arXiv:2603.01356v1 [math.PR] 2 Mar 2026

冻结区间中的Beta系综与有限自由卷积

Fumihiko Nakano* Khanh Duy Trinh† Ziteng Wang ‡

2026年3月3日

摘要

在系统大小 N 固定而逆温度β 趋于无穷的冻结区间中，高斯 β 系综的特征值收敛到第N个Hermite 多项式的零点。该大数定律已通过分析联合密度或从随机矩阵模型直接读出而得到证明。本文研究其动力学版本。我们证明，在冻结区间中，被称为Beta戴森布朗运动的特征值过程收敛到确定性极限过程，该过程可写为初始数据与厄米特多项式的零点的有限自由卷积。这一结果对应于随机矩阵机制（当 N 趋于无穷且参数 β 固定时）和高温区间（当 N 趋于无穷且 βN 保持有界时）中的相应结果。我们还建立了极限附近的高斯涨落，并处理了拉盖尔情形。

关键词： 高斯 β 系综；β-戴森布朗运动；厄米多项式；有限自由卷积；β-拉盖尔系综；β-Laguerre过程；冻结区间

美国数学会学科分类： 主要分类 60B20；次要分类 60H05

1 引言

高斯β系综是一族具有如下形式的联合密度

$$\frac{1}{Z_{N,\beta}} \prod_{1\le i<j\le N} |\lambda_j-\lambda_i|^\beta \prod_{l=1}^{N} e^{-\beta\lambda_l^2/4}, \qquad (\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_N), \tag{1}$$

其中 N 是系统大小，$\beta > 0$ 是逆温度参数，而$Z_{N,\beta}$ 是归一化常数。这些密度推广了高斯正交系综／高斯酉系综／高斯辛系综（GOE、GUE 和 GSE）特征值的联合密度。基于将 GOE 或 GUE 高斯矩阵三对角化的思想，[8]中引入了一种三对角随机矩阵模型。记

$$H_{N,\beta} \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,2) & \chi_{(N-1)\beta} & & \\ \chi_{(N-1)\beta} & \mathcal{N}(0,2) & \chi_{(N-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \chi_\beta & \mathcal{N}(0,2) \end{pmatrix}$$

*日本东北大学数学研究所，仙台。电子邮箱：fumihiko.nakano.e4@tohoku.ac.jp

†日本早稻田大学全球科学与工程中心。电子邮箱：trinh@aoni.waseda.jp

‡日本早稻田大学基干理工学研究科。邮箱：ziteng@fuji.waseda.jp

由独立元素构成的对称三对角矩阵，其中对角线上的元素是服从高斯分布 $\mathcal{N}(0,\ 2)$ 的独立同分布随机变量序列，非对角线元素 $H_{N,\ \beta}(i,\ i+1)$ 服从卡方分布 $\chi_{(N-i)\beta}$，其自由度为 $(N-i)\beta$。于是，$\lambda_1 < \cdots < \lambda_N$的特征值 $H_{N,\ \beta}$服从高斯β系综（1）。通过分析联合密度或考察随机矩阵模型 [10, 15]，人们研究了高斯β系综的一般谱性质，尤其是维格纳半圆定律以及围绕极限的高斯涨落。

随机分析也被用于研究高斯 β 系综 [2, §4.3]。研究对象是 Beta戴森布朗运动，即下列随机微分方程（SDEs）的强解

$$d\lambda_i(t) = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\, db_i(t) + \sum_{j:j\neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\, dt, \quad \lambda_i(0) = a_i, \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{2}$$

并满足约束：$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \cdots \leq \lambda_N(t)$，几乎必然成立。这里，$\{b_i(t)\}_{i=1}^N$是相互独立的标准布朗运动。随机微分方程（2）具有唯一的强解 [5]。对于 $\beta \geq 1$，以概率 1，特征值过程在任意时刻 $t > 0$[13]均不会发生碰撞。在零初始条件下，即 $\lambda_i(0) = 0, i = 1, \ldots, N$，$\{\lambda_i(t)/\sqrt{t}\}_{i=1}^N$ 的联合分布与高斯β系综（1）一致。维格纳半圆定律的动力学版本以及过程层面的高斯涨落已得到研究。

现在，我们通过介绍经验分布的极限行为来详细讨论这个问题。考虑两个参数：系统大小 N 和逆温度 β，已有研究讨论了三种不同的区域。对于固定的 $\beta > 0$，经验分布

$$L_{N,\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i/\sqrt{N}}$$

几乎必然弱收敛到标准半圆分布。这里 δ_λ 表示狄拉克测度。这就是维格纳半圆定律，只要满足 $N \to \infty$ 且$\beta N \to \infty$，该定律便成立。我们称之为随机矩阵机制。当 $N \to \infty$ 但 βN 保持有界时，我们处于高温区间，经验分布会收敛到类似高斯分布。第三种区域称为冻结区间，即 N 固定而 β趋于无穷的情形。在这种情况下，特征值收敛到厄米特多项式的零点。冻结区间是研究随机矩阵机制的中间步骤 [10]（先令 $\beta \to \infty$，再令 $N \to \infty$）。利用对偶性 [11]，它也被用于确定高温区间中的极限测度。

在过程层面，经验测度过程

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i(t)/\sqrt{N}}$$

收敛到一个确定性概率测度值过程。在随机矩阵机制中，极限测度过程表示为初始测度与半圆分布的自由卷积 [28]。在高温区间，利用根据马尔可夫–克雷因变换定义的 c-卷积，也可得到类似结果 [21]。本文的主要目标是将冻结区间中的极限过程表示为初始数据与厄米特多项式零点的有限自由卷积。此外，我们还建立了关于矩过程极限行为的有趣极限定理，这些定理可视为高温区间中相应结果的对偶结果。

N现在我们聚焦于冻结区间。令 $\beta \to \infty$，随机矩阵 $H_{N,\ \beta}$ 收敛 s

依概率收敛于一个确定性矩阵

$$J_N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N-1} & & \\ \sqrt{N-1} & 0 & \sqrt{N-2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

由于特征多项式 $\det(x - J_N)$ 无非就是第 N 个概率论 Hermite 多项式 $H_N(x)$，因此 J_N 的特征值就是 $H_N(x)$ 的零点 $z_1^{(H)}{}_{,N} < \cdots < z_N^{(H)}{}_{,N}$。因此，在冻结区间内，根据多项式根的连续性，

$$\lambda_i \xrightarrow{\mathbb{P}} z_{i,N}^{(H)}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

这里“$\xrightarrow{\mathbb{P}}$”表示依概率收敛。高斯涨落也已得到研究[3, 4, 9, 26]。

在过程层面，形式上，当初始数据 $a_1 \le \cdots \le a_N$ 固定时，随着 $\beta \to \infty$，特征值过程 $\lambda_1(t) \ldots, \lambda_N(t)$ 收敛到确定性过程 $y_1(t) \le \cdots \le y_N(t)$，它们满足以下常微分方程（ODE）：

$$\begin{cases} y_i'(t) = \displaystyle\sum_{j:j\neq i} \frac{1}{y_i(t) - y_j(t)}, \\ y_i(0) = a_i, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

文献 [27] 已证明该解的存在唯一性。在零初始条件下，唯一解为

$$(y_1(t), \ldots, y_N(t)) = \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)}, \ldots, z_{N,N}^{(H)}).$$

本文的主要结果是一类大数定律（LLN）。

定理 1.1. 设 $\lambda_1^{(\beta)}(t) \le \cdots \le \lambda_N^{(\beta)}(t)$ 是随机微分方程组 (2)的唯一强解。（此处我们添加了上标 (β) 以表示对 β 的依赖。）那么，当 $\beta \to \infty$ 时，

$$(\lambda_1^{(\beta)}(t), \ldots, \lambda_N^{(\beta)}(t)) \xrightarrow{\mathbb{P}} (a_1, \ldots, a_N) \boxplus_N \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)}, \ldots, z_{N,N}^{(H)}),$$

对 $t \in [0, T]$一致成立，其中 $\boxplus_N$表示有限自由卷积（见定义 2.1）。

高温区间内，经验测度过程的极限行为已通过矩方法 [20, 21]进行了研究。关于涉及正交多项式的高斯涨落或中心极限定理（CLT）已有相关结果。本研究也采用该矩方法，推导出一种新的、但与之等价的中心极限定理形式。

本文结构如下。下一节将简要介绍有限自由卷积。随后在第 1.1 节证明定理 3。第 4节通过矩方法建立经验测度过程的大数定律和中心极限定理。接着在第 5节讨论拉盖尔情形（β-拉盖尔系综和 β-Laguerre 过程）。最后，本文以关于对偶多项式和有限自由卷积的附录收尾。

2 有限自由卷积

我们首先定义多项式卷积。对于两个阶数为 N 的多项式，

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \alpha_i x^{N-i}, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \beta_i x^{N-i},$$

其第 N 阶对称加法卷积定义为

$$(p \boxplus_N q)(x) := \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{N-k} \sum_{i+j=k} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} \alpha_i \beta_j. \tag{5}$$

该卷积由Szeg¨o与沃尔什于20世纪20年代提出，后被重新发现为随机矩阵之和的期望特征多项式 [17]。

已知，若 $p(x)$与 $q(x)$是实根多项式，则$(p \boxplus_N q)(x)$亦然。因此，我们将两个实数 N元组$(a_1, \ldots, a_N)$与$(b_1, \ldots, b_N)$的有限卷积定义为$(p \boxplus_N q)(x)$的根$(c_1, \ldots, c_N)$（按升序排列），其中

$$p(x) = \prod_{i=1}^{N} (x - a_i), \quad q(x) = \prod_{i=1}^{N} (x - b_i).$$

注意,

$$p(x) = \prod_{i=1}^{N} (x - a_i) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k e_k(a_1, \ldots, a_N) x^{N-k},$$

其中，对于 $k = 1, \ldots, N$,

$$e_k(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le N} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k}$$

是 N个变量 $x_1, \ldots, x_N$中的初等对称多项式，且 $e_0(x_1, \ldots, x_N) = 1$。等价地，我们可以用初等对称多项式来定义有限自由卷积。

定义 2.1. $(c_1, \ldots, c_N)$（按升序排列）称为两个由实数组成的 N 元组 $(a_1, \ldots, a_N)$ 和 $(b_1, \ldots, b_N)$ 的有限自由卷积，记作

$$(c_1, \ldots, c_N) = (a_1, \ldots, a_N) \boxplus_N (b_1, \ldots, b_N),$$

if

$$e_k(c_1, \ldots, c_N) = \sum_{i+j=k} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} e_i(a_1, \ldots, a_N) e_j(b_1, \ldots, b_N), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

注记 2.2。 对于 $\mathbb{R}$ 上形如 $\mu_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{a_i}$ 和 $\mu_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{b_i}$ 的两个离散概率测度，它们的有限自由卷积是概率测度 $\mu_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{c_i}$，记作

$$\mu_c = \mu_a \boxplus_N \mu_b,$$

若 $(c_1, \ldots, c_N) = (a_1, \ldots, a_N) \boxplus_N (b_1, \ldots, b_N)$。文献 [19] 中指出，当 $N \to \infty$ 时，若 μ_a （分别为 μ_b）弱收敛到 μ_1 （分别为 μ_2），则 $\mu_a \boxplus_N \mu_b$ 弱收敛到 μ_1 与 μ_2 的自由卷积 $\mu_1 \boxplus \mu_2$。这解释了“有限自由卷积”这一术语的由来。

现在，我们再介绍一种对有限自由卷积 [19, §3.3] 的解释。对于实数 $a_1, \ldots, a_N$，存在复数 $s_1, \ldots, s_N$，使得

$$\prod_{i=1}^{N} (z - a_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z - s_i)^N. \tag{7}$$

