arXiv:2603.01360v1 [math.AP] 2 Mar 2026

五次广义 Benjamin-Bona-Mahony 方程的散射

Gong Chen 和 Yingmo Zhang

Abstract. 我们考虑五次广义 Benjamin–Bona–Mahony 方程

$$u_t - u_{xxt} + \partial_x\big(u + u^5\big) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

利用时空共振方法，我们证明了足够小且光滑的解会散射到线性流。

与四次模型相比，较高阶的非线性使非共振相互作用的处理更加简单 [1], ，但共振分析更为复杂。共振分析涉及更高维的几何结构，而且四次情形中存在的某些零条件或消失条件在特定共振点处不再成立。因此，需要在共振集附近进行更精细的计算和精确估计，以完成自举论证。

Contents

1. 引言 1 1.1. 主要结果 2 1.2. 记号 3 1.3. 致谢 3 2. 预备知识 3 2.1. 色散关系 3 2.2. Little wood–Paley 投影 4 2.3. 线性估计 4 3. 时空共振集 4 3.1. 确定共振 5 3.2. 命题 3.1 的证明 6 4. 能量界与加权估计 16 4.1. 能量估计 17 4.2. 共振附近的加权 L^2_x 和 L^∞_ξ界 17 4.3. 第五部分：非共振情形下L^2_x 和 L^∞_ξ的加权界 44 5. 散射 44 参考文献 45

1. Introduction

我们研究实线上广义 Benjamin–Bona–Mahony（gBBM）方程的小解的长期动力学

$$u_t - u_{xxt} + \partial_x\big(u + u^{p+1}\big) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

具有五次 非线性 $p = 4$。方程 (1.1) 是一个经典的长波模型。关于 (1.1) 的更多历史背景，请参阅 [1] 及其中的参考文献。在该方程中，色散机制由非局部线性算子 $(1 - \partial_x^2)^{-1}\partial_x$ 承担，而非像 Korteweg–de Vries 方程那样由高阶导数承担。这一区别产生了重大

影响共振：线性色散关系具有非平凡的驻点结构，非线性相互作用可能局部集中在特定的频率配置附近。在五次情形下，理解这些相互作用是否在时间上仍然可积——从而使解最终表现得如同线性解——是本文的核心主题。

我们的目标是证明，充分小的解可以全局存在，并散射至线性 BBM 流。值得注意的是，即使在这个五次情形下，这里的长时间行为也不能仅由衰减推出。示意而言，给定形式上的 $L^1 \to L^\infty$ 衰减率 $t^{-\frac{1}{3}}$，Duhamel公式中的非线性项给出

$$\int_1^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{3}}} (s^{-\frac{1}{3}})^3 \, ds$$

因为我们必须将两部分 u 放入 L^2中。上面的朴素积分会导致对数损失。研究这类问题的一种自然方法是时空共振（STR）方法，参见 [3–7]。STR 视角尤其适用于 (1.1)，因为它能分离出真正的共振相互作用，并将分析转化为对共振集的精确几何研究。

Morgan [1] 得到了一个与之密切相关的 (1.1) 散射结果，其非线性为四次（$p = 3$）非线性。人们很容易认为，更高次幂的非线性只会让问题变得更容易，因为 u 的额外因子往往意味着额外的衰减。事实上，在五次广义 BBM 情形下，远离共振时，五次非线性比四次非线性具有更好的时间可积性，而且与四次情形的分析相比，许多非共振估计可以简化。

令人意外的是，在某些共振点处，共振分析会变得更加微妙。在四次阶上，由相位函数的代数结构所引发的某些抵消（通常被非正式地称为“零”机制）会抑制持续时间最长的共振相互作用所产生的主导贡献。在五次问题中，这些消失机制不再与共振集的几何结构相吻合，因此必须直接估计主导的共振贡献。因此，必须对频率空间作更精细的分解，证明也必须利用更精确的信息。总体而言，五次非线性并非只需在 Morgan 的论证中再添加一个 u 因子就能处理；特别是在某些非退化共振点处，必须利用新的结构和对称性。

1.1. 主要结果。粗略地说，我们证明：如果初始数据足够小且光滑，那么方程 (1.1) 的解将全局存在，满足尖锐的色散衰减，并散射到一个线性 BBM 解。

定理 1.1。 固定 [1] $s \geq 100$。考虑满足 $p = 4$ 和初始条件的柯西问题 (1.1)

$$u(t = 1, x) = u_0(x).$$

存在 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，使得如果初始数据满足

$$\|\widehat{u_0}\|_{L^\infty_\xi} + \|x u_0(x)\|_{L^2_x} + \|u_0(x)\|_{H^s_x} < \varepsilon_0,$$

则有以下结论

- 存在唯一的全局时间解 $u(t, x)$，它满足 (1.1)；
- 若记

$$\omega(\xi) := \xi \langle \xi \rangle^{-2} \quad and \quad \widehat{f} := e^{i\omega(\xi)t} \widehat{u},$$

  则：

$$\sup_{t \in [1,\infty)} \left[\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi} + \|xf\|_{L^2_x} + \|f\|_{H^s_x} \right] \lesssim \varepsilon_0;$$

- $u(t, x)$ 满足色散衰减界

$$\|u(t,x)\|_{L^\infty_x} \lesssim \varepsilon_0 \, t^{-\frac{1}{3}} \qquad \forall t \geq 1;$$

[1] 我们 d 这里并未声称该正则性是最优的。选择这一正则性只是为了方便。

- u（t, x）在 H_x^s 中散射：存在 F（x）$\in H_x^s$ 使得

$$\lim_{t\to\infty} \left\| |u(t,x) - e^{-i\omega\left(\frac{1}{i}\partial_x\right)t} F(x) \right\|_{H_x^s} = 0.$$

1.2. 记号。 在本文中，$A \lesssim B$ 表示 $A \le CB$，其中 $C > 0$是一个无关紧要的常数。我们记作 $\langle\xi\rangle = (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}$。

我们使用傅里叶变换

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \check{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

对于集合 $S \subset \mathbb{R}$，我们用 $S^{\complement}$ 表示其在 $\mathbb{R}$中的补集，即 $S^{\complement} = \mathbb{R} \setminus S$. 集合及其补集。每当我们写作$\sum_{\text{频率}}$。时，求和均取遍与所考虑的 Littlewood–Paley 局部化相一致的所有二进制频率参数。

1.3. 致谢。 G.C. 的研究部分得到了美国国家科学基金会 DMS-2350301 号项目、Si- mons 基金会 MP-TSM-0000225 项目以及 Stefan Bergman 奖学金的支持。本研究的部分工作是在 Y.Z. 访问佐治亚理工学院数学学院期间完成的，并获得了美国国家科学基金会 DMS-2350301 号项目的支持。Y.Z. 感谢佐治亚理工学院数学学院的热情接待。

2. Preliminaries

2.1. 色散关系。 我们首先验证某些对称性

$$\omega(\xi) = \frac{\xi}{\langle\xi\rangle^2}.$$

通过直接计算

$$\omega'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

这是一个偶函数。令

$$r(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)\sqrt{\frac{\xi^2+3}{\xi^2-1}} \qquad \Longrightarrow \qquad r(\xi)^2 = \frac{\xi^2+3}{\xi^2-1}.$$

由于 $\omega'(\xi)$仅取决于 ξ^2，因子 $\operatorname{sgn}(\xi)$ 无关紧要。注意

$$1 - r(\xi)^2 = 1 - \frac{\xi^2+3}{\xi^2-1} = \frac{\xi^2-1-(\xi^2+3)}{\xi^2-1} = -\frac{4}{\xi^2-1},$$

and

$$1 + r(\xi)^2 = 1 + \frac{\xi^2+3}{\xi^2-1} = \frac{\xi^2-1+\xi^2+3}{\xi^2-1} = \frac{2(\xi^2+1)}{\xi^2-1},$$

因此

$$(1+r(\xi)^2)^2 = \frac{4(\xi^2+1)^2}{(\xi^2-1)^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \omega'(r(\xi)) &= \frac{1-r(\xi)^2}{(1+r(\xi)^2)^2} = \frac{-4/(\xi^2-1)}{4(\xi^2+1)^2/(\xi^2-1)^2} = -\frac{\xi^2-1}{(\xi^2+1)^2} \\ &= \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} = \omega'(\xi). \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2. **Littlewood–Paley 投影**。 我们使用标准的 Littlewood–Paley 投影对频率进行二进局部化。在全文中，我们将 $\varphi(\xi)$定义为一个光滑的凸起函数，其支集为 $[-2,2]$，并且 $\varphi_{[-1,1]} \equiv 1$。我们定义 $\psi(\xi)\colon = \varphi(\xi) - \varphi(2\xi)$。给定 $k \in \mathbb{Z}$，令$\varphi_{\le k} = \varphi(\frac{\xi}{2^k})$和 $\psi_k = \psi(\frac{\xi}{2^k})$。

定义 2.1 (LP 投影)。 对于任意 $f \in L^2_x(\mathbb{R})$ 以及任意 $k \in \mathbb{Z}$，定义

$$f_k := (\psi_k \widehat{f})^\vee \qquad \text{and} \qquad f_{\le k} := (\phi_{\le k}\widehat{f})^\vee.$$

函数 f_k 称为 $f(x)$ 的 k^{th} LP 分块。乘子算子 $f \mapsto f_k$、 $f \mapsto f_{\le k}$ 称为*LP* 投影。

根据标准的 Littlewood–Paley 理论，我们知道，任意合理的函数都可以重构为 LP 分块之和。

引理 2.2 (LP 分解)。 对于任意 $f \in L^2_x$ 以及任意固定的 $k_{lo} \in \mathbb{Z}$，以下恒等式成立：

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x) \qquad \textit{(homogeneous LP decomposition)},$$

$$f(x) = f_{\le k_{\text{lo}}}(x) + \sum_{k>k_{\text{lo}}} f_k(x) \qquad \textit{(inhomogeneous LP decomposition)}.$$

