ、K_μ' 视为 $\widehat{\mathbf{U}}$ $\widetilde{\mathbf{U}}$中的元素。

引理 2.1 (参见 [BG17])。存在一个反对合 $u\mapsto\overline{u}$，作用于 $\mathbf{U}$ (以及 $\mathbf{U}$、$\mathbf{U}$)，定义为 $\overline{v^{1/2}}=v^{-1/2}$，$\overline{E_i}=E_i$，$\overline{F_i}=F_i$，以及 $\overline{K_i}=K_i$，$\overline{K_i'}=K_i'$，其中 $i\in\mathbb{I}$。

2.2. 这些 $\imath$量子群。 对于 Cartan矩阵 $C=(c_{ij})$，令 $\mathrm{Aut}(C)$ 表示集合 $\mathbb{I}$ 上满足 $c_{ij}=c_{\varrho i,\varrho j}$的所有置换 ϱ 所成的群。若元素 $\varrho\in\mathrm{Aut}(C)$ 满足 $\varrho^2=\mathrm{Id}$，则称其为对合 。

对于 Cartan矩阵 $C=(c_{ij})$，令 ϱ 为 $\mathrm{Aut}(C)$ 中的一个对合。我们将普适$\imath$量子群 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath:=\widehat{\mathbf{U}}'_v(\mathfrak{k})$（分别地，$\widetilde{\mathbf{U}}^\imath:=\widetilde{\mathbf{U}}'_v(\mathfrak{k})$）定义为 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，它是 $\widehat{\mathbf{U}}$ （分别地，$\widetilde{\mathbf{U}}$）中由以下元素生成的

$$B_i=F_i+E_{\varrho i}K_i',\qquad \widetilde{k}_i=K_iK'_{\varrho i},\quad \forall i\in\mathbb{I},\tag{2.4}$$

（其中 $\widetilde{k}_i$ 在 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$中可逆）。令 $\widehat{\mathbf{U}}^{\imath0}$ 为由 $\widetilde{k}_i$生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，其中 $i\in\mathbb{I}$。类似地，令 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath0}$ 为由 $\widetilde{k}_i^{\pm1}$ 生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，其中 $i\in\mathbb{I}$。

已知 [Let99，Ko14，LW22a]代数 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$（分别为 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$）是$\mathbf{U}$（分别为$\mathbf{U}$）的右余理想子代数；我们称($\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^\imath$)和($\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^\imath$)为量子对称对。

我们将称为普适的（拟分裂）$\imath$量子群（参见$\imath$中定义的量子群 [Let99、Ko14]）；如果分裂，则称其为 $\varrho=\mathrm{Id}$。

例 2.2。 我们来说明量子群是 $\imath$对角型量子群。考虑由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v)$-子代数 $(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U})^\imath$ 中的 $(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U})$

$$\mathcal{K}_i:=K_iK'_{i^\diamond},\quad \mathcal{K}_i':=K_{i^\diamond}K_i',\quad \mathcal{B}_i:=F_i+E_{i^\diamond}K_i',\quad \mathcal{B}_{i^\diamond}:=F_{i^\diamond}+E_iK'_{i^\diamond},\qquad \forall i\in\mathbb{I}.$$

这里省略张量积记号，改用 $i^\diamond$ 为第二个$\mathbf{U}$ 副本中的生成元编索引，该副本位于 $(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U})$ 中。存在一个 $\mathbb{Q}(v)$-代数同构 $\phi:\ \mathbf{U}\to(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U})^\imath$使得

$$\widetilde{\phi}(E_i)=\mathcal{B}_i,\quad \widetilde{\phi}(F_i)=\mathcal{B}_{i^\diamond},\quad \widetilde{\phi}(K_i)=\mathcal{K}_i',\quad \widetilde{\phi}(K_i')=\mathcal{K}_i,\qquad \forall i\in\mathbb{I}.$$

对于任意 $i\in\mathbb{I}$，我们令

$$\mathbb{K}_i:=v\widetilde{k}_i,\ \text{if } \varrho i=i;\qquad \mathbb{K}_j:=\widetilde{k}_j,\ \text{otherwise}.\tag{2.5}$$

并且当 $\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 时，$\mathbb{K}_\alpha:=\prod_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{K}_i^{a_i}$。

引理 2.3. 存在一个反对合 $u\mapsto u$ 定义在 $\widehat{\mathbf{U}}^\imath$ （亦即 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath$）上，由 $\overline{v^{1/2}}=v^{-1/2}$,$\overline{B_i}=B_i$，$\overline{\mathbb{K}_i}=\mathbb{K}_i$ 给出，其中 $i\in\mathbb{I}$。特别地，$\overline{k_i}=k_i$ 若 $\varrho i\neq i$；$\overline{k_i}=v^2k_i$ 若 $\varrho i=i$。

3. $\imath$Quiver algebras and $\imath$Hall algebras

在本文中，我们用 $\mathbf{k}=\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。

3.1. 箭图与表示的记号。 设 $Q=(Q_0,Q_1,\mathtt{s},\mathtt{t})$ 为一个箭图，其中，Q_0 是顶点集（我们有时记为 $\mathbb{I}=Q_0$），Q_1 是箭集，而$\mathtt{s},\mathtt{t}: Q_1\to Q_0$ 分别为源映射与目标映射。

设 $\mathrm{rep}_{\mathbf{k}}(Q)$ 为 Q 在 $\mathbf{k}$ 上的有限维表示范畴，并将 $\mathrm{rep}_{\mathbf{k}}(Q)$ 等同于路径代数 $\mathbf{k}Q$ 上有限维左模的范畴 $\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$。类似地，对于一个（有限维）商代数 $A=\mathbf{k}Q/I$，设 $\mathrm{rep}(A)$ 为满足 I 中关系的 Q 的有限维表示范畴，并将 $\mathrm{rep}(A)$ 等同于 A 上有限维左模的 $\mathrm{mod}(A)$。设 $\mathrm{proj}(A)$ 为投射 A-模的子范畴。用 $\mathrm{proj.dim}_A M$（相应地，$\mathrm{inj.dim}_A M$）表示一个 A-模 M 的投射（相应地，内射）维数。

对于表示 $V=(V_i,V_h)_{i\in\mathbb{I},h\in Q_1}$，向量 $\mathbf{d}=\mathrm{dim}V:=(\mathrm{dim}_{\mathbf{k}}V_i)_{i}\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 称为 V 的维数向量。对于维数向量 $\mathbf{d}$，令 $\mathrm{rep}(\mathbf{d}\ A)$ 为维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 A-模的簇。令 $G_{\mathbf{d}}:=\prod_{i\in\mathbb{I}}$一般线性群$(d_i,\mathbf{k})$。群 $G_{\mathbf{d}}$ 通过共轭作用在 $\mathrm{rep}(\mathbf{d}\ A)$ 上：

$$(g_i)_{i\in\mathbb{I}}\cdot(V_i,V_h)=(V_i,g_{\mathtt{t}(h)}V_\alpha g_{\mathtt{s}(h)}^{-1}),\quad \forall(V_i,V_h)\in\mathrm{rep}(\mathbf{d},A).$$

令 $\mathfrak{O}_V$ 为 V 的 $G_{\mathbf{d}}$-轨道。

令 S_i 为对应于每个 $i\in\mathbb{I}$ 的（1 维）单 A-模。$\mathrm{mod}(A)$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{mod}(A))$ 是由 S_i $(i\in\mathbb{I})$ 生成的自由阿贝尔群。用 M 表示 M 在 $K_0(\mathrm{mod}(A))$ 中的类。我们将 $K_0(\mathrm{mod}(A))$（特别是 $K_0(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))$）与根格 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}=\oplus_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{Z}\alpha_i$（见第 2 节.1）等同，方法是将 $\widehat{S_i}$ 与简单根 α_i 等同，并将任意 $M\in\mathrm{mod}(A)$ 的 $\widehat{M}$ 与其维数向量 $\mathrm{dim}M$ 等同。

设 $\langle-,-\rangle_Q$ 为 Q 的欧拉形式。欧拉形式可下降到 Grothendieck 群$K_0(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))$。记 $(-,-)_Q: K_0(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))\times K_0(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q))\to\mathbb{Z}$ 为对称化欧拉形式，其定义为 $(\alpha,\beta)_Q=\langle\alpha,\beta\rangle_Q+\langle\beta,\alpha\rangle_Q$。

令 $\mathcal{D}^b(A)$ 为带悬移函子 Σ 的有界导出范畴。$\mathrm{mod}(A)$ 的奇异范畴 $\mathcal{D}_{sg}(A)$ 是 $\mathcal{D}^b(A)$ 对由具有有限投射维数的模生成的厚子范畴取 Verdier商所得。记 $\mathrm{Gproj}(A)$ 为 Gorenstein投射 A-模的（正合）子范畴。

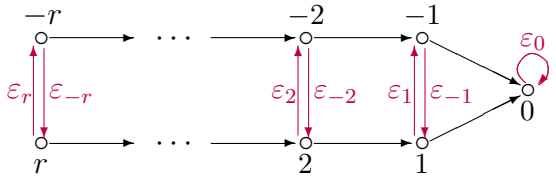
3.2. $\imath$箭图与双重结构。 将 Q 的对合定义为箭图 Q 的自同构 ϱ，满足 $\varrho^2=\mathrm{Id}$。Q 的对合 ϱ 诱导出路径代数 $\mathbf{k}Q$ 上的对合，仍记为 ϱ。带有对合 ϱ 的箭图 (Q,ϱ) 称为 $\imath$箭图。本文聚焦于 Dynkin箭图。对于 $\imath$箭图 (Q,ϱ)，$\imath$箭图代数 $\Lambda^\imath$ 在 [LW22a] 中引入，可用某个箭图 Q 及其容许理想 I 来描述，使得 $\Lambda^\imath\cong\mathbf{k}Q/I$；参见 [LW22a，命题 2.6]。我们回顾如下：Q 和 I。

(i)Q 由 Q 构造而成：若满足 $\varrho i=i$，则在顶点 $i\in Q_0$ 处添加一个环 ε_i；若满足 $\varrho i\neq i$，则对每个 $i\in Q_0$ 添加一支箭 $\varepsilon_i: i\to\varrho i$；(ii) I 由以下关系生成：(1)（幂零关系）对任意 $i\in\mathbb{I}$，有 $\varepsilon_i\varepsilon_{\varrho i}$；(2)（交换关系）对 Q_1中的任意箭 $\alpha: j\to i$，有 $\varepsilon_i\alpha-\varrho(\alpha)\varepsilon_j$。

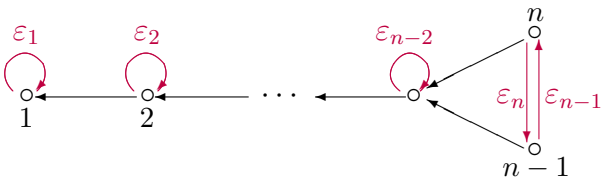
我们知道 $\Lambda^\imath$ 是一个1-戈伦斯坦代数。

以下箭图是用于描述 Q 与 $\imath$箭图代数$\Lambda^\imath$ 的箭图示例，这些代数 $\imath$与非分裂 ADE 型箭图相关；参见 [LW22a]。

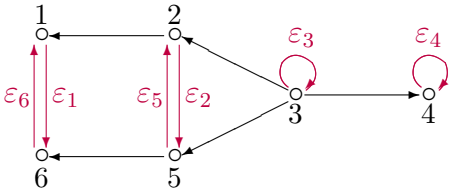
(3.1)



(3.2)



(3.3)



例 *3.1*（$\imath$对角型箭图）。设 Q 为任意一个箭图，并且 $Q^{\mathrm{dbl}} = Q \sqcup Q^\diamond$，其中 $Q^\diamond$ 是 Q 的一个相同副本，其顶点集为 $\{i^\diamond \mid i \in Q_0\}$，箭集为 $\{\alpha^\diamond \mid \alpha \in Q_1\}$。我们令 *swap* 为 Q^{dbl} 的对合，由 $\mathit{swap}(i) = i^\diamond$ 唯一确定，其中$i \in Q_0$任意。于是 $(Q^{\mathrm{dbl}}, \mathit{swap})$ 是一个 $\imath$箭图，其 $\imath$箭图代数记作 Λ；参见 [*LW22a*，例 *2.*10]。

根据 [LW22a，推论 2.12], $\mathbf{k}Q$ 自然地既是一个子代数，也是一个 $\Lambda^\imath$的商代数。将 $\mathbf{k}Q$ 视为 $\Lambda^\imath$ 的子代数，我们得到一个限制函子

$$\mathrm{res} : \mathrm{mod}(\Lambda^\imath) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q).$$

将$\mathbf{k}Q$ 视为 $\Lambda^\imath$ 的商代数，我们得到一个拉回函子

$$\iota : \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda^\imath). \tag{3.4}$$

对于每个 $i \in Q_0$，定义一个$\mathbf{k}$-代数（可视为 $\Lambda^\imath$ 的子代数）

$$\mathbb{H}_i := \begin{cases} \mathbf{k}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^2) & \text{if } \varrho i = i, \\ \mathbf{k}(\ i \underset{\varepsilon_{\varrho i}}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} \varrho i\ )/(\varepsilon_i\varepsilon_{\varrho i}, \varepsilon_{\varrho i}\varepsilon_i) & \text{if } \varrho i \neq i. \end{cases} \tag{3.5}$$

注意，对于任意 $i \in Q_0$，都有 $\mathbb{H}_i = \mathbb{H}_{\varrho i}$。

为 $\mathbb{I} = Q_0$ 上的每个 ϱ-轨道选取一个代表元，并令

$$\mathbb{I}_\varrho = \{\text{the chosen representatives of } \varrho\text{-orbits in } \mathbb{I}\}. \tag{3.6}$$

定义 $\Lambda^\imath$ 的以下子代数:

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}_\varrho} \mathbb{H}_i. \tag{3.7}$$

记

$$\mathrm{res}_{\mathbb{H}} : \mathrm{mod}(\Lambda^\imath) \longrightarrow \mathrm{mod}(\mathbb{H}) \tag{3.8}$$

为自然限制函子。

对于 $i \in \mathbb{I}$, 定义 $\mathbb{H}_i$ 上的不可分解模

$$\mathbb{K}_i = \begin{cases} \mathbf{k}[\varepsilon_i]/(\varepsilon_i^2), & \text{if } \varrho i = i; \\ \mathbf{k} \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \mathbf{k} \ \text{ on the quiver } \ i \underset{\varepsilon_{\varrho i}}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} \varrho i\ , & \text{if } \varrho i \neq i. \end{cases} \tag{3.9}$$

那么, 对于 $i \in Q_0$, $\mathbb{K}_i$ 可视为一个 $\Lambda^\imath$-模。

引理 *3.2*（[*LW22a*, 命题 *3.9*]）。对于任意 $M \in$*mod*($\Lambda^\imath$), 以下条件等价: *(i)* $M < \infty$ 的投射维数有限; *(ii)* $M < \infty$ 的内射维数有限; *(iii)* $M \leq 1$ 的投射维数有限; *(iv)* $M \leq 1$ 的内射维数有限; *(v)* $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M)$ 作为 $\mathbb{H}$-模是投射的。

3.3. $\imath$霍尔代数。设 $\mathcal{A}$为一个本质小的正合范畴, 其定义在有限域$\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$上。假设 $\mathcal{A}$ 具有有限维的态射空间和扩张空间:

$$|\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)| < \infty, \quad |\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B)| < \infty, \ \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

我们用 Iso($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 中对象的同构类集合。给定对象 X、Y、$Z \in \mathcal{A}$, 定义 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Z)_Y \subseteq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Z)$ 为参数化中间项同构于 Y 的扩张的子集。我们将 Ringel-Hall 代数（亦称 Hall 代数） $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 定义为 $\mathbb{Q}$-向量空间, 其基由 $\mathcal{A}$ 中对象 X 的同构类 $[X]$ 构成, 乘法定义如下:

$$[X] \cdot [Z] = \sum_{[Y] \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} G^Y_{XZ}[Y], \ \text{where } G^Y_{XZ} := \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Z)_Y|}{|\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)|}. \tag{3.10}$$

众所周知 l k该代数 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 是结合的且含幺; 参见 [Rin90、Br13]。

令 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 为带有基的（由 isoclasses 根。我们定义扭曲 Hall 代数 的$\mathbb{Q}(\mathrm{v}^{1/2})$-代数, 其乘法由欧拉形式 $\langle -、-\rangle_Q$ 扭曲而成:

$$[M] * [N] = \mathrm{v}^{\langle M,N\rangle_Q}[M] \cdot [N] = \mathrm{v}^{\langle M,N\rangle_Q} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^\imath}(M, N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\Lambda^\imath}(M, N)|}[L].$$

在此处及下文中, 稍微滥用一下记号, 我们对任意 mod(), 设 ,: res , res 。

令 为由所有差值张成的 ({}) 的子空间（理想）

$$[M] - [N], \ \text{if } \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) = \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(N) \text{ and } M \cong N \text{ in } \mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath). \tag{3.11}$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$记 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$: $= \mathcal{H}(\Lambda^\imath)/\mathcal{I}$。

Let

$$\mathcal{S} := \{a[K] \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho) \mid a \in \mathbb{Q}(\mathrm{v}^{1/2})^\times, \mathrm{proj.dim}\, K \leq 1\}. \tag{3.12}$$

根据 [LW22a], ， $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)/\mathcal{I}$ 关于 $\mathcal{S}$ 的右局部化存在，并将被记~为 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$或 $\mathcal{SDH}(\Lambda^\imath)$，称为 $\imath$mod$(\Lambda^\imath)$的Hall 代数（亦称扭曲半导出林格尔–霍尔代数）。

^对于任意 $[\mathbb{K}_i] * [\mathbb{K}_j] = [\mathbb{K}_j] * [\mathbb{K}_i] = [\mathbb{K}_i \oplus \mathbb{K}_j]$，在 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 中成立；参见 $i, j \in \mathbb{I}$；参见 [LW22a，引理 4。7]。对于任意 $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，我们在 $\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 中定义：

$$[\mathbb{K}_\alpha] = [\oplus_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{K}_i^{\oplus a_i}] = \prod_{i\in\mathbb{I}} [\mathbb{K}_i]^{a_i}.$$

~类似地，对于 $[\mathbb{K}_\alpha]$，可以在 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 中定义。

~**引理 3.3** (参见 [LW22a，命题 4。9])。 *(1)* 代数 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 具有如下（*Hall*）基：

$$\{[X] * [\mathbb{K}_\alpha] \mid X \in \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda^\imath), \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}. \tag{3.13}$$

^*(2)* 代数 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 具有如下（*Hall*）基：

$$\{[X] * [\mathbb{K}_\alpha] \mid X \in \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q) \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda^\imath), \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}\}. \tag{3.14}$$

~ ~设 $\mathcal{T}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 是由 $[\mathbb{K}_\alpha], \alpha \in K_0$（模$(\mathbf{k}Q)$生成的 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 的子代数；对于 $i \in \mathbb{I}$，它是关于 $[\mathbb{K}_i]$ 的 Laurent 多项式代数。类似地，对于 $i \in \mathbb{I}$，可以定义 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 的子代数~ ~$\mathcal{T}(\mathbf{k}Q, \varrho)$，它是关于 $[\mathbb{K}_i]$ 的多项式代数。

引理 3.4 (参见 [LW22a，定理 7。7])。 设 (Q, ϱ) 是一个 *Dynkin* $\imath$箭图。则我们有如下同构 $\widetilde{\psi}$： ~$\mathbf{U}^\imath|_{v=\mathbb{v}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho)$ 的 $\mathbb{Q}(\mathbb{v}^{1/2})$-代数，它将

$$B_i \mapsto \mathbb{v}^{-\frac{1}{2}}[S_i], \qquad \tilde{k}_i \mapsto \begin{cases} [\mathbb{K}_i] & \text{if } \varrho i \neq i, \\ \mathbb{v}^{-1}[\mathbb{K}_i] & \text{if } \varrho i = i. \end{cases} \tag{3.15}$$

类似地，我们有 $\mathbb{Q}(\mathbf{v}^{1/2})$-代数的同构

$$\widehat{\psi} : \widehat{\mathbf{U}}^\imath|_{v=\mathbb{v}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q, \varrho).$$

~如例 2.2 所示，我们可以将量子群 $\mathbf{U}$ 视为一个 $\imath$量子群。利用~例3.1，我们可以重新表述 Bridgeland 的实现 $\mathbf{U}$。

引理3.5 (Bridgeland定理的重新表述)。 设 Q 是一个 *Dynkin* 箭图。则我们有如下同构 $\mathbb{Q}(\mathbb{v}^{1/2})$-代数

$$\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathbf{U}}|_{v=\mathbb{v}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap}),$$
$$E_i \mapsto \mathbb{v}^{-\frac{1}{2}}[S_i], \qquad F_i \mapsto \mathbb{v}^{-\frac{1}{2}}[S_{i^\diamond}], \qquad K_i \mapsto [\mathbb{K}_{i^\diamond}], \qquad K_i' \mapsto [\mathbb{K}_i].$$

类似地，我们有 $\mathbb{Q}(\mathbf{v}^{1/2})$-代数的同构

$$\widehat{\psi} : \widehat{\mathbf{U}}|_{v=\mathbb{v}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q^{\mathrm{dbl}}, \mathrm{swap}).$$

3.4. 泛型 $\imath$Hall 代数。对于 Dynkin $\imath$箭图 (Q,ϱ)，我们回顾 [LW22a, §9.3] 中定义的泛型 $\imath$ Hall 代数。回顾一下，Φ^+ 是正根集合。对于任意 $\beta\in\Phi^+$，记 $M_q(\beta)$ 为其对应的不可分解 $\mathbf{k}Q$-模，即 $\dim M_q(\beta) = \beta$。令 $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}(Q)$ 为函数 $\lambda\colon \Phi^+\to\mathbb{N}$ 的集合。那么这些模

$$M_q(\lambda) := \bigoplus_{\beta\in\Phi^+} \lambda(\beta) M_q(\beta), \qquad \text{for } \lambda\in\mathfrak{P}, \tag{3.16}$$

给出一组完备的$\mathbf{k}Q$-模同构类。

对于 $(\alpha,\nu),(\beta,\mu)\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\times\mathfrak{P}$，存在一个多项式 $\boldsymbol{\varphi}^{\lambda,\gamma}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(v)\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$，使得

$$\big([\mathbb{K}_\alpha] * [M_q(\mu)]\big) * \big([\mathbb{K}_\beta] * [M_q(\nu)]\big) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{P},\gamma\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} \boldsymbol{\varphi}^{\lambda,\gamma}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(\mathbb{v})[\mathbb{K}_\gamma] * [M_q(\lambda)]$$