换言之，对于测度 $\mu_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{a_i}$ 存在一个支撑在复数 $s_1, \ldots, s_N$ 上的测度 $\nu_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i}$，使得

$$\int (z - x)^N d\nu_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z - s_i)^N = \prod_{i=1}^{N} (z - a_i) = \exp\left(N \int \log(z - u) d\mu_a(u) \right).$$

这一关系称为负参数 $c=-N$ [16]的 Markov–Krein 关系。令S_a 为一个服从离散测度 ν_a的复值随机变量。由于

$$\mathbb{E}[S_a^k]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_i^k,$$

由此可知，关系式（7）等价于以下条件:

$$\binom{N}{k}\mathbb{E}[S_a^k]=e_k(a_1,\dots,a_N),\quad k=1,\dots,N. \tag{8}$$

分别用 S_b 和 S_c 表示与概率测度 $\mu_b=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{b_i}$ 和 $\mu_c=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{c_i}$相关的随机变量。那么， $\mu_c=\mu_a\boxplus_N\mu_b$当且仅当

$$\mathbb{E}[S_c^k]=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mathbb{E}[S_a^i]\mathbb{E}[S_b^{k-i}],\quad k=1,\dots,N.$$

这表明， S_c 的前 N 阶矩与 S_a 和 S_b的独立副本之和的相应矩相同。在高温区间内，对于 $c>0$，这一解释将有限自由卷积与 c-卷积的概念联系起来。

我们以以下关于初等对称多项式收敛的结果结束本小节。

引理 2.3。 对于每个 $\beta>0$，令 $x_1^{(\beta)}\le\cdots\le x_N^{(\beta)}$ 为实数。假设对于每个$k=1$，……， N，

$$e_k\big(x_1^{(\beta)},\dots,x_N^{(\beta)}\big)\to c_k\quad as\quad \beta\to\infty.$$

于是，当 $\beta\to\infty$

$$x_i^{(\beta)}\to x_i,\quad i=1,\dots,N,$$

其中 $x_1\le\cdots\le x_N$是该多项式的零点

$$p(x)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k c_k x^{N-k}.$$

证明。 对每个 β，定义多项式 $p^{(\beta)}$ 如下

$$p^{(\beta)}(x)=\prod_{i=1}^{N}(x-x_i^{(\beta)})=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e_k(x_1^{(\beta)},\dots,x_N^{(\beta)})x^{N-k}.$$

根据假设， $p^{(\beta)}$ 的系数收敛到 p的相应系数，因此根据 $\{x_i^{(\beta)}\}$ ，由多项式根的连续性可知其 [6]。证明完毕。

□

3 冻结区间中的Beta戴森布朗运动

回顾引言中的内容，形式上，当 N 固定且初始数据 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_N$保持不变。随着 $\beta\to\infty$ 趋于无穷，Beta戴森布朗运动 $\lambda(\beta)\,1\,(t)\dots,\lambda(\beta)\,N(t)$ 收敛到满足常微分方程 (4) 的确定性极限 $y_1(t)\le\cdots\le y_N(t)$。从现在起固定 $N\ge2$。由此可见，在冻结区间内，特征值过程收敛到初始数据 $(a_1,\dots,a_N)$ 与$\sqrt{t}(z(H)\,1,N,\dots,z(H)\,N,N)$的有限自由卷积。这里还要回顾， $z(H)\,1,N,\dots,z(H)\,N,N$ 是 N 阶 Hermite 多项式 H_N 的零点，或者是三对角矩阵 J_N(3) 的特征值。

对于 $T>0$，令 $C([0,T])$ 表示定义在 $[0,T]$ 上并赋予一致范数的实值连续函数空间

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\le t\le T}|f(t)|.$$

我们称一列取值于 $C([0,T])$ 的随机元 $X^{(\beta)}(t)$ 依概率收敛到确定性极限 $x(t)\in C([0,T])$，记作 $X^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T} x(t)$，若对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{\beta\to\infty}\mathbb{P}(\|X^{(\beta)}-x\|_\infty\ge\varepsilon)=0.$$

为方便起见，我们在此重述定理1.1 。

定理 3.1。当 $\beta\to\infty$，

$$(\lambda_1^{(\beta)}(t),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t))\xrightarrow{\mathbb{P}}(a_1,\dots,a_N)\boxplus_N\sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)},\dots,z_{N,N}^{(H)}),$$

对 $t\in[0,T]$ 一致成立。更确切地说，令

$$(y_1(t),\dots,y_N(t))=(a_1,\dots,a_N)\boxplus_N\sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)},\dots,z_{N,N}^{(H)}).$$

那么，当 $\beta\to\infty$ 时，

$$\lambda_i^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T} y_i(t),\quad i=1,\dots,N.$$

证明。 我们将证明分为几个引理。这里的思路是考察初等对称多项式的极限行为

$$e_k^{(\beta)}(t):=e_k(\lambda_1^{(\beta)}(t),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t)),\quad k=0,\dots,N.$$

在引理3.5中，我们证明，对于每个 k，$e_k^{(\beta)}(t)$ 在 $t\in[0,T]$ 上一致收敛到一个递归定义的确定性过程 $g_k(t)$。接下来，初等对称多项式的一致收敛意味着每个 $\lambda_i^{(\beta)}(t)$ 一致收敛到极限 $y_i(t)$（引理 3.7），其中

$$e_k(y_1(t),\dots,y_N(t))=g_k(t),\quad k=1,\dots,N.$$

最后，引理 3.9 指出，极限 $(y_1(t)\dots,y_N(t))$ 是初始数据 $(a_1,\dots,a_N)$ 与 $\sqrt{t}(z_{1\ N}^{(H)},,\dots,z_{N\ N}^{(H)},)$ 的有限自由卷积。 □

下面我们展开详细论证。首先应用 Itô 公式。由于$\frac{\partial^2 e_k}{\partial x_i^2}=0$，可知对于 $k\ge 2$，

$$\begin{aligned}
de_k^{(\beta)}(t)&=de_k(\lambda_1^{(\beta)}(t),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t))\\
&=\sum_{i=1}^N\frac{\partial e_k}{\partial x_i}(\lambda_1^{(\beta)}(t),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t))\,d\lambda_i^{(\beta)}(t)\\
&=\sum_{i=1}^N\frac{\partial e_k}{\partial x_i}(\lambda_1^{(\beta)}(t),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t))\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}\,db_i(t)+\sum_{j\ne i}\frac{1}{\lambda_i^{(\beta)}(t)-\lambda_j^{(\beta)}(t)}\,dt\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\beta}}\sum_{i=1}^N\partial_i e_k(\lambda_1^{(\beta)}(t)),\dots,\lambda_N^{(\beta)}(t))db_i(t)-\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2}e_{k-2}^{(\beta)}(t)dt.\quad(9)
\end{aligned}$$

这里为简便起见，我们采用记号 $\partial_i:=\frac{\partial}{\partial x_i}$，以及以下恒等式。

引理 3.2。 对于 $k\ge 2$ 以及互不相同的 x_1、……、x_N，

$$\sum_{j\ne i}\frac{\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)}{x_i-x_j}=-\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2}e_{k-2}(x_1,\dots,x_N).$$

证明。考虑多项式

$$p=\prod_{l=1}^{N}(x-x_l)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e_k(x_1,\dots,x_N)x^{N-k}$$

作为 x 和 $x_1,\dots,x_N$ 的函数，我们计算其偏导数

$$\partial_i p=-\prod_{l\neq i}(x-x_l)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)x^{N-k}.$$

由此可得，对于 $i\neq j$，

$$\frac{\partial_i p-\partial_j p}{x_i-x_j}=-\prod_{l\neq i,j}(x-x_l)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)-\partial_j e_k(x_1,\dots,x_N)}{x_i-x_j}x^{N-k}.$$

因此，通过比较 x^{N-k} 的系数，我们得到

$$\frac{\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)-\partial_j e_k(x_1,\dots,x_N)}{x_i-x_j}=-e_{k-2}(\{x_1,\dots,x_N\}\setminus\{x_i,x_j\}).$$

最后，我们使用常见的“技巧”

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}\frac{\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)}{x_i-x_j}&=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{\partial_i e_k(x_1,\dots,x_N)-\partial_j e_k(x_1,\dots,x_N)}{x_i-x_j}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N}e_{k-2}(\{x_1,\dots,x_N\}\setminus\{x_i,x_j\})\\&=-\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2}e_{k-2}(x_1,\dots,x_N).\end{aligned}$$

这里，最后一行成立是因为对于每个 $i_1<\cdots<i_{k-2}$，单项式 $x_{i_1}\cdots x_{i_{k-2}}$ 在 $e_{k-2}(\{x_1,\dots,x_N\}\setminus\{x_i,x_j\})$ 中出现了 $(N-k+1)(N-k+2)$ 对 (i,j)。证明完毕。□

我们在以下引理中总结依概率一致收敛的性质，其证明从略。

引理 3.3。设 $\{X^{(\beta)}(t)\}_\beta$ 和 $\{Y_{(\beta)}(t)\}_\beta$ 是两个取值于 $C([0,T])$ 的随机元序列。假设存在确定性极限函数 $x(t)\ y(t)\in C([0,T])$ 使得当 $\beta\to\infty$ 时，

$$X^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T}x(t),\qquad Y^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T}y(t).$$

那么，对于任意 $a(t)\ b(t)\in C([0,T])$，以下收敛成立。

(i) 当 $\beta\to\infty$ 时，

$$a(t)X^{(\beta)}(t)+b(t)Y^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T}a(t)x(t)+b(t)y(t).$$

(ii) 当 $\beta\to\infty$ 时，

$$X^{(\beta)}(t)\,Y^{(\beta)}(t)\xrightarrow{\mathbb{P}_T}x(t)y(t).$$

(iii) 当 $\beta\to\infty$ 时，

$$\int_0^t X^{(\beta)}(s)ds\xrightarrow{\mathbb{P}_T}\int_0^t x(s)ds.$$

对于 $k \geq 2$，我们将式（9）写成积分形式

$$e_k^{(\beta)}(t) = e_k(a_1, \ldots, a_N) + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \partial_i e_k(\lambda_1^{(\beta)}(s)), \ldots, \lambda_N^{(\beta)}(s)) db_i(s)$$
$$- \frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} \int_0^t e_{k-2}^{(\beta)}(s) ds.$$

而当 $k = 1$ 时，

$$e_1^{(\beta)}(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{(\beta)}(t) = e_1(a_1, \ldots, a_N) + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sum_{i=1}^{N} b_i(t).$$

现在，对于任意 $k \geq 1$，将鞅部分记为

$$K_k^{(\beta)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \partial_i e_k(\lambda_1^{(\beta)}(s), \ldots, \lambda_N^{(\beta)}(s)) \, db_i(s).$$

我们证明，当 $\beta \to \infty$ 时，鞅部分趋于零。

引理 3.4。当 $\beta \to \infty$ 时，

$$K_k^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} 0.$$

证明。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，由 Doob 鞅不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |K_k^{(\beta)}(t)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[\langle K_k^{(\beta)} \rangle_T],$$

其中二次变差 $\langle K_k^{(\beta)} \rangle_T$ 满足

$$\langle K_k^{(\beta)} \rangle_T = \frac{2}{\beta} \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \left| \partial_i e_k(\lambda_1^{(\beta)}(s), \ldots, \lambda_N^{(\beta)}(s)) \right|^2 ds.$$

因此，只需证明当 $\beta \to \infty$ 时 $\mathbb{E}[\langle K_k^{(\beta)} \rangle_T] \to 0$ 。S