2.3. **线性估计**。 最后，我们回顾标准的衰减估计。证明参见 Morgan[1]。

引理 2.3. 设 $C_{\text{hi}} \ge 2^4$, $C_{\text{lo}} \le 2^{-2}$ 并取 $s \ge \frac{11}{2}$。对于任意足够光滑的函数 $u(t,x)$，其剖面为 $f(t,x)$，有以下界

$$\|u_k(t,x)\|_{L^\infty_x} \lesssim \begin{cases} 2^{-k(s-1)}\|f\|_{H^s_x}, & \textit{if } 2^k \ge C_{\text{hi}} t^{\frac{1}{9}}, \\ t^{-\frac12}2^{\frac{3k}{2}}\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi} + t^{-\frac34}2^{\frac{9k}{4}}\|\partial_\xi \widehat{f_k}\|_{L^2_\xi}, & \textit{if } 2^3 \le 2^k < C_{\text{hi}} t^{\frac{1}{9}}, \\ t^{-\frac13}\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi} + t^{-\frac12}\|\partial_\xi \widehat{f_k}\|_{L^2_\xi}, & \textit{if } 2^{-1} \le 2^k < 2^3, \\ t^{-\frac12}2^{-\frac{k}{2}}\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi} + t^{-\frac34}2^{-\frac{3k}{4}}\|\partial_\xi \widehat{f_k}\|_{L^2_\xi}, & \textit{if } C_{\text{lo}} t^{-\frac13} \le 2^k < 2^{-1}, \\ 2^k\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi}, & \textit{if } 2^k < C_{\text{lo}} t^{-\frac13}. \end{cases} \tag{2.2}$$

特别地，在上述设定下，对于 $t \ge 1$，有

$$\|u(t,x)\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\frac13}\|\widehat{f}\|_{L^\infty_\xi} + t^{-\frac12}\Big(\|f\|_{H^s_x} + \|\partial_\xi \widehat{f}\|_{L^2_\xi}\Big).$$

3. Space–time resonance sets

为方便起见，我们使用 Duhamel公式 从 $t = 1$ 出发，通过 $p = 4$ 求解方程 (1.1)。

定义剖面

$$f(t,x) := e^{it\omega(D)}u(t,x), \qquad \widehat{f}(t,\xi) = e^{it\omega(\xi)}\widehat{u}(t,\xi)$$

其中 $D = -i\partial_x$ 是一个傅里叶乘子。

$\widehat{\ }$ 取傅里叶变换后，可以直接验证 $f(t)$ 满足

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{f}(1,\xi) + i\frac{\omega(\xi)}{(2\pi)^2}\int_1^t \int e^{-i\tau\phi}\hat{f}(\tau,\eta_1)\ \hat{f}(\tau,\eta_2)\ \hat{f}(\tau,\eta_3)\ \hat{f}(\tau,\eta_4)\hat{f}\,(\tau,\eta_5)\ d\eta_{1234}d\tau \tag{3.1}$$

为方便记号，我们设 $\eta_5 := \xi - \sum_{j=1}^4 \eta_j$ 和 $d\eta_{1234} := d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 d\eta_4$，并且

$$\phi := -\omega(\xi) + \sum_{j=1}^{5} \omega(\eta_j).$$

受引理 2.3 启发，为了研究解 u 的长时间行为，问题归结为对 f 的某些范数给出界。为了得到这些界，我们通过时空共振分析来分析非线性项中的波相互作用。

为了确定所有共振，我们将其分为以下两类

- Time resonance: $\mathcal{T} := \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) \in \mathbb{R}^5 \,|\, \phi = 0\}$.
- Space resonance: $\mathcal{S} := \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) \in \mathbb{R}^5 \,|\, \partial_{\eta_j} \phi = 0,\ \forall j = 1, 2, 3, 4.\}$.

远离时间共振集时，我们将在时间上进行分部积分；远离空间共振集时，我们将在频率变量上进行分部积分。

时空共振集由 $\mathcal{T} \bigcap \mathcal{S}$ 给出。在本节余下部分，我们将计算各共振集。

3.1. 确定共振。

命题 3.1. 回忆下面这个函数，它在 $\omega(\xi)$ 的对称性中起着重要作用，见 (2.1)：

$$r(\xi) := \operatorname{sgn}(\xi) \sqrt{\frac{\xi^2 + 3}{\xi^2 - 1}} \tag{3.2}$$

那么，除变量的排列与取反外，$p = 4$ (1.1) 的时空共振只有

- 位于由下式定义的直线 L 上

$$L = \left\{ (\sigma_1\eta, \sigma_2\eta, \sigma_3\eta, \sigma_4\eta;\ \xi = \sigma_\xi \eta) \ :\ \eta \in \mathbb{R},\ \sigma_j \in \{\pm 1\},\ \sigma_\xi - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j = \pm 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^5, \tag{3.3}$$

包括点 $(0, 0, 0, 0; 0)$，并且当 $|\eta| = \sqrt{3}$ 时，所有形如下式的符号排列点

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) = (\sigma_1\eta, \sigma_2\eta, \sigma_3\eta, \sigma_4\eta;\ \xi = \sigma_\xi \eta), \quad \sigma_j \in \{\pm 1\},$$

满足共振符号约束

$$\sigma_\xi - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j \in \{\pm 1\}$$

（等价地，在 η_1、η_2、η_3、η_4、η_5 中，恰有 $3+\eta$ 个和 $2-\eta$ 个，或反之）。例如，$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3};\ \sqrt{3})$、$(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3};\ \pm\sqrt{3})$、$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3};\ \sqrt{3})$ 等，都位于 L 上。

- 位于由以下方程定义的曲线 Γ

$$\Gamma = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) = (\eta, \eta, -\eta, -r(\eta); \xi = -r(\eta)) \ |\ |\eta| > 1\} \subseteq \mathbb{R}^5; \tag{3.4}$$

- 在点 $(\eta_0, \eta_0, \eta_0, \eta_0;\ \xi_0)$ 处，其中

$$\eta_0 \approx 7.34 \qquad and \qquad \xi_0 \approx 28.31 \tag{3.5}$$

是该系统的唯一正解

$$\begin{aligned} 4\eta_1 - r(\eta_1) &= \xi, \\ -\omega(4\eta - r(\eta_1)) + 4\omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) &= 0. \end{aligned}$$

我们称之为反常共振。

证明在本节其余部分给出。

3.2. **命题 3.1 的证明**。 我们首先寻找非线性相位函数 $\phi(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\ \xi)$ 的临界点。临界点 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\ \xi)$ 必须满足

$$\begin{aligned}
\partial_{\eta_1}\phi &= \omega'(\eta_1)-\omega'(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_3-\eta_4)=0,\\
\partial_{\eta_2}\phi &= \omega'(\eta_2)-\omega'(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_3-\eta_4)=0,\\
\partial_{\eta_3}\phi &= \omega'(\eta_3)-\omega'(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_3-\eta_4)=0,\\
\partial_{\eta_4}\phi &= \omega'(\eta_4)-\omega'(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_3-\eta_4)=0.
\end{aligned}$$

特别地，

$$\omega'(\eta_1)=\omega'(\eta_2)=\omega'(\eta_3)=\omega'(\eta_4)=\omega'(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_3-\eta_4).$$

利用 ω' 的对称性 (2.1)，我们知道上述系统存在若干解族：

- 族 1： $|\eta_1|=|\eta_2|=|\eta_3|=|\eta_4|$,
- 族 2： $|\eta_1|=|\eta_2|=|\eta_3|=|r(\eta_4)|$,
- 族 3： $|\eta_1|=|\eta_2|=|r(\eta_3)|=|\eta_4|$,
- 族 4： $|\eta_1|=|r(\eta_2)|=|\eta_3|=|\eta_4|$,
- 族 5： $|r(\eta_1)|=|\eta_2|=|\eta_3|=|\eta_4|$,
- 族 6： $|\eta_i|=|\eta_j|=|r(\eta_k)|=|r(\eta_l)|$ 对于某个排列 (i,j,k,l)，其元素来自 $(1,2,3,4)$。

注意，仅当 $|\eta_1|,|\eta_2|,|\eta_3|,|\eta_4|>1$ 时，我们才能在族 2、3 或 4 中有解。此外，在特殊情形 $\xi=\eta$ 中，我们可以挑选出两类共振流形。

(1) 首先，定义为直线 L

$$L=\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi)=(-\eta,\eta,\eta,\eta;\eta)\ \mid\ \eta\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^5,$$

包括点 $(0,0,0,0;0)$ 和 $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3};\bar{}\ \sqrt{3}\right)$; 完全由时空共振构成。通过改变唯一负号的位置，我们可以得到其他共振直线（例如，可以将其放在 η_2 上，而不是 η_1）。

(2) 此外，定义曲线 Γ 为

$$\Gamma=\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi)=(\sigma_1\eta,\sigma_2\eta,\sigma_3\eta,\sigma_4 r(\eta);\sigma_\xi r(\eta))\ \mid\ |\eta|>1\}\subseteq\mathbb{R}^5.$$

也是时空共振曲线。注意，在这种情况下， η_5 是 η_1。通过对 $j=1,...,5$的η_j进行排列，可以生成相关的时空共振曲线，即

$$\Gamma'=\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi)=(\sigma_1\eta,\sigma_2\eta,\sigma_3 r(\eta),\sigma_4 r(\eta);\sigma_\xi r(\eta))\ \mid\ |\eta|>1\}\subseteq\mathbb{R}^5.$$