在 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q,\varrho)$ 中。泛型 Hall 代数 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Q}\ \varrho)$ 定义为以 $\{\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\lambda \mid \alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$ 为基的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-空间，其乘法为

$$(\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\mu) * (\mathbb{K}_\beta * \mathbf{u}_\nu) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{P},\gamma\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} \boldsymbol{\varphi}^{\lambda,\gamma}_{\mu,\alpha;\nu,\beta}(v)\mathbb{K}_\gamma * \mathbf{u}_\lambda. \tag{3.17}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\varrho)$，我们也可以类似地构造其泛型版本 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$，并以 $\{\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\lambda \mid \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$ 为基。

由引理3.4，另见 [LW22a，定理 9。8]，，我们得到 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数的同构

$$\widetilde{\psi}:\widetilde{\mathbf{U}}^\imath\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho), \qquad \widehat{\psi}:\widehat{\mathbf{U}}^\imath\longrightarrow\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho),$$
$$\widetilde{\psi}:\widetilde{\mathbf{U}}\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}), \qquad \widehat{\psi}:\widehat{\mathbf{U}}\longrightarrow\widehat{\mathcal{H}}(Q^{\mathrm{dbl}},\mathrm{swap}).$$

3.5. **对偶典范基 $\imath$霍尔代数**。设 $\mathcal{Z}=\mathbb{Z}[v^{1/2},v^{-1/2}]$ 和 $\mathcal{Z}_{\mathbb{v}}=\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{1/2},\mathbb{v}^{-1/2}]$。我们回顾 $\imath$在 [LP25]. 中定义的霍尔代数的整形式和对偶典范基

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$整形式 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathbb{v}}}$ 和 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\varrho)_{\mathcal{Z}_{\mathbb{v}}}$ 是自由的 $\mathcal{Z}_{\mathbb{v}}$-模，其基分别由

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$(3.13) 和 (3.14) 给出。此外，代数 $\mathcal{H}(\mathbf{Q}\ \varrho)_{\mathcal{Z}}$（分别为 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$）定义为具有基 $\{\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\lambda \mid \alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$（分别为$\{\mathbb{K}_\alpha * \mathbf{u}_\lambda \mid \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$）的自由 $\mathcal{Z}$-模，其乘法如 (3.17) 所示。

利用 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数的同构

$$\widetilde{\psi}:\widetilde{\mathbf{U}}^\imath\to\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho), \qquad \widehat{\psi}:\widehat{\mathbf{U}}^\imath\to\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho),$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们可以将 $\mathbf{U}^\imath$（分别为 $\mathbf{U}^\imath$）的整形式定义为 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ $_{\mathcal{Z}}$（分别为$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$$\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$）的原像，记作 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$（分别为 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$）。它们都是自由的 $\mathcal{Z}$-模，且$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$与定向无关；见 [LP25，推论 5.10]。注意，$\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}=\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}\cap\mathbf{U}^\imath$。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\mathcal{H}(Q,\varrho)$（以及 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$）的条形对合可以类似于 $\mathcal{H}(Q)$定义，方法是令

$$\overline{\mathbf{u}_{\alpha_i}} = v^{-1}\mathbf{u}_{\alpha_i}, \quad \overline{\mathbb{K}_{\alpha_i}} = \mathbb{K}_{\alpha_i}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理 3.6** ([LP25])。对 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$（分别对 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$）的条形对合保持 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$$\widehat{\ }$（分别保持 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$）。

按照 [BG17]，我们定义 $\mathcal{T}(Q,\varrho)$ 在 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 上的作用如下：

$$\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{u}_\lambda = v^{\frac{1}{2}(\alpha-\varrho\alpha,\underline{\dim} M_q(\lambda))_Q}\mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\lambda.$$

对于 $\lambda\in\mathfrak{P}$，设

$$\mathfrak{U}_\lambda = v^{-\dim \mathrm{End}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\lambda))+\frac{1}{2}\langle M_q(\lambda),M_q(\lambda)\rangle_Q}\mathfrak{u}_\lambda. \tag{3.18}$$

类似地，我们在 $\mathbb{N}^{\mathbb{I}}\times\mathfrak{P}$ 上定义一个偏序：若 $\alpha+\varrho(\alpha)+\dim M_q(\lambda)=\beta+\varrho(\beta)+\dim M_q(\mu)$，且 $\alpha\prec\beta$（即 $\alpha\neq\beta$和 $\beta-\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$）或 $\alpha=\beta$和 $\lambda\prec\mu$，则称 $(\alpha,\lambda)\prec(\beta,\mu)$。下面的定理是 [LP25] 的主要结果。

定理 3.7 ([LP25])。对于每个 $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda\in\mathfrak{P}$，都存在唯一的元素 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}\in\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 使得 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}=\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}$ 并且

$$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}-\mathbb{K}_\alpha\diamond\mathfrak{U}_\lambda\in\sum_{(\beta,\mu)} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta\diamond\mathfrak{U}_\mu.$$

此外，$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}$ 满足

$$\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}-\mathbb{K}_\alpha\diamond\mathfrak{U}_\lambda\in\sum_{(\alpha,\lambda)\prec(\beta,\mu)} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\cdot\mathbb{K}_\beta\diamond\mathfrak{U}_\mu,$$

以及 $\mathfrak{L}_{\alpha,\lambda}=\mathbb{K}_\alpha\diamond\mathfrak{L}_{0,\lambda}$。

由于最后一个性质，我们常写作 $\mathfrak{L}_\lambda:=\mathfrak{L}_{0,\lambda}$，对于 $\lambda\in\mathfrak{P}$，并用 $\{\mathbb{K}_\alpha\diamond\mathfrak{L}_\lambda\mid\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$ 表示定理 3.7中构造的基。这称为 $\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho)$ 的对偶典范基。(Q,ϱ) 的对偶典范基定义为 $\{\mathbb{K}_\alpha\diamond\mathfrak{L}_\lambda\mid\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}},\lambda\in\mathfrak{P}\}$。

4. NKS quiver varieties for $\imath$quivers

本节回顾 Nakajima-Keller-Scherotzke 范畴（简称 NKS 范畴）以及 $\imath$LW21b [中给出的 Dynkin]箭图的 NKS 箭簇。整个本节中，我们假设 k 是一个特征为零的代数闭域，并用 $\mathrm{mod}(k)$ 表示 k-向量空间的范畴。对于一个 k-线性范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$–模的范畴，即 k-线性反变函子 $\mathcal{C}\to\mathrm{mod}(k)$。此外，对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}_0$ 表示 $\mathcal{C}$ 的对象集合。

4.1. NKS 范畴。 令 $Q=(Q_0=\mathbb{I},Q_1)$ 为一个 Dynkin箭图，并设

$$\overline{Q}_1=\{\bar{h}:j\to i\mid(h:i\to j)\in Q_1\}.$$

定义 Q 的重复箭图 $\mathbb{Z}Q$ 如下：

▷顶点集合为 $\{(i,p)\in Q_0\times\mathbb{Z}\}$；

▷给定一条箭 $(\alpha,p):(i,p)\to(j,p)$ 和一条箭 $(\bar{\alpha},p):(j,p-1)\to(i,p)$，对于 Q 中任意一条箭 $\alpha:i\to j$ 以及任意一个顶点 (i,p)，均如此。

定义 $\mathbb{Z}Q$ 的自同构 τ 为向左平移一个单位，即对所有 $(i,p)\in Q_0\times\mathbb{Z}$，有 $\tau(i,p)=(i,p-1)$。

通过轻微的记号滥用，对于 $\mathbb{Z}Q$中与 $\beta:y\to x$ 相关联者，我们用 β 表示从 $\tau x\to y$出发的箭。设 $k(\mathbb{Z}Q)$为 $\mathbb{Z}Q$的网格范畴，即对象由 $\mathbb{Z}Q$的顶点给出，而态射是路径的 k-线性组合模

由网格关系 $R_x := \sum_{\alpha: y\to x} \alpha\bar{\alpha}$, 张成的理想，其中求和遍历 $\mathbb{Z}Q$ 中所有终止于 x的箭。

根据Happel的一个定理， [Ha88], 存在一个等价

$$H : k(\mathbb{Z}Q) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Ind} \mathcal{D}_Q, \tag{4.1}$$

其中，$\operatorname{Ind} \mathcal{D}_Q$ 表示有界导出范畴 $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}^b(kQ)$中不可分解对象所构成的范畴。利用这个等价，我们一次性地将 $\mathbb{Z}Q$ 的顶点标记为 $\mathcal{D}_Q$中不可分解对象的同构类。注意， τ 在 $\mathbb{Z}Q$ 上的作用对应于AR-平移在 $\mathcal{D}_Q$上的作用，这也解释了记号 τ。

Let

$$C = \{\text{the vertices labeled by } \Sigma^j \mathbb{S}_i, \text{ for all } i \in Q_0 \text{ and } j \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.2}$$

令 $\mathbb{Z}Q_C$ 为由 $\mathbb{Z}Q$ 构造得到的箭图：在每个顶点 $c \in C$ 处添加一个记作 σc 的新对象，并附上箭 $\tau c \to \sigma c$ 和 $\sigma c \to c$；对于 $c \in C$，我们将 σc称为冻结顶点。

分次*NKS*范畴 $\mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}$ 定义为一个 k-线性范畴，其 th

- ▷ 对象： $\mathbb{Z}Q_C$的顶点；▷ 态射： k-线性组合的 $\mathbb{Z}Q_C$ 中的路径，模去由网格关系$\sum_\alpha$ 生成的理想: $_{y\to x}\, \alpha\bar{\alpha}$，其中求和遍历 $\mathbb{Z}Q_C$ 中所有以$x \in \mathbb{Z}Q$ 为终点的箭（若满足 $x \in C$，也包括新箭 $\sigma x \to x$ ）。

这些范畴是在 [KS16中提出的，Sch19]；此处及下文中，NKS 是 Nakajima-Keller-Scherotzke 的缩写。KS [的工作16] 则受到 [Na01、Na04、HL15、LeP13]的启发；另参见 [Q16]。

注4.1。设 Q 是一个 Dynkin箭图。在 Nakajima 最初的构造 [Na01中， Na04],分次 Nakajima 范畴 $\mathcal{R}^{\mathrm{gr}}$ 以 C 的所有顶点 $\mathbb{Z}Q$组成的集合类似地定义。我们用 $\mathcal{S}^{\mathrm{gr}}$ 表示由所有 $\mathcal{R}^{\mathrm{gr}}$ 构成的 σc满子范畴 $c \in \mathbb{Z}Q$。

设 (Q, ϱ) 是一个 Dynkin ι箭图。设 $F : \mathcal{D}_Q \to \mathcal{D}_Q$ 是由 $\mathbb{Z}Q$ 的同构 F 诱导的三角同构；(4.1)。本文中，我们只考虑 $F = \Sigma^2$ 和 $F = F^\iota = \Sigma \circ \widehat{\varrho}$。注意，(4.2) 中的子集 C 在 F 下不变。 $\mathbb{Z}Q$ 的同构 F 可通过令 $F(\sigma c) = \sigma(Fc)$（对任意 $c \in C$）唯一提升为 $\mathbb{Z}Q_C$ 的同构；进而，网格范畴 $k(\mathbb{Z}Q)$ 的函子 F 可唯一提升至 $\mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}$ ，并仍记作 F。

Let

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{C,F} := \mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}/F,$$

并令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{C,\ F}$ 为 $\mathcal{R}$ 的满子范畴，由所有 σc ($c \in C$组成，遵循 [Sch19]。那么 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别称为正则*NKS*范畴和奇异*NKS*范畴，对应于这一对（F， C）。商范畴

$$\mathcal{P} := \mathcal{R}/(\mathcal{S}),$$

与 $k(\mathbb{Z}Q/F)$ 等价的称为 前射影 *NKS* 范畴。根据我们的假设，$\mathcal{D}_Q/F$ 是一个三角范畴，且 $\operatorname{Ind} \mathcal{D}_Q/F \simeq \mathcal{P}$。

4.2. **NKS 箭簇**。设 $\mathcal{S}$ 为一个奇异NKS范畴， $\mathcal{R}$ 为其对应的正则NKS范畴。若一个 $\mathcal{R}$-模 M 的 soc(M) 的支撑包含于 $\mathcal{S}_0$ 中，则称其为稳定（分别地，若 top(M) 的支撑包含于 $\mathcal{S}_0$ 中，则称其为余稳定）。若一个模既稳定又余稳定，则称其为双稳定。

令$\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 和$\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$ 为维数向量（支撑有限）。用 rep($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ $\mathcal{R}$)表示维数向量为（$\mathbf{v}, \mathbf{w}$）的 $\mathcal{R}$-模簇。令 $\mathbf{1}_x$ 表示 $x \in \mathcal{R}_0$的特征函数，它也视为支撑于 x的单位向量。令$G_{\mathbf{v}} := \prod_{x\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ GL($\mathbf{v}(x)$ k)。

定义 4.2。 NKS箭丛簇，或简称NKS簇， $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是商$\mathcal{S}t(\mathbf{v}, \mathbf{w})/G_{\mathbf{v}}$，其中 $\mathcal{S}t(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是 $\mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 中所有维数向量为($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$)的稳定 $\mathcal{R}$-模所构成的子集。定义仿射簇

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) := \mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})/\!\!/G_{\mathbf{v}} \tag{4.3}$$

为范畴商，其坐标代数为 $k[\mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})]^{G_{\mathbf{v}}}$。

那么 $\mathcal{M}$($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) 是一个纯维、光滑的拟射影簇；参见 [Sch19，定理 3。2]。

我们在集合 $\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0}$ 上定义偏序 $\leq$ 如下:

$$\mathbf{v}' \leq \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v}'(x) \leq \mathbf{v}(x), \forall x \in \mathcal{R}_0. \text{ Moreover, } \mathbf{v}' < \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v}' \leq \mathbf{v} \text{ and } \mathbf{v}' \neq \mathbf{v}. \tag{4.4}$$

将 $\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0$ 上的维数向量视为 $\mathcal{R}_0$ 上的维数向量（通过零延拓），我们通过限制在集合 $\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 上得到偏序 $\leq$。

对于 $\mathbf{v}'$,$\mathbf{v}$ $\in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$，其中 $\mathbf{v}' \leq \mathbf{v}$ 且 $\mathbf{w}$ $\in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，存在一个包含

$$\mathrm{rep}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})$$

通过与维数向量为 $\mathbf{v}$ $-\mathbf{v}'$ 的半单模取直和，可得一个包含

$$\mathrm{rep}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R})/\!\!/G_{\mathbf{v}'} \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})/\!\!/G_{\mathbf{v}}.$$

定义仿射簇

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{w}, \mathcal{R}) := \operatorname*{colim}_{\mathbf{v}} \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

为 $\mathcal{M}_0$($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) 沿这些包含关系的余极限。于是投影映射

$$\pi : \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longrightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \tag{4.5}$$

它将 $G_{\mathbf{v}}$稳定的 $\mathcal{R}$模的轨道 M 映射到 $G_{\mathbf{v}}$的闭包中唯一的闭 $G_{\mathbf{v}}M$轨道，是适当映射；参见 [Sch19，定理 3.5]。

记 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) $\subset \mathcal{M}$($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) 为由稳定模的闭 $G_{\mathbf{v}}$-轨道之并组成的开子集，那么

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \pi(\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$$

是 $\mathcal{M}_0$($\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$) 的开子集。 [Sch19，引理 3.4] 表明 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 除有限多个维数向量$\mathbf{v}$外均为零。于是 π 诱导出一个分层

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{4.6}$$

分解为有限个光滑局部闭层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}$ ($\mathbf{v}$， $\mathbf{w}$)；参见 [Sch19，定理 3。5] 及其证明。

设 res : mod($\mathcal{R}$) $\to$ mod($\mathcal{S}$) 为限制函子。那么 res 诱导出簇之间的态射

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}_0(\mathbf{w}) \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}), \qquad \mathrm{res} \circ \pi : \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}).$$

给定 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0}$，我们定义一个量子 Cartan 矩阵（参见 [Sch19]）

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_q\mathbf{v} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, \\ &(\mathcal{C}_q\mathbf{v})(x) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{v}(\tau x) - \sum_{y \to x} \mathbf{v}(y), \quad \text{for } x \in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中求和遍历所有箭 $y \to x$，即 $\mathcal{R}$ 中满足 $y \in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0$ 者。给定 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，定义一个维数向量

$$\sigma^*\mathbf{w} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \mathbf{w}(\sigma x), & \text{if } x \in C, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0}$，定义维数向量

$$\tau^*\mathbf{v} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \mapsto \mathbf{v}(\tau x).$$

由 [Sch19，命题 4.6]，我们得到如下更精确的分层形式，其对象为 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w})$

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}: \sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{4.8}$$

定义 4.3. 一对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，即维数向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0}$ 与 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，称为*l*-支配，如果 $\sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0$，并且 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 称为强 *l*-支配，如果它是 *l*-支配并且 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \neq \emptyset$.

回顾 $\imath$箭图代数 Λ（对角型，见例 3.1）。

定义 4.4 (NKS 正则/奇异范畴)。 设 Q 是一个 *Dynkin*箭图。记 $\mathcal{R}$和 $\mathcal{S}$ 为与容许对 $(F = \Sigma^2, C)$相关联的正则和奇异 *NKS* 范畴。

命题 *4.5*（参见 [*LW21b*，命题 *3.2*]）。设 Q 是一个 *Dynkin*箭图。设 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$ 为定义 *4.4* 中的正则和奇异 *NKS* 范畴。则 *Gproj*(Λ) 等价于 *proj*($\mathcal{R}$)，*proj*(Λ) 与 $\mathcal{S}$ *Morita* 等价，并且作为 *Frobenius* 范畴，有 *Gproj*(Λ) $\simeq$*Gproj*($\mathcal{S}$) $\simeq$*proj*($\mathcal{R}$)。

定义4.6 ($\imath$NKS 正则/奇异范畴)。 设 (Q, ϱ) 是一个 *Dynkin* $\imath$箭图。记 $\mathcal{R}^\imath$ 和 $\mathcal{S}^\imath$ 为与容许对$(F^\imath, C)$相关联的正则和奇异 *NKS* 范畴，其中

$$F^\imath = \Sigma\widehat{\varrho}, \quad \textit{and } C = \{\textit{the vertices labeled by } \Sigma^j \mathcal{S}_i, \textit{ for all } i \in Q_0 \textit{ and } j \in \mathbb{Z}\}.$$

命题*4.7*（参见 [*LW21b*，定理*3.6*]）。设 (Q, ϱ) 是一个 *Dynkin* $\imath$箭图。设 $\mathcal{R}^\imath$ *and*$\mathcal{S}^\imath$ 为定义*4.6*中的正则和奇异 *NKS* 范畴。则 *Gproj*($\Lambda^\imath$) 等价于 *proj*($\mathcal{R}^\imath$)，*proj*($\Lambda^\imath$) 与 $\mathcal{S}^\imath$ *Morita* 等价，并且存在 *Frobenius* 范畴的等价 *Gproj*($\Lambda^\imath$) $\simeq$*Gproj*($\mathcal{S}^\imath$) $\simeq$ *proj*($\mathcal{R}^\imath$)。

4.3. **分层函子**。由于限制函子 $\mathrm{res}:\mathrm{mod}(\mathcal{R})\to\mathrm{mod}(\mathcal{S})$ 是一个局部化函子，因此它有左伴随函子和右伴随函子，分别记为 $K_L$and K_R。中间扩张 $K_{LR}:\mathrm{mod}(\mathcal{S})\to\mathrm{mod}(\mathcal{R})$ 是典范映射 $K_L\to K_R$ 的像。注意，在这种情况下，K_L 是右正合的，K_R 是左正合的，K_{LR} 保持单态射和满态射（但一般而言，它并非正合）。

引理 4.8 ([Sch19, 引理 2.12, 引理 3.8])。一个 $\mathcal{R}$-模 M 是双稳定的，当且仅当$K_{LR}(\mathrm{res}(M))\cong M$。此外，我们有 $N\in\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 当且仅当 维数 $K_{LR}(M)=(\mathbf{v},\mathbf{w})$。——

引理 4.9。对于任意正合序列 $\mathcal{S}$-模 $0\to P\to N\to M\to 0$，其中 P 具有有限投射维数，我们有

$$\underline{\dim}\,K_{LR}(N)=\underline{\dim}\,K_{LR}(M)+\underline{\dim}\,K_{LR}(P),$$

证明。回忆 $K_L(P)\cong K_{LR}(P)\cong K_R(P)$，由 [LW21b，推论 4。3]。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & K_L(P) & \longrightarrow & K_L(N) & \longrightarrow & K_L(M) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_{LR}(P) & \longrightarrow & K_{LR}(N) & \longrightarrow & K_{LR}(M) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_R(P) & \longrightarrow & K_R(N) & \longrightarrow & K_R(M) & &
\end{array}$$

其中第一行和最后一行正合，中间一行除 $K_{LR}(N)$ 处外正合。通过简单的图表追踪可知，中间一行在 $K_{LR}(N)$ 处也正合，因此得证。□

4.4. **量子 Grothendieck 环**。在本小节中，我们假设 $\mathcal{S},\mathcal{R}$ 是定义 4.4 和定义 4.6 中定义的 NKS 范畴4.4 和定义 4.6。根据 [LW21b，引理 3.14], 我们知道 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w})\cong\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 对任意维数向量 $\mathbf{w}$成立，并在下文中将它们视为相同。

设 X 为一个代数簇。我们用 $\mathcal{D}_c(X):=\mathcal{D}_c^b(X)$ 表示 X上的可构造层的有界导出范畴。设 $f:X\to Y$是代数簇之间的一个态射。由此诱导出函子 $f^*:\mathcal{D}_c(Y)\to\mathcal{D}_c(X)$、$f_*:\mathcal{D}_c(X)\to\mathcal{D}_c(Y)$ 和 $f_!:\mathcal{D}_c(X)\to\mathcal{D}_c(Y)$（紧支撑直接像）。

我们按照 [VV03] 回顾量子 Grothendieck 环及其卷积乘积；另见 [Na01、Na04、Q16]。

对于 $\mathcal{S}$的任意两个维数向量 α，β，设 $V_{\alpha+\beta}$ 为一个分次维数为 $\alpha+\beta$的向量空间。固定一个分次维数为 α的向量子空间 $W_0\subset V_{\alpha+\beta}$，并令

$$F_{\alpha,\beta}:=\{y\in\mathrm{rep}(\alpha+\beta,\mathcal{S})\mid y(W_0)\subset W_0\}$$