$^{\text{i}}$nce 每个 $\partial_i e_k(x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 都是 $(x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 中次数为 $k-1$ 的多项式，由此可得 tha $^{\text{t}}$

$$\sum_{i=1}^{N} |\partial_i e_k(x_1, \ldots, x_N)|^2 \leq D_k \left(|x_1|^{2k-2} + \cdots + |x_N|^{2k-2} \right),$$

对某个常数 D_k 成立。在下一节中，我们证明

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^{(\beta)}(t))^{2k-2} \right] \leq C_{k-1,T}, \quad t \in [0, T],$$

对某个常数$C_{k-1,\ T}$ 成立，且不依赖于 β。因此，

$$\mathbb{E}[\langle K_k^{(\beta)} \rangle_T] \leq \frac{const}{\beta},$$

它显然在 $\beta \to \infty$ 时趋于零。证明完毕。 □

接下来，利用归纳法，我们推出如下结论。

引理 3.5。当 $\beta \to \infty$，

$$e_k^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} g_k(t),$$

其中 $g_k(t)$ 由 $g_0(t) = 1, g_1(t) = e_1(a_1, \ldots, a_N)$递归地定义，

$$g_k(t) = e_k(a_1, \ldots, a_N) - \frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} \int_0^t g_{k-2}(s) ds, \quad (k \geq 2). \tag{10}$$

证明。 由归纳法可立即得出证明，因为鞅部分在 $[0,T]$ 上一致消失。

□

注记 3.6. </style}极限 $g_k(t)$可由以下常微分方程刻画

$$g_k'(t) = -\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} g_{k-2}(t), \quad g_k(0) = e_k(a_1,\dots,a_N), \quad (k=2,\dots,N). \tag{11}$$

这里 $g_0(t) = 1$ 和 $g_1(t) = e_1(a_1, \dots..., a_N)$。

与引理 2.3类似，初等对称多项式的收敛意味着它们本身也 $\lambda_i^{(\beta)}$ (t收敛。

引理 3.7。 令 $y_1(t) \le y_2(t) \le \cdots \le y_N(t)$ 由以下关系定义：

$$e_k(y_1(t),\dots,y_N(t)) = g_k(t), \quad k=1,\dots,N.$$

于是当 $\beta \to \infty$ 时，

$$\lambda_i^{(\beta)}(t) \overset{\mathbb{P}_T}{\to} y_i(t), \quad i=1,\dots,N.$$

该引理是引理 2.3的以下动力学版本的直接推论。我们省略引理3.7的证明。

引理 3.8。 对于每个 $\beta > 0$，令 $x_1^{(\beta)}(t) \le \cdots \le x_N^{(\beta)}(t)$ 为定义在 $C([0,T])$上的连续函数。假设对于每个 $k = 1,\dots,N$，都存在一个连续函数 $h_k(t)$，使得

$$\|e_k(x_1^{(\beta)}(t),\dots,x_N^{(\beta)}(t)) - h_k(t)\|_\infty \to 0 \quad as \quad \beta\to\infty.$$

于是当 $\beta \to \infty$ 时，

$$\|x_i^{(\beta)}(t) - x_i(t)\|_\infty \to 0, \quad i=1,\dots,N,$$

其中 $x_1(t) \le \cdots \le x_N(t)$ 是多项式的零点

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k h_k(t) x^{N-k}.$$

证明。 只需证明：“对于任意 $t \in [0,T]$，对于任意满足 $t_\beta \overset{\beta\to\infty}{\to} t$ 的序列 $\{t_\beta\}$，都有 $x_i^{(\beta)}(t_\beta) \overset{\beta\to\infty}{\to} x_i(t)$”。取定这样的 $t \in [0,T]$ 和序列 $\{t_\beta\}$。根据一致收敛假设，有

$$e_k(x_1^{(\beta)}(t_\beta),\dots,x_N^{(\beta)}(t_\beta)) \to h_k(t), \quad k=1,\dots,N.$$

于是引理 2.3 推出 $x_i^{(\beta)}(t_\beta) \overset{\beta\to\infty}{\to} x_i(t)$。证明完毕。

□

引理 3.9。 引理 *3.7* 中的极限过程 $y_1(t)\dots,y_N(t)$ 表示为

$$(y_1(t),\dots,y_N(t)) = (a_1,\dots,a_N) \boxplus_N \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)},\dots,z_{N,N}^{(H)}).$$

证明。我们首先考虑零初始条件，即 $a_i = 0$，$i = 1$，....., N。于是极限 $g_k(t)$可以显式计算为

$$g_0(t) = 1, \quad g_1(t) = 0, \quad g_{2m+1}(t) = 0,$$

and

$$g_{2m}(t) = t^m \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{N!}{m!(N-2m)!}.$$

于是根据定义， $y_1(t) \le \cdots \le y_N(t)$是该多项式的零点

$$\sum_{2m\le N} t^m \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{N!}{m!(N-2m)!} x^{N-2m}.$$

注意，在 $t=1$处，上述求和恰好等于 N阶概率论 Hermite 多项式 $H_N(x)$（参见例 A.1）。由此可得

$$(y_1(t),\dots,y_N(t)) = \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)}, z_{2,N}^{(H)}, \dots, z_{N,N}^{(H)}).$$

对于一般的初始条件，令

$$(c_1(t),\dots,c_N(t)) = (a_1,\dots,a_N) \boxplus_N \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)}, z_{2,N}^{(H)}, \dots, z_{N,N}^{(H)}).$$

根据有限自由卷积的定义，

$$\begin{aligned} e_k(c_1(t),\dots,c_N(t)) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(N-i)!(N+i-k)!}{N!(N-k)!} e_{k-i}(a) e_i(z) t^{\frac{i}{2}} \\ &= \sum_{0\le m\le k/2} \frac{(N-2m)!(N+2m-k)!}{N!(N-k)!} e_{k-2m}(a) \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{N!}{(N-2m)!} t^m \\ &= \sum_{0\le m\le k/2} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{(N+2m-k)!}{(N-k)!} e_{k-2m}(a) t^m. \end{aligned}$$

这里为简便起见， $e_k(a)$ 和 $e_k(z)$ 分别表示 $e_k(a_1,\dots,a_N)$ 和 $e_k(z_{1\,N}^{(H)},\dots,z_{N\,N}^{(H)})$。对 $e_k(c_1(t)$ $\dots,c_N(t))$ 求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{de_k(c_1(t),\dots,c_N(t))}{dt} &= \sum_{1\le m\le k/2} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{(N+2m-k)!}{(N-k)!} e_{k-2m}(a) m t^{m-1} \\ &= -\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} e_{k-2}(c_1(t),\dots,c_N(t)), \quad k\ge 2. \end{aligned}$$

注意， $e_0(c_1(t)\dots,c_N(t)) = 1$，且 $e_1(c_1(t)\dots,c_N(t)) = e_1(a)$。由此可知，$e_k(c_1(t)\dots,c_N$ $(t))$ 满足与 $g_k(t)$ 相同的常微分方程 (11)。因此，

$$e_k(c_1(t),\dots,c_N(t)) = g_k(t) = e_k(y_1(t),\dots,y_N(t)), \quad k=1,\dots,N,$$

这意味着

$$y_i(t) = c_i(t), \quad i=1,\dots,N.$$

证明完毕。 □

注记 3.10。在 [27] 中已经证明，常微分方程组（4）存在唯一解，且该解恰好就是此处的极限过程 $y_1(t) \le y_2(t) \le \cdots \le y_N(t)$。现在，对于厄米特多项式的零点，众所周知

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\sqrt{t}z_{i,N}^{(H)}/\sqrt{N}} \xrightarrow{w} sc(t),$$

其中 $sc(t)$ 是方差为 t 的半圆分布，其密度由 b 给出 y

$$\frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t-x^2}, \quad |x| \le 2\sqrt{t},$$

且 $\xrightarrow{w}$ 表示概率测度的弱收敛。因此， [12]中的定理1.3表明

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i(t)/\sqrt{N}} \xrightarrow{w} \mu_0 \boxplus sc(t),$$

前提是 $\sum_{i=1}^{N} \delta_{a_i/\sqrt{N}} \xrightarrow{w} \mu_0$。这里的“⊞”表示实直线上的概率测度的自由卷积。这为证明 [28] 中的定理 1.1 提供了另一种方法。

4 经验测度过程的极限定理

本节中，我们使用矩方法研究经验测度过程的极限行为

$$\mu_t^{(\beta)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^{(\beta)}(t)}$$

在冻结区间内从零点出发的 Beta 戴森布朗运动（2）。我们证明了其收敛到确定性极限，以及围绕该极限的高斯涨落。

对于 $f = f(t,x) \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$，我们记 $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$，$f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$。我们论证的出发点是以下利用伊藤公式推导出的公式（参见 [5, 20]），

$$\begin{aligned} d\langle \mu_t^{(\beta)}, f\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} df(t,\lambda_i^{(\beta)}(t)) \\ &= \frac{\sqrt{2/\beta}}{N}\sum_{i=1}^{N} f'(t,\lambda_i^{(\beta)}(t))\, db_i(t) + \frac{N}{2}\iint \frac{f'(t,x)-f'(t,y)}{x-y}\, d\mu_t^{(\beta)}(x)\, d\mu_t^{(\beta)}(y)\, dt \\ &\quad + \left\langle \mu_t^{(\beta)}, \partial_t f + \left(\tfrac{1}{\beta}-\tfrac{1}{2}\right) f''\right\rangle dt. \end{aligned} \tag{12}$$

这里 $\langle \mu, f\rangle$ 表示可积函数 $\int f(x)d\mu(x)$ 关于测度 μ的积分，其中函数为 f；对于两个变量 t 和 x的函数 $f(t,x)$，积分 $\langle \mu_t^{(\beta)}, f\rangle$ 在 x上取值。更确切地说，当 $\lambda_1^{(\beta)}(t)\ldots,\lambda_N^{(\beta)}(t)$ 两两不同时，上述公式成立；当 $\beta \geq 1$时，这几乎必然发生。

4.1 大数定律

我们已开发出一种矩方法，用于证明高温区间内经验测度过程$\mu_t^{(\beta)}$ 的大数定律。通过采用与 [21], 中几乎相同的论证，我们可以建立 $\mu_t^{(\beta)}$ 矩过程的大数定律，这意味着经验测度过程本身也满足大数定律。在零初始条件下，主要结果如下。

定理 4.1. 在 $[0,T]$上一致收敛的拓扑下，经验测度过程 $\mu_t^{(\beta)}$ 依概率收敛于确定性概率测度值过程 μ_t，其中

$$\mu_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\sqrt{t}z_{i,N}^{(H)}}.$$

此外，对于 t和 x中的任意多项式 $f(t,x)$，当 $\beta\to\infty$时，

$$\langle \mu_t^{(\beta)}, f\rangle \xrightarrow{\mathbb{P}_T} \langle \mu_t, f\rangle.$$

In 此外，$\langle \mu_t, f\rangle$（作为 t的函数）可微，且满足以下关系：

$$\partial_t\langle \mu_t, f\rangle = \frac{N}{2}\iint \frac{f'(t,x)-f'(t,y)}{x-y}\, d\mu_t(x)d\mu_t(y) + \langle \mu_t, -\tfrac{1}{2}f'' + \partial_t f\rangle. \tag{13}$$

注意，我们也用偏导数记号 $\partial_t\langle \mu_t, f\rangle$ 表示关于 t的导数，尽管函数 $\langle \mu_t, f\rangle$ 仅依赖于 t。