注意，对称情形 $\xi=-\eta$ 或 $\xi=-r(\eta)$同样存在，处理过程也相同。因此，不失一般性，这里我们仅讨论 $\xi=\eta,\ r(\eta)$。

为分析这些子族的时间共振条件，我们将空间共振约束代入相位方程$\sum_{j=1}^5\omega(\eta_j)-\omega(\xi)=0$。利用色散关系 $\omega(\cdot)$的奇对称性，所有子族的时间共振条件都可统一为求下列广义相位函数的实根：

$$\Phi_{A,B}(\eta):=A\omega(\eta)+B\omega(r(\eta))-\omega(A\eta+Br(\eta))=0 \tag{3.7}$$

其中， A 和 B 是整数，分别表示频率 η 和反射频率 $r(\eta)$的净代数重数。由于我们考虑的是五次情形（(1.1)中的$p=4$），系数满足 $|A|+|B|\le 5$。时空共振的存在性和位置完全由$\Phi_{A,B}(\eta)$的根决定。以下五个引理将对这些根进行全面分类。

引理 3.2。 如果系数对 (A,B) 满足

$$(A,B)\in\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\},$$

广义相位函数 $\Phi_{A,B}(\eta)$ 在其定义域上恒为零。

- 对于 $(A, B) = (\pm 1, 0)$，该条件可简化为 $\xi = \pm\eta$，对应于(3.3)中定义的共振线 L。
- 对于 $(A, B) = (0, \pm 1)$，该条件简化为 $\xi = \pm r(\eta)$，这对应于为 $|\eta| > 1$定义的共振曲线 Γ (3.4) 。

证明。 将其直接代入 (3.7) 得到 $\pm\omega(\eta) - \omega(\pm\eta) = 0$ 和 $\pm\omega(r(\eta)) - \omega(\pm r(\eta)) = 0$，由于 ω的奇对称性，这些结论显然成立。□

引理 3.3。 若 $B = 0$ 且 $|A| \geq 3$，具体而言，$(A, B) \in \{\pm(3, 0)\ \pm(5,0)\}$。则，方程$\Phi_{A,0}(\eta) = A\omega(\eta) - \omega(A\eta) = 0$ 恰有一个实根： $\eta = 0$。这对应于直线 L 上的退化时空共振点 $(0, 0, 0,0; 0)$ 。

证明。 我们将采用反证法。回顾色散关系 $\omega(\xi) = \frac{\xi}{\langle\xi\rangle^2}$ 对于 $A \in \{\pm 3, \pm 5\}$，将其代入广义相位函数，可得

$$A\frac{\eta}{1+\eta^2} = \frac{A\eta}{1+(A\eta)^2}.$$

为得到矛盾，假设存在一个非零实根 $\eta \neq 0$。于是我们可以将等式两边除以 $A\eta$ ，得到：

$$\frac{1}{1+\eta^2} = \frac{1}{1+A^2\eta^2}.$$

这进一步意味着 $1 + A^2\eta^2 = 1 + \eta^2$，化简为 $\eta^2(A^2 - 1) = 0$。由于 $|A| > 1$，我们有 $A^2 - 1 \neq 0$，这要求 $\eta^2 = 0$。因此，除在 $\eta = 0$ 处的平凡交点外，该方程不存在其他实解。□

引理 3.4。 如果系数满足 $A + B = \pm 1$ 和 $|A| + |B| \geq 3$ ，即

$$(A, B) \in \{(2, -1), (-1, 2), (3, -2), \dots\},$$

方程 $\Phi_{A,\ B}(\eta) = 0$ 在 $\eta = \pm\sqrt{3}$ 处有实根。

证明。根据 (3.2) 中 $r(\eta)$ 的定义，我们注意到以下性质： $r(\pm\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$。将$\eta = \sqrt{3}$ 代入 (3.7)，得到：

$$\begin{aligned}\Phi_{A,B}(\sqrt{3}) &= A\omega(\sqrt{3}) + B\omega(\sqrt{3}) - \omega((A+B)\sqrt{3}) \\ &= (A+B)\omega(\sqrt{3}) - \omega((A+B)\sqrt{3}).\end{aligned}$$

由于 $A + B = \pm 1$ 和 ω 是奇函数，因此可得 $\pm\omega(\sqrt{3}) \mp \omega(\sqrt{3}) = 0$。根据对称性， $\eta = -\sqrt{3}$也同样成立。□

引理3.5。 对于系数对 $(A, B) \in \{(4, -1), (-4,1)\}$，方程 $\Phi_{A,B}(\eta) = 0$ 有唯一正根 $\eta_0 \approx 7.34$ 及其负对应物 $-\eta_0$。此根对应于 *(3.5)* 中定义的反常共振。

证明。 根据 ω 的奇对称性，只需考虑 $(A, B) = (4, -1)$。方程变为$4\omega(\eta) - \omega(r(\eta)) - \omega(4\eta - r(\eta)) = 0$。

记

$$H(\eta) := 4\omega(\eta) - \omega\big(r(\eta)\big) - \omega\big(4\eta - r(\eta)\big).$$

注意到 H 是奇函数，因此只需考虑它在 $1 < \eta$上的零点。

我们记录一些初等计算。对于 $\eta > 1$ ，有

$$r(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^2+3}{\eta^2-1}} > 1.$$

直接计算可得

$$1+r(\eta)^2=\frac{2(\eta^2+1)}{\eta^2-1},\qquad \omega\big(r(\eta)\big)=\frac{\sqrt{(\eta^2+3)(\eta^2-1)}}{2(\eta^2+1)}.$$

此外

$$\omega'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2},\qquad |\omega(\xi)|\le\frac{1}{2}\quad\text{for all }\xi.$$

对 r 关于 $\eta>1$ 求导,

$$r'(\eta)=-\frac{4\eta\, r(\eta)}{(\eta^2+3)(\eta^2-1)}<0. \tag{3.8}$$

对于 $1<\eta\le 2$, 当 $|\omega|\le\frac{1}{2}$ 时，有

$$\omega\big(r(\eta)\big)+\omega\big(4\eta-r(\eta)\big)\le 1.$$

另一方面,

$$4\omega(\eta)=\frac{4\eta}{1+\eta^2}\ge\frac{8}{5}>1,$$

其中, $[1,2]$ 上的最小值在 $\eta=2$ 处取得。因此

$$H(\eta)>0\qquad\text{for } 1<\eta\le 2.$$

对于 $\eta\ge 2$，有

$$H'(\eta)=4\omega'(\eta)-\omega'\big(r(\eta)\big)\,r'(\eta)-\omega'\big(4\eta-r(\eta)\big)\,(4-r'(\eta)).$$

由于 $r(\eta)>1$ 且 $r'(\eta)<0$，我们有 $-\omega'(r(\eta))\,r'(\eta)<0$，因此只需对其余项给出上界。

对于 $\eta\ge 2$,

$$4\omega'(\eta)=\frac{4(1-\eta^2)}{(1+\eta^2)^2}\le-\frac{1}{2\eta^2}.$$

此外, $x(\eta):=4\eta-r(\eta)>1$ 且

$$-\omega'(x)\le\frac{1}{x^2}.$$

由 (3.8)，对于 $\eta\ge 2$, $|r'(\eta)|\le 1$，故 $4-r'(\eta)\le 5$。因此

$$-\omega'(x(\eta))\,(4-r'(\eta))\le\frac{5}{(4\eta-r(\eta))^2}\le\frac{5}{(4\eta-\sqrt{\frac{7}{3}})^2}.$$

直接比较可知，对所有 $\eta\ge 2$,

$$\frac{5}{(4\eta-\sqrt{\frac{7}{3}})^2}<\frac{1}{2\eta^2},$$

因此，对于 $\eta\ge 2$, $H'(\eta)<0$。由此, H 在 $[2,\infty)$ 上严格递减。

我们已经有 $H(2)>0$。此外，由于 $\eta\to\infty$,

$$r(\eta)\to 1,\qquad \omega\big(r(\eta)\big)\to\frac{1}{2},\qquad \omega(4\eta-r(\eta))\to 0,\qquad 4\omega(\eta)\to 0,$$

so

$$\lim_{\eta\to\infty}H(\eta)=-\frac{1}{2}<0.$$

根据 $[2,\infty$ 上的连续性和严格单调性，存在唯一的 $\eta_0>2$，使得 $H(\eta_0)=0$。此外，(3.5) 是唯一的解[2]。□

[2]由 Mathematica 验证

引理 3.6。 对于满足 $|A| + |B| \leq 5$ 的所有其他有效系数对，例如 $(A, B) \in\{(4, 1),(3, 2), (2,1) \ldots\}$，广义相位方程 $\Phi_{A,B}(\eta) = 0$ 在定义域 $|\eta| > 1$ 内无实根。因此，约化为这些系数对的子族存在空间共振，但不存在时间共振。

族 1。在这种情况下，我们必须满足

$$|\eta_1| = |\eta_2| = |\eta_3| = |\eta_4| = \begin{cases} |\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4| \\ \qquad \text{or} \\ |r(\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4)| \end{cases} \tag{3.9}$$

我们考虑的子族有几种

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4, \tag{3.10a}$$
$$-\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4, \tag{3.10b}$$
$$\eta_1 = -\eta_2 = \eta_3 = \eta_4, \tag{3.10c}$$
$$\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = \eta_4, \tag{3.10d}$$
$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -\eta_4, \tag{3.10e}$$
$$-\eta_i = -\eta_j = \eta_k = \eta_l \text{ for some permutation } (i, j, k, l) \text{ of } (1, 2, 3, 4). \tag{3.10f}$$