为 $\mathrm{rep}(\alpha+\beta,\ \mathcal{S})$ 的闭子集。于是 $y\in F_{\alpha,\ \beta}$ 诱导出一个自然线性映射 $y':V/W_0\to V/W_0$，即 $y'\in\mathrm{rep}(\beta,\ \mathcal{S})$。因此我们得到如下卷积图

$$\mathrm{rep}(\alpha,\mathcal{S})\times\mathrm{rep}(\beta,\mathcal{S})\xleftarrow{p}F_{\alpha,\beta}\xrightarrow{q}\mathrm{rep}(\alpha+\beta,\mathcal{S}),$$

其中 $p(y):=(y|_{W_0},\ y')$，且 q 是自然闭嵌入。

令 $\mathcal{D}_c(\mathrm{rep}(\alpha,\ \mathcal{S}))$ 为 $\mathrm{rep}(\alpha,\ \mathcal{S})$ 上可构造层的导出范畴。我们有如下限制函子（称为余乘法），

$$\widetilde{\Delta}^{\alpha+\beta}_{\alpha,\beta}:\mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\alpha+\beta,\mathcal{S})\big)\longrightarrow\mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\alpha,\mathcal{S})\big)\times\mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\beta,\mathcal{S})\big),\quad F\mapsto p_!q^*(F). \tag{4.9}$$

选取一个集合 $\{\alpha_{\mathbf{v}}\}$，使其参数化 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 的连通分支。对于任意 l-占优对（$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$），由于 π 在正则分层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}$上的限制根据 [Sch19定义 3 是一个同胚，6], 集合 $\{\alpha_{\mathbf{v}}\}$ 自然地参数化了这个正则分层的连通分支：

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})=\bigsqcup_{\alpha_{\mathbf{v}}}\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg};\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}). \tag{4.10}$$

令 $\underline{\ }k_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 为 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 上的常值层。记 $\pi^{\mathcal{S}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\mathcal{D}_c(\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}))$（无歧义时记作 $\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})$）为沿 $\pi\colon\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\mathcal{M}_0(\mathbf{w})\cong\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 对 $k_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 的推前，并带有分次平移：

$$\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}):=\pi_!(\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})})[\dim\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})]. \tag{4.11}$$

对于强 l-占优对（$\mathbf{v},\mathbf{w}$），令 $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}(\mathbf{v},\mathbf{w})$（或 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}$）为与层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 对应的交叉上同调（简称 IC）复形，其系数为平凡局部系，即

$$\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathrm{IC}(\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}))=\bigoplus_{\alpha_{\mathbf{v}}}\mathrm{IC}(\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg};\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})). \tag{4.12}$$

我们有一个分解

$$\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sum_{\mathbf{v}':\sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}'\geq0,\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v)\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}), \tag{4.13}$$

其中，对于任意层 $\mathcal{F}$，我们用不定元 v 将 $\mathcal{F}^{\oplus m}[d]$ 记作 $mv^{-d}\mathcal{F}$ $m\in\mathbb{N}$，并且 $d\in\mathbb{Z}$（与 [LW21b], 中的定义相比，令 $v=t^{-1}$）。此外，我们有 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v)\in\mathbb{N}[v,v^{-1}]$,$a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v^{-1})=a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v)$，以及 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v};\mathbf{w}}(v)=1$。（任何满足 $f(v^{-1})=f(v)$ 的 $f(v)\in\mathbb{N}[v,v^{-1}]$ 都称为棒不变。）

对于每个 $\mathbf{w}\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，Grothendieck 群 $K_{\mathbf{w}}$(模$(\mathcal{S})$) 定义为由在（4.13）中出现的层 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 生成的自由阿贝尔群，其中 $\mathbf{v}$ 取遍各种取值。根据（4.13），它有两个特别的 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-基：

$$\begin{aligned}&\{\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})\mid\sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\geq0,\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\neq\emptyset\};\\&\{\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})\mid\sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\geq0,\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\neq\emptyset\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

考虑自由 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-模

$$K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})):=\bigoplus_{\mathbf{w}}K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})). \tag{4.15}$$

~ ~则$\{\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\}$ 在 K^{gr}(mod$(\mathcal{S})$)上诱导一个余乘法 Δ。

通过令，在 $\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 上引入双线性型 $d(\cdot,\cdot)$

$$d\big((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2)\big)=(\sigma^*\mathbf{w}_1-\mathcal{C}_q\mathbf{v}_1)\cdot\tau^*\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\cdot\sigma^*\mathbf{w}_2, \tag{4.16}$$

其中 $\cdot$ 表示标准内积，即$\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}''=\sum_{x\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}\mathbf{v}'(x)\mathbf{v}''(x)$。

利用 相同的证明 [VV03],Scherotzke-Sibilla 得到了以下结果 lt.

命题 4.10([SS16，命题 4.8]；另见 [VV03，引理 4.1],[Q16，式 (11)])。该$\widetilde{}$余乘法 Δ 是余结合的，且定义如下

$$\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\big(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})\big) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}\\ \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=\mathbf{w}}} v^{d((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2))-d((\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2),(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1))}\pi(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1)\boxtimes\pi(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2). \tag{4.17}$$

记

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}(K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})),\mathbb{Z}[v,v^{-1}]),\\ K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) &= \bigoplus_{\mathbf{w}\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}}\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})).\end{aligned} \tag{4.18}$$

于是，作为余代数的分次对偶，$K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$ 成为一个 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-代数，其乘法记作 $*$。注意，$K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$ 是一个 $\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$-分次代数（称为量子 Grothendieck 环）。它有两个特定的基

$$\begin{aligned}&\{\chi(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid \sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\geq 0, \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\neq\emptyset\},\\ &\{L(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid \sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\geq 0, \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})\neq\emptyset\},\end{aligned} \tag{4.19}$$

分别与 (4.14) 中的两个基对偶。

根据横截切片定理 [Na01，LW21b]，，出现在$\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 中的直和项是层 $\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 的平移，其中 $\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}$；参见 (4.4)。因此我们有

$$L(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1)*L(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2) = \sum_{\mathbf{v}\geq\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v)L(\mathbf{v},\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2), \tag{4.20}$$

其首项为 $c^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v)L(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)$; 此外，我们有

$$c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v)\in\mathbb{N}[v,v^{-1}], \tag{4.21}$$

$$c^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v) = v^{d((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2))-d((\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2),(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1))}. \tag{4.22}$$

4.4.1. 双框架箭图的量子 *Grothendieck* 环。我们假设 $\mathcal{S},\mathcal{R}$ 是定义 4.4 中的 NKS 范畴4.4。

回忆一下，$\mathbf{1}_x$ 表示 $x\in\mathcal{R}_0$的示性函数。定义

$$\mathbf{w}^i=\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_i}+\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathtt{S}_i},\qquad \mathbf{v}^i=\sum_{z\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}\dim\mathcal{P}(\mathtt{S}_i,z)\mathbf{1}_z,\qquad \mathbf{v}^{\Sigma i}=\Sigma^*\mathbf{v}^i. \tag{4.23}$$

记

$$W^+=\bigoplus_{x\in\{\mathtt{S}_i,i\in Q_0\}}\mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma x},\qquad V^+=\bigoplus_{x\in\mathrm{Ind}\,\mathrm{mod}(kQ),\,x\text{ is not injective}}\mathbb{N}\mathbf{1}_x, \tag{4.24}$$

$$W^-=\Sigma^*W^+,\qquad V^-=\Sigma^*V^+, \tag{4.25}$$

$$W^0=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{N}\mathbf{w}^i,\qquad V^0=\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{N}\mathbf{v}^i\oplus\mathbb{N}\mathbf{v}^{\Sigma i}. \tag{4.26}$$

引理 *4.11*（[Q16]）。设 $v\in V^0$、$w\in W^0$，使得 $\sigma^*w-\mathcal{C}_qv=0$。那么我们有 $(v,w)\in\bigoplus_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{N}(v^i,w^i)+\bigoplus_{i\in\mathbb{I}}\mathbb{N}(v^{\Sigma i},w^i)$。

引理 *4.12*（*l*-主导对分解；参见 [Q16]）。若 (v,w) 是 $\mathcal{R}$ 的一个 *l*-主导对，则 (v, w) 可唯一分解为以下 *l*-主导对：$(v^+, w^+) \in (V^+, W^+)$, $(v^-, w^-) \in (V^-, W^-)$, $(v^0, w^0) \in (V^0, W^0)$，满足

$$(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) + (\mathbf{v}^-, \mathbf{w}^-) + (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \sigma^* \mathbf{w}^0 - \mathcal{C}_q \mathbf{v}^0 = 0.$$

引理 4.13 ([Q16，命题 4.2。3])。对于任意 *l*-支配对 $\in (\mathbf{v}, \mathbf{w})$，存在唯一的（在同构意义下）$kQ$-模 N，使得 维数 $K_{LR}(N) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$。 ——

我们有 $\mathrm{mod}(\mathcal{S}) \simeq \mathrm{mod}(\Lambda)$，以下将这两者等同起来。回忆限制函子 $\mathrm{res} : \mathrm{mod}(\mathcal{S}) \to \mathrm{mod}(kQ^{\mathrm{dbl}})$。自然地，我们可以将 Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$ 和 $K_0(\mathrm{mod}(kQ^{\mathrm{dbl}}))$ 等同起来。回忆 kQ^{dbl} 的欧拉形式 $\langle -, -\rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}}$。我们定义双线性型 $\langle -, -\rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},\, a}$ 如下：对于任意维数向量 $\mathbf{w}$，$\mathbf{w}' \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，令

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},a} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}} - \langle \mathbf{w}', \mathbf{w} \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}}. \tag{4.27}$$

我们固定一个 v 的平方根 $v^{1/2}$。由于稍后需要涉及 $v^{1/2}$ 的扭曲，我们将考虑环 $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$ 和域 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$。

余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$（参见（4.15））及其分次对偶（参见（4.18）），在当前情形下经过基变换后可表述如下：

$$K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) = \bigoplus_{\mathbf{w} \in W^+ + W^-} K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})), \tag{4.28}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{\mathbf{w} \in W^+ + W^-} \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z},\mathbf{w}}, \quad \text{where } \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z},\mathbf{w}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\left(K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})), \mathcal{Z}\right). \tag{4.29}$$

于是，$(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}}, \cdot)$ 是与余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$ 对应的 $\mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$-代数，其余乘法经扭曲 为

$$\{\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2} := v^{\frac{1}{2}\langle \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2 \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},a}} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2}\}; \tag{4.30}$$

实际上，乘积符号 $\cdot$ 通常省略。

下面将需要通过基变换得到的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数：

$$\widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}}. \tag{4.31}$$

$\widehat{\ }$我们还将$\mathbf{R}^+$定义为$\mathbf{R}$中由 $L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$、$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (V^+, W^+)$ 生成的子模。它在 $\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2}$，下也成为一个代数，并且包含映射$\mathbf{R}^+ \hookrightarrow \mathbf{R}$ 是代数同态。$\widehat{\ }$类似地，我们可以定义$\mathbf{R}^-$。

$\widetilde{\ }$我们将$\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$ 定义为$\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$ 关于由 $L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ 和 $L(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i)$ 生成的乘法封闭子集的局部化（$i \in Q_0$）。定义

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}}. \tag{4.32}$$

下面的定理恢复了 [Q16] 的主要结果。

定理 4.14. 设 Q 是一个 *Dynkin* $_i$箭图。则存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数的同构 $\tilde{\kappa}$: $\widetilde{\mathbf{U}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathbf{R}}$，它将

$$E_i \mapsto L(0, \mathbf{1}_{\sigma S_i}), \quad F_i \mapsto L(0, \mathbf{1}_{\sigma \Sigma \mathbf{s}_i}), \quad K_i \mapsto L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i), \quad K_i' \mapsto L(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i).$$

4.4.2. 箭图的量子 *Grothendieck* 环。 设 (Q,ϱ) 是一个 Dynkin ${}^\imath$箭图，且 $\mathcal{S}^\imath$, $\mathcal{R}^\imath$和 $\mathcal{P}^\imath$ 是 ${}^\imath$NKS 范畴，它们定义见定义 4.6 和定理4.7。我们定义

$$\mathbf{w}^i = \mathbf{1}_{\sigma \mathtt{S}_i} + \mathbf{1}_{\sigma \mathtt{S}_{\varrho i}}, \qquad \mathbf{v}^i = \sum_{z \in \mathcal{R}_0^\imath - \mathcal{S}_0^\imath} \dim \mathcal{P}^\imath(\mathtt{S}_i, z)\mathbf{1}_z, \tag{4.33}$$

$$ {}^\imath W^+ = \bigoplus_{x \in \{\mathtt{S}_i, i \in Q_0\}} \mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma x}, \qquad {}^\imath V^+ = \bigoplus_{x \in \mathrm{Ind}\,\mathrm{mod}(kQ),\, x \text{ is not injective}} \mathbb{N}\mathbf{1}_x, \tag{4.34}$$

$$ {}^\imath W^0 = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{N}\mathbf{w}^i, \qquad {}^\imath V^0 = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{N}\mathbf{v}^i. \tag{4.35}$$

引理4.15 ([LW21b，引理 6.13])。 设 $\mathbf{v} \in {}^\imath V^0$，$\mathbf{w} \in {}^\imath W^0$ 满足 $\sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} = 0$。则有 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{N}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$。

引理 *4.16*（*l*-占优对分解；参见 [*LW21b*，引理 *6.10*]）。若 *(v, w)* 是关于 $\mathcal{R}^\imath$ 的*l*-占优对，则存在唯一的分解，将 *(v, w)* 分解为 *l*-占优对 $(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) \in ({}^\imath V^+, {}^\imath W^+)$，$(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$，使得

$$(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) + (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \sigma^*\mathbf{w}^0 - \mathcal{C}_q\mathbf{v}^0 = 0.$$

注 4.17。若 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) + (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$ 是引理 4.16 给出的 *l*-占优对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 的分解，则由引理 4.13 可找到一个 kQ-模 M，使得 $\dim K_{LR}(M) = (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$。此外，由引理 4.15，存在一个 $\mathcal{S}^\imath$-模 P，使得 $\dim K_{LR}(P) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0)$。于是有 $\dim K_{LR}(P \oplus M) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{w})}$（见引理 4.9），因此$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \overline{\mathcal{R}^\imath}) \neq \emptyset$。换言之，每个 *l*-占优对都是强 *l*-占优的。

我们有 $\mathsf{mod}(\mathcal{S}^\imath) \simeq \mathrm{mod}(\Lambda^\imath)$，以下将它们视为相同。回顾限制函子 $\mathsf{res} : \mathsf{mod}(\mathcal{S}^\imath) \to \mathrm{mod}(kQ)$。自然地，我们将 Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{mod}(\mathcal{S}^\imath))$ 和 $K_0(\mathrm{mod}(kQ))$ 视为相同。于是，对维数向量 $\langle \mathbf{w}、\mathbf{w}' \rangle_{Q,\, a}$ 可以定义$\mathbf{w}、\mathbf{w}' \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^\imath}$，类似于（4.27）。

与（Q^{dbl}，swap）的情形类似，在当前设定下，余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}^\imath))$（参见（4.15））及其分次对偶（参见（4.18）），经基变换后，可写如下：

$$K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}^\imath)) = \bigoplus_{\mathbf{w} \in W^+} K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}^\imath)), \tag{4.36}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^\imath_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{\mathbf{w} \in W^+} \widehat{\mathbf{R}}^\imath_{\mathcal{Z},\mathbf{w}}, \quad \text{where } \widehat{\mathbf{R}}^\imath_{\mathcal{Z},\mathbf{w}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\left(K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}^\imath)), \mathcal{Z}\right). \tag{4.37}$$

$\widehat{\ }$那么，$(\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}, \cdot)$ 是与余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathsf{mod}(\mathcal{S}^\imath))$ 对应的 $\mathcal{Z}$-代数，其余乘法经过了扭曲

$$\{\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2} := v^{\frac{1}{2}\langle \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2 \rangle_{Q,a}} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2}\}; \tag{4.38}$$

实际上，乘积符号 $\cdot$ 通常会省略。

下面将需要通过基变换得到的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数：

$$\widehat{\mathbf{R}}^\imath = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widehat{\mathbf{R}}^\imath_{\mathcal{Z}}. \tag{4.39}$$

$\widetilde{\ }$我们将 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 定义为 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 关于由 $L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ $(i \in Q_0)$ 生成的乘法封闭子集的局部化。（根据 [LW21b，引理 5.2 和 5.3]，这是良定义的。）

定义

$$\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath} = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widetilde{\mathbf{R}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}. \tag{4.40}$$

注意，存在自然嵌入 $\mathbf{R}^+ \hookrightarrow \widehat{\mathbf{R}}^{\imath}$。但它一般不是代数同态。

定理 4.18 ([LW21b，定理 6。25])。 设 (Q, ϱ) 是一个 *Dynkin* $\imath$箭图。则存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数同构 $\tilde{\kappa}: \widetilde{\mathbf{U}}^{\imath} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{R}}^{\imath}$，它将

$$B_i \mapsto L(0, \mathbf{1}_{\sigma s_i}), \qquad \tilde{k}_i \mapsto \begin{cases} L(\mathbf{v}^{\varrho i}, \mathbf{w}^i) & \text{if } \varrho i \neq i, \\ v^{-1} L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) & \text{if } \varrho i = i. \end{cases} \tag{4.41}$$

引理 4.19。 对于任意强 $\imath$-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 和 $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in ({}^{\imath}V^0, {}^{\imath}W^0)$ 满足$\sigma^* \mathbf{w}^0 - \mathcal{C}_q \mathbf{v}^0 = 0$，有

$$L(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \cdot L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}} L(\mathbf{v} + \mathbf{v}^0, \mathbf{w} + \mathbf{w}^0).$$

证明。 由归纳法，只需证明断言对 $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) = (\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ 对某个 $i \in Q_0$成立。为此，我们需要考虑 $\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i,\, \mathbf{w}} \pi(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}^i)$：由 (4.17) 可得

$$\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i, \mathbf{w}+\mathbf{w}^i} \pi(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}^i) = \bigoplus_{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}} v^{d((\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i), (\mathbf{v}_2, \mathbf{w})) - d((\mathbf{v}_2, \mathbf{w}), (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i))} \pi(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i) \boxtimes \pi(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}). \tag{4.42}$$

首先注意到，若对某个向量 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i)$，我们有 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i) \neq \emptyset$ 且 $\mathcal{L}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ 出现在 $\pi(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i)$ 的分解中，则 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i)$ 包含在 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i)$ 在 π 下的像中：$\mathcal{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i)$。由横截切片定理[LW22a，命题 3.16]，点 $x \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i, \mathcal{R}^i)$ 上的纤维同构于 π：$\mathcal{M}(\mathbf{v}_1^{\perp}, \mathbf{w}^{\perp}, \mathcal{R}^i) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{v}_1^{\perp}, \mathbf{w}^{\perp}, \mathcal{R}^i)$ 在原点上的纤维，其中

$$\mathbf{v}_1^{\perp} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}^i, \quad \mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{w}^i - \mathcal{C}_q \mathbf{v}^i \sigma^{-1} = 0.$$

然而，我们知道 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_1^{\perp}, 0, \mathcal{R}^i) \neq$仅当 $\mathbf{v}_1^{\perp} = 0$，因此唯一的可能性是 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}^i$。此外，至于分支 $\pi(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) \boxtimes \pi(\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{w})$，我们注意到

$$\begin{aligned} d(\mathbf{w}) &:= d((\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i), (\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)) - d((\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{w}), (\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)) \\ &= \mathbf{v}^i \cdot \sigma^* \mathbf{w} - (\sigma^* \mathbf{w} - \mathcal{C}_q \mathbf{v}) \cdot \tau^* \mathbf{v}^i - \sigma^* \mathbf{w}^i \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^i + \tau^* \mathbf{v}^i) \\ &= (\mathbf{v}^i - \tau^* \mathbf{v}^i) \cdot \sigma^* \mathbf{w} + \mathcal{C}_q \mathbf{v} \cdot \tau^* \mathbf{v}^i - \mathcal{C}_q \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v} + \sigma^* \mathbf{w}^i \cdot (\mathbf{v}^i - \tau^* \mathbf{v}^i) \\ &= (\mathbf{v}^i - \tau^* \mathbf{v}^i) \cdot \sigma^* \mathbf{w} + \sigma^* \mathbf{w}^i \cdot (\mathbf{v}^i - \tau^* \mathbf{v}^i) \end{aligned}$$

其中我们用到了等式 $(\mathcal{C}_q \mathbf{v}_1) \cdot \tau^* \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathcal{C}_q \mathbf{v}_2)$，该等式对任意 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0^i - \mathcal{S}_0^i}$均成立。由此，我们再根据（4.42）推得

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i, \mathbf{w}} \pi(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}^i) &= v^{d(\mathbf{w})} \pi(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) \boxtimes \pi(\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{w}) + \cdots \\ &= v^{d(\mathbf{w})} \mathcal{L}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) \boxtimes \pi(\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{w}) + \cdots, \end{aligned}$$

其中我们省略了第一分量为 $\neq \mathcal{L}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ 的项。代入（4.13），便得到

$$\sum_{0 \leq \mathbf{v}' \leq \mathbf{v}} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i, \mathbf{w}} a_{\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{w}+\mathbf{w}^i} \mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}^i) = v^{d(\mathbf{w})} \sum_{0 \leq \mathbf{v}'' \leq \mathbf{v} - \mathbf{v}^i} a_{\mathbf{v} - \mathbf{v}^i, \mathbf{v}''; \mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) \boxtimes \mathcal{L}(\mathbf{v}'', \mathbf{w}) + \cdots.$$

由横截切片定理可知 $a_{\mathbf{v},\ \mathbf{v}';\ \mathbf{w}} = a_{\mathbf{v}-\mathbf{v}',\ \mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\sigma^{-1}}$，并且 $\mathcal{L}(\mathbf{v}^i,\ \mathbf{w}^i)$ 只在$\mathbf{v}^i \le \mathbf{v}'$时才出现在 $\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}{}_{\mathbf{w}^i,\ \mathbf{w}}\,\mathcal{L}(\mathbf{v}',\ \mathbf{w}+\mathbf{w}^i)$ 的分解中。因此我们可以写成