经验测度过程的大数定律是定理 3.1 的直接推论。不过，我们将采用另一种方法——矩方法来证明这一点。证明思路如下。

步骤 1（矩过程的递推关系）。记

$$S_n^{(\beta)}(t) = \langle \mu_t^{(\beta)}, x^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^{(\beta)}(t))^n$$

$\mu_t^{(\beta)}$ 的第 n阶矩过程。关于 $f(x) = x^n$ 的公式（12）为

$$dS_n^{(\beta)}(t) = \frac{n\sqrt{2/\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{(\beta)}(t)^{n-1} db_i(t) + \frac{nN}{2} \sum_{j=0}^{n-2} S_j^{(\beta)}(t) S_{n-2-j}^{(\beta)}(t)\, dt$$
$$+ \left(\tfrac{1}{\beta} - \tfrac{1}{2}\right) n(n-1)\, S_{n-2}^{(\beta)}(t)\, dt, \qquad (n \geq 2)$$

或以积分形式

$$S_n^{(\beta)}(t) = \frac{n\sqrt{2/\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \lambda_i^{(\beta)}(u)^{n-1}\, db_i(u) + \frac{nN}{2} \int_0^t \sum_{j=0}^{n-2} S_j^{(\beta)}(u)\, S_{n-2-j}^{(\beta)}(u)\, du$$
$$+ \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\right) n(n-1) \int_0^t S_{n-2}^{(\beta)}(u)\, du, \qquad (n \geq 2). \tag{14}$$

这里已使用零初始条件。对于 $n = 0,\ 1$，显然

$$S_0^{(\beta)}(t) \equiv 1, \qquad S_1^{(\beta)}(t) = \frac{\sqrt{2/\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} b_i(t).$$

步骤2（鞅部分的消失）。我们还处理 $C([0,T])$值随机元的收敛。显然 $S_0^{(\beta)}(t) \equiv 1 \xrightarrow{\mathbb{P}_T} 1$，并且

$$S_1^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} 0 \quad \text{as} \quad \beta \to \infty.$$

鞅部分

$$M_n^{(\beta)}(t) = \frac{n\sqrt{2/\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \lambda_i^{(\beta)}(u)^{n-1}\, db_i(u)$$

同样是 $C([0,T])$值随机元。它们的二次变差由下式给出

$$\langle M_n^{(\beta)} \rangle_t = \frac{2n^2}{\beta N} \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{(\beta)}(u)^{2(n-1)} du = \frac{2n^2}{\beta N} \int_0^t S_{2(n-1)}^{(\beta)}(u) du.$$

我们断言存在常数 $C_{n,\,T}$，它们取决于 n 和 T，使得对于 $t \in [0,T]$ 和 $\beta \geq 1$

$$\mathbb{E}[S_{2n}^{(\beta)}(t)] \leq C_{n,T}. \tag{15}$$

我们略去这一断言的证明，因为它类似于 [21]中的方程（25）的证明。于是，由 Doob 鞅不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_n^{(\beta)}(t)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[\langle M_n^{(\beta)} \rangle_T] = \frac{1}{\beta} \frac{2n^2}{\varepsilon^2 N} \int_0^T \mathbb{E}[S_{2(n-1)}^{(\beta)}(u)] du \leq \frac{1}{\beta} \frac{2n^2}{\varepsilon^2 N} T C_{n-1,T},$$

当 $\beta \to \infty$ 时，这显然趋于零。总之，我们已经证明

$$M_n^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} 0 \quad \text{as} \quad \beta \to \infty.$$

步骤 3（矩过程的大数定律）。通过归纳法，我们得到以下大数定律。递归地定义函数 $m_n(t)$: $m_0(t) \equiv 1$, $m_1(t) \equiv 0$, 并且对于 $n \geq 2$,

$$m_n(t) = \int_0^t \left(\frac{nN}{2} \sum_{j=0}^{n-2} m_j(u) m_{n-2-j}(u) - \frac{1}{2} n(n-1) m_{n-2}(u) \right) du. \tag{16}$$

Then

$$S_n^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} m_n(t) \quad \text{as} \quad \beta \to \infty.$$

步骤 4（识别极限测度过程）。直接计算可得，极限测度过程 $m_n(t)$ 有如下表达式

$$m_n(t) = u_n t^{n/2},$$

其中 $\{u_n\}$ 满足

$$\begin{cases} u_{2n} & = -(2n-1) u_{2n-2} + N \sum_{j \leq (n-1)} u_{2j} u_{2n-2-2j}, \\ u_{2n+1} & = 0. \end{cases} \tag{17}$$

这里的表达式与高温区间中的表达式类似（ [20]中的公式 (10)），可视为两个区域之间的对偶性。令 $v_n = u_{2n}$, $n \geq 0$。那么 $\{v_n\}$ 满足与 [18]中相同的自卷积递推。由此可得

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z_{i,N}^{(H)})^n,$$

并且 $\{m_n(t)\}_{n \geq 0}$ 是概率测度值过程的矩过程

$$\mu_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\sqrt{t} z_{i,N}^{(H)}}.$$

步骤 5。矩过程的收敛意味着经验测度过程的收敛（参见 [23]中的定理 A.1）。最后，在方程（12）中令 $\beta \to \infty$ ，，即可得到方程（13）。

备注 4.2（关于对偶性和普适性的备注）。 (1) 对偶性。 在高温区间中，当 $N \to \infty$ 和 $\beta = \frac{2c}{N}$ 时，以下高斯 Beta 系综的经验测度 $L_N = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i}$

$$const \times \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta \prod_{l=1}^{N} e^{-\lambda_l^2/2}, \qquad (\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N),$$

弱收敛至极限测度 ρ_c，几乎必然地 [1, 24]。这里 $c > 0$ 已给出。序列 v_n 的矩 ρ_c 满足自卷积递推

$$v_{2n} \quad = \quad (2n-1) v_{2n-2} + c \sum_{j \leq n-1} v_{2j} \cdot v_{2n-2-2j}, \quad (v_{2n+1} = 0).$$

形式上，高温区间的结果可通过将冻结区间中的结果里的 $-N$ 替换为 c，再对符号作一些调整而得到。 [11]中对这种对偶性的解释如下。设

$$m_n(N, \kappa) = \mathbb{E}[\langle L_N, x^n \rangle], \quad N = 1, 2, \ldots; \kappa = \frac{\beta}{2}.$$

那么 $m_n(N,\kappa)$ 是关于 N 的多项式，因此可以对任意 $N \in \mathbb{R}$ 定义，并且我们有如下对偶关系：

$$m_n(N,\kappa) = (-1)^n \kappa^n m_n(-\kappa N, \kappa^{-1}).$$

因此，，

$$\lim_{N\to\infty,\kappa=c/N} m_n(N,\kappa) = \lim_{\kappa\to 0}(-1)^n\kappa^n m_n(-c,\kappa^{-1}).$$

左侧是高温区间下的极限，右侧是冻结区间下的极限（系统大小为 $N=-c$）。这给出了两个区域之间的对偶结果。

类似地， ρ_c 是以下无限雅可比矩阵的谱测度

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c+1} & & \\ \sqrt{c+1} & 0 & \sqrt{c+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

That 矩阵由 J_N 中的3）通过将 $-N$ 替换为 c 并改变符号 [11] .

(2) 普适性。我们已在第2 节说明了有限自由卷积与 c-卷积之间的关系，其中 $c>0$。此外，这两种卷积都收敛到自由卷积（当 $N\to\infty$ 且 $c\to\infty$时）。任一区域（随机矩阵机制、高温区间和冻结区间）中的极限测度过程，都可以写成初始测度与零初始条件下的极限测度过程的相应卷积。下一节讨论中心极限定理的表述时，我们会看到更多相似之处。

4.2 中心极限定理

通过与 [20], 中类似的论证，我们可以建立经验测度过程的高斯涨落。下面强调几个要点。回忆一下，极限测度 μ_1 (μ_t 在 $t=1$处可表示为

$$\mu_1 = \mu^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_{i,N}^{(H)}}.$$

设 $\{q_i\}_{i=0}^{N-1}$ 是关于 μ^*的正交多项式，即前 N 个 Hermite 多项式的对偶，它们由以下三项递推关系定义

$$\begin{aligned} &q_0 = 1, q_1 = x, \\ &q_{n+1} = xq_n - (N-n)q_{n-1}, \quad n = 1,\dots,N-2. \end{aligned}$$

(见例A.1。)正交关系表示为

$$\begin{aligned} \langle q_m, q_n\rangle_{\mu^*} &:= \int q_m(x)q_n(x)\,d\mu^*(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_m(z_{i,N}^{(H)})q_n(z_{i,N}^{(H)}) = \delta_{mn}\prod_{i=1}^{n}(N-i). \end{aligned}$$

根据定义，若 n 为奇（分别为偶）多项式，则 q_n 为奇（分别为偶）多项式。设Q_n 为 q_n 的原函数，且常数项为零。定义

$$\widetilde{Q}_n(t,x) = t^{(n+1)/2} Q_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

~然后， Q_n（t， x）是关于 t 和 x的多项式。关于高斯涨落的结果表述如下。

定理 4.3。 当 $\beta \to \infty$时，随机过程

$$\left\{\sqrt{\beta N/2}\big(\langle \mu_t^{(\beta)}, \widetilde{Q}_n\rangle - \langle \mu_t, \widetilde{Q}_n\rangle\big)\right\}_{n=0}^{N-1}$$

依分布联合收敛到相互独立的中心高斯过程 $\{\widetilde{\eta}_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$，其协方差为

$$\mathbb{E}[\widetilde{\eta}_m(s)\widetilde{\eta}_n(t)] = \delta_{mn}\,\frac{\langle q_n, q_n\rangle_{\mu^*}}{n+1}\,(s\wedge t)^{\,n+1}. \tag{18}$$

推论 4.4。 对于高斯 β 系综 (1)，其与零初始条件下 $\{\lambda_i^{(\beta)}\,(1)\}_{i=1}^{N}$ 的联合分布一致，当 $\beta \to \infty$,

$$\left\{\sqrt{\beta N/2}\Big(\langle L_N, Q_n\rangle - \langle \mu^*, Q_n\rangle\Big)\right\}_{n=0}^{N-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_N\left(0, \operatorname{diag}\left(\frac{\langle q_n, q_n\rangle_{\mu^*}}{n+1}\right)_{n=0}^{N-1}\right),$$

其中，$\operatorname{diag}(a_0, \ldots, a_{N-1})$ 和 $\operatorname{diag}(a_n)_{n=0}^{N-1}$ 均表示对角元素为 $a_0, \ldots, a_{N-1}$ 的对角矩阵，而 $\mathcal{N}_N(0,\Sigma)$ 表示均值为零、协方差矩阵为 Σ的 N 维高斯分布。

Let

$$\hat{q}_n = q_n/\sqrt{\langle q_n, q_n\rangle_{\mu^*}}, \quad (n = 0, \ldots, N-1),$$

$\hat{}$ 是关于 μ^* 的标准正交多项式。设 Q_n 是 $\hat{}q_n$ 的原函数。那么上述中心极限定理可改写为

$$\left\{\sqrt{\beta N/2}\Big(\langle L_N, \hat{Q}_n\rangle - \langle \mu^*, \hat{Q}_n\rangle\Big)\right\}_{n=0}^{N-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_N\left(0, \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{N-1}\right).$$

推论 4.5。结论成立:

$$\{\sqrt{\beta/2}(\lambda_i^{(\beta)} - z_{i,N}^{(H)})\}_{i=1}^{N} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_N(0,\Sigma),$$

其中，极限方差矩阵 Σ 满足

$$\mathcal{Q}\Sigma\mathcal{Q}^\top = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{N-1},$$