根据 (3.9)，每种情况都对应于一个关于临界点的四次方程。

子族 (3.10a)。对于 (3.10a)，利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 4\eta_1$，我们归结为求解

$$\eta_1 = \pm(\xi - 4\eta_1) \quad \text{or} \quad \eta_1 = \pm r(\xi - 4\eta_1).$$

The 前两个恒等式是线性的，因此它们只有临界点 at

$$\eta_j = \frac{\xi}{5} \qquad \text{or} \qquad \eta_j = \frac{\xi}{3} \qquad \text{for all } j = 1, 2, 3, 4$$

且该空间共振仅在 $\xi = 0$ 处消失。因此，平凡解

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi = \eta = 0) = (0, 0, 0, 0, 0; \xi = \eta = 0)$$

根据引理 3.3，这一点是退化点。剩下的两个恒等式是非线性的，对于$\eta_1 = r(\xi - 4\eta_1)$，这意味着

$$4\eta_1 + r(\eta_1) = \xi.$$

由于 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = (\eta, \eta, \eta, \eta, r(\eta))$ 且 $\phi = -\omega(\xi) + \sum_{j=1}^{5} \omega(\eta_j) = 0$，可得

$$\omega(\xi) = +\sum_{j=1}^{5} \omega(\eta_j). \tag{3.11}$$

(3.11) 的右端给出

$$\omega(r(\eta)) + 4\omega(\eta)$$

而式 (3.11) 的左端为

$$\omega(\xi) = \omega(4\eta + r(\eta)).$$

因此，我们有

$$4\omega(\eta) + \omega(r(\eta)) - \omega(4\eta + r(\eta)) = 0.$$

然而，根据引理 3.6 可知，这是一个无根的方程。对于 $\eta_1 = -r(\xi - 4\eta_1)$，分析过程与 $\eta_1 = r(\xi - 4\eta_1)$ 非常相似，由此可得

$$-\omega(4\eta - r(\eta)) + 4\omega(\eta) - \omega(r(\eta)) = 0.$$

这里，我们有 $|\eta| \approx 7.34$ 和 $|\xi| \approx 28.31$，这由引理3.5分类 .

子族 (3.10b)。对于 (3.10b)，利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi + 2\eta_1$，我们可化简为

$$\eta_1 = \pm(\xi + 2\eta_1) \quad \text{or} \quad \eta_1 = \pm r(\xi + 2\eta_1).$$

第一组恒等式给出了广义相位函数的系数对，其中 $(A, B) = (\pm 3, 0)$。这意味着该方程成立当且仅当 $\xi = 0$，且应归入引理 3.3。第二组非线性恒等式中的情形 $\eta_1 = r(\xi + 2\eta_1)$ 可通过求解以下方程化简

$$-2\eta_1 + r(\eta_1) = \xi.$$

因此，我们求解广义相位函数

$$-2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) - \omega(-2\eta_1 + r(\eta_1)) = 0$$

它应根据根 $|\eta_1| \approx \sqrt{3}$ 和 $\xi = -2\eta_1 + r(\eta_1) = -\eta_1$归入引理 3.4。因此，在 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}; \sqrt{3})$ 处存在时空共振，该点位于共振线上。情形 $\eta_1 = -r(\xi + 2\eta_1)$ 给出

$$-2\omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) - \omega(-2\eta_1 + r(\eta_1)) = 0$$

根据引理 3.6，该式也没有根。

子族 (3.10c)、子族 (3.10d)、子族 (3.10e)完全按照子族 (3.10b)的相同过程处理。

接下来处理带有两个负号的子族。不失一般性，以 (3.10f) 为例。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi$，我们可将问题化简为

$$\eta_1 = \pm\xi \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\eta_1).$$

前两个恒等式是线性的，解得以下两种情况之一：$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = (\eta, \eta, -\eta, -\eta, -\eta)$，或 $(\eta, \eta, -\eta, -\eta, \eta)$。根据引理 3.2，这些点位于共振直线上。对于其余恒等式，有

$$\xi = \pm r(\eta_1),$$

根据引理 3.2，该点位于共振曲线上。这个子族中的其他成员也完全按照相同的过程处理。

族 2。在这种情况下，我们必须有

$$|\eta_1| = |\eta_2| = |\eta_3| = |r(\eta_4)| = \begin{cases} |\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4| \\ \qquad \text{or} \\ |r\left(\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4\right)| \end{cases}$$

我们可以将此表达式分解为若干子族，

$$\eta_1 = \quad \eta_2 = \quad \eta_3 = \quad r\left(\eta_4\right), \tag{3.12a}$$
$$-\eta_1 = \quad \eta_2 = \quad \eta_3 = \quad r\left(\eta_4\right), \tag{3.12b}$$
$$\eta_1 = -\eta_2 = \quad \eta_3 = \quad r\left(\eta_4\right), \tag{3.12c}$$
$$\eta_1 = \quad \eta_2 = -\eta_3 = \quad r\left(\eta_4\right), \tag{3.12d}$$
$$\eta_1 = \quad \eta_2 = \quad \eta_3 = -r\left(\eta_4\right), \tag{3.12e}$$
$$-\eta_i = -\eta_j = \quad \eta_k = \quad r\left(\eta_4\right) \text{ for some permutation } (i, j, k) \text{ of } (1, 2, 3), \tag{3.12f}$$
$$-\eta_i = \quad \eta_j = \quad \eta_k = -r\left(\eta_4\right) \text{ for some permutation } (i, j, k) \text{ of } (1, 2, 3).$$

子族 (3.12a)。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 3\eta_1 - r(\eta_1)$，我们只需解

$$\eta_1 = \pm\left(\xi - 3\eta_1 - r(\eta_1)\right) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi - 3\eta_1 - r(\eta_1)).$$

这两组恒等式可归结为四种情形：

$$\xi = 4\eta_1 + r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = 2\eta_1 + r(\eta_1) \tag{b}$$
$$\xi = 3\eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{c}$$
$$\xi = 3\eta_1. \tag{d}$$

对于方程 (a)，我们求解非线性方程，并考察该解是否产生时间共振。由此需要计算

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(4\eta_1 + r(\eta_1)) + 4\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0.$$

根据引理 3.6，该方程无解。因此，不存在时间共振。对于方程 (b)，有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 + r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0.$$

根据引理 3.6，该方程无解。因此，不存在时间共振。对于方程 (c)，有方程

$$\Phi_c(\eta_1) = -\omega(3\eta_1 + 2r(\eta_1)) + 3\omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0.$$

根据引理 3.6，该方程无解。因此，不存在时间共振。对于方程 (d)，驻点为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\frac{\xi}{3}, \frac{\xi}{3}, \frac{\xi}{3}, r(\frac{\xi}{3}))$，且这仅在 $|\xi| > 3$ 时成立，这意味着方程

$$\Phi_d(\xi) = \frac{8\xi^3}{9(1+\frac{\xi^2}{9})(1+\xi^2)} > 0 \quad \forall \xi > 3.$$

因此，根据引理 3.3，它退化为共振点 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \xi) = (0, 0, 0, 0; 0)$，并位于共振流形上。

子族 (3.12b). 利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi + \eta_1 + r(\eta_1)$，我们只需求解

$$\eta_1 = \pm(\xi + \eta_1 + r(\eta_1)) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi + \eta_1 + r(\eta_1)).$$

这两组恒等式可归结为四种情况：

$$\xi = -r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = -2\eta_1 - r(\eta_1) \tag{b}$$
$$\xi = -\eta_1 \tag{c}$$
$$\xi = -\eta_1 - 2r(\eta_1). \tag{d}$$

对于方程 (a)，我们有方程

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(-r(\eta_1)) - \omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) + \omega(\eta_1) = 0.$$

这意味着我们在 $\xi = -r(\eta_1)$ 上有时空共振。根据引理 3.2，这恰好是共振曲线 Γ。

对于方程 (b)，我们有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = \omega(2\eta_1 + r(\eta_1)) - 2\omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) = 0$$

根据引理 3.6，该方程无解，这意味着不存在时间共振。对于方程 (c)，我们有如下方程

$$\Phi_c(\eta_1) = -\omega(-\eta_1) - \omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) + \omega(r(\eta_1)) = 0.$$

这意味着在 $\xi = -\eta_1$ 上存在时空共振。根据引理 3.2，这恰好就是共振线 L。

对于方程 (d)，我们有如下方程

$$\Phi_d(\eta_1) = \omega(\eta_1 + 2r(\eta_1)) - \omega(\eta_1) - 2\omega(r(\eta_1)) = 0.$$

根据引理 3.6，该方程没有解，这意味着不存在时间共振。

子族 (3.12c) 和 子族 (3.12d) 的证明与 子族 (3.12b) 相同。

子族 (3.12e) 利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 3\eta_1 + r(\eta_1)$，我们归结为求解

$$\eta_1 = \pm(\xi - 3\eta_1 + r(\eta_1)) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi - 3\eta_1 + r(\eta_1)).$$

这两组恒等式可归结为四种情形：

$$\xi = 4\eta_1 - r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = 2\eta_1 - r(\eta_1) \tag{b}$$
$$\xi = 3\eta_1 \tag{c}$$
$$\xi = 3\eta_1 - 2r(\eta_1). \tag{d}$$

对于方程 (a)，我们有方程

$$4\omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) - \omega(4\eta_1 - r(\eta_1)) = 0$$

且该方程有一个系数对 $(A,\ B) = (4,\ -1)$。因此，根据引理3.5，这会产生异常共振点 $\eta_0 \approx 7.34$ 。

对于方程 (b)，我们有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 - r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0$$

其中，当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们有解。根据对称性，不失一般性，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到引理 3.4 定义的离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3})$，它位于共振流形上。