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{v}^i\le\mathbf{v}'\le\mathbf{v}} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i,\mathbf{w}}\, a_{\mathbf{v}-\mathbf{v}',0;\mathbf{w}+\mathbf{w}^i-\mathcal{C}_q\mathbf{v}'\sigma^{-1}}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}+\mathbf{w}^i)\\ &= v^{d(\mathbf{w})}\sum_{0\le\mathbf{v}''\le\mathbf{v}-\mathbf{v}^i} a_{\mathbf{v}-\mathbf{v}^i-\mathbf{v}'',0;\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}''\sigma^{-1}}\mathcal{L}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w})+\cdots.\end{aligned} \tag{4.43}$$

我们还注意到，由注记 4.17，（$\mathbf{v}-\mathbf{v}^i$，$\mathbf{w}$）是强 l-支配的，当且仅当（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}+\mathbf{w}^i$）是强 l-支配的。

为完成证明，只需证明：对任意$\mathbf{v} \ge \mathbf{v}^i$，若（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}+\mathbf{w}^i$）是强$l$-支配的，

$$\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}_{\mathbf{w}^i,\mathbf{w}}\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{w}^i) = v^{d(\mathbf{w})}\mathcal{L}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}-\mathbf{v}^i,\mathbf{w})+\cdots.$$

为此，我们对 $\mathbf{v}-\mathbf{v}^i$ 的高度使用归纳法。情形 $\mathbf{v}=\mathbf{v}^i$ 直接由 (4.43) 得出。现设 $\mathbf{v}>\mathbf{v}^i$，并假设断言对任意满足 $\mathbf{v}>\mathbf{v}'\ge\mathbf{v}^i$ 的 $\mathbf{v}'$ 成立。然后从 (4.43) 中减去项 $\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}+\mathbf{w}^i}\mathbf{w}^i$、$\mathbf{w}\,\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}+\mathbf{w}^i)$、$\mathbf{v}^i\le\mathbf{v}'<\mathbf{v}$，即可推出关于 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{w}^i)$ 的断言。这就完成了归纳步骤。□

4.5. **约化到 Gorenstein 投射模**。在 [SS16] 中，作者考虑 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 中由 Gorenstein投射 $\mathcal{S}$-模构成的子簇，并证明其量子~Grothendieck 环恢复了 $\mathbf{R}$。在本小节中，我们将把这一结果推广到 $\mathcal{S}^\imath$。设 $\mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 为 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中由 Gorenstein投射 $\mathcal{S}^\imath$-模构成的子簇。由 [SS16，引理 4.5]，，这是 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的一个开子簇。

下面的引理使我们能够识别由 $\mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 继承的分层$\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$。请与引理 5.8比较。

引理 4.20。由 $\mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 通过 (4.8) 诱导的分层与轨道分层一致。

证明。为简便起见，对于一个 $\mathcal{R}^\imath$-模 X，我们将 $\dim X = \dim^0 X + \dim^+ X$ 记作由引理 4.16给出的分解，其中 $\dim^0 X \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$ 和 $\dim^+ X \in ({}^\imath V^+, {}^\imath W^+)$。

只需证明，任意 Gorenstein投射 $\mathcal{S}^\imath$-模 M 均由 $\dim K_{LR}(M)$ 唯一确定（在同构意义下）。现在，M可写为 $P\oplus G$，其中 P是一个投射$\Lambda^\imath$-模，而 G没有投射直和项。于是我们有

$$\dim K_{LR}(M) = \dim K_{LR}(P) + \dim K_{LR}(G).$$

由于 P是一个投射的 $\Lambda^\imath$-模，根据 [LW21b，推论 4.3]，，我们有 $\dim K_{LR}(P) \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$，因此 $\dim^+ K_{LR}(M) = \dim^+ K_{LR}(G)$。根据 [LW22a，定理 3.18]，，我们可以找到唯一的kQ-模 X，使得 $G \cong X$ 属于 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath) \simeq \mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath)$。如果我们选取一个短正合列

$$0 \longrightarrow P_X \longrightarrow G_X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

使得 G_X 是 Gorenstein投射，且 P_X 是投射，那么我们有 $G_X \cong X \cong G$属于 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath) \simeq \mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath)$。由于 G 没有投射直和项，这意味着存在一个投射的 $\Lambda^\imath$-模 P'，使得 $G_X \cong P'\oplus G$。特别地，

$$\dim K_{LR}(P') + \dim K_{LR}(X) = \dim K_{LR}(G_X).$$

同样，我们知道 $\underline{\dim} K_{LR}(P')$ 属于 $({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$，因此

$$\underline{\dim}^+ K_{LR}(G) = \underline{\dim}^+ K_{LR}(G_X).$$

另一方面，由引理 4.9 可得

$$\underline{\dim} K_{LR}(G_X) = \underline{\dim} K_{LR}(P_X) + \underline{\dim} K_{LR}(X),$$

因此，$\underline{\dim}^+ K_{LR}(G_X) = \underline{\dim}^+ K_{LR}(X)$。

总之，我们已经证明，对于任意没有投射直和项的 Gorenstein投射 $\mathcal{S}^\imath$-模 $M = P \oplus G$，存在唯一的 kQ-模 X，使得

$$\underline{\dim}^+ K_{LR}(M) = \underline{\dim}^+ K_{LR}(X).$$

利用引理 4.13，我们知道 X 由 $\underline{\dim}^+ K_{LR}(M)$ 唯一确定。此外，G 由 X 确定，具体而言，它是 G_X 中没有投射直和项的部分。还要注意，一旦确定了 G，维数向量 $\dim K_{LR}(P) = \dim K_{LR}(M) - \dim K_{LR}(G)$ 也随之确定，而 P由 $\dim K_{LR}(P)$ 唯一确定（在同构意义下）（参见 [LW21b，推论 4.3] 和引理4.15；注意，不可分解投射 $\mathcal{S}^\imath$-模构成 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{P}^{\leq 1}(\mathcal{S}^\imath))$ 的一组基）。因此引理得证。□

对于任意 Gorenstein 投射 $\mathcal{S}^\imath$-模 M，由引理 4.20，存在唯一的强$\imath$-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，使得 $\dim K_{LR}(M) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$。我们将 $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 拉回到 M 的轨道上所得的复形记为 $\mathcal{L}(M)$；它也是与 $\mathfrak{O}_M$ 上的常值局部系统相关联的交叉上同调复形。令 $i: \mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath) \hookrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 表示自然嵌入。根据 SS16 引理 4.9]，i^* 与限制函子 $\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ [交换。我们将为 $\mathrm{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 定义的量子 Grothendieck 环记为 $\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}}$，并令 $L(M)$ 为 $\mathcal{L}(M)$ 的对偶基。于是存在一个自然嵌入

$$\widehat{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{R}}^\imath, \quad L(M) \mapsto L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

其中 $\underline{\dim} K_{LR}(M) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$。以下定理在 [SS16] 的 $\mathbf{R}$ 上得到证明，并且可以推广到$\widetilde{\mathbf{R}}^\imath$。

定理 4.21. 拉回映射诱导出同构 $\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{R}}^\imath$，并保持对偶典范基。

证明。由引理 4.19 可知，只需证明对于任意 $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$ 和 $(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) \in ({}^\imath V^+, {}^\imath W^+)$，元素 $L(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0)$ 和 $L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$ 属于 $\mathbf{R}^{\imath,\mathrm{Gp}}$ 的像。关于 $L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)$ 的情形，证明与 [SS16, 引理 5.9]，完全相同，因此我们着重考虑$L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$。在这种情况下，设 X为唯一满足 $\dim K_{LR}(X) = (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$ 的 kQ-模，并选取一个短正合列 $0 \to P_X \to G_X \to X \to 0$，使得 G_X 是 Gorenstein投射的，且 P_X 是投射的。在这种情况下

$$\underline{\dim} K_{LR}(P_X) + \underline{\dim} K_{LR}(X) = \underline{\dim} K_{LR}(G_X)$$

且维数 $K_{LR}(P_X) \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0)$，因此根据引理 4.19，

$$L(P_X)L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) \in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}} L(G_X).$$

我们可以 因此，记为 $L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) \in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}} L(P_X)^{-1} L(G_X)$，则断言得证 s. □

~ ~4.6. **U 的对偶典范基**+。对于 Dynkin箭图 Q, 我们将 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q)$ 记作 $\mathbf{mod}(\mathbf{k}Q)$ 的扭曲 Hall代数, 其底域为 $\mathbb{Q}(\mathbf{v}^{1/2})$, 即,

$$[M]\cdot[N]=\mathbf{v}^{\langle M,N\rangle_Q}\sum_{[L]}\frac{|\operatorname{Ext}^1(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}(M,N)|}[L],\quad \forall M,N\in \operatorname{mod}(\mathbf{k}Q).$$

~ ~令 $\mathcal{H}(Q)$ 为泛型版本; 参见 [LP25, §4。1]。则 $\mathcal{H}(Q)$ 有一个基 $\{\mathfrak{u}_\lambda \mid \lambda\in\mathfrak{P}\}$。存在一个 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数同构

$$\psi^+:\widetilde{\mathbf{U}}^+\longrightarrow\widetilde{\mathcal{H}}(Q),\quad E_i\mapsto v^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{u}_{\alpha_i},\quad \forall i\in\mathbb{I}.$$

类似地, 存在一个 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数同构

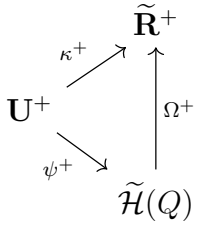
$$\kappa^+:\widetilde{\mathbf{U}}^+\longrightarrow\widetilde{\mathbf{R}}^+,\quad E_i\mapsto L(0,\mathbf{1}_{\sigma\mathbf{S}_i}),\quad \forall i\in\mathbb{I}.$$

注意, 存在一个代数同构

$$\Omega^+:\widetilde{\mathcal{H}}(Q)\longrightarrow\widetilde{\mathbf{R}}^+,\quad \mathfrak{u}_{\alpha_i}\mapsto v^{\frac{1}{2}}L(0,\mathbf{1}_{\sigma\mathbf{S}_i}),\quad \forall i\in\mathbb{I}.$$

因此我们得到一个交换图

(4.44)



~ ~对于 $\lambda\in\mathfrak{P}$, 我们将 $\mathfrak{U}_\lambda$ 在 (3.18) 中定义的对象视为属于 $\mathcal{H}(Q$。U 的条形对合诱导出~其在 $\mathcal{H}(Q$上的对合, 它由 $\mathfrak{u}_{\alpha_i}=\mathfrak{u}_{\alpha_i}$确定, 其中 $i\in\mathbb{I}$。

~**定理 4.22**。对于 $\lambda\in\mathfrak{P}$, 存在唯一的元素 $\mathfrak{C}_\lambda\in\mathcal{H}(Q)$ 使得 $\mathfrak{C}_\lambda=\mathfrak{C}_\lambda$且 —

$$\mathfrak{C}_\lambda-\mathfrak{U}_\lambda\in\sum_{\mu\in\mathfrak{P}}v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\mathfrak{U}_\mu.$$

此外, $\mathfrak{C}_\lambda$ 满足

$$\mathfrak{C}_\lambda-\mathfrak{U}_\lambda\in\sum_{\lambda\prec\mu}v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\mathfrak{U}_\mu.$$

令$\mathbf{B}^-$ 为的 Lusztig典范基 $\mathbf{U}^-$ (通过生成元 $\mathcal{F}_i:=\frac{E_i}{v-v^{-1}}$ $(i\in\mathbb{I})$)。按照 [Ka91], 我们在$\mathbf{U}^-\otimes\mathbf{U}^+$ 上定义一个 Hopf 配对:

$$(F_i,E_j)_K=\delta_{ij}(v-v^{-1}).\tag{4.45}$$

对于 $b\in\mathbf{B}^-$, 我们用 $\delta_b\in\mathbf{U}^+$ 表示 b 在配对 $(\cdot,\cdot)_K$ 下的对偶基。我们定义范数函数 $N:\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\to\mathbb{Z}$ 为

$$N(\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha,\alpha)_Q-\eta(\alpha).$$

其中 $\eta\colon \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}$ 是由 $\eta(\sum_i a_i\alpha_i) = \sum_i a_i$ 定义的增广映射（参见 [GLS13, HL15]）。于是，$\mathbf{U}^+$ 的重标度对偶典范基定义为

$$\widetilde{\mathbf{B}}^+ := \{v^{\frac{1}{2}N(-\deg(b))}\delta_b \mid b \in \mathbf{B}^-\}.$$

定理 4.23（[HL15, Q16]）。在同构 $\kappa^+ : U^+ \to R^+$, $E_i \mapsto L(0, 1_{\sigma S_i})$ 下，基 $\{L(v, w) \mid (v, w) \in (V^+, W^+)\}$ 与 U^+ 的重标度对偶典范基 $\widetilde{B}^+$ 相对应。

命题 4.24。对于任意 $\lambda \in \mathfrak{P}$，我们有 $\Omega^+(\mathfrak{C}_\lambda) = L(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$，其中 $(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{w}_\lambda) \in (V^+, W^+)$ 满足 $\sigma^*\mathbf{w}_\lambda - \mathcal{C}_q\mathbf{v}_\lambda = \lambda$。

对于任意 $\lambda \in \mathfrak{P}$，我们定义 $\mathcal{H}(Q)$ 的 PBW基如下：

$$\mathfrak{E}_\lambda = v^{\dim \mathrm{End}(M_q(\lambda)) - \frac{1}{2}\dim M_q(\lambda)} \frac{\mathfrak{u}_\lambda}{a_\lambda(v)},$$

此处 $a_\lambda(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 是满足 $a_\lambda(\mathbb{v}) = |\mathrm{Aut}(M_q(\lambda))|$的多项式；例如参见 [DDPW08，引理 10。19]。相应的典范基 $\mathfrak{B}_\lambda \in \mathbf{U}^+$ 满足

$$\psi^+(\mathfrak{B}_\lambda) - \mathfrak{E}_\lambda \in \sum_{\mu \prec \lambda} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\mathfrak{E}_\mu.$$

令 $\mathfrak{E}^*_\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{P}$) 为关于 $\mathcal{H}(Q)$ 配对的对偶 PBW 基：

$$([M], [N])_K = \delta_{M,N}|\mathrm{Aut}(M)|. \tag{4.46}$$

于是可以验证

$$\mathfrak{U}_\lambda = v^{\frac{1}{2}n_\lambda}\mathfrak{E}^*_\lambda, \text{ where } n_\lambda = N(\sum_k \lambda(\beta_k)\beta_k). \tag{4.47}$$

令 $\mathfrak{B}^*_\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{P}$) 为 $\mathbf{U}^+$ 关于配对 (4.45) 的对偶典范基。于是有

$$\psi^+(\mathfrak{B}^*_\lambda) \in \mathfrak{E}^*_\lambda + \sum_{\lambda \prec \mu} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]\mathfrak{E}^*_\mu, \quad \overline{\mathfrak{B}^*_\lambda} = v^{n_\lambda}\mathfrak{B}^*_\lambda.$$

根据 (4.47) 和定理 4.22，这意味着 $\psi^+(v^{\frac{1}{2}n_\lambda}\mathfrak{B}^*_\lambda) = \mathfrak{C}_{\lambda^\diamond}$。

5. Dual canonical bases via perverse sheaves

本节将通过证明 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 的对偶典范基在同构 $\Omega : \mathcal{H}(Q, \varrho) \to \mathbf{R}^i$ 下映射到 $\mathbf{R}^i$ 的基 $\{L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ is strongly } i\text{-dominant}\}$，从而将 §3.5 中的构造与量子 Grothendieck 环联系起来。

5.1. **整形式**。利用定理4.18 和引理3.4，我们得到两个 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数的同构：

$$\widetilde{\Omega} : \widetilde{\mathcal{H}}(Q, \varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{R}}^i, \qquad \widehat{\Omega} : \widehat{\mathcal{H}}(Q, \varrho) \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}^i, \tag{5.1}$$

由 $\mathfrak{u}_{\alpha_i} \mapsto v^{\frac{1}{2}}L(\mathbf{0}, 1_{\bar{\sigma}S_i})$ 和 $\mathbb{K}_{\alpha_i} \mapsto L(\mathbf{v}^{\varrho^i}, \mathbf{w}^i)$ 定义。我们将证明 $\widetilde{\Omega}$ 和 $\widehat{\Omega}$ 诱导出整形式的同构。

引理 5.1. 设 (Q,ϱ) 是一个 *Dynkin* 箭图。对于任意不可分解的 $\mathbf{k}Q$-模 M 和N，若它们的支撑位于 Q 的同一个连通分支上，且 同态$_{\mathbf{k}Q}(M,N)=0$，则维数$_{\mathbf{k}}$同态$_{\mathbf{k}Q}(M,\varrho(N))\leq 1$。

证明。 通过应用 AR-平移，我们可以假设 $M=P_l$ 对于某个不可分解投射$\mathbf{k}Q$-模 P_l。

令 $\underline{\dim}\, N=(a_i)_{i\in\mathbb{I}}$。则 $\dim\ \varrho(N)=(a_{\varrho i})_{i\in\mathbb{I}}$。由 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M,\ N)=0$ 可得$a_l=0$。此外，$\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M,\ \varrho(N))=\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(P_l,\ \varrho(N))=a_{\varrho l}$。证明 $a_{\varrho l}\leq 1$是等价的。证明分为以下两种情况。

情况 (i) $\varrho l=l$。则 $\dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M,\ \varrho(N))=0$。

情况 (ii) $\varrho l\neq l$。则 $\varrho\neq \mathrm{Id}$. 若（Q，ϱ）为对角型（见例 3.1），注意到它们的支撑不在 $\mathbf{k}Q$（M，ϱ（N）$=0$ 的同一个连通分支上，因此 $\mathrm{Hom}\ Q$。

剩下的情况是 Q 连通。此时 Q 的类型为 A_{2r+1}、D_n 和 E_6。如果 Q 的类型为 A_{2r+1}，则得到 $a_{\varrho l}\leq 1$，进而 $\dim_{\mathbf{k}}$同态$_{\mathbf{k}Q}(M,\varrho(N))\leq 1$。如果 Q 的类型为 D_n，且其底层图如 (3.2) 所示，则 $l=n-1$ 或 n。因此 $a_{\varrho l}\leq 1$。如果 Q 的类型为 E_6，且其底层图如 (3.3) 所示，则 $l=1$、2、5、6。如果 $l=1$，由 E_6 的根系可知 $a_6\leq 1$；如果 $l=2$，同理可得 $a_5\leq 1$。

总之，$\dim_{\mathbf{k}}$同态$_{\mathbf{k}Q}(M,\ \varrho(N))\leq 1$。 □

引理 5.2 (参见 [Rin96])。 设 k 为任意域，且 Q为 *ADE* 型。对于任意不可分解kQ-模 M，存在两个不可分解 kQ-模 M_1 和 M_2，使得以下结论成立：

$$\mathrm{Hom}(M_1,M_2)=0=\mathrm{Hom}(M_2,M_1),\qquad \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M_2,M_1)=1; \tag{5.2}$$

$$\textit{there exists a short exact sequence } 0\to M_1\to M\to M_2\to 0. \tag{5.3}$$

此外，在这种情况下，我们有扩张$^1_{kQ}(M_1,M_2)=0$。

定理 *5.3.* $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数的同构 $\widetilde{\Omega}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\to\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath}$，$\widehat{\Omega}:\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\to\widehat{\mathbf{R}}^{\imath}$ 诱导了 $\mathcal{Z}$-代数的同构 $\Omega:\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}\to\mathbf{R}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$ 以及 $\Omega:\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}\to\mathbf{R}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$。

$\widehat{\Omega}$ 证明。 由其定义可知，Ω 限制为一个嵌入 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}\hookrightarrow\mathbf{R}^{\imath}$。首先，$\widehat{\Omega}$我们证明，对任意 $M\in\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)\subseteq\mathrm{mod}(\Lambda^{\imath})$，有 $\Omega(\mathfrak{u}_M)\in\mathbf{R}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$。我们通过对 M 的维数作归纳法来证明这一点。若 M 是单的，则显然成立。

记$\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$，我们将 $\mathfrak{u}_M\in\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$ 中相应的元素。对于一般的 M，若 M 可分解，即 $M=\bigoplus_{i=1}^n M_i$，其中 M_i 不可分解且 $n\geq 2$。记为 $N=\bigoplus_{i=2}^n M_i$。由于 Q 属于 Dynkin 型，我们可以假设 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_1,N)=0$。若 $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda^{\imath}}(M_1,N)\neq 0$，则对于任意满足 $L\notin\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$ 且 $|\mathrm{Ext}^1_{\Lambda^{\imath}}(M_1,N)_L|\neq 0$ 的 $L\in\mathrm{mod}(\Lambda^{\imath})$，存在某个 $X\in\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$，使得 $[L]=[X\oplus\mathbb{K}_\alpha]$ 属于 $\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho)$，并且 $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$。于是

$$\mathfrak{u}_{M_1}*\mathfrak{u}_N=v^{-\langle M_1,N\rangle_Q}\big(\mathfrak{u}_M+\sum_{[X]\in\mathrm{Iso}(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)),\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}} f_{X,\alpha}(v)\mathfrak{u}_X*\mathbb{K}_\alpha\big),$$

其中 $f_{X,\alpha}(v)\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$。根据归纳假设，很容易看出 $\widehat{\Omega}(\mathfrak{u}_M)\in\widehat{\mathbf{R}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$.