与正交矩阵

$$\mathcal{Q} := \Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\hat{q}_n(z_{i,N}^{(H)})\Big)_{n=0,\ldots,N-1;i=1,\ldots,N}.$$

因此，对于每个 $n = 0$，.....， $N-1$，极限协方差矩阵 Σ有一个关于特征值 $1/(n+1)$的归一化特征向量 $\frac{1}{\sqrt{N}}(\hat{}q_n(z_{i\,N}^{(H)},))_{i=1}^{N}$。

证明。 注意，随机向量 $(\lambda_i^{(\beta)})_{i=1}^{N}$ 满足以下大数定律和中心极限定理:

$$(\lambda_i^{(\beta)})_{i=1}^{N} \xrightarrow{\mathbb{P}} (z_{i,N}^{(H)})_{i=1}^{N},$$

$$\{\sqrt{\beta/2}(\lambda_i^{(\beta)} - z_{i,N})\}_{i=1}^{N} \xrightarrow{d} \{\eta_i\}_{i=1}^{N},$$

其中，$\{\eta_i\}_{i=1}^{N}$ 是均值为零、协方差矩阵为Σ的联合高斯随机变量。

我们来表示

$$\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\beta/2}\left(\hat{Q}_n(\lambda_i^{(\beta)})-\hat{Q}_n(z_{i,N}^{(H)})\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\hat{q}_n(\gamma_i^{(\beta)})\sqrt{\beta/2}\left(\lambda_i^{(\beta)}-z_{i,N}^{(H)}\right),$$

对于某个介于 $\lambda_i^{(\beta)}$ 和 $z_{i\,N}^{(H)}$ 之间的 $\gamma_i^{(\beta)}$ ，，应用中值定理即可得到。然后，上述大数定律和中心极限定理意味着

$$\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right)\xrightarrow{d}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\hat{q}_n(z_{i,N}^{(H)})\eta_i.$$

联合收敛也成立。因此，作为列向量，

$$\left\{\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right)\right\}_{n=0}^{N-1}\xrightarrow{d}\mathcal{Q}\eta,\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^\top.$$

因此， $\mathcal{Q}\eta$ 的协方差矩阵 $\mathcal{Q}\Sigma\mathcal{Q}^\top$ 与 diag($_{n+1}^{1}$)$_{n=0}^{N-1}$ 一致，证明完毕。

□

5 β-拉盖尔系综与 β-Laguerre过程

5.1 β-拉盖尔系综的大数定律

考虑 β-拉盖尔系综，它是 Wishart 矩阵和 Laguerre矩阵的推广，其联合密度如下

$$\frac{1}{Z_{N,\alpha}^{(\beta)}}\prod_{i<j}|\lambda_j-\lambda_i|^\beta\prod_{i=1}^{N}\left(\lambda_i^{\frac{\beta}{2}\alpha-1}e^{-\frac{\beta}{2}\lambda_i}\right),\quad (0<\lambda_1<\cdots<\lambda_N),\tag{19}$$

其中 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 是两个参数，而 $Z_N^{(\beta)}$ ，α 是归一化常数。它们是以下三对角矩阵 [8] 的特征值

$$L_{N,\beta}=(B_N^{(\beta)})^\top B_N^{(\beta)},$$

其中双对角矩阵 $B_N^{(\beta)}$ 由以下分布的独立随机变量组成

$$B_N^{(\beta)}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix}\chi_{\beta(\alpha+N-1)}&&&\\ \chi_{\beta(N-1)}&\chi_{\beta(\alpha+N-2)}&&\\ &\ddots&\ddots&\\ &&\chi_\beta&\chi_{\beta\alpha}\end{pmatrix}.$$

当 N 和 $\alpha>0$ 固定时，随着 $\beta\to\infty$,

$$B_N^{(\beta)}\xrightarrow{\mathbb{P}}\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha+N-1}&&&\\ \sqrt{N-1}&\sqrt{\alpha+N-2}&&\\ &\ddots&\ddots&\\ &&1&\sqrt{\alpha}\end{pmatrix}=:B_N^{(\infty)}.$$

因此，在冻结区间中，当 N 和 α 固定且 $\beta\to\infty$时，特征值 (λ_1、.....、 λ_N)依概率收敛到确定性三对角矩阵的特征值

$$J_N^{(L)}:=(B_N^{(\infty)})^\top(B_N^{(\infty)}).\tag{20}$$

这些确定性特征值恰好是 N阶拉盖尔多项式$L_N^{(\alpha)}$ (x的零点。这里，拉盖尔多项式 $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\geq 0}$ 是关于权函数 $x^{\alpha-1}e^{-x}$， $x > 0$ (参见例 A.2)的首一正交多项式。这些论证导出了以下大数定律。

定理 5.1。 在冻结区间，β-拉盖尔系综 (19)的特征值依概率收敛于 N 阶拉盖尔多项式 $L_N^{(\alpha)}(x)$的零点。

5.2 β-Laguerre过程的大数定律

所谓的 β-Laguerre过程 $0 \leq \lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \cdots \leq \lambda_N(t)$ 满足以下随机微分方程组

$$d\lambda_i(t) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\lambda_i(t)}\, db_i(t) + \alpha\, dt + \sum_{j\neq i} \frac{2\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\, dt, \tag{21}$$

，其初始条件为 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_N$。上述随机微分方程强解的存在唯一性已在 [14]中证明（当 $\beta \geq 1$时）。在这种情况下，特征值过程在任意正时刻都不会碰撞。对于更一般的 $\beta > 0$，β-Laguerre过程定义为 B 型径向邓肯尔过程 [7]的平方。冻结区间中的第一个结果如下所述。

定理 5.2. 设 $\alpha > 0$ 和 $N \geq 2$ 为固定值。那么当 $\beta \to \infty$时，

$$\lambda_i(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} x_i(t), \quad i = 1, \ldots, N,$$

其中，确定性极限过程 $x_1(t) \ldots, x_N(t)$ 取决于参数 $\alpha > 0$。

证明. 下面概述证明的主要思路。由于详细论证与高斯情形中的论证类似，这里省略。我们首先考察特征值过程的初等对称多项式，

$$e_k^{(\beta)}(t) = e_k(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)), \quad k = 0, \ldots, N.$$

首先，由伊藤公式可得

$$de_k^{(\beta)}(t) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial e_k}{\partial \lambda_i}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t))\sqrt{\lambda_i(t)}\, db_i(t) + (N-k+1)(N-k+\alpha)\, e_{k-1}^{(\beta)}(t)\, dt.$$

接下来，当 $\beta \to \infty$时，鞅部分在极限中消失。然后通过归纳法可得，对于 $k = 1,\ldots, N$,

$$e_k^{(\beta)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}_T} g_k(t),$$

其中 $g_k(t)$递归地定义为

$$g_k(t) = e_k(a_1, \ldots, a_N) + (N-k+1)(N-k+\alpha)\int_0^t g_{k-1}(u)du, \quad (g_0(t) \equiv 1). \tag{22}$$

最后，极限过程 $x_1(t) \leq \cdots \leq x_N(t)$ 由以下关系定义

$$e_k(x_1(t), \ldots, x_N(t)) = g_k(t), \quad k = 0, \ldots, N.$$

至此，证明概要完毕。 □

注记 5.3. 常微分方程组解的存在唯一性

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \frac{\alpha}{z_i(t)} + \sum_{j\neq i}\left(\frac{1}{z_i(t) - z_j(t)} + \frac{1}{z_i(t) + z_j(t)}\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

已在 [27] 中得到证明。形式上，极限过程 $x_1(t)\dots,x_N(t)$ 满足

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\alpha+\sum_{j\neq i}\frac{2x_i(t)}{x_i(t)-x_j(t)},\quad i=1,\dots,N,$$

which 可通过对 $z_i(t)$ 的常微分方程作变量代换 $x_i(t)=\frac{1}{2}z_i(t)^2$ 得到 - .

接下来，我们将更详细地研究这些极限过程。第一个性质与以下事实有关：从零开始，在任意时刻 $t>0$，$(\lambda_1(t)\dots,\lambda_N(t))/t$ 的联合分布与 β-拉盖尔系综（19）一致。

引理 5.4. 在零初始条件下，极限过程为

$$(x_1(t),\dots,x_N(t))=t(z_{1,N}^{(\alpha)},\dots,z_{N,N}^{(\alpha)}).$$

这里，$0<z_1^{(\alpha)},{}_N<\cdots<z_N^{(\alpha)},{}_N$ 是第 N 个拉盖尔多项式 $L_N^{(\alpha)}$ 的零点。

证明。 在零初始条件下，极限过程 $g_k(t)$在定理 5.2的证明中被明确计算为

$$g_k(t)=\frac{t^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(N-j)(N-j+\alpha-1),\quad k=1,\dots,N.$$

那么，根据定义可推得 $x_i(t)$ 具有如下形式

$$x_i(t)=tz_i,\quad i=1,\dots,N,$$

其中 $z_1,\dots,z_N$ 是下列多项式的零点

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(N-j)(N-j+\alpha-1)x^{N-k},$$

这实际上就是 N 阶拉盖尔多项式 $L_N^{(\alpha)}(x)$（参见附录 32中的公式（A））。证明完毕。

□

引理 5.5. 设$(x_1^{(i)}(t)\dots,x_N^{(i)}(t))$ 为参数为 α_i、$(i=1,2)$的极限过程。则

$$(z_1(t),\dots,z_N(t)):=(x_1^{(1)}(t),\dots,x_N^{(1)}(t))\boxplus_N(x_1^{(2)}(t),\dots,x_N^{(2)}(t))$$

它们是参数为 $\alpha_1+\alpha_2+N-1$ 的极限过程。

证明。 为简单起见，设

$$c_k=e_k(x_1^{(1)}(t),\dots,x_N^{(1)}(t)),\quad d_k=e_k(x_1^{(2)}(t),\dots,x_N^{(2)}(t)),\quad f_k=e_k(z_1(t),\dots,z_N(t)).$$

从定理 $g_k(t)$ 的证明中5.2 对 c_k 以及 d_k 的定义可知，它们由以下条件刻画：

$$c_k'=(N-k+1)(N-k+\alpha_1)c_{k-1},\quad d_k'=(N-k+1)(N-k+\alpha_1)d_{k-1}.$$

Here “’”表示对 t 求导数。根据有限自由卷积的定义 -
合 n,

$$f_k=\sum_{i+j=k}\frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!}c_id_j.$$

对两边求导，我们得到

$$f_k'=\sum_{i+j=k}\frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!}\left\{c_i'd_j+c_id_j'\right\}.$$

让我们考虑第一部分

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=k} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} c_i' d_j \\
&= \sum_{i+j=k, i\geq 1} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} (N-i+1)(N-i+\alpha_1) c_{i-1} d_j \\
&= \sum_{\hat{i}+j=k-1} \frac{(N-\hat{i})!(N-j)!}{N!(N-(k-1))!} (N-k+1)(N-\hat{i}+1+\alpha_1) c_{\hat{i}} d_j \quad (\hat{i} := i-1) \\
&= \sum_{i+j=k-1} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-(k-1))!} (N-k+1)(N-i+1+\alpha_1) c_i d_j \quad (i := \hat{i}).
\end{aligned}$$

类似地，第二部分变为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=k} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} c_i d_j' \\
&= \sum_{i+j=k-1} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-(k-1))!} (N-k+1)(N-j+1+\alpha_2) c_i d_j.
\end{aligned}$$