对于方程 (c)，驻点为 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4) = (\frac{\xi}{3},\ \frac{\xi}{3},\ \frac{\xi}{3},\ -r(\frac{\xi}{3}))$，且这仅在 $|\xi| > 3$ 时成立，这意味着方程

$$\Phi_c(\xi) = \frac{8\xi^3}{9(1+\frac{\xi^2}{9})(1+\xi^2)} + \omega(r(\frac{\xi}{3})) > 0 \quad \forall \xi > 3.$$

因此，根据引理 3.3，它退化为共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (0,\ 0,\ 0,\ 0;0)$，该点位于共振流形上。

对于方程 (d)，我们有方程

$$\Phi_d(\eta_1) = -\omega(3\eta_1 - 2r(\eta_1)) + 3\omega(\eta_1) - 2\omega(r(\eta_1)).$$

其中，当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，方程有解。由对称性，不失一般性，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3};\sqrt{3})$。根据引理 3.4，该点位于共振流形上。

子族 (3.12f) 利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - \eta_1 + r(\eta_1)$，我们可将问题归结为求解

$$\eta_1 = \pm(\xi - \eta_1 + r(\eta_1)) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi - \eta_1 + r(\eta_1)).$$

这两组恒等式可归结为四种情况：

$$\xi = 2\eta_1 - r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = -r(\eta_1) \tag{b}$$

$$\xi = \eta_1 \tag{c}$$
$$\xi = \eta_1 - 2r(\eta_1). \tag{d}$$

对于方程 (a)，我们有如下方程

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 - r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) = 0$$

其中当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时我们有解。由对称性，不失一般性，我们仅考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由引理 3.4 得到离散共振点 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4;\ \xi) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$，它位于共振流形上。

对于方程 (b)，我们有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(-r(\eta_1)) + \omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) + \omega(-\eta_1) \equiv 0.$$

这表明我们在 $\xi = -r(\eta_1)$ 上具有时空共振。由引理 3.2，这正是共振曲线 Γ。

对于方程 (c)，我们有方程

$$\Phi_c(\eta_1) = -\omega(\eta_1) + \omega(\eta_1) - \omega(r(\eta_1)) + \omega(r(\eta_1)) \equiv 0.$$

这表明我们在 $\xi = \eta_1$ 上具有时空共振。由引理 3.2，这正是共振曲线 L。

对于方程 (d)，我们有方程

$$\Phi_d(\eta_1) = -\omega(\eta_1 - 2r(\eta_1)) + \omega(\eta_1) - 2\omega(r(\eta_1))$$

其中，当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，方程有解。由对称性，不失一般性，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$。根据引理 3.4，该点位于共振流形上。

族 3、族 4、族 5 的论证方式与**族**相同 **2**.

族 6。在这种情况下，我们必须有

$$|\eta_1| = |\eta_2| = |r(\eta_3)| = |r(\eta_4)| = \begin{cases} |\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4| \\ \quad \text{or} \\ |r\left(\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4\right)| \end{cases}.$$

我们可以将这个表达式分成若干子族，

$$\eta_1 = \ \ \eta_2 = \ \ r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_4\right), \tag{3.17a}$$
$$-\eta_1 = \ \ \eta_2 = \ \ r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_4\right), \tag{3.17b}$$
$$\eta_1 = -\eta_2 = \ \ r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_3\right), \tag{3.17c}$$
$$\eta_1 = \ \ \eta_2 = -r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_4\right),$$
$$\eta_1 = \ \ \eta_2 = \ \ r(\eta_3) = -r\left(\eta_4\right), \tag{3.17d}$$
$$-\eta_1 = -\eta_2 = \ \ r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_4\right), \tag{3.17e}$$
$$-\eta_1 = \ \ \eta_2 = -r(\eta_3) = \ \ r\left(\eta_4\right), [\text{one of the minus sign hit on } r(\eta)]. \tag{3.17f}$$
$$\eta_1 = \ \ \eta_2 = -r(\eta_3) = -r\left(\eta_4\right). \tag{3.17g}$$

子族(3。 17a）。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 2\eta_1 - 2r(\eta_1)$，我们可以将问题化简为求解 e

$$\eta_1 = \pm\left(\xi - 2\eta_1 - 2r(\eta_1)\right) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi - 2\eta_1 - 2r(\eta_1))$$

这两组恒等式可归结为四种情况：

$$\xi = 3\eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = \eta_1 + 2r(\eta_1)$$

$$\xi = 2\eta_1 + 3r(\eta_1)$$
$$\xi = 2\eta_1 + r(\eta_1). \tag{d}$$

对应于广义相位函数的方程 (a) 至 (d)

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 + r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0$$
$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(3\eta_1 + 2r(\eta_1)) + 3\omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0$$
$$\Phi_c(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 + 3r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) + 3\omega(r(\eta_1)) = 0$$
$$\Phi_d(\eta_1) = -\omega(2\eta_1 + r(\eta_1)) + 2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0,$$

分别。这些方程没有解，这由引理 3.6 可知。因此，不存在时间共振。

子族 (3.17b)。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 2r(\eta_1)$，我们归结为求解

$$\eta_1 = \pm(\xi - 2r(\eta_1)) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi - 2r(\eta_1))$$

这两组恒等式可归结为四种情形：

$$\xi = \eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = -\eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{b}$$
$$\xi = 3r(\eta_1) \tag{c}$$
$$\xi = r(\eta_1). \tag{d}$$

对于方程 (a)，有方程

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(\eta_1 + 2r(\eta_1)) + \omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0.$$

这个方程没有解，这由引理 3.6 可知。因此，不存在时间共振。对于方程 (b)，有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(-\eta_1 + 2r(\eta_1)) - \omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0$$

当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们有解。根据对称性，不失一般性地，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3};\ \sqrt{3})$。根据引理 3.4，该点位于共振流形上。

对于方程 (c)，我们有方程

$$\Phi_c(\eta_1) = 3\omega(r(\eta_1)) - \omega(3(r(\eta_1))) = 0.$$

根据引理 3.6，该方程无解。因此，不存在时间共振。对于方程 (d)，我们有方程

$$\Phi_d(\eta_1) \equiv 0.$$

这意味着我们在 $\xi = r(\eta_1)$ 上存在时空共振。根据引理 3.2，这恰好是共振曲线 Γ。

子族 (3.17c) 到子族 (3.17d) 的推导与子族 (3.17b) 相同.

子族 (3.17e)。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi + 2\eta_1 - 2r(\eta_1)$，我们归结为求解

$$\eta_1 = \pm(\xi + 2\eta_1 - 2r(\eta_1)) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi + 2\eta_1 - 2r(\eta_1)).$$

这两组恒等式可归结为四种情形：

$$\xi = -\eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{a}$$
$$\xi = -3\eta_1 + 2r(\eta_1) \tag{b}$$

$$\xi = -2\eta_1 + 3r(\eta_1) \tag{c}$$
$$\xi = -2\eta_1 + r(\eta_1). \tag{d}$$

对于方程 (a)，我们有如下方程

$$\Phi_a(\eta_1) = -\omega(-\eta_1 + 2r(\eta_1)) - \omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0$$

当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们有解。根据对称性，不失一般性，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3};\ \sqrt{3})$。根据引理 3.4，该点位于共振流形上。

对于方程 (b)，我们有方程

$$\Phi_b(\eta_1) = -\omega(-3\eta_1 + 2r(\eta_1)) - 3\omega(\eta_1) + 2\omega(r(\eta_1)) = 0$$

当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们有解。根据对称性，不失一般性，我们只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由此得到离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3})$。根据引理 3.4，该点位于共振流形上。

对于方程 (c)，我们有方程

$$\Phi_c(\eta_1) = -\omega(-2\eta_1 + 3r(\eta_1)) - 2\omega(\eta_1) + 3\omega(r(\eta_1)) = 0$$

当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们得到解。根据对称性，不妨只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由引理 3.4 可得离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3};\sqrt{3})$，该点位于共振流形上。

对于方程 (d)，我们有方程

$$\Phi_d(\eta_1) = -\omega(-2\eta_1 + r(\eta_1)) - 2\omega(\eta_1) + \omega(r(\eta_1)) = 0$$

当且仅当 $|\eta_1| = \sqrt{3}$ 时，我们得到解。根据对称性，不妨只考虑 $\eta_1 = \sqrt{3}$，由引理 3.4 可得离散共振点 $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4;\ \xi) = (-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3})$，该点位于共振流形上。

子族 (3.17f)。问题归结为求解

$$\eta_1 = \pm\xi \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r(\xi)$$

这两组恒等式可归结为以下四种情形：

$$\xi = \eta_1 \tag{a}$$
$$\xi = -\eta_1 \tag{b}$$
$$\xi = r(\eta_1) \tag{c}$$
$$\xi = -r(\eta_1). \tag{d}$$

情形 (a) 和 (b) 对应共振线 L，而情形 (c) 和 (d) 对应共振曲线 Γ。此外，(b) 是 (a) 的对称对应情形，(d) 是 (c) 的对称对应情形。

子族 (3.17g)。利用 $\xi - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = \xi - 2\eta_1 + 2r(\eta_1)$，问题归结为求解

$$\eta_1 = \pm\left(\xi - 2\eta_1 + 2r(\eta_1)\right) \qquad \text{or} \qquad \eta_1 = \pm r\left((\xi - 2\eta_1 + 2r(\eta_1)\right)$$

这两组恒等式可以归结为四种情形：

$$\xi = 3\eta_1 - 2r(\eta_1), \tag{a}$$
$$\xi = \eta_1 - 2r(\eta_1), \tag{b}$$
$$\xi = 2\eta_1 - r(\eta_1), \tag{c}$$
$$\xi = 2\eta_1 - 3r(\eta_1). \tag{d}$$