若 M 是不可分解的，引理 5.2 表明我们可以找到不可分解的$\mathbf{k}Q$-模M_1，M_2 它们存在短正合列 $0\to M_1\to M\to M_2\to 0$。此外，

$\mathrm{Hom}(M_2, M_1) = 0 = \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$，且 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_1, M_2) = 0$、$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_2, M_1) = \mathbf{k}$。另一方面，$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda^i}(M_2, M_1) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_2, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_2, \varrho(M_1))$；例如参见 [LR24，引理 2.9]。我们断言 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_2, \varrho(M_1)) = 0$。否则，$\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$ 中存在一个环：$M_1 \to M \to M_2 \to \varrho(M_1) \to \varrho(M) \to \varrho(M_2) \to M_1$，这与 $\mathbf{k}Q$ 是表示定向的相矛盾。于是我们得到

$$\mathbf{u}_{M_2} * \mathbf{u}_{M_1} = v^{-1}\mathbf{u}_{M_1 \oplus M_2} + (v - v^{-1})\mathbf{u}_M, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{u}_{M_1} * \mathbf{u}_{M_2} = \mathbf{u}_{M_1 \oplus M_2} + \sum_{[X] \in \mathrm{Iso}(\mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)), \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}} f_{X,\alpha}(v)\mathbf{u}_X * \mathbb{K}_\alpha \tag{5.5}$$

对于某个 $f_{X,\alpha}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 使得 $(v^2 - 1) \mid f_{X,\alpha}(v)$，也就是说，存在 $g_{X,\alpha}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 使得 $f_{X,\alpha}(v) = (v^2 - 1)g_{X,\alpha}(v)$。注意

$$\text{扩张}_{\Lambda^i}(M_1, M_2) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}Q}(M_1, M_2) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_1, \varrho(M_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}Q}(M_1, \varrho(M_2)$$

引理 5.1 表明 $\dim_{\mathbf{k}} \text{扩张}^1_{\Lambda^i}(M_1, M_2) \leq 1$，因此至多存在一个 $L \notin \mathrm{mod}(\mathbf{k}Q)$ 使得 $|\text{扩张}^1_{\Lambda^i}(M_1, M_2)_L| \neq 0$。如果这样的 L 存在，那么 $|\text{扩张}^1_{\Lambda^i}(M_1, M_2)_L| = q - 1$。因此我们得出结论：

$$\mathbf{u}_M = \frac{1}{v - v^{-1}}(\mathbf{u}_{M_2} * \mathbf{u}_{M_1} - v^{-1}\mathbf{u}_{M_1} * \mathbf{u}_{M_2}) + s_{M_1,M_2} v^m \mathbf{u}_X * \mathbb{K}_\alpha \tag{5.6}$$

对于某些 X，$\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，$m \in \mathbb{Z}$，以及 $s_{M_1,M_2} = 0$ 或 1。根据归纳假设，我们有

$$\widehat{\Omega}(\mathbf{u}_X * \mathbb{K}_\alpha) = \widehat{\Omega}(\mathbf{u}_X) \cdot \widehat{\Omega}(\mathbb{K}_\alpha) \in \mathbf{R}^i_{\mathcal{Z}}。$$

Let $\mathbf{w}' =$ 维数 M_1 且 $\mathbf{w}'' =$ 维数 M_2。根据 Ω 和（4.20）的定义，我们知道

$$\widehat{\Omega}(\mathbf{u}_{M_1}) = \sum_{\mathbf{v}'} a_{\mathbf{v}'}(v) L(\mathbf{v}', \mathbf{w}'), \qquad \widehat{\Omega}(\mathbf{u}_{M_2}) = \sum_{\mathbf{v}''} b_{\mathbf{v}''}(v) L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}''),$$

再根据归纳假设，我们可以看出 $a_{\mathbf{v}'}(v)\ a_{\mathbf{v}''}(v) \in \mathcal{Z}$。注意 $\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}'' \rangle_{Q,\ a} = 1$。对于任意 $L(\mathbf{v}', \mathbf{w}')$，$L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'')$，由（4.20），可得

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'') \cdot L(\mathbf{v}', \mathbf{w}') &= v^{1/2} \sum_{\mathbf{v} \geq \mathbf{v}' + \mathbf{v}''} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}'', \mathbf{v}'}(v) L(\mathbf{v}, \mathbf{w}' + \mathbf{w}''), \\ L(\mathbf{v}', \mathbf{w}') \cdot L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'') &= v^{-1/2} \sum_{\mathbf{v} \geq \mathbf{v}' + \mathbf{v}''} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''}(v) L(\mathbf{v}, \mathbf{w}' + \mathbf{w}'') \end{aligned}$$

对于某个 $c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''}(v) c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}'',\ \mathbf{v}'}(v) \in \mathbb{N}[v, v^{-1}]$。于是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v - v^{-1}} \widehat{\Omega}(\mathbf{u}_{M_2} * \mathbf{u}_{M_1} - v^{-1}\mathbf{u}_{M_1} * \mathbf{u}_{M_2}) \\ =&\frac{1}{v - v^{-1}} \Big(\sum_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''} a_{\mathbf{v}''}(v) a_{\mathbf{v}'}(v) (L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'') \cdot L(\mathbf{v}', \mathbf{w}') - v^{-1} L(\mathbf{v}', \mathbf{w}') \cdot L(\mathbf{v}'', \mathbf{w}'')) \Big) \\ =&\frac{1}{v - v^{-1}} \sum_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''} a_{\mathbf{v}''}(v) a_{\mathbf{v}'}(v) \sum_{\mathbf{v} \geq \mathbf{v}' + \mathbf{v}''} (v^{\frac{1}{2}} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}'', \mathbf{v}'}(v) - v^{-\frac{3}{2}} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''}(v)) \cdot L(\mathbf{v}, \mathbf{w}' + \mathbf{w}''). \end{aligned}$$

一个简单的计算表明

$$\frac{v^{\frac{1}{2}} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}'', \mathbf{v}'}(v) - v^{-\frac{3}{2}} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''}(v)}{v - v^{-1}} \in \mathcal{Z}$$

by 注意到 $c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}'',\ \mathbf{v}'}(v) = c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''}(v^{-1})$; 参见 (4.17) 和 (4.38)。因此 $\widehat{\Omega}(\mathfrak{u}_M) \in \widehat{\mathbf{R}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$.

为证明 $\widehat{\Omega}(\mathcal{H}(Q,\varrho)) = \mathrm{R}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$，我们对 $\mathcal{R}^{\imath}$ 的强 I-支配对定义如下偏序：回忆引理 4.16，对于 $\mathcal{R}^{\imath}$ 的每个 I-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，都可唯一写成 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) + (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$，其中 $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in (V^0, W^0)$，且 $(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) \in ({}^{\imath}V^+, {}^{\imath}W^+)$。于是，当 $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}$ 且.....时，我们称 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \prec (\tilde{\mathbf{v}}\ \tilde{\mathbf{w}})$。

- either $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \prec (\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{\mathbf{w}}^0)$ (that is, $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \neq (\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{\mathbf{w}}^0)$ and $(\tilde{\mathbf{v}}^0 - \mathbf{v}^0, \tilde{\mathbf{w}}^0 - \mathbf{w}^0) \in {}^{\imath}V^+$), or
- $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) = (\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{\mathbf{w}}^0)$ (hence $\mathbf{w}^+ = \tilde{\mathbf{w}}^+$) and $\mathbf{v}^+ < \tilde{\mathbf{v}}^+$.

考虑商映射

$$\pi : \widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(Q), \quad \mathbb{K}_\alpha * \mathfrak{u}_\lambda \mapsto \begin{cases} \mathfrak{u}_\lambda & \text{if } \alpha = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\pi : \widehat{\mathbf{R}}^{\imath} \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}^{+}, \quad L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \begin{cases} L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \text{if } (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in ({}^{\imath}V^+, {}^{\imath}W^+), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.8}$$

注意，这些映射是 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数的同态；参见 [LP25，命题 3。8],引理4.19，以及 [LW21b，命题 6 的证明。19]我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho) & \xrightarrow{\widehat{\Omega}} & \widehat{\mathbf{R}}^{\imath} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q) & \xrightarrow{\Omega^+} & \widehat{\mathbf{R}}^{+} \end{array}$$

根据基 $\mathfrak{C}_\lambda$ 与 $\mathfrak{U}_\lambda$ 的 $\mathcal{H}(Q)$ 之间的关系（结合命题 4.24），我们可知

$$\Omega^+(\mathfrak{U}_\lambda) \in L(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{w}_\lambda) + \sum_{\substack{(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}}) \in ({}^{\imath}V^+, {}^{\imath}W^+) \\ (\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda) \prec (\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}})}} \mathcal{Z} \cdot L(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}), \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in ({}^{\imath}V^+, {}^{\imath}W^+)$$

其中（$\mathbf{v}_\lambda$，$\mathbf{w}_\lambda$）满足 $\sigma^* \mathbf{w}_\lambda - \mathcal{C}_q \mathbf{v}_\lambda = \lambda$。由商映射的定义可得

$$\widehat{\Omega}(\mathfrak{U}_\lambda) \in L(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{w}_\lambda) + \sum_{(\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda) \prec (\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}})} \mathcal{Z} \cdot L(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})$$

现在由维数归纳法即可得出该断言。 □

推论 *5.4.* 设（Q，ϱ）是一个 *Dynkin* $\imath$箭图。则存在 $\mathcal{Z}$代数$\widetilde{\psi}$ 的同构：$\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}$，将 B_i，$\widetilde{k}_i$ 映为（*3.15*）中的元素；以及 $\widetilde{\kappa}$：$\widetilde{\mathbf{U}}^{\imath}_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{R}}^{\imath}_{\mathcal{Z}}$，将 B_i，$\widetilde{k}_i$ 映为（*4.41*）中的元素。

5.2. $\imath$**通过函数构造 Hall 代数**。在本小节中，假设箭图簇定义在 $\mathbb{F}$上，其中 $\mathbb{F}$是有限域 $\mathbb{F}_q$的代数闭包。通过考虑带有 $\mathbb{F}_q$-结构的 $\mathbb{F}$-向量空间，我们可以假设 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^{\imath})$ 和 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}^{\imath})$ 具有 $\mathbb{F}_q$-结构。

我们固定一个素数 ℓ，它在 $\mathbb{F}_q$ 中可逆。给定 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_{\mathfrak{b}}}$，令 $\mathcal{F}_{\mathbf{w}}$ 为定义在 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^{\imath})$ 的 $\mathbb{F}_q$-有理点集合上的 $\mathbb{Q}_\ell$ 值函数所构成的向量空间，这些函数在 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^{\imath})$ 上任意 $G_{\mathbf{w}}$-轨道的 $\mathbb{F}_q$-有理点集合上均为常值。

对于 $\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^\imath}$ 的维数向量 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$，我们固定一个维数为$\mathbf{w}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$ 的 $\mathbb{I}$-分次向量空间 V，以及一个维数为 $\mathbf{w}_2$的子空间 $W\subseteq V$。令

$$F_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}=\{y\in \mathrm{rep}(\mathbf{w},\mathcal{S}^\imath)\mid y(W)\subseteq W\}.$$

于是我们得到如下卷积图：

$$\mathrm{rep}(\mathbf{w}_1,\mathcal{S}^\imath)\times\mathrm{rep}(\mathbf{w}_2,\mathcal{S}^\imath)\xleftarrow{\ p\ } F_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\xrightarrow{\ q\ }\mathrm{rep}(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2,\mathcal{S}^\imath)$$

据此，我们可以定义限制映射 $\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ on $\mathcal{F}_{\mathbf{w}}$ 如下：

$$\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}:\mathcal{F}_{\mathbf{w}}\longrightarrow\mathcal{F}_{\mathbf{w}_1}\times\mathcal{F}_{\mathbf{w}_2},\quad f\mapsto p_!q^*(f).$$

正如我们将看到的，这与 §4.4 中定义的限制函子有关，因此在 $(,\varrho)=\bigoplus_{\mathbf{w}}\mathcal{F}_{\mathbf{w}}$ 上定义了一个余乘法。对于定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的表示 Min rep(w $\mathcal{S}^\imath$)，我们用 $\delta_{[M]}$ 表示轨道 $\mathfrak{O}_M$ 的示性函数，其中该轨道对应于 M。显然，这些函数构成了 $\mathcal{F}_{\mathbf{w}}$ 的一组基。

引理 5.5. 给定 $M\in\mathrm{rep}(\mathbf{w}_1,\mathcal{S}^\imath)(\mathbb{F}_q)$ 和 $N\in\mathrm{rep}(\mathbf{w}_2,\mathcal{S}^\imath)(\mathbb{F}_q)$，有

$$\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}(\delta_{[L]})(M,N)=q^{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_2}\frac{|\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)_L|}{|\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)|}.$$

证明。对于带有 $\mathbb{F}_q$-结构的 $\mathbb{F}$-簇 X，我们用 $|X|$表示 X 的 $\mathbb{F}_q$-有理点个数。根据定义，$\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}(\delta_{[L]})(M,N)$ 的计算方式为

$$\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}(\delta_{[L]})(M,N)=|D(M,N)\cap\mathfrak{O}_L|$$

其中，$\mathfrak{O}_L$是 L的轨道，而 $D(M,N)$是 p在(M,N)处的纤维。假设 $N=(V,x_h,x_i)_{h\in Q_1,i\in Q_0}$且 $M=(W,y_h,y_i)_{h\in Q_1,i\in Q_0}$。对于一个维数为$V+\dim W$的线性空间 U，我们固定一个同构 $U\cong V\oplus W$，并在下文中将它们视为相同。于是，$D(M,N)$的一个元素由以下映射组成

$$z_h=\begin{pmatrix}x_h & w_h\\ 0 & y_h\end{pmatrix},\quad z_i=\begin{pmatrix}x_i & \eta_i\\ 0 & y_i\end{pmatrix}$$

对于任意 $h=(i\to j)\in Q_1$、$i\in\mathbb{I}$，以及

$$w_h:W_i\longrightarrow V_j,\quad \eta_i:W_i\longrightarrow V_{\varrho j},$$

因此，我们可以将 $D(M,N)$的任意元素 K记为 $K=(U,w,\eta)$，其中 $w=(w_h)_{h\in Q_1}$，$\eta=(\eta_i)_{i\in\mathbb{I}}$。我们断言存在一个正合序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)\longrightarrow\prod_{i\in\mathbb{I}}\mathrm{Hom}(W_i,V_i)\xrightarrow{\alpha}D(M,N)\xrightarrow{\pi}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)\longrightarrow 0$$

事实上，$K=(U,\ w,\ \eta)$ 和 $\widetilde{K}=(U,\ \tilde{w},\ \tilde{\eta})$ 在扩张$^1_{\mathcal{S}^\imath}(M,\ N)$ 中的像相等，当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \cong\downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \widetilde{K} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

In 换句话说，中间的同构由以下形式的线性映射给出

$$\begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : U_i \to U_i$$

其中 $s_i : W_i \to V_i$ 满足以下方程:

$$w_h - \tilde{w}_h = x_h s_i - s_j y_h, \text{ for any } (h : i \to j) \in Q_1,$$
$$\eta_i - \tilde{\eta}_i = x_i s_i - s_{\varrho i} y_i, \text{ for any } i \in \mathbb{I}.$$

映射 $\alpha : \prod_i \mathbf{Hom}(M_i, N_i) \to D(M, N)$ 定义如下:

$$(s_i)_{i\in\mathbb{I}} \mapsto (U, (x_h s_i - s_j y_h)_{(h:i\to j)\in Q_1}, (x_i s_i - s_{\varrho i} y_i)_{i\in\mathbb{I}}),$$

它满足 $\ker(\pi) = \mathrm{Im}(\alpha)$。此映射不是单射，其核恰好是 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}^\imath}(M, N)$。因此我们得到所需的正合序列。

现在，原像 $\pi^{-1}(\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{S}^\imath}(M, N)_L)$ 等于 $D(M, N) \cap \mathfrak{O}_L$，因此取 $\mathbb{F}_q$-有理点可得

$$|D(M,N) \cap \mathfrak{O}_L| = |\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)_L| \cdot \frac{|\prod_{i\in\mathbb{I}} \operatorname{Hom}(M_i, N_i)|}{|\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)|} = q^{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_2} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}^\imath}(M,N)|},$$

这就证明了该引理。 □

取 $\mathbb{Q}_\ell$ 中 q 的一个平方根 $\mathbf{v}$（它也是 $\mathbf{v}$ 的平方根）。我们定义

$$\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2} = \mathbb{v}^{\frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle_{Q,a}} \cdot \widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}.$$

通过取分次对偶，映射 $\mathbf{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ 在 $\mathcal{F}^*(Q,\varrho) = \bigoplus_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^*_{\mathbf{w}}$ 上定义了一个乘法，记为 $\star$。设 $\xi_{[M]}$ 为 $\mathcal{F}^*(Q,\varrho)$ 的与 $\delta_{[M]}$ 对偶的基。

命题 5.6. 设 $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 为 $\imath$箭图代数 $\Lambda^\imath$ 的扭曲 *Hall* 代数。则我们有一个代数同构

$$\Upsilon : \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda^\imath) \longrightarrow \mathcal{F}^*(Q,\varrho), \quad [M] \mapsto \mathbb{v}^{(\underline{\dim} M)\cdot(\underline{\dim} M) - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_Q} \xi_{[M]}.$$

证明。 我们首先回顾， $\mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 由如下乘法定义 :

$$[M] * [N] = \mathbb{v}^{\langle M,N\rangle_Q} \sum_{[L]} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^\imath}(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\Lambda^\imath}(M,N)|}[L].$$

如果我们设 $\mathbf{w}_1 =$维数 M 且 $\mathbf{w}_2 =$维数 N，那么

$$\begin{aligned}
&\Upsilon([M]) \star \Upsilon([N]) \\
&= \mathbb{v}^{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1 - \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1\rangle_Q + \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2\rangle_Q} \xi_{[M]} \star \xi_{[N]} \\
&= \mathbb{v}^{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1 - \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1\rangle_Q + \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2\rangle_Q + \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle_{Q,a} + 2\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_2} \sum_{[L]} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^\imath}(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\Lambda^\imath}(M,N)|} \xi_{[L]} \\
&= \mathbb{v}^{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)\cdot(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2) - \frac{1}{2}\langle \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\rangle_Q + \langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle_Q} \sum_{[L]} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^\imath}(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\Lambda^\imath}(M,N)|} \xi_{[L]} \\
&= \mathbb{v}^{\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle_Q} \sum_{[L]} \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\Lambda^\imath}(M,N)_L|}{|\operatorname{Hom}_{\Lambda^\imath}(M,N)|} \Upsilon([L]) = \Upsilon([M] * [N]).
\end{aligned}$$

□

注 5.7. 与 $\mathcal{F}^*(Q,\varrho)$ 类似，我们可以通过考虑 Q的表示来定义 $\mathcal{F}^*(Q)$（采用相同的扭曲）。与命题5.6类似，另见 [Lus90b,§9.3], 可以证明存在一个代数同构

$$\Upsilon^+ : \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q) \longrightarrow \mathcal{F}^*(Q), \quad [M] \mapsto \mathbb{v}^{\underline{\dim} M \cdot \underline{\dim} M - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_Q} \xi_{[M]}.$$

回顾记号 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath)$ 与 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}$ 于 §3.2。通过等同 $\mathbf{mod}(\Lambda^\imath)$ 与 $\mathbf{mod}(\mathcal{S}^\imath)$，我们可以证明关于 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的分层的如下刻画。

引理 5.8. 两个 $\mathcal{S}^\imath$-模 M、N 位于 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的同一层，当且仅当$M \cong N$属于 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath)$ 且 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) = \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(N)$。

证明。 首先我们假设 $M \cong N$属于 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath)$，且 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) \cong \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(N)$。于是我们可以找到 $\Lambda^\imath$-模的短正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow A \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

其中 K_1，K_2 是投射 $\Lambda^\imath$-模。由引理 4.9，它们给出

$$\underline{\dim} K_{LR}(M) + \underline{\dim} K_{LR}(K_1) = \underline{\dim} K_{LR}(A) = \underline{\dim} K_{LR}(N) + \underline{\dim} K_{LR}(K_2). \tag{5.9}$$

在限制到 $\mathbf{mod}(\mathbb{H})$ 之后，这两条正合序列分裂，因此它们给出

$$\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) \oplus \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_1) = \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(A) = \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(N) \oplus \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_2).$$

由于我们已经假设 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) \cong \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(N)$，这蕴含 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_1) \cong \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_2)$，并且特别地（见 [LW21b，推论 4.3]）。

$$\underline{\dim} K_{LR}(K_1) = \underline{\dim} K_{LR}(K_2).$$

结合（5.9）我们得到 $\underline{\dim} K_{LR}(M) = \underline{\dim} K_{LR}(N)$。

反之，设 M是一个 $\Lambda^\imath$-模，且 $\underline{\dim} K_{LR}(M) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$。根据 [LW22a，推论 3.21],我们可以找到唯一的 $\mathbf{k}Q$-模 X，使得 $X \cong M$ 在 $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath)$ 中，因此存在短正合列

$$0 \longrightarrow K_3 \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow K_4 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

使得 K_3，K_4 是投射的。于是引理 4.9 推出

$$\underline{\dim} K_{LR}(M) + \underline{\dim} K_{LR}(K_3) = \underline{\dim} K_{LR}(K_4) + \underline{\dim} K_{LR}(X). \tag{5.10}$$

若将 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) + (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$ 记作 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 的分解，则可得

$$\underline{\dim} K_{LR}(X) = (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+).$$

换言之，$\mathbf{k}Q$-模 X 由 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 唯一确定（此处应用了引理 4.13 ）。现在注意到

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \underline{\dim} K_{LR}(M) = \underline{\dim} K_{LR}(X) + \underline{\dim} K_{LR}(K_4) - \underline{\dim} K_{LR}(K_3).$$

由于 $\underline{\dim} K_{LR}(X) = (\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$，分解的唯一性意味着

$$\underline{\dim} K_{LR}(K_4) - \underline{\dim} K_{LR}(K_3) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in ({}^\imath V^0, {}^\imath W^0).$$

特别地，我们可以找到 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，使得

$$\underline{\dim} K_{LR}(\mathbb{K}_\alpha) = \underline{\dim} K_{LR}(K_4) - \underline{\dim} K_{LR}(K_3).$$

现在限制到 $\mathbf{mod}(\mathbb{H})$ 后，这两个短正合列分裂，并给出一个同构

$$\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) \oplus \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_3) \cong \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(X) \oplus \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(K_4).$$

由克鲁尔-施密特定理，我们进而得到 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) \cong \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(X) \oplus \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(\mathbb{K}_\alpha)$。因此我们已证明，对于任意 $\mathcal{S}^\imath$-模 M，存在 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 以及一个唯一的 $\mathbf{k}Q$-模 X，使得 $X \oplus \mathbb{K}_\alpha \cong M$ in $\mathcal{D}_{sg}(\Lambda^\imath)$ 且 $\mathrm{res}_{\mathbb{H}}(M) = \mathrm{res}_{\mathbb{H}}(X \oplus \mathbb{K}_\alpha)$。由于 X 和 α 由 $\dim K_{LR}(M)$ 唯一确定，故引理得证。□