将两部分合并，得到

$$\begin{aligned}
f_k' &= \sum_{i+j=k} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-k)!} \left\{ c_i' d_j + c_i d_j' \right\} \\
&= \sum_{i+j=k-1} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-(k-1))!} (N-k+1) \left\{ (N-i+1+\alpha_1) + (N-j+1+\alpha_2) \right\} c_i d_j \\
&= (N-k+1)(N-k+(\alpha_1+\alpha_2+N-1)) \sum_{i+j=k-1} \frac{(N-i)!(N-j)!}{N!(N-(k-1))!} c_i d_j \\
&= (N-k+1)(N-k+(\alpha_1+\alpha_2+N-1)) f_{k-1}.
\end{aligned}$$

这意味着 $z_1(t) \ldots, z_N(t)$ 是参数为 $\alpha_1+\alpha_2+N-1$ 的极限过程。证明完毕。

□

引理 5.6。 (i) 设 $(y_1(t) \ldots, y_{2N}(t))$ 为高斯情形下具有对称初始条件 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2N}$ 的极限过程，即

$$(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)) = (a_1, \ldots, a_{2N}) \boxplus_{2N} \sqrt{t}(z_{1,2N}^{(H)}, \ldots, z_{2N,2N}^{(H)}).$$

这里，$(a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_N)$ 是对称的，当且仅当

$$a_i = -a_{N-i+1}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

那么，对于 $t \geq 0$，$(y_1(t) \ldots, y_{2N}(t))$ 也具有对称性，并且

$$x_i(t) = \frac{1}{2} y_{N+i}^2(t), \quad i = 1, \ldots, N,$$

是参数为 $\alpha = 1/2$ 的拉盖尔情形下的极限过程。

(ii) 设 $(y_1(t) \ldots, y_{2N+1}(t))$ 为具有对称初始条件 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2N+1}$ 的高斯情形下的极限过程。那么，$(y_1(t) \ldots, y_{2N+1}(t))$ 对于 $t \geq 0$ 也具有对称性，并且

$$x_i(t) = \frac{1}{2} y_{N+1+i}^2(t), \quad i = 1, \ldots, N,$$

是参数为 $\alpha = 3/2$ 的极限过程。

证明。 我们观察到， $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_N$ 是对称的，当且仅当对于奇数 $1 \le k \le N$,

$$e_k(a_1, a_2, \ldots, a_N) = 0.$$

根据这一观察，很容易看出

$$(c_1, \ldots, c_N) = (a_1, \ldots, a_N) \boxplus_N (b_1, \ldots, b_N)$$

是对称的，前提是 $(a_1$、……、 $a_N)$ 和 $(b_1$、……、 $b_N)$ 均为对称的。

我们来证明 (i)。由于

$$(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)) = (a_1, \ldots, a_{2N}) \boxplus_{2N} \sqrt{t}(z^{(H)}_{1,2N}, \ldots, z^{(H)}_{2N,2N}),$$

过程 $(y_1(t)$……， $y_{2N}(t))$ 是对称的。由对称性可知，

$$\prod_{i=1}^{2N}(x - y_i(t)) = \prod_{i=1}^{N}(x^2 - y_{N+i}(t)^2).$$

因此，

$$e_{2k}(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)) = (-1)^k e_k(y_{N+1}(t)^2, \ldots, y_{2N}(t)^2).$$

于是，根据 $x_i(t)$ 的定义，对于 $k = 1$、……、 N,

$$e_k(x_1(t), \ldots, x_N(t)) = (-2)^{-k} e_{2k}(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)).$$

接下来，我们计算 $e_k(x_1(t) \ldots, x_N(t))$ 的导数，

$$\begin{aligned}
&\frac{de_k(x_1(t), \ldots, x_N(t))}{dt} \\
&= (-2)^{-k} \frac{de_{2k}(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t))}{dt} \\
&= (-2)^{-k}(-1)\frac{(2N - 2k + 1)(2N - 2k + 2)}{2} e_{2k-2}(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)) \\
&= (N - k + 1)(N - k + \frac{1}{2}) e_{k-1}(x_1(t), \ldots, x_N(t)).
\end{aligned}$$

这意味着 $(x_1(t) \ldots, x_N(t))$ 是参数为 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的极限过程。(ii) 的证明完全相同。 □

我们得到了一个用初始数据、厄米多项式的零点和拉盖尔多项式的零点表示极限过程的表达式，这与随机矩阵机制中的表达式类似（参见 [28, 定理 1。3]）以及高温区间中的表达式（[21,注释 V。3]）。

The定理 5.7。设 $\alpha > N - \frac{1}{2}$。设 $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_N$ 为给定的初始条件。设

$$(y_1(t), \ldots, y_{2N}(t)) = (-\sqrt{a_N}, -\sqrt{a_{N-1}}, \ldots, \sqrt{a_{N-1}}, \sqrt{a_N}) \boxplus_{2N} \sqrt{t}(z^{(H)}_{1,2N}, \ldots, z^{(H)}_{2N,2N})$$

为高斯情形下的极限过程。那么，极限过程 $x_1(t) \ldots, x_N(t)$ 可以表示为

$$(x_1(t), \ldots, x_N(t)) = \frac{1}{2}(y_{N+1}(t)^2, \ldots, y_{2N}(t)^2) \boxplus_N t(z^{(\alpha-N+\frac{1}{2})}_{1,N}, \ldots, z^{(\alpha-N+\frac{1}{2})}_{N,N}).$$

证明。首先，由引理 5.6(i)，过程 $\frac{1}{2}(y_{N+1}(t)^2, \ldots, y_{2N}(t)^2)$ 是参数为 $1/2$、初始条件为 $a_1, \ldots, a_N$ 的拉盖尔情形中的极限过程。其次，引理 5.4 指出， $t(z^{(\alpha-N+\frac{1}{2})}_{1,N}, \ldots, z^{(\alpha-N+\frac{1}{2})}_{N,N})$ 是参数为 $(\alpha - N + \frac{1}{2})$、零初始条件下的极限过程。最后，结论直接由引理 5.5 得出。证明完毕。 □

5.3 经验分布的中心极限定理

借助矩方法，我们可以得到与高温区间形式类似的经验测度过程的大数定律和中心极限定理。下面我们利用正交多项式，给出β-拉盖尔系综经验分布的一个中心极限定理。设

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$$

为 β-拉盖尔系综特征值的经验分布（19）。记

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{z_{i,N}^{(\alpha)}}$$

冻结区间中的极限测度。我们考虑拉盖尔多项式的对偶，记作 $\{q_n\}_{n=0}^{N-1}$，它们关于概率测度正交

$$\mu^* = \frac{1}{N(\alpha+N-1)}\sum_{i=1}^{N} z_{i,N}^{(\alpha)}\delta_{z_{i,N}^{(\alpha)}}.$$

（见例 A.2。）设 Q_n 是 q_n的原函数。那么，与高温区间类似，[20], 我们可以证明如下结果。

定理5.8。当 $\beta\to\infty$,

$$\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N, Q_n\rangle - \langle \mu, Q_n\rangle\right)_{n=0}^{N-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_N\left(0, \operatorname{diag}\left(\frac{(\alpha+N-1)}{n+1}\langle q_n, q_n\rangle_{\mu^*}\right)\right).$$

设 $\hat{}q_n = q_n/\sqrt{\langle q_n,\ q_n\rangle_{\mu^*}}$，$n=0$，……，$N-1$ 是关于 μ^* 的正交多项式。定义正交矩阵 $\mathcal{Q}$ 如下

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{N(N+\alpha-1)}}\left(\sqrt{z_{i,N}^{(\alpha)}}\hat{q}_n(z_{i,N}^{(\alpha)})\right)_{n=0,\ldots,N-1;i=1,\ldots,N}.$$

推论 5.9。当 $\beta\to\infty$,

$$\left\{\sqrt{2\beta}\left(\sqrt{\lambda_i}-\sqrt{z_{i,N}^{(\alpha)}}\right)\right\}_{n=0}^{N-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_N(0,\Sigma),$$

其中，极限协方差矩阵 Σ 满足 $\mathcal{Q}\Sigma\mathcal{Q}^\top = \operatorname{diag}(\frac{1}{n+1})_{n=0}^{N-1}$.

证明。 我们采用与推论 4.5 的证明相同的思路。设 $\xi_i = \sqrt{\lambda_i}$ 和 $u_i = \sqrt{z_{i,N}^{(\alpha)}}$，。则以下大数定律和中心极限定理成立

$$(\xi_i)_{i=1}^N \xrightarrow{\mathbb{P}} (u_i)_{i=1}^N,$$

$$\left\{\sqrt{2\beta}\,(\xi_i-u_i)\right\}_{i=1}^N \xrightarrow{d} \{\eta_i\}_{i=1}^N,$$

其中 $\{\eta_i\}_{i=1}^N$ 服从联合高斯分布，均值为零，协方差矩阵为 Σ。

Let $\hat{Q}_n$ 是 $\hat{}q_n$的原函数。我们从以下表达式开始

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle - \langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right) &= \frac{\sqrt{\beta/2}}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Q}_n(\xi_i^2)-\hat{Q}_n(u_i^2)\right)\\ &= \frac{\sqrt{\beta/2}}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} 2\gamma_i\hat{q}_n(\gamma_i^2)\,(\xi_i-u_i)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\hat{q}_n(\gamma_i^2)\sqrt{2\beta}\,(\xi_i-u_i),\end{aligned}$$

通过应用中值定理，存在某个 γ_i 介于 ξ_i 和 u_i之间。然后，上述大数定律和中心极限定理意味着

$$\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right)\xrightarrow{d}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}u_i\hat{q}_n(u_i^2)\eta_i.$$

联合收敛也成立。因此，作为列向量，

$$\left\{\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu^*,\hat{Q}_n\rangle\right)\right\}_{n=0}^{N-1}\xrightarrow{d}\sqrt{N+\alpha-1}\mathcal{Q}\eta,\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)^\top.$$

此外，我们利用正交多项式的原函数 $\hat{}q_n$，将定理 5.8 中的中心极限定理改写为

$$\sqrt{\beta N/2}\left(\langle L_N,\hat{Q}_n\rangle-\langle\mu,\hat{Q}_n\rangle\right)_{n=0}^{N-1}\xrightarrow{d}\mathcal{N}_N\left(0,\operatorname{diag}\left(\frac{(\alpha+N-1)}{n+1}\right)\right).$$

因此， $\mathcal{Q}\eta$ 的协方差矩阵 $\mathcal{Q}\Sigma\mathcal{Q}^\top$ 与 diag($\frac{1}{n+1}$)$_{n=0}^{N-1}$ 一致，证明完毕。—

□

致谢。作者感谢 Peter J. Forrester 教授建议我们采用随机方法研究冻结区间。

A 正交多项式及其对偶

本节讨论正交多项式、雅可比矩阵及其谱测度。我们旨在引入关于如下形式的离散概率测度的正交多项式

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\delta_{z_{i,N}^{(H)}},\quad \frac{1}{const}\sum_{i=1}^{N}z_{i,N}^{(\alpha)}\delta_{z_{i,N}^{(\alpha)}},$$

用对偶多项式表示，其中 $z_{i\,N}^{(H)}$，和 $z_{i\,N}^{(\alpha)}$，分别是厄米多项式和拉盖尔多项式的零点。

设 J 为有限Jacobi矩阵，即具有如下形式的对称三对角矩阵

$$J=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & b_{N-1} & a_N\end{pmatrix},\tag{23}$$

其中 $a_1,\ldots,a_N\in\mathbb{R}$; $b_1,\ldots,b_{N-1}>0$。那么 J有 N个不同的特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$，对应的归一化特征向量为 $v_1,\ldots,v_N$。 J的谱测度是满足以下条件的定义在 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 μ

$$\langle\mu,x^n\rangle=\int_{\mathbb{R}}x^n d\mu(x)=J^n(1,1),\quad n=0,1,\ldots.\tag{24}$$