对于这四个方程，我们有相位函数

$$\begin{aligned}\Phi_a(\eta_1) &= 3\,\omega(\eta_1) \;-\; 2\,\omega(r(\eta_1)) \;-\; \omega(3\eta_1 - 2r(\eta_1)),\\ \Phi_b(\eta_1) &= \omega(\eta_1) \;-\; 2\,\omega(r(\eta_1)) \;-\; \omega(\eta_1 - 2r(\eta_1)),\\ \Phi_c(\eta_1) &= 2\,\omega(\eta_1) \;-\; \omega(r(\eta_1)) \;-\; \omega(2\eta_1 - r(\eta_1)),\\ \Phi_d(\eta_1) &= 2\,\omega(\eta_1) \;-\; 3\,\omega(r(\eta_1)) \;-\; \omega(2\eta_1 - 3r(\eta_1)).\end{aligned}$$

根据引理 3.4，四个相位方程各自有解，当且仅当*if and only if*$|\eta_1| = \sqrt{3}$ 。取 $\eta_1 = \sqrt{3}$，(a) 和 (c) 得到离散时空共振点（$\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$），而 (b) 和 (d) 得到（$\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$）。

4. Energy bounds and weighted estimates

我们将通过自举论证建立所需的散射结果。

固定 $s \geq 100$ 并取 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ 足够小。假设初始数据（在 $t = 1$ 处给定）满足

$$\|u_0\|_{X_1} := \|\widehat{u_0}\|_{L^\infty_\xi} + \|xu_0\|_{L^2_x} + \|u_0\|_{H^s_x} \leq \varepsilon_0.$$

对于 $1 \leq T < \infty$，令

$$X_T := \Big\{u :\ u \in C([1,T]; X_T) \text{ and } \|u\|_{X_T} < \infty\Big\},$$

其中自举范数为

$$\|u\|_{X_T} := \sup_{t\in[1,T]} \Big(\Big\|\widehat{f}(t)\Big\|_{L^\infty_\xi} + \|xf(t)\|_{L^2_x} + \|f(t)\|_{H^s_x}\Big).$$

我们假设自举界

$$\|u\|_{X_T} \leq \varepsilon_1. \tag{4.1}$$

本节将证明以下命题。

命题 4.1。 设 $\varepsilon_1 \in$ （ε_0，1）。给定自举假设 （4.1），我们有

$$\|u\|_{X_T} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5. \tag{4.2}$$

证明。 这由命题 4.3、命题 4.4 和命题 4 得出。 5. □

定理 1.1 的证明： 利用命题 4.1，我们可以证明主要结果。

2定理 *1.1* 的证明。 取 ε_0 足够小，并取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^5$。

我们作出 先验 假设 (4.1)，这可以通过标准的局部适定性理论保证。命题 4.1 表明

$$\|u\|_{X_T} \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5 \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

从而改进了 (4.1)，因此通过标准的延拓论证可得一个整体解，并且它在 X_∞ 范数下有界。

最后，命题 5.1 证明了解的散射性质。 □

本节余下部分将证明命题 4.1。

我们首先记录由引理 2 得到的解的逐点衰减。 3.

推论 4.2。 在自举假设 (4.1) 下，有

$$\|u\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\frac{1}{3}} \|u\|_{X_T} \lesssim t^{-\frac{1}{3}} \varepsilon_1. \tag{4.3}$$

4.1. 能量估计。 首先，我们给出 H^s 范数的界 .

命题 4.3. 设 $T \geq 1$。假设 $f(t)$ 满足 *Duhamel*公式(3.1)。给定自举假设(4.1)，则

$$\|f(t)\|_{H_x^s} \lesssim \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5, \qquad \forall t \in [1, T].$$

证明。 首先，利用 (3.1) 和初始数据的小性，我们可以写出:

$$\|f\|_{H_x^s} \lesssim \varepsilon_0 + \int_1^t d\tau \left\| \langle \xi \rangle^s \int d\eta_{1234} e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau, \eta_j) \right\|_{L_\xi^2}$$

应用 Plancherel 定理、(4.1)、(4.3)、链式法则和莫泽型估计，可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_x^s} &\lesssim \varepsilon_0 + \int_1^t d\tau \left\|u^5\right\|_{H_x^s} \lesssim \varepsilon_0 + \int_1^t d\tau \|u\|_{L_x^\infty}^4 \|u\|_{H_x^s} \\ &\lesssim \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5 \int_1^t \tau^{-\frac{4}{3}} d\tau \lesssim \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5 \end{aligned}$$

如所需。 □

4.2. **共振附近的加权 L_x^2 和 L_ξ^∞界。**

命题 4.4。 固定时间 $T \geq 1$，并进一步假设自举假设 (4.2) 在时间区间 $[1, T]$ 内成立。那么，如果初始数据满足 $\|xf(1)\|_{L_x^2} \lesssim \varepsilon_0$，则对所有 $t \in [1, T]$,

$$\|xf(t)\|_{L_x^2} \lesssim \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5.$$

证明。 为了估计我们的解的加权范数，我们首先对 (3.1) 两边关于 ξ 求导:

$$\partial_\xi \widehat{f}(t,\xi) = \partial_\xi \widehat{f}(1,\xi) - i\,(2\pi)^{-2}\,\omega(\xi) \int_1^t ds \int d\eta_{1234}\, e^{-i\tau\phi} \left\{ (-i\tau)\ \partial_\xi\phi \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j) + \prod_{j=1}^4 \hat{f}(\tau,\eta_j) \partial_\xi \hat{f}\,(\tau,\eta_5) \right\}$$

$$- i\,(2\pi)^{-2}\,\omega'(\xi) \int_1^t ds \int d\eta_{1234}\, e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j)$$

其中我们回顾 $\eta_5 = \xi - \sum_{j=1}^4 \eta_j$。 为简洁起见，定义

$$I_1 := \omega(\xi) \int_1^t d\tau \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j)\ \partial_\xi \hat{f}\,(\tau,\eta_5)$$

$$I_2 := \omega'(\xi) \int_1^t d\tau \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j)$$

$$I := \omega(\xi) \int_1^t d\tau\ \tau \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi} \partial_\xi\phi \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j)$$

从而

$$\partial_\xi \hat{f}(t,\xi) = \partial_\xi \hat{f}(1,\xi) - (2\pi)^{-2} \left[iI_1 + iI_2 + I \right].$$

具体而言，我们有

$$\|xf(t,x)\|_{L_x^2} \lesssim \varepsilon_0 + \|I_1(t,\xi)\|_{L_\xi^2} + \|I_2(t,\xi)\|_{L_\xi^2} + \|I(t,\xi)\|_{L_\xi^2}.$$

显然， τ 中的积分因子 I 使得对 I 的分析更加复杂。我们先估计较简单的项。

为了估计 I_1，我们沿用命题 4.3 证明中的方法，从而得到

$$\begin{aligned}\|I_1(t,\xi)\|_{L^2_\xi} &\lesssim \int_1^t d\tau \cdot \|u^4 \cdot (e^{i\tau\omega(\partial_x)}xf)(\tau,x)\|_{L^2_x} \\ &\lesssim \varepsilon_1^5 \int_1^t \tau^{-\frac{4}{3}}\, d\tau \lesssim \varepsilon_1^5,\end{aligned}$$

由 Plancherel 定理可得 $\|I_2\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5$。

对于项 I，我们使用 Littlewood-Paley 分解完成证明，详细证明将在后文给出，参见引理 4.6 的证明。□

命题 4.5。 固定时间 $T \geq 1$，并进一步假设自举假设(4.2) 在时间区间 $[1,T]$内成立。那么，若初始数据满足 $\left\| \hat{f}(1) \right\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_0$，则对所有 $t \in [1,T]$,

$$\left\| \hat{f}(t) \right\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_0 + \varepsilon_1^5.$$

证明。 由 Duhamel 展开式 (3.1)，只需证明积分

$$J(\xi) = \omega(\xi) \int_1^t d\tau \int d\eta_{1234}\; e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \widehat{f}\,(\tau,\eta_j)$$

满足界

$$\|J\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5$$

在假设 (4.1) 下。与 I 的估计一样，我们将在本节后续部分给出该界的证明，参见引理 4.6 的证明。□

现在对 $[1,t]$ 进行二进分解：若 m_* 是满足 $2^{m_*} \geq t$ 的最小整数，则我们写作

$$[1,t] = \bigcup_{m=0}^{m_*} \{\tau \sim 2^m\} \cap [1,t].$$

注意，每个二进片段的长度为 $\sim 2^m$，总共有 $\mathcal{O}(\log t)$ 个二进片段。

然后，我们固定一个 $m = 0, ..., m_*$，并定义 t_1, t_2，使其满足 $[t_1,t_2] = \{\tau \sim 2^m\} \cap [1,t]$ an d

$$I_m := \omega(\xi) \int_{t_1}^{t_2} d\tau\; \tau \int d\eta_{1234}\; e^{-i\tau\phi}\; \partial_\xi \phi \prod_{j=1}^5 \hat{f}(\tau,\eta_j)$$

$$J_m := \omega(\xi) \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int d\eta_{1234}\; e^{-i\tau\phi} \prod_{j=1}^5 \hat{f}\,(\tau,\eta_j)\,.$$

引理 4.6。在自举假设(4.1)下，我们有

$$\sum_{m=0}^{m_*} \|I_m\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum_{m=0}^{m_*} \|J_m\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

This 是通过将 I_m 和 J_m 的被积函数在 $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\xi$-空间中局部化来实现的 .