对于每个强 $\imath$-支配对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，对于 $\mathcal{R}^\imath$，我们将 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 记为 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ $\mathcal{R}^\imath$上的常值函数，并将 $\mathcal{M}_{\mathbf{w}}$ 记为由 $\mathcal{F}_{\mathbf{w}}$ 中的 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$张成的子空间。由引理5.8 和 [LP25，引理 3.7], 可知，$\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ 可以限制到

$$\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2} : \mathcal{M}_{\mathbf{w}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{w}_1} \times \mathcal{M}_{\mathbf{w}_2}.$$

令 $\mathcal{M}^*(Q,\varrho) = \bigoplus_{\mathbf{w}} \mathcal{M}^*_{\mathbf{w}}$。那么 $\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ 赋予 $\mathcal{M}^*(Q,\varrho)$ 代数结构，并且存在一个同态

$$\pi : \mathcal{F}^*(Q,\varrho) \longrightarrow \mathcal{M}^*(Q,\varrho) \tag{5.11}$$

若将 $\xi_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 记为 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$的对偶基，那么当 $\dim K_{LR}(M) = (\mathbf{v},\mathbf{w})$ 时，$\pi(\xi_{[M]}) = \xi_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$。下面的引理显然成立。

引理 5.9。同构 Υ 诱导出一个同构

$$\overline{\Upsilon} : \widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \longrightarrow \mathcal{M}^*(Q,\varrho)$$

并且存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^*(Q,\varrho) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M}^*(Q,\varrho) \\ {\scriptstyle\Upsilon}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\overline{\Upsilon}} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(\Lambda^\imath) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \end{array}$$

The $\imath$Hall 代数 $\mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\varrho)$ 是 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 关于 $[K]$ 的局部化，其中 K 具有有限投射维数。由引理 5.9 可知，[LW22a, 引理 A.4] 对 $\mathcal{M}^*(Q,\varrho)$ 也成立，因此我们可以构造 $\mathcal{M}^*(Q,\varrho)$ 关于 $\xi_{(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)}$, $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \in (\imath V^0, \imath W^0)$ 的局部化，记为 $\widetilde{\mathcal{M}}^*(Q,\varrho)$。由此得到一个诱导同构

$$\widetilde{\Upsilon} : \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q,\varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^*(Q,\varrho). \tag{5.12}$$

受 Lusztig 的构造启发 [Lus90b，§9。4], 我们现在引入 $\widetilde{\mathcal{M}}^*(Q,\varrho)$ 的泛型版本。令 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbb{Q}_\ell$ 中单位元的群环。对于 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^\imath}$，我们定义 $\mathbf{M}_{\mathbf{w}}$ 为由符号生成的自由 $\widetilde{\mathbf{A}}$- 模 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$，其中 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是强 $\imath$-主导对。在$\mathbf{M}_{\mathbf{w}}$ 中自然地定义了元素

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} := \sum_{\mathbf{v}'} p^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}} \tilde{\delta}_{(\mathbf{v}',\mathbf{w})} \tag{5.13}$$

其中 $p_{\mathbf{v}',\mathbf{v}}$ 是 Frobenius 映射在任意 $\mathbb{F}_q$-有理点处作用于 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的上同调层的茎上的（形式）特征值交错和（取值于 $\mathbb{Q}_\ell^*$ 中）。求和是在 $\mathbf{A}$ 中进行，而非 $\mathbb{Q}_\ell$。注意，当条件 $\mathbf{v}' \leq \mathbf{v}$ 不成立时，$p^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}} = 1$ 和 $p^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}} = 0$。特别地，$\mathcal{L}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 构成 $\mathbf{M}_{\mathbf{w}}$ 的一组基。

对于维数向量 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 和 $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$，回忆一下我们已定义函数 $\widetilde{\mathrm{res}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\,\mathbf{w}_2}\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$，其取值于 $\mathcal{M}_{\mathbf{w}_1}\times\mathcal{M}_{\mathbf{w}_2}$。根据 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$ 的 Hall 多项式性质，存在多项式 $f^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2}(v)\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ 使得

$$\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}=\sum_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2} f^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\mathbb{v})\delta_{(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1)}\otimes\delta_{(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2)}.$$

现在定义一个 $\mathbf{A}$-双线性映射

$$\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}:\mathbf{M}_{\mathbf{w}}\longrightarrow\mathbf{M}_{\mathbf{w}_1}\times\mathbf{M}_{\mathbf{w}_2},\quad \tilde\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}\mapsto\sum_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2} f^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\mathbb{v})\tilde\delta_{(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1)}\otimes\tilde\delta_{(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2)}$$

其中系数 $f_{\mathbf{v}\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_2^1)$ 现在视为 $\mathbf{A}$ 中的元素。令 $\mathbf{M}^*(Q,\varrho)=\widetilde{\bigoplus}_{\mathbf{w}}\mathbf{M}^*_{\mathbf{w}}$，并用 $\xi_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 表示 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 的对偶基。显然，限制映射赋予 $\mathbf{M}^*(Q,\varrho)$ 一个代数结构，因此我们可以按照 §5.2 中的做法，关于 $\xi_{(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)}\,(i\in\mathbb{I})$ 对 $\mathbf{M}(Q,\varrho)^{\sim}$ 进行局部化。

存在一个自然的群同态 $\mathbf{M}_{\mathbf{w}}\to\mathcal{M}_{\mathbf{w}}$，它将 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 映射到 $\delta_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$，而其在系数上的作用由环同态 $\mathbf{A}\to\mathbb{Q}_\ell$ 给出，该环同态在 $\mathbb{Q}_\ell^*$ 上为恒等映射。由定义容易得到，诱导映射 $\mathbf{M}(Q,\varrho)\to\mathcal{M}(Q,\varrho)$ 是一个代数同态。

如果将 q 替换为幂 q^s，那么 $\mathbf{M}(Q,\varrho)$ 和 $\mathcal{M}(Q,\varrho)$ 就变为 $\mathbf{M}(Q,\varrho)_s$ 和 $\mathcal{M}(Q,\varrho)_s$，于是我们如上所述得到一个环同态 $\mathbf{M}(Q,\varrho)_s\to\mathcal{M}(Q,\varrho)_s$。另一方面，存在一个环同态 $\mathbf{M}(Q,\varrho)\to\mathbf{M}(Q,\varrho)_s$，它在每个基元素上都是恒等映射，而在系数上的作用由环同态 $\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ 给出，该环同态将 $\mathbb{Q}_\ell^*$ 中的元素提升到 s 次幂。将此复合后，我们便得到一个环同态 $\mathbf{M}(Q,\varrho)\to\widetilde{\mathcal{M}}(Q,\varrho)_s$。因此，$\mathbf{M}(Q,\varrho)$ 到各种 $\mathcal{M}(Q,\varrho)_s$ 存在无穷多个同态。利用这些同态，可以从 Q 的相应性质推导出 $\mathbf{M}(\mathcal{M}(Q,\varrho)_s)$ 的各种性质。例如，由 (5.12) 可得以下结论。

引理 5.10。存在一个代数同构

$$\widetilde{\Upsilon}:\widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}}\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}\longrightarrow\widetilde{\mathbf{M}}^*(Q,\varrho)$$

定义同命题 *5.6* 中所述。这里我们将 $\mathcal{Z}$ 视为 $\mathbf{A}$ 的子环，方法是在 $\mathbb{Q}_\ell^*$ 中固定 q 的一个平方根）。

对于任意强 l-占优对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，我们定义元素 $H_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 和 $L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$，它们属于 $\mathbf{M}^*(Q,\varrho)$，并满足

$$H_{\mathbf{v},\mathbf{w}}=\mathbb{v}^{\dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}^i)}\tilde\xi_{(\mathbf{v},\mathbf{w})}$$

以及 $L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}}$ 是 $\mathcal{L}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 在 (5.13) 中定义的对偶基。若记

$$H_{\mathbf{v},\mathbf{w}}=\sum_{\mathbf{v}'}h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}L_{\mathbf{v}',\mathbf{w}}\tag{5.14}$$

那么，如果不满足条件 $\mathbf{v}\le\mathbf{v}'$，则有 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}=\mathbb{v}^{\dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\,\mathbf{w}\,\mathcal{R}^i)}p^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$ 和 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}=0$。

注意，$\mathbf{M}(Q,\varrho)\to\mathbf{M}(Q,\varrho)$ 相对于 Verdier 对偶而言是反线性的：$\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ 将 $\mathbb{Q}_\ell^*$ 中的每个元素映射为

其逆元。此外，我们发现

$$\widetilde{\Upsilon}(\overline{u}) = \overline{\widetilde{\Upsilon}(u)}, \quad \forall u \in \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A}. \tag{5.15}$$

事实上，只需在生成元上验证即可。

由 IC层的性质可知，每个 $L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}}$ 在条形对合下均保持不变。此外，根据（5.14）我们有

$$\overline{H_{\mathbf{v},\mathbf{w}}} = \sum_{\mathbf{v}\le\mathbf{v}'} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} H_{\mathbf{v}',\mathbf{w}} \tag{5.16}$$

其中 $b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'} \in \mathbf{A}$ 以及 $b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}} = 1$。

引理5.11。 对于任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{P}$，有

$$\widetilde{\Upsilon}(\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda) = H_{\mathbf{v}_\alpha+\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\alpha+\mathbf{w}_\lambda}, \tag{5.17}$$

其中 $\Upsilon(\mathbb{K}_\alpha) = H_{\mathbf{v}_\alpha,\,\mathbf{w}_\alpha}$ 和 $(\mathbf{v}_\lambda,\ \mathbf{w}_\lambda)$ 满足 $\sigma^*\mathbf{w}_\lambda - \mathcal{C}_q\mathbf{v}_\lambda = \lambda$。此外，

$$H_{\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{w}_\alpha} \cdot H_{\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda} \in \mathbb{v}^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}} H_{\mathbf{v}_\alpha+\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\alpha+\mathbf{w}_\lambda}. \tag{5.18}$$

证明。 根据 Υ和 $\mathfrak{U}_\lambda$的定义，容易看出

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Upsilon}(\mathfrak{U}_\lambda) &= \mathbb{v}^{-\dim \mathrm{End}_{\mathbf{k}Q}(M_q(\lambda))+\frac{1}{2}\langle M_q(\lambda),M_q(\lambda)\rangle_Q}\widetilde{\Upsilon}(\mathfrak{u}_\lambda)\\
&= \mathbb{v}^{-\underline{\dim}\, M_q(\lambda)\cdot\underline{\dim}\, M_q(\lambda)+\frac{1}{2}\langle M_q(\lambda),M_q(\lambda)\rangle_Q+\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda,\mathcal{R}^\imath)}\widetilde{\Upsilon}(\mathfrak{u}_\lambda)\\
&= \mathbb{v}^{\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda,\mathcal{R}^\imath)}\widetilde{\xi}_{(\mathbf{v}^\lambda,\mathbf{w}^\lambda)} = H_{\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\lambda}.
\end{aligned}$$

我们还注意到 Υ 将 $\mathbb{K}_i$ 映射到 $H_{\mathbf{v}^{\varrho^i},\,\mathbf{w}^i} = L_{\mathbf{v}^{\varrho^i},\,\mathbf{w}^i}$，因此对每个 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 都可以找到唯一的对 $(\mathbf{v}_\alpha,\ \mathbf{w}_\alpha)$，使得 $\Upsilon(\mathbb{K}_\alpha) = H_{\mathbf{v}_\alpha,\,\mathbf{w}_\alpha}$。由此，根据 [LW22a，引理 A8] 可知

$$\widetilde{\Upsilon}(\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda) = \mathbb{v}^n H_{\mathbf{v}_\alpha+\mathbf{v}_\lambda,\mathbf{w}_\alpha+\mathbf{w}_\lambda}$$

对于某个 $n \in \mathbb{Z}$。为证明 $n = 0$，注意到在 $\imath$Hall 代数 $\mathcal{H}(Q,\ \varrho)$ 中，我们有

$$\overline{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda} \in \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda + \sum \mathbb{Z}[v,v^{-1}]\mathbb{K}_\beta \diamond \mathfrak{U}_\mu. \tag{5.19}$$

将其与（5.15）和（5.16）结合，即得所述结论。 □

由引理 5.11 的证明及（5.19）可知，每个 $b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$ 都属于 $\mathbb{Z}[\mathbb{v},\ \mathbb{v}^{-1}]$。因此，我们可以应用 Lusztig 引理 [BZ14，定理 1。1] 来证明如下结论。

引理 5.12。 存在唯一的一族元素$\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$ 使得$\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}} = 1$, $\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'} \in \mathbb{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{-1}]$ 若$\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$，且

$$\sum_{\mathbf{v}\le\mathbf{v}'\le\mathbf{v}''} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = \overline{\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}}. \tag{5.20}$$

证明。 [BZ14 的定理 1.1] （另见 [BZ14，公式 (7.5)]）给出了唯一的一族元素 $\eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$，满足 $\eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}} = 1$, $\eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} \in \mathbf{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbf{v}^{-1}]$，若 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$，并且

$$\sum_{\mathbf{v}\le\mathbf{v}'\le\mathbf{v}''} \overline{\eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = \eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}.$$

那么只需令 $(\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'})_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$ 为 $(\eta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'})_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$的逆矩阵即可。 □

现在我们证明，系数 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$ 由此唯一确定 .

定理5.13。 对每个 $\mathbf{v} \leq \mathbf{v}'$，都有 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'} = \zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$。特别地，$\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'} \in \mathbb{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{-1}]$ 当$\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$时。

证明。 由 $L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}}$ 是棒不变的这一事实以及（5.14），可得

$$\overline{h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}} = \sum_{\mathbf{v}\leq\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}''} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}. \tag{5.21}$$

将此式从（5.20）中减去，得到

$$\overline{h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}} - \overline{\zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}} = \sum_{\mathbf{v}\leq\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}''} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} - \zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}). \tag{5.22}$$

令 $\mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}''} = h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}''} - \zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}''}$。由（5.22）可推出

$$\overline{\mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}} - \mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} = \sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}''} b^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} \mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}. \tag{5.23}$$

我们将用归纳法证明，对于所有 $\mathbf{v} \leq \mathbf{v}''$，$\mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}''} = 0$ 成立，其中归纳参数是 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{v}''$之间链的最大长度。若 $\mathbf{v} = \mathbf{v}''$，则显然成立，因为 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}} = \zeta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}} = 1$，故不妨设 $\mathbf{v} < \mathbf{v}''$。我们可以假设该命题对所有 $\mathbf{v} < \mathbf{v}' \leq \mathbf{v}''$均已成立。于是（5.23）右端为零，因此左端也为零:

$$\overline{\mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}} = \mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}. \tag{5.24}$$

根据 Gabber纯性定理 [BBD82, 5.3.4],, 每个 $\mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ 都是 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^i)$ 上的纯复形。这意味着，Frobenius 映射在 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^i)$ 的任意 $\mathbb{F}_q$-有理点处的 i-次上同调层 $\mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ 的茎上的特征值，都是其所有复共轭的绝对值均为 $\leq q^{-i/2}$ 的代数数。另一方面，根据 IC层的性质[BBD82, 2.1., $\mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ 在 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R}^i)$ 的任意 $\mathbb{F}_q$-有理点处的茎，是一个集中在次数 $< -\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R}^i)$ 的复形，因此 $p^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性（形式）组合，其元素来自 $\mathbb{Q}_\ell^*$，且这些元素都是其所有复共轭的绝对值均为 $\leq q^{-(\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}^i)+1)/2}$ 的代数数。利用这一点，再结合引理 5.12 和 $h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$ 的定义，我们看到 $\mu^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性（形式）组合，其元素来自$\mathbb{Q}_\ell^*$，且这些元素都是其所有复共轭的绝对值均为 $\leq q^{-1/2}$ 的代数数。这与 (5.24) 相容的唯一可能是等式两边都为零。因此，我们的断言得证，定理也随之成立。□

推论5.14。 对于任意强 l-主导对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，$L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}}$ 是$\widetilde{\mathbf{M}}^*(Q,\ \varrho)$ 中的唯一元素，使得 $L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}} = L_{\mathbf{v},\,\mathbf{w}}$ 并且

$$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \in H_{\mathbf{v},\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'} \mathbb{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{-1}] H_{\mathbf{v}',\mathbf{w}}.$$

证明。 由定理 5.13 和引理5.12可得，只需取 $(h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'})_{\mathbf{v},\,\mathbf{v}'}$的逆矩阵。□

推论5.15。 对于任意强 l-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 和 $(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in ({}^iV^0, {}^iW^0)$，若 $\sigma^*\mathbf{w}^0 - \mathcal{C}_q\mathbf{v}^0 = 0$，则有

$$L_{\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0} \cdot L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \overline{L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \cdot L_{\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0}} \in \mathbb{v}^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}} L_{\mathbf{v}^0+\mathbf{v},\mathbf{w}^0+\mathbf{w}}.$$

证明。 由推论 5.14 可知，$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 由 $L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 唯一确定，并满足以下方程:

$$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \in H_{\mathbf{v},\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'} \mathbb{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{-1}]H_{\mathbf{v}',\mathbf{w}}. \tag{5.25}$$

那么我们也有

$$H_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \in L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'} \mathbb{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbb{v}^{-1}]L_{\mathbf{v}',\mathbf{w}}. \tag{5.26}$$

由归纳法和引理 4.15 我们可以假设$(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) = (\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)$对某个 $i \in Q_0$成立。在这种情况下，我们有 $L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} = H_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i}$，并且由 [LP25、引理3.5], (5.25)、(5.26)和引理5.11我们得到

$$L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} \cdot L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \sum_{\mathbf{v}\le\tilde{\mathbf{v}}} f^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} H_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} \cdot H_{\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{w}} = \mathbb{v}^n \sum_{\mathbf{v}\le\tilde{\mathbf{v}}} f^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} H_{\mathbf{v}^i+\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{w}^i+\mathbf{w}} = \mathbb{v}^n \sum_{\mathbf{v}+\mathbf{v}^i\le\tilde{\mathbf{v}}} g^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} L_{\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{w}^i+\mathbf{w}},$$

并且类似地,

$$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \cdot L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} = \mathbb{v}^{-n} \sum_{\mathbf{v}+\mathbf{v}^i\le\tilde{\mathbf{v}}} h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} L_{\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{w}^i+\mathbf{w}},$$

其中 n 是一个半整数，并且当$\mathbf{v} \neq \tilde{}\mathbf{v}$时，$g^{\mathbf{w}}{}_{\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{v}^i} = 1 = h^{\mathbf{w}}{}_{\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{v}^i}$, $g^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}}, h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} \in \mathbf{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbf{v}^{-1}]$。由于$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \cdot L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} = L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} \cdot L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$，我们知道当$\mathbf{v} \neq \tilde{}\mathbf{v}$时，$g^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}} = 0 = h^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}}$。那么

$$L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} \cdot L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \mathbb{v}^n L_{\mathbf{v}^i+\mathbf{v},\mathbf{w}^i+\mathbf{w}}, \quad L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \cdot L_{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i} = \mathbb{v}^{-n} L_{\mathbf{v}^i+\mathbf{v},\mathbf{w}^i+\mathbf{w}}. \qquad \square$$

~ ~**推论5.16.** 同构 Υ 将 $\mathcal{H}(Q,\varrho)_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A}$ 的对偶典范基映至~基 $\{L_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \mid (\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是强 l-支配$\}$ 的$\mathbf{M}^*(Q,\varrho)$。

~证明。由定理5.13 和推论5.14 可知 $\Upsilon(\mathfrak{L}_\lambda) = L_{\mathbf{v}^\lambda,\ \mathbf{w}^\lambda}$。于是推论-~ ~论 5.15 和引理5.11 推出 $\Upsilon(\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda) = \Upsilon(\mathfrak{L}_{\alpha,\ \lambda}) = L_{\mathbf{v}_\alpha+\mathbf{v}_\lambda,\ \mathbf{v}_\alpha+\mathbf{v}_\lambda}$，由此得证。$\square$

5.3. 对偶典范基的比较。为了比较

~ ~ ~~M*(Q,ϱ)的对偶典范基与R$^\imath$的对偶典范基，我们需要给出一个从M*(Q,ϱ)到R$^\imath \otimes_{\mathcal{Z}}$A的同构，使$L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 映到$(\mathbf{v},\mathbf{w})$。问题在于，横截切片定理在~正特征下不成立，因此我们无法定义R$^\imath$ 在 $\mathbb{F}$上的类似物。为克服这一问题，我们转而考虑Gorenstein投射 $\mathcal{S}^\imath$-模的子簇，如§4.5所述。

考虑在 $\mathbb{F}$ 上定义的 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 子簇，它是 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的子簇，并配备一个 $\mathbb{F}_q$ 结构，使自然嵌入 $i: \mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath) \to \mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 具有 $\mathbb{F}_q$ 结构。令 $\mathcal{F}^{\mathrm{Gp}}_{\mathbf{w}}$ 为从 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的 $\mathbb{F}_q$-有理点集到 $\mathbb{Q}_\ell$ 的函数所构成的向量空间，这些函数在 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 上任意 $G_{\mathbf{w}}$-轨道的 $\mathbb{F}_q$-有理点集上均为常值。函数 $\mathbf{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ 可限制在 $\mathcal{F}^{\mathrm{Gp}}_{\mathbf{w}}$ 上，由此我们在 $\mathcal{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho)$ 上得到代数结构: $= \bigoplus_{\mathbf{w}} \mathcal{F}^{\mathrm{Gp}}{}_{*\mathbf{w}}$。

Le$\widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathrm{Gproj}}(\Lambda^\imath))$ 是 $\mathbf{Gproj}(\Lambda^\imath)$ 的扭曲 Hall 代数，其乘法由~$\mathbf{mod}(\mathbf{k}Q)$ 的欧拉形式扭曲。注意 $\mathcal{H}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath))$ 可视为~$\mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 的子代数。由命题5.6 的证明可得以下结论。

命题 5.17。 存在一个代数同构

$$\Upsilon : \widetilde{\mathcal{H}}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath)) \longrightarrow \mathcal{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho), \quad [M] \mapsto \mathbb{v}^{\underline{\dim}\, M \cdot \underline{\dim}\, M - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_Q} \tilde{\xi}_{[M]}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们将 $\mathcal{SDH}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath))$ 关于投射 $\mathcal{H}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath))$ 的局部化称为 $\Lambda^\imath$-模。众所周知，[LW22a，定理 A15] 自然嵌入$\sim$ $\sim\mathcal{H}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath))$ $\hookrightarrow \mathcal{H}(\Lambda^\imath)$ 诱导出一个同构

$$\mathcal{SD}\widetilde{\mathcal{H}}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q,\varrho).$$