由 J 的谱分解可知，谱测度 μ 具有如下形式

$$\mu=\sum_{i=1}^{N}w_i\delta_{\lambda_i},\quad w_i=|v_i(1)|^2,$$

它是一个支撑在 J 的特征值上的离散概率测度。

通过三项递推关系定义首一多项式序列 $p_0, \dots, p_N$

$$
\begin{aligned}
&p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - a_1, \\
&p_{n+1}(x) = x p_n(x) - a_{n+1} p_n(x) - b_n^2 p_{n-1}(x), \quad n = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}
$$

那么， $\{p_i\}_{i=0}^{N-1}$ 在 $L^2(\mu)$中正交，满足正交关系

$$
\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = \delta_{mn} \prod_{i=1}^{n} b_i^2, \quad 0 \le m, n \le N-1,
$$

换句话说，

$$
\sum_{i=1}^{N} w_i p_n(\lambda_i) p_m(\lambda_i) = \delta_{mn} \prod_{i=1}^{n} b_i^2.
$$

这里，若 $m = n$ 和 $\delta_{mn} = 0$，则为 $\delta_{mn} = 1$；否则如此。注意， $p_N(x) = \det(x - J) = \prod_{i=1}^{N} (x - \lambda_i)$在 $L^2(\mu)$中是零函数。对于 $n = 0, \ 1, \ \dots, \ N-1$，令

$$
\tilde{p}_n = p_n / \sqrt{h_n}, \quad (h_n := b_1^2 \cdots b_n^2).
$$

那么， $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{N-1}$ 是标准正交多项式。这些多项式满足以下三项递推关系

$$
b_{n+1} \tilde{p}_{n+1} = x \tilde{p}_n - a_{n+1} \tilde{p}_n - b_n \tilde{p}_{n-1}, \quad n = 0, \dots, N-1,
$$

$(b_0 := 0, b_N := 1)$。我们将其改写为矩阵形式：

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & & \\
b_1 & a_2 & b_2 & \\
& \ddots & \ddots & \ddots \\
& & b_{N-1} & a_N
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \tilde{p}_{N-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
x\tilde{p}_0 \\ x\tilde{p}_1 \\ \vdots \\ x\tilde{p}_{N-1} - \tilde{p}_N
\end{pmatrix}. \tag{25}
$$

由此可得

$$
(\tilde{p}_0(\lambda_i), \dots, \tilde{p}_{N-1}(\lambda_i))^\top,
$$

是 J 关于 λ_i的特征向量，因此，关于特征值 λ_i 的归一化特征向量由下式给出

$$
v_i = (\tilde{p}_0(\lambda_i), \dots, \tilde{p}_{N-1}(\lambda_i))^\top / \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_j(\lambda_i)^2}. \tag{26}
$$

In 特别地，谱测度表达式中的权 w_i 可以表示为 as

$$
w_i = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_j(\lambda_i)^2}, \tag{27}
$$

其可进一步化简为

$$
w_i = \frac{h_{N-1}}{p_{N-1}(\lambda_i) p'_N(\lambda_i)} \tag{28}
$$

利用Christoffel–Darboux公式。

J 的对偶定义为雅可比矩阵 J^* ，它通过反转序列 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$和 $\{b_n\}_{n=1}^{N-1}$得到，

$$
J^* =
\begin{pmatrix}
a_N & b_{N-1} & & \\
b_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-2} & \\
& \ddots & \ddots & \ddots \\
& & b_1 & a_1
\end{pmatrix}.
$$

由以下方式定义的多项式 $\{q_n\}_{n=0}^{N-1}$

$$q_0 = 1, q_1 = x - a_N,$$
$$q_{n+1} = xq_n - a_{N-n}q_n - b_{N-n}^2 q_{n-1}, \quad n = 1, \ldots, N-2,$$

称为 $\{p_n\}_{n=0}^{N-1}$ 的对偶多项式。注意， $\{q_n\}_{n=0}^{N-1}$ 关于 J^* 的谱测度 μ^* 正交，该谱测度可表示为

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{N} w_i^* \delta_{\lambda_i}, \quad w_i^* = |v_i(N)|^2,$$

因为（J^*）^{n}（1，1）$= J^n$（N，N） $n = 0$，1，.....公式（26）可得

$$w_i^* = \frac{\tilde{p}_{N-1}^2(\lambda_i)}{\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_j^2(\lambda_i)} = \tilde{p}_{N-1}^2(\lambda_i) w_i = \frac{h_{N-1}\tilde{p}_{N-1}^2(\lambda_i)}{p_{N-1}(\lambda_i)p_N'(\lambda_i)} = \frac{p_{N-1}(\lambda_i)}{p_N'(\lambda_i)}. \tag{29}$$

在无限情形下，

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}; b_j > 0,$$

首一多项式 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 由三项递推关系定义至无穷。它们关于满足矩关系（ μ 24）的任意概率测度 μ 正交。若概率测度 J唯一，则称其为 的谱测度。唯一性的一个充分条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty,$$

（见 [22, 推论 3.8。9]）我们也将 J 称为 μ的雅可比矩阵。在这一无限情形下，我们考虑前 N 个多项式 $\{p_i\}_{i=0}^{N-1}$ 的对偶多项式，记作$\{q_i^{(N)}\}_{i=0}^{N-1}$，或者在上下文明确时简记为 $\{q_i\}_{i=0}^{N}$。

示例 A.1（厄米多项式）。（概率论中的）厄米多项式是关于标准高斯测度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 正交的首一多项式。它们可以递归地定义为

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x,$$
$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

注意， $H_n(x)$ 有如下显式表达式

$$H_n(x) = \sum_{m \leq n/2} \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} x^{n-2m}. \tag{30}$$

用雅可比矩阵来表示，标准高斯测度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 是以下无限雅可比矩阵的谱测度

$$J^{(H)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

将有限Jacobi矩阵 $J_N^{(H)}$ 定义为

$$J_N^{(H)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{N-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

于是 $H_N(x) = \det(x - J_N^{(H)})$。因此，特征值 $\{z_{i,N}^{(H)}\}_{i=1}^N$（属于 $J_H^{(N)}$）是第 N 个 Hermite 多项式 $H_N(x)$ 的零点。对于该有限矩阵，对偶多项式 $\{q_i\}_{i=0}^{N-1}$ 关于（见 [25]）正交

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \delta_{z_{i,N}^{(H)}}.$$

This 已利用方程（29），并借助关系式 $H_N'(x) = NH_{N-1}(x$),

$$w_i^* = \frac{H_{N-1}(z_{i,N}^{(H)})}{H_N'(z_{i,N}^{(H)})} = \frac{1}{N}.$$

例 A.2（（广义）拉盖尔多项式）。我们考虑首一多项式 $L_n^{(\alpha)}(x)$，它们关于如下权函数正交

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0,$$

这是参数为 $(\alpha, 1)$ 的伽马分布的密度，其中 $\alpha > 0$ 是一个参数。（注意，通常的拉盖尔多项式的首项系数为 $(-1)^n/n!$）它们满足三项递推关系

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - (\alpha + 2n))L_n^{(\alpha)}(x) - n(\alpha + n - 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

其中 $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$，$L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha$。就雅可比矩阵而言，这意味着上述伽马密度是下列对象的谱测度

$$\begin{aligned} J^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha} & & \\ \sqrt{\alpha} & \alpha + 2 & \sqrt{2}\sqrt{\alpha+1} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & & \\ \sqrt{1} & \sqrt{\alpha+1} & \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{1} & & \\ & \sqrt{\alpha+1} & \sqrt{2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意，拉盖尔多项式的闭式为

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (N - i)(N - i + \alpha - 1) \right] x^{n-k}, \tag{32}$$

这可以通过对罗德里格斯公式应用乘积求导的莱布尼茨定理推导得出

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha+1} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha-1} \right).$$

令 $J_{\alpha,\ N}$ 为有限Jacobi矩阵

$$J_{\alpha,N} = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha} & & \\ \sqrt{\alpha} & \alpha + 2 & \sqrt{2}\sqrt{\alpha+1} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{N-1}\sqrt{\alpha+N-2} & \alpha + 2(N-1) \end{pmatrix}.$$

我们将其对偶表示为

$$J^*_{\alpha,N} = \begin{pmatrix} \alpha+2(N-1) & \sqrt{N-1}\sqrt{\alpha+N-2} & & \\ \sqrt{N-1}\sqrt{\alpha+N-2} & \alpha+2(N-1) & \sqrt{N-2}\sqrt{\alpha+N-3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{\alpha} & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+N-1} & \sqrt{N-1} & & \\ & \sqrt{\alpha+N-2} & \sqrt{N-2} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \times \text{its transpose.}$$

本文需要用到以下一些性质。

(i) $L_N^{(\alpha)}(x)$ 的零点 $z_{i\ N}^{(L)}$，是 $J_{\alpha,\ N}$ 或 $J^*_{\alpha,\ N}$ 的特征值。

(ii) $J^*_{\alpha,\ N}$ 的谱测度为

$$\mu^* = \frac{1}{N(\alpha+N-1)} \sum_{i=1}^{N} z_{i,N}^{(L)} \delta_{z_{i,N}^{(L)}}.$$

为说明这一点，我们利用关系式 $x(L_N^{(\alpha)})'(x) = NL_N^{(\alpha)}(x) + N(\alpha+N-1)L_{N-1}^{(\alpha)}(x)$，推得

$$w_i^* = \frac{L_{N-1}^{(\alpha)}(\lambda_i)}{(L_N^{(\alpha)})'(\lambda_i)} = \frac{\lambda_i}{N(\alpha+N-1)}, \quad (\lambda_i = z_{i,N}^{(L)}).$$

(iii) 我们指出，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+N-1} & & & \\ \sqrt{N-1} & \sqrt{\alpha+N-2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+N-1} & \sqrt{N-1} & & \\ & \sqrt{\alpha+N-2} & \sqrt{N-2} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+N-1 & \sqrt{N-1}\sqrt{\alpha+N-1} & & \\ \sqrt{N-1}\sqrt{\alpha+N-1} & \alpha+2N-3 & \sqrt{N-2}\sqrt{\alpha+N-2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{\alpha+1} & \alpha+1 \end{pmatrix} =: J_N^{(L)}$$

也具有相同的特征值，且 $J^*_{\alpha,\ N}$。该矩阵在（20）中定义为 β-拉盖尔系综在冻结极限下的极限。其谱测度为

$$\frac{1}{N} \delta_{z_{i,N}^{(L)}}.$$

B 有限自由卷积与傅里叶变换

接下来，我们定义多项式上的“傅里叶变换”这一概念，并研究它的一些性质。对于次数为 N 的多项式 p，我们可以唯一地找到一个微分多项式 $\widehat{p}(D)$（次数为 N），使得

$$\widehat{p}(D)x^N = p(x),$$

其中， D 是关于变量 x 的微分算子。我们称 $\widehat{p}$ 为 p 的**有限自由傅里叶变换（FFF）**。事实上，对于多项式 $p(x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \alpha_k x^{N-k}$，其有限自由傅里叶变换 $\widehat{p}(D)$ 可明确表示为

$$\widehat{p}(D) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\alpha_k}{\binom{N}{k}} D^k.$$