4.2.1. 反常共振。 我们首先考虑与式（3.5）中定义的反常时空共振点 $(\eta_0,\eta_0,\eta_0,\eta_0;\xi_0)$ 相关的贡献。对于每个二进时间指标 m，我们引入一个局部化尺度 k_*，定义如下

$$2^{k_*} \lesssim 2^{m(\delta_1-\frac{1}{2})} \tag{4.7}$$

其中 δ_1 是一个稍后选定的小常数。在关于反常共振的计算过程中，我们根据 $\xi-\xi_0$ 和 $\eta_j-\eta_0$ 的相对大小，对被积函数 I_m 和 J_m 进行分解，并使用 Littlewood-Paley 频率局部化。

引理 4.7. 对于某些 $\eta_j \approx \eta_0$、$\xi_\theta \approx \xi_0$ 和 $\eta_\theta \approx -r(\eta_0)$。由此可得泰勒展开

$$\phi = \left[\omega'\left(r(\eta_0)\right)-\omega'(\xi_0)\right]\eta_5 - \frac{1}{2}\omega''(\xi_\theta)(\xi-\xi_0)^2 + \frac{1}{2}\omega''(\eta_\theta) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\omega''(\eta_j)(\eta_j-\eta_0)^2.$$

证明。 证明可由 [2, 第 123] 页得出。 □

引理 4.8. 在频率区域

$$\Omega_1 := \left\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi) : |\eta_j-\eta_0| \le 2^{k_*}\ \forall j=1,2,3,4,\ and\ |\xi-\xi_0| \le 2^4 2^{2k_*}\right\},$$

其中 k_* 由(4.7)给出。在自举假设(4.1)下，Ω_1 的贡献满足

$$\left\|\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau\ \varphi_{2k_*+4}(\xi-\xi_0)\, e^{-i\phi\tau}\partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5,$$

$$\left\|\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \varphi_{2k_*+4}(\xi-\xi_0)\, e^{-i\phi\tau}\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 我们首先局部化到该区域

$$|\eta_j-\eta_0| \le 2^{k_*} \quad \forall\ j=1,2,3,4, \quad |\xi-\xi_0| \le 2^4 2^{2k_*}.$$

借助光滑截断函数。因此，只需给出界

$$\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau\ \varphi_{2k_*+4}(\xi-\xi_0)\, e^{-i\phi\tau}\partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5) =: I_{mk_*}.$$

在这种情况下，既无法利用振荡，也无法利用相位的曲率。相反，该贡献的微小性完全来自傅里叶积分域的大小。

利用 $\omega(\xi)$ 与 $\partial_\xi\phi$ 的有界性，我们估计

$$\begin{aligned}\|I_{mk_*}\|_{L^2_\xi} &\lesssim \int_{t_1}^{t_2}\tau\left\|\varphi_{2k_*+4}(\xi-\xi_0)\int e^{-i\phi\tau}\partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\,d\eta_{1234}\right\|_{L^2_\xi} d\tau\\ &=: \int_{t_1}^{t_2}\tau\ \|H_{k_*}(\tau,\xi)\|_{L^2_\xi}\,d\tau.\end{aligned}$$

根据 ξ中的H¨older不等式，我们进一步从测度估计得到

$$\|H_{k_*}(\tau,\xi)\|_{L^2_\xi} \lesssim \|H_{k_*}(\tau,\xi)\|_{L^\infty_\xi}\cdot\sqrt{\text{meas.}\left(|\xi-\xi_0|\lesssim 2^{2k_*}\right)}.$$

对 ξ取上确界，并对所有 $j=1,2,3,4$利用局部化 $|\eta_j-\eta_0|\le 2^{k_*}$，我们得到

$$\begin{aligned}\|H_{k_*}(\tau,\xi)\|_{L^\infty_\xi} &\lesssim \int_{|\eta_j-\eta_0|\le 2^{k_*}} \prod_{j=1}^{4}\left|\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\right|\cdot\left|\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right| d\eta_{1234}\\ &\lesssim \varepsilon_1^5 2^{4k_*}.\end{aligned}$$

综合上述估计并对时间积分，可得

$$\|I_{mk_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5\, 2^{2m}\cdot 2^{5k_*}\lesssim \varepsilon_1^5\, 2^{m(5\delta_1-\frac{1}{2})},$$

其中我们使用了 $2^{k_*}\sim 2^{m(\delta_1=\frac{1}{2})}$。由于$(5\delta_1-\frac{1}{2})<0$，$m$中的级数可求和，因此

$$\sum_m \|I_{mk_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5.$$

将同样的论证应用于 L^∞_ξ，其中为简写起见我们定义

$$\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \varphi_{2k_*+4}\left(\xi-\xi_0\right)e^{-i\phi\tau}\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}\left(\tau,\eta_j\right)\widehat{f}\left(\tau,\eta_5\right):=J_{m,k_*}.$$

这一贡献给出

$$\|J_{m,k*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5\cdot 2^m\cdot\left(2^{m(\delta_1-\frac{1}{2})}\right)^4=\varepsilon_1^5\cdot 2^{m(4\delta_1-1)}.$$

由于 $4\delta_1-1<0$ 在 δ_1 充分小时成立，该界在 m中同样可求和，因此

$$\sum_m \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5.$$

至此，我们完成了对区域 Ω_1 的分析。 □

现在，我们允许输出频率 ξ 远离 ξ_0。

引理 4.9. 在频率区域

$$\Omega_2:=\left\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi):|\eta_j-\eta_0|\le 2^{k_*}\ \forall j=1,2,3,4,\ and\ |\xi-\xi_0|\sim 2^k,\ 2^k\in\left[2^4 2^{k_*},2^{-10}\right]\right\},$$

其中 k_* 给出　于 (4.7)。在自举假设 (4.1) 下，Ω_2 的贡献满足　*es*

$$\sum_m \|I_{m,k}\|_{L^2_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5,\qquad \sum_m \|J_{m,k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 在此情形下，我们利用围绕 ξ_0 的二进频率壳层以及对每个 $\eta_j-\eta_0$ 的光滑截断函数进行局部化。此外，在 Ω_2 中我们有 $\eta_j\approx\eta_0$、$\xi\approx\xi_0$，这意味着 $\eta_5\approx -r(\eta_0)$。因此，由引理 4.7，泰勒展开为

$$\phi\approx\left[\omega'(r(\eta_0))-\omega'(\xi_0)\right](\xi-\xi_0)-\frac{1}{2}\omega''(\xi_\theta)(\xi-\xi_0)+\frac{1}{2}\omega''(\eta_\theta)\left(\eta_5+r(\eta_0)\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\omega''(\eta_\theta)(\eta_j)(\eta_j-\eta_0)^2$$

这意味着下界

$$|\phi|\gtrsim 2^k. \tag{4.8}$$

这个下界使我们能够对时间进行分部积分。因此，我们估计

$$I_{m,k}:=\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau\ \psi_k\left(\xi-\xi_0\right)\int d\eta_{1234}\ e^{-i\phi\tau}\partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}\left(\tau,\eta_j\right)\widehat{f}\left(\tau,\eta_5\right).$$

利用 (4.8) 进行分部积分，得到 τ

$$I_{m,k} = \omega(\xi)\psi_k(\xi-\xi_0)\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int d\eta_{1234}\; e^{-i\tau\phi}\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\tau\;\partial_\tau\left(\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right)$$
$$+ e^{-i\tau\phi}\;\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\;\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)$$
$$+\left[\omega(\xi)\psi_k(\xi-\xi_0)\;\tau\int d\eta_{1234}\; e^{-i\tau\phi}\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\;\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right]_{\tau=t_1}^{\tau=t_2}.$$

采用引理 4.8 中的相同策略，结合 (4.8) 和引理 4.10，可得

$$\|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{-\frac{k}{2}} 2^{m(4\delta_1-1)}.$$

对所有 二进尺度 m，其中 $1\le 2^m\le 2^{m_*}$，以及满足 $2^{2k_*}\lesssim 2^k\ll 1$ 的频率求和 ，

$$\sum_m\sum_k \|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 t^{\left(3\delta_1-\frac{1}{2}\right)} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

现在我们转向 L^∞_ξ对 J_m的估计。仿照加权情形的论证，并对满足 $2^{2k_*}\lesssim 2^k\ll 1$ 的频率求和，我们得到:

$$\sum_k \|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{m(2\delta_1-1)}.$$

取 $\delta_1>0$ 足够小，并对 m 求和，即可得到所需的界。 □

现在我们记录一组适用于 [1, 引理 4.1]和 [1, 引理4.2], 的估计，证明只需作一些初等修改即可。

引理 4.10. 给定(4.1)，则对任意 $t\in[1,T]$，有如下估计成立

$$\left\|\partial_\tau \widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}\right\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{-m}, \qquad \left\|\psi_k(\xi-\xi_0)\prod_{j=1}^{4}\varphi_{\lesssim 2^{k_*}}(\eta_j)\,\partial_\tau\hat{f}(\tau,\eta_5)\right\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{-m}.$$

引理 4.11. 假设在区域Ω_3，中，输入频率 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 之间存在二进尺度分离，即

$$2^{-10}\ge \max_{1\le j\le 4}|\eta_j-\eta_0| \gg \min_{1\le j\le 4}|\eta_j-\eta_0| \ge 2^{k_*}.$$

那么，对于每个二进输出局部化 $|\xi-\xi_0|\le 2^4 2^{2k_*}$ 或 $|\xi-\xi_0|\sim 2^k$，若满足 $2^k\in[2^{2k_*},2^{-10}]$, 在自举假设下，的贡献满足

$$\sum_m \|I_{mk}\|_{L^2_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum_m \|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 我们对输入频率进行二进分解，使得 $|\eta_j-\eta_0|\sim 2^{k_j}$。由对称性，不妨设 $k_1\ge k_2\ge k_3\ge k_4$。不失一般性，此处我们只讨论 $|\xi-\xi_0|\sim 2^k$ 的情形。直接应用中值定理可得

$$|\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi| \gtrsim 2^{k_1} \tag{4.9}$$