从 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 转移到 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的优点在于，$\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的分层由轨道给出（见引理 4.20），并且任意 $G_{\mathbf{w}}$-等变局部系统在 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中的轨道上都是平凡的。

我们现在回顾层-函数对应的定义。设 X 是一个带有连通代数群 G-作用的 $\mathbb{F}$-簇。假设 X、G 具有 $\mathbb{F}_q$-结构，我们用 Fr 表示它们的 Frobenius 映射。设 $D^b_{G_{\mathbf{w}}}(X)$ 表示由$\widetilde{\ }$形如 (L,φ) 的对象所构成的范畴，其中 L 是一个 $G_{\mathbf{w}}$-等变复形，且 $\varphi:\mathrm{Fr}^*L \xrightarrow{\sim} L$ 是一个同构。对任意 $\mathbb{F}_q$-点 $x\in \mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$，同构 φ 诱导一个同构 $\varphi_x: L_x\to L_x$。取这些同构在上同调群上的迹的交错和，我们得到

$$\chi_L(x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\mathrm{tr}(H^i(\varphi_x):H^i(L_x)\to H^i(L_x)).$$

通过这种方式，我们得到一个 $G(\mathbb{F}_q)$ 不变函数，定义在 $X(\mathbb{F}_q)$ 上。我们将 $L\mapsto L(1)$ 记作 Tate 扭曲，并固定一个平方根 $L\mapsto L\left(\frac{1}{2}\right)$。以下定理称为层-函数对应，参见 [KW01，III. 定理 12。1]或 [Ach21，第 5 节。3]。

命题 5.18。设 X、Y 是 $\mathbb{F}$-簇，并带有连通代数群 G-作用。假设它们定义在 $\mathbb{F}_q$ 上，且 $f:\ X\to Y$ 是一个 G-等变态射，与 $\mathbb{F}_q$-结构相容。

（a）对于 $D^b_G(X)$ 中的任意辨识三角 $L'\to L\to L''\to L'[1]$，有

$$\chi_L=\chi_{L'}+\chi_{L''}.$$

（b）对于任意 $L\in D^b_G(X)$ 和 $L'\in D^b_G(Y)$，有

$$\chi_{L[n]}=(-1)^n\chi_L,\quad \chi_{L(n)}=q^{-n}\chi_L,\quad \chi_{L\boxtimes L'}=\chi_L\otimes\chi_{L'},$$
$$\chi_{f_!L}=f_!\chi_L,\quad \chi_{f^*L}=f^*\chi_L.$$

对于每个 Gorenstein投射 $\mathcal{S}^\imath$-模 M，我们将与轨道 $\mathfrak{O}_M$ 上的常值局部系统相关联的交叉上同调复形记为 $\mathcal{L}(M)$。令 $K_{\mathbf{w}}(\mathrm{Gproj}(\mathcal{S}^\imath))$ 表示层 $\mathcal{L}(M)$ 的平移所生成的 Grothendieck 群，其中 $\mathfrak{O}_M$ 遍历 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中的轨道。$\mathcal{Z}$-模结构由 $v^{-d}L:=L[d]\left(\frac{d}{2}\right)$ 给出。我们可以像在特征零情形中一样定义 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 的量子 Grothendieck 环。利用 [BBD82 中的一般理论工具，第 6]，节我们知道，该环同构于 $\widetilde{\ }\mathbf{R}^{\imath,\ \mathrm{Gp}}$。

对于每个维数为$\mathbf{w}$的 $M\in \mathbf{Gproj}(\Lambda^\imath)$，我们将 $\mathfrak{O}_M$ 记为 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中 M 的轨道。定义偏序：若 $\mathfrak{O}_N$ 包含于 $\mathfrak{O}_M$的闭包中，则 $N\prec M$。我们用$\mathbf{F}^{\mathrm{Gp}}_{\mathbf{w}}$表示由符号 $\tilde{\delta}_{[M]}$ 生成的自由$\mathbf{A}$-模，这些符号以 $\mathbf{rep}^{\mathrm{Gp}}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}^\imath)$ 中的轨道 $\mathfrak{O}_M$ 为指标。于是可以定义一个自然映射

$$\tilde{\chi}: K_{\mathbf{w}}(\mathrm{Gproj}(\Lambda^\imath))\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}\longrightarrow \mathbf{F}^{\mathrm{Gp}}_{\mathbf{w}},\quad \mathcal{L}(M)\mapsto\sum_N p_{N,M}\tilde{\delta}_{[N]} \tag{5.27}$$

其中$p_{N,M}$表示在任意 $\mathfrak{O}_N$的 $\mathbb{F}_q$-有理点处，Frobenius 映射在$\mathcal{L}(M)$的上同调层的茎上的特征值的（形式）交错和（取值于 $\mathbb{Q}_\ell^*$ ）。为确保 $\tilde{\chi}$是一个$\mathbf{A}$-线性映射，我们需要选择 $\mathbf{v}=-\sqrt{q}$。注意，如果不满足条件 $N \prec M$ ，则$\bar{p}_{M,M}=1$ 和$p_{N,M}=0$ 。

限制映射 $\mathrm{res}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}$ 也可以类似地定义在 $\mathbf{F}^{\mathrm{Gp}}_{\mathbf{w}}$ 上，从而我们在 $\mathbf{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho)=\bigoplus_{\mathbf{w}}\mathbf{F}^{\mathrm{Gp},}{}_{\mathbf{w}}{}^{*}$上得到一个代数结构。令 $\tilde{\xi}_{[M]}$ 为 $\tilde{\delta}_{[M]}$ 的对偶基， $L_{[M]}$ 为 $\mathcal{L}(M)$在 $\tilde{\chi}$下的像的对偶基。若定义 $H_{[M]}=\mathbf{v}^{\dim\mathfrak{O}_M}\tilde{\xi}_{[M]}$，则

$$H_{[M]}=\sum_N h_{M,N}L_{[N]}$$

其中 $h_{M,N}=\mathbf{v}^{\dim\mathfrak{O}_M}p_{M,N}$以及 $h_{M,N}=0$，若不满足 $M\prec N$。$\mathbf{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho)$ 上存在一个由 Verdier 对偶定义的条形对合，并且我们有

$$\overline{H_{[M]}}=\sum_N b_{M,N}H_{[N]}.$$

我们可以找到唯一的一族元素 $\zeta_{M,N}$，使得 $\zeta_{M,M}=1,\zeta_{M,N}\in\mathbf{v}^{-1}\mathbb{Z}[\mathbf{v}^{-1}]$，如果 $N\neq M$，并且

$$\sum_{M\preceq P\preceq N}b_{M,P}\zeta_{P,N}=\overline{h_{M,N}}.$$

与定理 5.13类似，可以证明 $h_{M,N}=\zeta_{M,N}$ 对任意 $N\prec M$。此外，我们还有如下推论 5.15的类似结论。

命题5.19。对于任意 *Gorenstein*投射 $\mathcal{S}^\imath$-模 M 和投射 $\mathcal{S}^\imath$-模P，我们有

$$L_{[P]}\cdot L_{[M]}=\overline{L_{[M]}\cdot L_{[P]}}\in\mathbf{v}^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}L_{[P\oplus M]}.$$

现在考虑下面的同态图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}}\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A} & \hookrightarrow & \widehat{\mathbf{R}}^{\imath}\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}\\ {\scriptstyle\tilde{\chi}^*}\uparrow & & \\ \mathbf{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho) & \hookrightarrow & \mathbf{M}^*(Q,\varrho)\end{array}$$

设 $\widetilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho)$ 是 $\mathbf{F}^{\mathrm{Gp},*}(Q,\varrho)$ 关于 $\tilde{\xi}_{[P]}$, P为投射的局部化。根据 [LW22a，附录 A 中的结果。4], 这个代数同构于 $\mathbf{M}^*(Q,\varrho)$，由此得到一个诱导同构

$$\tilde{\chi}^*:\widetilde{\mathbf{M}}^*(Q,\varrho)\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath}\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}.$$

命题 5.20。同构 $\tilde{\chi}^*:\mathbf{M}^*(Q,\varrho)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}^{\imath}\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}$ 将 $L_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 映射到 $L(\mathbf{v},\mathbf{w})$。

证明。根据引理 4.19 和推论 5.15，只需处理 $L_{\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+}$ ，其中 $(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)\in({}^{\imath}V^0,{}^{\imath}W^0)$。对于这样一对元素，我们选取一个（在同构意义下唯一的）$\mathbf{k}Q$-模X，使得 $\dim K_{LR}(X)=(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)$。于是有一个短正合列

$$0\longrightarrow P_X\longrightarrow G_X\longrightarrow X\longrightarrow 0$$

其中 G_X 是 Gorenstein投射的， P_X 是投射的。所需的同构随后将$L_{\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+}$ 映到 $\mathbf{F}^{\mathrm{Gp}}{}_{,*}(Q,\varrho)$ 中的 $v^d L_{[P_X]}^{-1} L_{[G_X]}$ ，其中存在某个半整数 d ，使得 $v^d L_{[P_X]}^{-1} L_{[G_X]}$ 是棒不变的。然后， $v^d L_{[P_X]}^{-1} L_{[G_X]}$ 被映到 $\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath,\mathrm{Gp}}$ 中的 $v^d L(P_X)^{-1} L(G_X)$，根据层函数对应，它仍然是棒不变的。其在 $\widetilde{\mathbf{R}}^{\imath} \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A}$ 中的像于是等于 $v^{-d'} L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$。由于 $v^{-d'} L(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+)$ 是棒不变的，我们必有 $d' = 0$，从而得证。□

注 5.21。 考虑复合映射 $\tilde{\chi}^* \circ \Upsilon : \mathcal{H}(Q, \varrho) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} \to \widetilde{\mathbf{R}}^{\imath} \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A}$。根据定义，我们有

$$\widetilde{\Upsilon}([S_i]) = \mathbb{v}^{\frac{1}{2}} \xi_{(0,\mathbf{1}_{\sigma \mathbf{s}_i})}, \qquad \widetilde{\Upsilon}([\mathbb{K}_i]) = \begin{cases} \mathbb{v} \xi_{(\mathbf{v}^{\varrho i}, \mathbf{w}^i)} & \text{if } \varrho i = i, \\ \mathbb{v}^2 \xi_{(\mathbf{v}^{\varrho i}, \mathbf{w}^i)} & \text{if } \varrho i \neq i, \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}^*(\xi_{(0,\mathbf{1}_{\sigma \mathbf{s}_i})}) = L(0, \mathbf{1}_{\sigma \mathbf{s}_i}), \qquad \tilde{\chi}^*(\xi_{(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)}) = \begin{cases} \mathbb{v}^{-1} L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) & \text{if } \varrho i = i, \\ \mathbb{v}^{-2} L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) & \text{if } \varrho i \neq i, \end{cases}$$

因此， $\tilde{\chi}^* \circ \Upsilon$ 在生成元上的作用为（将其与 Ω 的定义进行比较）

$$[S_i] \mapsto \mathbb{v}^{\frac{1}{2}} L(0, \mathbf{1}_{\sigma \mathbf{s}_i}), \quad [\mathbb{K}_i] \mapsto L(\mathbf{v}^{\varrho i}, \mathbf{w}^i).$$

6. Fourier transforms of dual canonical basis

在本节中，所有霍尔代数和 $\imath$霍尔代数都定义在复数域上 $\mathbb{C}$。我们将回顾 $\imath$在 [LP25] 中构造的霍尔代数的傅里叶变换。与 [SV99], 一样， $\imath$我们通过在§5.2中构造的函数来考虑霍尔代数。

6.1. 对偶典范基的傅里叶变换。 我们回到 §5.2 的设置。对于一个维数向量 $\mathbf{w}$，我们将 $E_{Q,\mathbf{w}}$ 记作 Q 的维数为$\mathbf{w}$的表示簇。存在一个自然嵌入

$$i : E_{Q,\mathbf{w}} \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath).$$

$\mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$中的一个元素具有如下形式：$(x_h, \varepsilon_i, \varepsilon_{\varrho i})_{h \in Q_1, i \in Q_0}$，其中

$$x_h : W_{\mathbf{s}(h)} \longrightarrow W_{\mathbf{t}(h)}, \quad \varepsilon_i : W_i \longrightarrow W_{\varrho i}, \quad \varepsilon_{\varrho i} : W_{\varrho i} \longrightarrow W_i.$$

现在我们考虑 $\mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$上的一个 $\mathbb{G}_m$作用，其定义如下：

$$t \diamond (x_h, \varepsilon_i, \varepsilon_{\varrho i}) := (x_h, t\varepsilon_i, t\varepsilon_{\varrho i}).$$

此作用显然与 $G_{\mathbf{w}}$ 在$\mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath)$上的作用可交换，其不动点恰为$E_{Q,\mathbf{w}}$。此外，每个层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}, \mathcal{R}^\imath)$都是 $\mathbb{G}_m$-稳定子集。特别地，每个IC层 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$都是 $\mathbb{G}_m$-等变的。

我们将由 $\mathcal{K}_{\mathbf{w}}$ 表示由 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$的平移直和构成的范畴，其中$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$是强 l-支配的。回顾一下，Lusztig定义了一个位于 $\mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$ 上的半单范畴$E_{Q,\mathbf{w}}$，它由Lusztig的层 [Lus90b]的直和构成。

引理 6.1. 存在一个诱导函子 $i^* : \mathcal{K}_{\mathbf{w}} \to \mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$。

证明。 众所周知， $\mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$ 由与以下对象上的平凡局部系相关联的 IC层生成： $G_{\mathbf{w}}$的轨道$E_{Q,\mathbf{w}}$。若记 $p : \mathrm{rep}(\mathbf{w}, \mathcal{S}^\imath) \to E_{Q,\mathbf{w}}$ 为取极限所定义的映射，则 [Ach21，定理 2.10.3] 蕴含

$$i^* \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \cong p_* \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

特别地，$i^*\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是$E_{Q\text{上的纯反常层}\mathbf{w}}$，因此是半单的 [BBD82，5.4。5]。由于它也具有 $G_{\mathbf{w}}$-等变性，因此属于范畴 $\mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$。□

利用相同的扭化余积，我们可以为$\widetilde{E}_{Q,\mathbf{w}}$构造对偶格洛腾迪克环，它与 $\mathbf{R}^+$ 同构。对于每个 $(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)\in({}^\imath V^+,{}^\imath W^+)$，我们将 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的限制记为$\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})$；它也是与 $G_{\mathbf{w}}$-轨道 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}^\imath)\subseteq E_{Q,\mathbf{w}}$相对应的 IC层。令 $B(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 表示 $\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的对偶基。对于 $\mathcal{R}^\imath$ 的任意强l-占优对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，我们可以写出

$$i^*\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sum_{\substack{(\mathbf{v}',\mathbf{w})\in({}^\imath V^+,{}^\imath W^+)\\ \mathbf{v}'\le\mathbf{v}}} a_{\mathbf{v}',\mathbf{v}}\mathcal{P}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) \tag{6.1}$$

其中 $a_{\mathbf{v}',\mathbf{v}}\in\mathbb{N}[v,v^{-1}]$。

引理 6.2。有 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}}=1$ 以及 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\in v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]$，若$\mathbf{v}\neq\mathbf{v}'$。

证明。设 $(\mathbf{v},\mathbf{w})\in({}^\imath V^+,{}^\imath W^+)$ 是 $\mathcal{R}^\imath$ 的强 l-占优对。根据$\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的定义，我们知道 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}}=1$。现在假设 $\mathbf{v}\neq\mathbf{v}'$，并令 $x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 为$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}^\imath)$ 中的一般点（视为 $E_{Q,\mathbf{w}}$ 的子集）。那么，$i^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 的分解 (6.1) 告诉我们

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}&=\sum_{\substack{(\mathbf{v}'',\mathbf{w})\in({}^\imath V^+,{}^\imath W^+)\\ \mathbf{v}\le\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'}} a_{\mathbf{v}'',\mathbf{v}'}\mathcal{P}(\mathbf{v}'',\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}\\ &=a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}+\sum_{\substack{(\mathbf{v}'',\mathbf{w})\in({}^\imath V^+,{}^\imath W^+)\\ \mathbf{v}<\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'}} a_{\mathbf{v}'',\mathbf{v}'}\mathcal{P}(\mathbf{v}'',\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}.\end{aligned}$$

根据 [BBD82，2.1.9] 复形 $\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}$集中在次数 $<-\dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}^\imath)$，而 $\mathcal{P}(\mathbf{v},\mathbf{w})_{x_{\mathbf{v},\mathbf{w}}}$集中在次数 $-\dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}^\imath)$。由于每个 $a_{\mathbf{v}'',\mathbf{v}'}$ 都具有正系数，这意味着 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\in v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]$。□

将引理 5.10 和命题 5.20 中的同构应用于 $\mathcal{H}(Q)$ 和 $\mathcal{H}(Q,\varrho)$（见备注 5.7，$\mathcal{F}^*(Q)$ 的泛型版本记作 $\mathbf{F}^*(Q)$，其定义方式相同），我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathbf{R}}^+\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A} & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \widetilde{\mathbf{R}}^\imath\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}\\ \uparrow{\scriptstyle\tilde{\chi}^*} & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\chi}^*}\\ \mathbf{F}^*(Q) & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \widetilde{\mathbf{M}}^*(Q,\varrho)\\ \uparrow{\scriptstyle\Upsilon^+} & & \uparrow{\scriptstyle\widetilde{\Upsilon}}\\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q)\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A} & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho)\otimes_{\mathcal{Z}}\mathbf{A}\end{array}$$

（Ω^+：左侧弧线；$\widetilde{\Omega}$：右侧弧线）

此处第二行中的嵌入由 i^* 诱导，第三行中的嵌入是自然嵌入

$$\iota:\widetilde{\mathcal{H}}(Q)\hookrightarrow\widehat{\mathcal{H}}(Q,\varrho),\quad \mathbf{u}_\lambda\mapsto\mathbf{u}_\lambda,\forall\lambda\in\mathfrak{P}. \tag{6.2}$$

根据定义 关于 $\tilde{\chi}^*$，我们看到第一行中的嵌入也由 i^* 诱导。

回顾一下，Verdier 对偶通过 $L(\mathbf{v},\mathbf{w}) = L(\mathbf{v},\mathbf{w}), v = v^{-1}$ 在 $\mathbf{R}^{\imath}$ 上定义了一个反自同构 $\bar{\cdot}$。然后利用引理 4.19，我们可以定义由 $L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)$, $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \in ({}^{\imath}V^0, {}^{\imath}W^0)$ 生成的子代数在 $\mathbf{R}^{\imath}$ 上的作用，其特征为

$$L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond L(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+) = L(\mathbf{v}^0+\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^0+\mathbf{w}^+) = \overline{L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond L(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)} \tag{6.3}$$

其中 $(\mathbf{v}^+,\ \mathbf{w}^+) \in ({}^{\imath}V^+,\ {}^{\imath}W^+)$。由此我们还可以看出，$\Omega$ 与 $\diamond$-作用可交换：

对任意 $\mathfrak{u}_\lambda \in \mathcal{H}(Q,\ \varrho)$，我们都有（记号同引理 5.11，注意 $\Omega = \check{\chi}^* \circ \Upsilon$）

$$\widetilde{\Omega}(\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{u}_\lambda) = L(\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{w}_\alpha) \diamond \widetilde{\Omega}(\mathfrak{u}_\lambda).$$

我们回顾一下 ${}^{\imath}$Hall 代数的傅里叶变换，该变换建立于 [LP25]。

定理6.3（[*LP25*，定理*B*]）。设 $(Q,\ \varrho)$ 为一个 *Dynkin* 箭图，且 $(Q',\ \varrho)$ 为从 $(Q,\ \varrho)$ 出发，通过反转满足 $\sim_{\varrho}$ $\sim_{\varrho}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ 的 Q_1 的子集 $\mathcal{E}$ 中箭的方向所构造的 *Dynkin* 箭图。则傅里叶变换 $\Phi_{Q',\ Q}:\ \mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\ \varrho) \to \mathcal{H}(\mathbf{k}Q',\ \varrho)$ 是 $\mathbb{C}$-代数的一个同构，其逆映射为 $\Phi_{Q,\ Q'}:\ \mathcal{H}(\mathbf{k}Q',\ \varrho) \to \mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\ \varrho)$。

傅里叶变换 $\Phi_{Q',\ Q}:\ \mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\ \varrho) \to \mathcal{H}(\mathbf{k}Q',\ \varrho)$ 诱导出一个代数同构

$$\Phi := \Phi_{Q',Q} : \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q,\varrho) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}Q',\varrho),$$

这称为 ${}^{\imath}$霍尔代数的傅里叶变换。

令 $\mathcal{H}(Q')$ 是在 $\widetilde{\mathcal{H}}(Q)$ [SV99] 中构造的傅里叶变换。从 $\Phi_{Q',\ Q}:\ \mathcal{H}(\mathbf{k}Q,\ \varrho) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{k}Q',\ \varrho)$ 在 [LP25，§5], 我们得到以下交换图

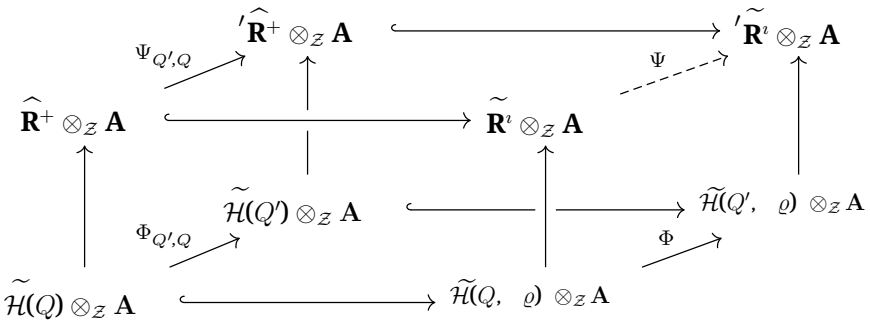
傅里叶变换的构造 Φ：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{H}}(Q') \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}}(Q',\varrho) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} \\ {\scriptstyle \Phi_{Q',Q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}}(Q,\varrho) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} \end{array}$$

现在考虑另一种定向 Q'，如定理6.3中所示，并令 ${}'\mathbf{R}^+$、${}'\mathbf{R}^{\imath}$ 为对应于 $(Q',\ \varrho)$ 的对偶格洛腾迪克环。回忆一下，E_Q上的Fourier-Deligne变换$_{\mathbf{w}}$保持范畴 $\mathcal{Q}_{\mathbf{w}}$ 不变（参见 [Lus93], ；关于Fourier-Deligne变换的基本性质，另见 [Lau87] ）。因此，它定义了一个傅里叶变换$\Psi_{Q',\ Q}:\mathbf{R}^+ \to {}'\mathbf{R}^+$，并保持两侧的对偶典范基。此外，还有一个交换图（参见 [Lau87，定理1.2.1.2]）