我们记

$$\hat{p}(D) \overset{N}{=} \hat{q}(D)$$

如果对于所有 $n \leq N$， D^n 的系数都相同。那么根据定义可直接得出， $r = p \boxplus_N q$ 当且仅当

$$\widehat{r}(D) \overset{N}{=} \widehat{p}(D)\widehat{q}(D). \tag{33}$$

设 $p(x) = \prod_{i=1}^{N}(x - a_i)$ 是一个根为 $a_1, \ldots, a_N$ 的首一多项式。我们将根为 $ta_1, \ldots, ta_N$ 的多项式定义为 $p_t(x)$,

$$p_t(x) = \prod_{i}^{N}(x - ta_i), \quad t \in \mathbf{C}.$$

由于相应的初等对称函数满足

$$e_k(ta_1, \ldots, ta_N) = t^k e_k(a_1, \ldots, a_N), \quad k = 0, \ldots, N,$$

我们得到

$$\widehat{p_t}(D) = \widehat{p}(tD). \tag{34}$$

当 $p = H_N$ 是第 N 个 Hermite 多项式时，由显式公式（30）可得

$$\widehat{p}(D) = \sum_{n \leq N/2} \frac{(-1)^n D^{2n}}{2^n n!} \overset{N}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D^{2n}}{2^n n!} = e^{-\frac{1}{2}D^2}.$$

因此，记 $H_{N,\ t}$ 为根是 H_N的根的 t 倍的多项式，其傅里叶变换为

$$\widehat{H_{N,t}}(D) = \widehat{p_t} \overset{N}{=} e^{-\frac{1}{2}t^2 D^2}.$$

由此公式直接可得

$$H_{N,t} \boxplus_N H_{N,s} = H_{N,\sqrt{t^2+s^2}}.$$

我们将利用傅里叶变换，给出引理 3.9 的另一种证明。

Lem引理 B.1. 对于 $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$，递归地定义 $g_k(t)$ 为 $g_0(t) = 1, g_1(t) = e_1(a_1, \ldots, a_N)$，

$$g_k(t) = e_k(a_1, \ldots, a_N) - \frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} \int_0^t g_{k-2}(s)ds, \quad (k \geq 2). \tag{35}$$

令 $y_1(t) \leq \cdots \leq y_N(t)$ 由以下关系定义

$$e_k(y_1(t), \ldots, y_N(t)) = g_k(t), \quad k = 1, \ldots, N,$$

并令 p_t 为以 $(y_1(t) \ldots, y_N(t))$ 为根的首一多项式。那么

$$\widehat{p_t}(D) = \widehat{p_0}(D)e^{-\frac{1}{2}tD^2}.$$

因此， p_t 是 $p_0 = \prod_i(x - a_i)$ 与$H_{N,\sqrt{t}}$的有限自由卷积。换句话说，

$$(y_1(t), \ldots, y_N(t)) = (a_1, \ldots, a_N) \boxplus_N \sqrt{t}(z_{1,N}^{(H)}, \ldots, z_{N,N}^{(H)}).$$

证明。 设 p_t 为根为 $y_i(t)$的多项式。于是

$$p_t(x) = \prod_{i=1}^{N}(x - y_i(t)) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k g_k(t) x^{N-k},$$

因此

$$\widehat{p}_t(D) \quad = \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{g_k(t)}{\binom{N}{k}} D^k.$$

对等式两边求导并利用关系式

$$\frac{d}{dt} g_k(t) = -\frac{(N-k+1)(N-k+2)}{2} g_{k-2}(t),$$

我们推得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widehat{p}_t(D) &= \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{g_k'(t)}{\binom{N}{k}} D^k \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(N-k+1)(N-k+2) g_{k-2}(t)}{\binom{N}{k}} D^k \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)!} \frac{g_{k-2}(t)}{\binom{N}{k-2}} D^k \\
&= -\frac{D^2}{2} \sum_{l=0}^{N-2} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{g_l(t)}{\binom{N}{l}} D^l, \quad (l = k-2) \\
&\overset{N}{=} -\frac{D^2}{2} \widehat{p}_t(D).
\end{aligned}$$

现在，常微分方程的解

$$\frac{d}{dt}\widehat{p}_t(D) = -\frac{D^2}{2}\widehat{p}_t(D),$$

（在形式幂级数的意义下）在初始条件 $\widehat{p_0}(D)$ 下唯一，且由下式给出

$$\widehat{p}_t(D) = \widehat{p_0}(D) e^{-\frac{1}{2}tD^2},$$

这意味着 p_t 是 p_0 与 $H_{N,\sqrt{t}}$ 的有限自由卷积。证明完毕。- □

接下来我们转向拉盖尔情形。由拉盖尔多项式的显式公式（32）可得

$$\widehat{L_N^{(\alpha)}}(D) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\prod_{i=0}^{k-1}(N-i+\alpha-1)\right] D^k \overset{N}{=} (1-D)^{N+\alpha-1}.$$

因此，我们立即得到引理 5.5 的静态版本，

$$L_N^{(\alpha_1)} \boxplus_N L_N^{(\alpha_2)} = L_N^{(N+\alpha_1+\alpha_2-1)}.$$

由此还可得

$$\frac{d}{dt}\widehat{L_N^{(\alpha)}}(tD) = -(N+\alpha-1) D \widehat{L_{N-1}^{(\alpha)}}(tD),$$

它给出了第 N个与第$(N-1)$个拉盖尔多项式之间的关系。

参考文献

[1] Allez, R., Bouchaud, J.P., Guionnet, A.：不变β系综与高斯-维格纳交叉。《物理评论快报》109(9), 094,102 (2012)[2] Anderson, G.W., Guionnet, A., Zeitouni, O.：《随机矩阵导论》，剑桥高级数学研究丛书，第118卷。剑桥大学出版社，剑桥 (2010)[3] Andraus, S., Hermann, K., Voit, M.：通过对偶正交多项式研究冻结随机矩阵模型的极限定理与软边缘。《数学物理杂志》62(8), 论文编号 083,303, 26 (2021). DOI 10.1063/5.0028706. 网址 https://doi.org/10.1063/5.0028706[4] Andraus, S., Voit, M.：冻结区间中多元Bessel过程的中心极限定理 II：协方差矩阵。《近似理论杂志》246, 65–84 (2019). DOI 10.1016/j.jat.2019.07.002. 网址 https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.07.002[5] C´epa, E., L´epingle, D.：具有静电排斥的扩散粒子。《概率论及相关领域》107(4), 429–449 (1997). DOI 10.1007/s004400050092. 网址 https:// doi.org/10.1007/s004400050092[6] Cucker, F., Gonzalez Corbalan, A.：多项式根的连续性的另一种证明。《美国数学月刊》96(4), 342–345 (1989). DOI 10.2307/2324091. 网址 https://doi.org/10.2307/2324091[7] Demni, N.：径向邓克尔过程：存在唯一性、命中时间、β过程与随机矩阵。arXiv预印本 arXiv:0707.0367 (2007)[8] Dumitriu, I., Edelman, A.：β系综的矩阵模型。《数学物理杂志》43(11), 5830–5847 (2002). 网址 http://dx.doi.org/10.1063/1.1507823[9] Dumitriu, I., Edelman, A.：厄米系综与拉盖尔系综的特征值：大β渐近。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》41(6), 1083–1099 (2005). DOI 10. 1016/j.anihpb.2004.11.002. 网址 https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2004.11.002[10]Dumitriu, I., Edelman, A.：通过矩阵模型研究 β-厄米系综和 β-拉盖尔系综的全局谱涨落。《数学物理杂志》47(6), 063,302, 36 (2006). 网址 http://dx.doi.org/10.1063/1.2200144[11] Duy, T.K., Shirai, T.：与高斯β系综相关的随机雅可比矩阵的平均谱测度。《电子概率通讯》20, 第68篇, 13 (2015). DOI 10.1214/ECP.v20-4252. 网址 https://doi.org/10.1214/ECP.v20-4252[12] Fujie, K.：有限自由卷积的正则性与收敛性质 (2025). 网址 https://arxiv.org/abs/2505.15575[13] Graczyk, P., Ma-l ecki, J.：非碰撞粒子系统的强解。《电子概率杂志》19, 第119篇, 21 (2014). DOI 10.1214/EJP.v19-3842. 网址 https://doi.org/ 10.1214/EJP.v19-3842[14] Graczyk, P., Ma-l ecki, J.：非碰撞粒子系统的强解。《电子概率杂志》19, 第119篇, 21 (2014). DOI 10.1214/EJP.v19-3842. 网址 https://doi.org/ 10.1214/EJP.v19-3842[15] Johansson, K.：随机厄米矩阵特征值的涨落。《杜克数学杂志》91(1), 151–204 (1998). 网址 http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-98-09108-6[16] Kreˇın, M.G., Nudel'man, A.A.：《马尔可夫矩问题与极值问题》，数学专著译丛，第50卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州 (1977)。由 D. Louvish 从俄文译出

[17]Marcus, A.W., Spielman, D.A., Srivastava, N.：多项式的有限自由卷积。《概率论及相关领域》182(3-4), 807–848 (2022年)。DOI 10.1007/ s00440-021-01105-w。URL https://doi.org/10.1007/s00440-021-01105-w[18] Martin, R.J., Kearney, M.J.：一个可精确求解的自卷积递推。《Aequationes Mathematicae》80(3), 291–318 (2010年)。DOI 10.1007/s00010-010-0051-0。URL https: //doi.org/10.1007/s00010-010-0051-0[19] Mergny, P., Potters, M.：高温下的秩一 HCIZ：在经典卷积与自由卷积之间插值。《SciPost Physics》12(1), 论文编号 022, 37 (2022年)。DOI 10.21468/scipostphys.12.1.022。URL https://doi.org/10.21468/scipostphys.12.1. 022[20] Nakano, F., Trinh, H.D., Trinh, K.D.：Beta戴森布朗运动和β-Laguerre过程的矩过程极限定理。《随机矩阵：理论与应用》12(3), 论文编号 2350,005, 28 (2023年)。DOI 10.1142/S2010326323500053。URL https: //doi.org/10.1142/S2010326323500053[21] Nakano, F., Trinh, H.D., Trinh, K.D.：高温下的经典β系综及相关特征值过程与Markov-Krein变换。《数学物理杂志》66(5), 论文编号 053,304, 23 (2025年)。DOI 10.1063/5.0251472。URL https://doi.org/10. 1063/5.0251472[22] Simon, B.：《Szeg˝o定理及其后续发展》。M. B. Porter讲座。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州 (2011年)。正交多项式的 L^2 扰动谱理论[23] Trinh, H.D., Trinh, K.D.：全局范围内的β-拉盖尔系综。《大阪数学杂志》（2021（即将刊出），arXiv预印本 arXiv:1907.12267）[24]Trinh, K.D.：《高斯β系综的全局谱涨落：鞅方法》。《理论概率杂志》32(3), 1420–1437 (2019年)。DOI 10.1007/ s10959-017-0794-9。URL https://doi.org/10.1007/s10959-017-0794-9[25] Vinet, L., Zhedanov, A.：从对偶多项式刻画经典和半经典正交多项式。《计算与应用数学杂志》172(1), 41–48 (2004年)。DOI 10.1016/j.cam.2004.01.031。URL https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.031[26] Voit, M.：冻结区间内多元Bessel过程的中心极限定理。《近似理论杂志》239, 210–231 (2019年)。DOI 10.1016/j.jat.2018.12.004。URL https: //doi.org/10.1016/j.jat.2018.12.004[27] Voit, M., Woerner, J.H.C.：冻结区间内与Calogero-Moser-Sutherland粒子模型相关的微分方程。《北海道数学杂志》51(1), 153–174 (2022年)。DOI 10.14492/hokmj/2020-307。URL https://doi.org/10.14492/hokmj/2020-307[28] Voit, M., Woerner, J.H.C.：高维Bessel过程和Dunkl过程及自由卷积的极限定理。《随机过程及其应用》143, 207–253 (2022年)。DOI 10.1016/j.spa.2021.10.005。URL https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.10.005