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{R}}^+ \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} & \xrightarrow{\Psi_{Q',Q}} & {}'\widehat{\mathbf{R}}^+ \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} \\ {\scriptstyle \Omega^+}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Omega^+} \\ \widetilde{\mathcal{H}}(Q) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} & \xrightarrow{\Phi_{Q',Q}} & \widetilde{\mathcal{H}}(Q') \otimes_{\mathcal{Z}} \mathbf{A} \end{array}$$

因此，我们可以将$\Psi_{Q',Q}$唯一地扩张为一个代数同构$\Psi = \Psi_{Q',Q} : \mathbf{R}^\imath \to {}'\mathbf{R}^\imath$，使得存在一个交换图



定理 6.4。映射 $\Psi\colon \mathbf{R}^\imath \to {}'\mathbf{R}^\imath$ 保持对偶典范基。

证明。由（6.1）可知，对于强 $\imath$-占优对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in ({}^\imath V^+, {}^\imath W^+)$，

$$\iota(B(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \sum_{\mathbf{v} \le \mathbf{v}'} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} L(\mathbf{v}', \mathbf{w})$$

满足 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} \in \mathbb{N}[v, v^{-1}]$。结合（6.3），可得，对于任意强 $\imath$-占优对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，$L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 可表示为

$$L(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond \iota(B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)) + \sum_{\substack{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}^0+\tilde{\mathbf{w}}^+ \\ (\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \prec (\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0)}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] L(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0) \diamond \iota(B(\tilde{\mathbf{v}}^+,\tilde{\mathbf{w}}^+)) \tag{6.4}$$

其中用到了引理 $\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) + (\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)$ 中的分解。利用 Lusztig 引理 [BZ14, 定理 1.1]，很容易看出，$L(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是满足此性质的唯一棒不变元素。

由于 Ψ 与条形对合可交换，$\Psi(L(\mathbf{v},\mathbf{w}))$ 是棒不变的。此外，（6.4）给出

$$\Psi(L(\mathbf{v},\mathbf{w})) \in L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond \iota(B'(\mathbf{v},\mathbf{w})) + \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] L(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0) \diamond \iota(B'(\tilde{\mathbf{v}}^+,\tilde{\mathbf{w}}^+)),$$

其中设 $\Psi_{Q',Q}(B(\mathbf{v},\mathbf{w})) = B'(\mathbf{v},\mathbf{w})$。由于 Ψ 保持维数向量不变，由上述刻画可知，$\Psi(L(\mathbf{v},\mathbf{w}))$ 是 ${}'\mathbf{R}^\imath$ 中对偶典范基的一个元素。□

6.2. **量子群的对偶典范基** $\imath$**量子群**。由定理6.4可知，对偶典范基 $\{L(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid (\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是强 $\imath$-支配的$\}$，且 $\mathbf{R}^\imath$（以及 $\mathbf{R}^\imath_{\mathcal{Z}}$）不依赖于底层 Dynkin 图的定向。以下结论直接由推论 5.16 和命题 5.20得出。

命题 *6.5.* 对于 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{P}$，$\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 的对偶典范基 $\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda$ 在同构 $\Omega\colon \mathcal{H}(Q, \varrho) \to R^\imath$ 下映射为 $L(\nu_\alpha + \nu_\lambda, w_\alpha + w_\lambda)$，其中 (ν_λ, w_λ) 满足 $\sigma^* w_\lambda - \mathcal{C}_q \nu_\lambda = \lambda$，且 $\Omega(\mathbb{K}_\alpha) = L(\nu_\alpha, w_\alpha)$。

根据§6.1中的观察，尤其是（6.1），我们可以证明以下关于的对偶典范基的正性结果，其中 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 令人联想到 [Lus90b, §10]。

定理 6.6。对于 $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{P}$，在 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$ 中，我们有

$$\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{U}_\lambda \in \mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda + \sum_{(\alpha,\lambda)\prec(\beta,\mu)} v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]\mathbb{K}_\beta \diamond \mathfrak{L}_\mu.$$

证明。只需考虑 $\alpha = 0$的情形。根据 Lusztig典范基的正性[Lus90b]，我们得到（记号见§4.6）

$$\mathfrak{E}^*_\lambda \in \psi^+(\mathfrak{B}^*_\lambda) + \sum_{\lambda\prec\mu} v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]\psi^+(\mathfrak{B}^*_\mu).$$

由（4.47）和命题4.24，可转化为

$$\Omega^+(\mathfrak{U}_\lambda) \in B(\mathbf{v}_\lambda, \mathbf{w}_\lambda) + \sum_{\lambda\prec\mu} v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]B(\mathbf{v}_\mu, \mathbf{w}_\mu).$$

另一方面，我们已在引理 6.2 中指出

$$\iota(B(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \in L(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'} v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]L(\mathbf{v}', \mathbf{w}).$$

注意到 $\iota(\Omega^+(\mathfrak{U}_\lambda)) = \Omega(\mathfrak{U}_\lambda)$，由命题 6.5 可得所述结论。 □

由定理 6.4 和命题 6.5，我们知道，$\mathcal{H}(Q, \varrho)$（以及 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$）的对偶典范基 $\{\mathbb{K}_\alpha \diamond \mathfrak{L}_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{P}, \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}$ 不依赖于 Q 的定向。由此，我们还可以得到关于 $\mathcal{H}(Q, \varrho)$（以及 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$）的类似结论，因此作出以下定义。

定义 6.7 (量子群的对偶典范基 $\imath$)。通过引理 $\mathcal{H}(Q, \varrho)_{\mathcal{Z}}$ 中的同构，将$\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{Z}}$ 的对偶典范基转移为*3.4*的一个基，它们被称为对偶典范基，对应于$\mathbf{U}^\imath$。

量子群$\mathbf{U}^\imath$ 的对偶典范基也可以等价地通过使用$\mathbf{R}^\imath$的对偶IC基来定义；特别地，它是整且正的。类似地，我们可以定义$\mathbf{U}^\imath$的对偶典范基。

对$\mathbf{U}^\imath$任意过辫群作用，我们参见[KW22a, LP25]。给定 $\widetilde{\Phi}^+$的任意全序，我们定义了PBW基 $\{B^{\mathbf{a}}\mathbb{K}_\alpha \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}, \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}$ 对应于 $\mathbf{U}^\imath$，其中

$$B^{\mathbf{a}} := \prod_{\gamma\in\Phi^+} B_\gamma^{a_\gamma}, \quad \forall \mathbf{a} = (a_\gamma)_\gamma \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}. \tag{6.5}$$

命题 6.8。 $\{B^{\mathbf{a}}\mathbb{K}_\alpha \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}$ 关于 $\mathbf{U}^\imath$ 对偶典范基的过渡矩阵系数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

证明。根据 [LP25，定理 C], 我们知道，元素 B_β 属于下列对象的对偶典范基：$\mathbf{U}^\imath$ 对每个 $\beta \in \Phi^+$。由于对偶典范基的结构常数是整且为正的，结论随即得证。 □

7. Dual canonical basis of $\mathbf{U}_v^\imath(\mathfrak{sl}_2)$

本节考虑具有一个顶点 1、无边且 $\varrho = \mathrm{Id}$ 的 $\imath$箭图 Q。正则NKS范畴 $\mathcal{R}^\imath$ 为

$$\mathtt{S}_1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \sigma(\mathtt{S}_1)$$

满足 $\alpha\beta = 0$。相应的 $\imath$量子群是分裂型的 $\mathbf{U}_v^\imath(\mathfrak{sl}_2)$，它是一个交换代数 $\mathbb{Q}(v^{1/2})[B, \mathbb{K}^{\pm 1}]$。下文中我们将 $\widetilde{\mathbf{U}}^\imath(\mathfrak{sl}_2)$ 与 $\widetilde{\mathbf{R}}^\imath$ 认作同一对象，特别地，生成元为 $B = L(\mathbf{0}, \mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})$ 和 $\mathbb{K} = L(\mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1)$。

根据定义，我们有

$$\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0^\imath - \mathcal{S}_0^\imath} = \mathbb{N}\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1}, \quad \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^\imath} = \mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}.$$

因此，对于 $\mathcal{R}^\imath$ 中的 l-主导对，我们可以记作 (v, w)。于是箭图簇为

$$\mathcal{M}(v, w, \mathcal{R}^\imath) = \{V \subseteq \mathbb{C}^w, x : \mathbb{C}^w \to \mathbb{C}^w \mid \dim V = v, x(\mathbb{C}^w) \subseteq V, x(V) = 0\},$$
$$\mathcal{M}_0(w, \mathcal{R}^\imath) = \{x : \mathbb{C}^w \to \mathbb{C}^w \mid x^2 = 0\}.$$

特别地，我们看到，当且仅当 $0 \le v \le \lfloor \frac{w}{2} \rfloor$ 时，对 (v, w) 是强 l-主导的，而 $\mathcal{M}_0(w)$ 的分层为

$$\mathcal{M}_0(w) = \bigsqcup_{0 \le v \le \lfloor \frac{w}{2} \rfloor} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(v, w). \tag{7.1}$$

这里，层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(v, w)$ 由秩为 v 的矩阵 $x : \mathbb{C}^w \to \mathbb{C}^w$ 构成。

$\pi(v, w)$ 的分解可以显式求出。为此，回顾半小映射的定义。设 $f : X \to Y$ 为一个真满射映射，$Y = \bigsqcup_\lambda S_\lambda$ 为 Y 的一个分层，使得每个限制 $f_\lambda : f^{-1}(S_\lambda) \to S_\lambda$ 都是拓扑局部平凡纤维化。映射 f 称为半小映射，如果对每个 λ 我们有

$$2\dim(f^{-1}(s_\lambda)) + \dim(S_\lambda) \le \dim(X)$$

其中对于给定的层 S_λ，我们令 $s_\lambda \in S_\lambda$ 表示其任意一点。层 S_λ （属于 Y）称为相关的，如果 $2\dim(f^{-1}(s_\lambda)) + \dim(S_\lambda) = \dim(X)$。半小映射最重要的结果是如下分解定理，其证明见于 [dCM02]:

定理 7.1. 设 $f : X \to Y$ 为一个真满射半小映射，其中 X 光滑且具有纯复维数 n。设 $Y = \bigsqcup_\lambda S_\lambda$ 为如上所述 Y 的一个分层，并对每个相关层 S_λ，令 $L_S = R^{n - \dim(S_\lambda)} f_* \mathbb{C}_X$ 为相应的局部系统。存在一个典范同构

$$f_* \mathbb{C}_X[n] = \bigoplus_S \mathrm{IC}_{\overline{S}}(L_S)$$

其中求和遍历所有相关的分层 S。

命题 7.2. 映射 $\pi : \mathcal{M}(v, w) \to \mathcal{M}_0(w)$ 相对于分层 (7.1)是半小的，并且我们有一个分解

$$\pi(v, w) = \bigoplus_{0 \le v' \le \min\{v, w - v\}} \mathcal{L}(v', w).$$

证明。该因 t, $\pi_{k,n}$ 是半小的，这可以直接由以下公式验证 s

$$\dim(\mathcal{M}(v,w,\mathcal{R}^\imath)) = 2v(w-v), \quad \dim(\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(v',w,\mathcal{R}^\imath)) = 2v'(n-v'),$$
$$\dim(\pi^{-1}(x_{v',w})) = (v-v')(w-v-v'),$$

其中，$x_{v',\ w}$ 是 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(v',\ w,\ \mathcal{R}^\imath)$中的一般点。还可以看出，$\pi$ 像中的每个层都是相关的。□

给定整数 $w_1,\ w_2$，现在我们考虑限制函子$\Delta^w_{w_1,\ w_2}$，其中 $w = w_1 + w_2$。在这种情况下，（4.17）可写为

$$\Delta^w_{w_1,w_2}(\pi(v,w)) = \bigoplus_{v_1+v_2=v} \pi(v_1,w_1) \boxtimes \pi(v_1,w_2). \tag{7.2}$$

~由此我们推出$\mathbf{R}^\imath$中的以下乘法规则：

$$L(v_1,w_1)\cdot L(v_2,w_2) = \sum_{v=v_1+v_2}^{\min\{w_1-v_1+v_2,w_2-v_2+v_1,\lfloor\frac{w_1+w_2}{2}\rfloor\}} L(v,w). \tag{7.3}$$

特别地，生成元 $B = L(\mathbf{0},\ \mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})$和 $\mathbb{K} = L(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}^1)$满足以下等式：

$$B^a\mathbb{K}^b = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor} C_{i,a-1}L(i+b,a+2b),$$

其中$C_{i,\ a-1} = \binom{a-1}{i} - \binom{a-1}{i-2}$。为求出 $L(v,\ w)$的显式表达式，我们写成

$$L(k,2n) = \sum_{i=0}^{n-k} X_{i,n-k}B^{2i}\mathbb{K}^{n-i},$$
$$L(k,2n+1) = \sum_{i=0}^{n-k} Y_{i,n-k}B^{2i+1}\mathbb{K}^{n-i},$$

其中系数 $X_{k,\ n}$ 和 $Y_{k,\ n}$ 按如下方式归纳定义

$$\begin{aligned} &X_{n,n+1} = -C_{1,2n+1}, \quad X_{n+1,n+1} = 1,\\ &X_{k,n+1} = -C_{1,2n+1}X_{k,n} - \sum_{i=2}^{n+1-k} C_{i,2n+1}X_{k,n-i+1}, \quad 0 \le k \le n-2, \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} &Y_{n,n+1} = -C_{1,2n+2}, \quad Y_{n+1,n+1} = 1,\\ &Y_{k,n+1} = -C_{1,2n+2}Y_{k,n} - \sum_{i=2}^{n+1-k} C_{i,2n+2}Y_{k,n-i+1}, \quad 0 \le k \le n-2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

命题 7.3. 上述系数由下式给出

$$X_{k,n} = (-1)^{n-k}\binom{n+k}{2k}, \quad Y_{k,n} = (-1)^{n-k}\binom{n+k+1}{2k+1},$$

因此我们可以写成

$$L(k,n)=\sum_{j=k}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^{j-k}\binom{n-k-j}{n-2j}B^{n-2j}\mathbb{K}^{j}.$$

证明。我们仅给出 $X_{k,n}$ 的证明，$Y_{k,n}$ 的证明类似。固定 $k\geq 0$，并考虑序列 $\{X_{k,n}\}_{n\geq k}$。因此，只需证明以下二项式恒等式：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{2k+i}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{2k+i}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i-2}$$

其中 $k,n\geq 1$。这可通过直接计算得到

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{2k+i}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{-2k-1}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i}=\binom{2n-2}{n},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{2k+i}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i-2}&=\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i}\binom{2k+i}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i-2}\\&=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-2k-1}{i}\binom{2n+2k-1}{n-i-2}=\binom{2n-2}{n-2},\end{aligned}$$

其中我们用到了以下标准恒等式（x,y,m 均为整数，且 $n\geq 0$）：

$$\binom{x}{n}=(-1)^{n}\binom{n-x-1}{n},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{n-k}\binom{y}{k}=\binom{x+y}{n}.\qquad\square$$

References

[Ach21] P. Achar，《反常层及其在表示论中的应用》，第 258 卷，美国数学会，2021 年。[BKLW18] H. Bao、J. Kujawa、Y. Li 和 W. Wang，《经典型的几何舒尔对偶》，《变换群》23（2018），329–389。[BSWW18] H. Bao、P. Shan、W. Wang 和 B. Webster，《量子对称对的范畴化 I》，《量子拓扑学》9（2018），643–714。[BW18b] H. Bao 和 W. Wang，《由量子对称对产生的典范基》，《数学发明》213（2018），1099–1177。[BBD82] A.A. Beilinson、J. Bernstein、P. Deligne，《反常层》，《Astérisque》100，1982 年。[BLM90] A. Beilinson、G. Lusztig 和 R. MacPherson，《量子变形的几何框架》，《杜克数学杂志》61（1990），655–677。[BG17] A. Berenstein 和 J. Greenstein，《双典范基》，《数学进展》316（2017），381–468。[BZ14] A. Berenstein 和 A. Zelevinsky，《量子簇代数中的三角基》，《国际数学研究通知》2014（2014），第 6 期，1651–1688。[Br13] T. Bridgeland，《通过复形的霍尔代数构造量子群》，《数学年刊》177（2013），739–759。[DDPW08] B. Deng、J. Du、B. Parshall 和 J. Wang，《有限维代数与量子群》，《数学调查与专著》150。AMS，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。[dCM02] M.A. A. de Cataldo 和 L. Migliorini，《硬 Lefschetz 定理与半小映射的拓扑》，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）35（2002），第 5 期，759–772。[GLS13] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer，《量子坐标环上的簇结构》，《Selecta Mathematica》（新辑）19（2013），337–397。

[GY21] K.R. Goodearl 和 M.T. Yakimov，《整量子簇结构》，《杜克数学杂志》170（2021），第 6 期，1137–1200。[Ha88] D. Happel，《表示论中的三角范畴：有限维代数》，伦敦数学会讲义丛书 119，剑桥大学出版社，剑桥，1988 年。[HL15] D. Hernandez 和 B. Leclerc，《量子 Grothendieck 环与导出霍尔代数》，《纯粹与应用数学杂志》701（2015），77–126。[KKKO18] S.-J. Kang、M. Kashiwara、M. Kim 和 S.-j. Oh，《簇代数的幺半范畴化》，《美国数学会杂志》31（2018），349–426。[Ka91] M. Kashiwara，《关于泛包络代数的 Q-类比的晶体基》，《杜克数学杂志》63（1991），456–516。[KS16] B. Keller 和 S. Scherotzke，《分次箭图簇与导出范畴》，《纯粹与应用数学杂志》713（2016），85–127。[KL10] M. Khovanov 和 A. Lauda，《量子 sl(n) 的范畴化》，《量子拓扑学》1（2010），1–92。[KW01] R. Kiehl 和 R. Weissauer，《韦伊猜想、反常层与 l 进傅里叶变换》，《数学成果与相关领域》第三辑：现代数学综述丛书 [《数学成果与相关领域》第三辑：现代数学综述丛书], 第 42 卷，施普林格出版社，柏林，2001 年。[Ko14] S. Kolb，《量子对称卡茨-穆迪对》，《数学进展》267（2014），395–469。[Lau87] G. Laumon，《傅里叶变换、函数方程常数与韦伊猜想》，法国高等科学研究所数学出版物 65（1987），131–210。[LeP13] B. Leclerc 和 P.-G. Plamondon，《中岛簇与重复代数》，《RIMS 出版物》49（2013），531–561。[Let99] G. Letzter，《量子化包络代数的对称对》，《代数杂志》220（1999），729–767。[LiW18] Y. Li 和 W. Wang，《典范基正性与负性的比较》，《中华数学会数学学报》（新辑）13（2）（2018），143–198。[LP25] M. Lu 和 X. Pan，《量子群的对偶典范基与量子群 I: 霍尔代数》，arXiv:2504.19073v2。 $_i$LP[M. Lu 和 L. Peng，《半导出林格尔-霍尔代数与 Drinfeld双》，《数学进展》383（2021），107668。21] LR[M. Lu 和 S. Ruan，《加权射影直线的霍尔代数与量子对称对 III：准分裂型》，arXiv:2411.1307824] LW21a $_i$M. Lu 和 W. Wang，《霍尔代数与量子对称对 II：反射函子》，《数学物理通讯》381（2021），799–855。[LW21b] M. Lu 和 W. Wang，《霍尔代数与量子对称对 III：箭图簇》，《数学进展》393（2021），108071。[LW22a] M. Lu 和 W. Wang，《霍尔代数与量子对称对 I：基础》，《伦敦数学会会刊》124（1）：1–82。[LW] M. Lu 和 W. Wang，《Kac-Moody型的霍尔代数与量子对称对》，《数学进展》430（2023），109215。[Lus90a23] G. Lusztig，《由量子化泛包络代数产生的有限维霍普夫代数》，《美国数学会杂志》3（1990），257–296。[Lus90b] G. Lusztig，《由量子化包络代数产生的典范基》，《美国数学会杂志》3（1990），447–498。[Lus] G. Lusztig，《箭图、反常层与量子化包络代数》，《美国数学会杂志》4（2）（1991），365–421，1991 年。[Lus91] G. Lusztig，《量子群导论》，Birkhäuser，波士顿，1993 年。[Lus93] G. Lusztig，《典范基与霍尔代数》，载于：《表示论与代数几何》，施普林格出版社，1998 年，365–399。¨Na[H. Nakajima，《箭图簇与量子仿射代数的有限维表示》，《美国数学会杂志》14（2001），145–238（电子版）。

[Na04] H. Nakajima，箭图簇与量子仿射代数的 q-特征的 t类比，《数学年刊》160 (2004)，1057–1097。[Q14] F. Qin， q-特征的 t类比、量子簇代数的基与修正技术，《国际数学研究通知》，第2014卷，第22期，6175–6232。[Q16] F. Qin，通过循环箭图簇构造量子群 I，《组合数学》152 (2016)，299–326。[Rin90] C. Ringel，霍尔代数与量子群，《数学发明》101 (1990)，583–591。[Rin96] C.M. Ringel，量子群的 PBW基，《纯粹与应用数学杂志》470 (1996)，51–88。[R08] R. Rouquier，2-Kac-Moody代数，arXiv:0812.5023。[Sch19] S. Scherotzke，广义箭袋簇与三角范畴，《数学杂志》292 (2019)，1453–1478。[SS16] S. Scherotzke 和 N. Sibilla，箭图簇与霍尔代数，《伦敦数学会会刊》112 (2016)，1002–1018。[SV99] B. Sevenhant，M. Van den Bergh，关于箭图霍尔代数的双，《代数杂志》221 (1999)，135–160。[Sh22] L. Shen，量子群的簇性质，arXiv:2209.06258[So24] J. Song，AI 型量子群的簇实现，《伦敦数学会会刊》129 (4) (2024)。[VV03] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，层与量子 Grothendieck 环，载于《纪念 Issai Schur 文集》（Chevaleret/Rehovot，2000），《数学进展》210（Birkhauser Boston，波士顿，MA，2003），345–365。

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱地址：luming@scu.edu.cn

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱地址：xiaolong pan@stu.scu.edu.cn