这使我们可以在频率变量上进行分部积分。我们沿着 $\eta_1-\eta_2$ 方向分部积分，并写成

$$I_{m,k_1k_2k_3k_4,k} = i\big(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_3\big),$$

其中

$$\tilde{I}_1 := -\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,a(\eta,\xi)\,(\partial_{\eta_1}\hat{f}_{k_1})\prod_{j=2}^{5}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\,d\eta_{1234}\,d\tau,$$

$$\tilde{I}_2 := \psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,a(\eta,\xi)\,\hat{f}_{k_1}(\partial_{\eta_2}\hat{f}_{k_2})\prod_{j=3}^{5}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\,d\eta_{1234}\,d\tau,$$

$$\tilde{I}_3 := -\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,m(\eta,\xi)\prod_{j=1}^{4}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\hat{f}(\tau,\eta_5)\,d\eta_{1234}\,d\tau$$

使用符号

$$a(\eta,\xi) := \frac{\partial_\xi\phi(\eta,\xi)}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi(\eta,\xi)}, \qquad m(\eta,\xi) := \partial_{\eta_1-\eta_2}a(\eta,\xi).$$

此外，注意到自举假设给出

$$\left\|\partial_{\eta_1}\widehat{f}_{k_1}(\tau,\eta_1)\right\|_{L^2_{\eta_1}} \lesssim \varepsilon_1\left(1+2^{\frac{k_1}{2}}\right), \qquad \left\|\partial_{\eta_2}\widehat{f}_{k_2}(\tau,\eta_2)\right\|_{L^2_{\eta_2}} \lesssim \varepsilon_1\left(1+2^{\frac{k_2}{2}}\right).$$

此外，在所考虑的区域内，我们有 $|\omega(\xi)|$，$|\partial_\xi\phi| \lesssim 1$。因此，由 (4.9) 可知，作为符号，$a(\eta,\ \xi)$ 和 $m(\eta,\ \xi)$ 满足以下界

$$|a(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-k_1}, \quad |m(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-2k_1}. \tag{4.11}$$

现在，我们利用多线性估计 L^2_ξ 来控制 $\tilde{I}_1$，$\tilde{I}_2$ 和 $\tilde{I}_3$。接下来估计 I_1 的贡献~~$\tilde{I}_1$~~。项 I_2 可借助 (4.11) 类似地处理，因此略去。

为了估计~~$\tilde{I}_1$~~，我们注意到，根据 (4.11)，相应的符号属于 [1, 引理 B3] 中参数 $A = 2^{-k_1}$ 及符号

$$B(\eta,\xi) := a(\eta,\xi)\,\psi_k(\xi-\xi_0)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\eta_j-\eta_0). \tag{4.12}$$

因此，我们可以应用 [1, 命题 B1]，其中符号 $B(\eta,\xi)$ 定义于 (4.12)。由此得到

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{I}_1\right\|_{L^2_\xi} &\lesssim \|\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\|_{L^\infty_\xi}\int_{t_1}^{t_2}d\tau\left\|\int e^{-i\tau\phi}\,a(\eta,\xi)\,(\partial_{\eta_1}\hat{f}_{k_1})\prod_{j=2}^{5}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\,d\eta_{1234}\right\|_{L^2_\xi}\\ &\lesssim \varepsilon_1^5\left(2^{-k_1}2^{-m}+2^{-\frac{1}{2}k_1}2^{-m}\right).\end{aligned}$$

在上述估计中，我们采用了最坏情形下的色散衰减 (4.3)。

对于这一项 $\tilde{I}_3$。符号估计由 (4.11) 得出

$$B(\eta,\xi) = m(\eta,\xi)\,\psi_k(\xi-\xi_0)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\eta_j-\eta_0).$$

其中 $A = 2^{-2k_1}$。由直接的 L^2_ξ-多线性估计可得

$$\|\tilde{I}_3\|_{L^2_\xi} \lesssim \|\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\|_{L^\infty_\xi}\int_{t_1}^{t_2}d\tau\left\|\int e^{-i\tau\phi}\,m(\eta,\xi)\prod_{j=1}^{5}\hat{f}_{k_j}(\eta_j)\,d\eta_{1234}\right\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{-2\delta_1}.$$

对所有满足条件的二进尺度 m（其中 $1 \le 2^m \le 2^{m_*}$）以及频率 k，k_1，k_2，k_3，k_4 求和

$$2^{k_*} \lesssim 2^{k_j} \lesssim 1 \quad (j=1,\dots,4), \qquad 2^{2k_*} \lesssim 2^k \lesssim 1, \qquad k_1 \gg k_2$$

得到

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|I_{mk_1k_2k_3k_4}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \left[t^{-\frac{1}{2}} + 1\right]$$

这就是所需的界。

J_m 的估计可通过与上述相同的方法，并结合 L^∞_ξ多线性估计得到。我们只讨论 $|\xi - \xi_0| \sim 2^k$ 的情形，其余情形略去。通过分部积分可得

$$\begin{aligned} J_{mk_1k_2k_3k_4k} &= i\psi_k(\xi-\xi_0)\ \omega(\xi) \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau^{-1} \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\ \tilde{m}(\eta,\xi)\ \prod_{j=1}^{5} \widehat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j) \\ &\quad - i\psi_k(\xi-\xi_0)\ \omega(\xi) \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau^{-1} \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\ \tilde{a}(\eta,\xi)\ \partial_{\eta_1}\widehat{f}_{k_1}(\tau,\eta_1)\ \prod_{j=2}^{5} \widehat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j) \\ &\quad + i\psi_k(\xi-\xi_0)\ \omega(\xi) \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau^{-1} \int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\ \tilde{a})(\eta,\xi)\ \hat{f}_{k_1}(\tau,\eta_1)\ \left(\partial_{\eta_2}\hat{f}_{k_2}(\tau,\eta_2)\right) \prod_{j=3}^{5} \widehat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j) \end{aligned}$$

其中符号为

$$\tilde{a}(\eta,\xi) := \frac{1}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi}, \qquad \tilde{m}(\eta,\xi) := \frac{\partial^2_{\eta_1-\eta_2}\phi}{(\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi)^2}.$$

因此，符号的估计为

$$|\tilde{a}(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-k_1}, \quad |\tilde{m}(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-2k_1}.$$

根据多线性估计和 [1, 命题 B。6], 可得

$$\begin{aligned} \|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi} &\lesssim \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, 2^{-2k_1}\tau^{-1} \left(\varepsilon_1 2^{\frac{k_1}{2}}\right) \left(\varepsilon_1\tau^{-\frac{1}{2}}\right)^3 (\varepsilon_1) + 2^{-k_1}\tau^{-1}\,(\varepsilon_1) \left(\varepsilon_1\tau^{-\frac{1}{2}}\right)^3 (\varepsilon_1). \\ &\lesssim \varepsilon_1^5 \left[2^{-\frac{3}{2}m}2^{-\frac{3}{2}k_1} + 2^{-\frac{3}{2}m}2^{-k_1}\right]. \end{aligned}$$

对满足条件的所有二进尺度 m （其中 $1 \le 2^m \le 2^{m_*}$）以及频率 k、k_1、k_2、k_3、k_4 求和

$$2^{k_*} \lesssim 2^{k_j} \lesssim 1 \quad (j = 1, \dots, 4), \qquad 2^{2k_*} \lesssim 2^k \lesssim 1, \qquad k_1 \gg k_2$$

得到

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \sum_m \left[2^{m(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\delta_1)} + 2^{m(-\frac{3}{2}-\delta_1)}\right] \lesssim \varepsilon_1^5$$

如所需。 □

引理 4.12. 考虑这样的频率区域：输入频率聚集在共振附近（且大于截断尺度），而输出频率仍位于共振的一个邻域内：

$$\begin{aligned} \Omega_4 := \Big\{ (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi) :\ & |\eta_j - \eta_q| \sim 2^{k_j},\ 2^{k_*} \lesssim 2^{k_j} \lesssim 1,\ 2^{k_1} \approx 2^{k_2} \approx 2^{k_3} \approx 2^{k_4}, \\ & |\xi - \xi_0| \lesssim 2^{2k_*} \ \textit{or}\ |\xi-\xi_0| \sim 2^k,\ 2^{2k_*} \lesssim 2^k \lesssim 1 \Big\}. \end{aligned}$$

在自举假设下，该区域的贡献满足

$$\sum_m \|I_{m,k}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum_m \|J_{m,k}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 在这种情况下，形如 $\eta_i-\eta_j(i\neq j)$ 的方向均无法为相位提供非退化导数，因此无法沿这些方向进行分部积分。也就是说， $\partial_{\eta_i-\eta_j}\phi$可能是退化的。此外，根据引理 4.7 中的泰勒展开，可能出现关系 $|\xi-\xi_0|\approx|\eta-\eta_0|^2$，此时相位的展开发生退化，并且无法得到关于$|\phi|$ 的一致下界。因此，引理 4.9 的证明无法适用。

我们希望沿某些频率 η_j 进行分部积分，但这并非直接可行。例如，考虑 η_1。为了关于 η_1 进行分部积分，必须对 $\partial_{\eta_1}\phi=\omega'(\eta_1)-\omega'(\eta_5)$ 有一个下界。直接对 $\omega'(\eta_1)-\omega'(\eta_5)$ 应用中值定理，会受到 ω'' 在连接 η_1 和 η_5 的区间上可能退化的阻碍。相反，我们利用恒等式

$$\omega'(\eta_1)-\omega'(\eta_5)=\omega'(r(\eta_1))-\omega'(-\eta_5),$$

见 (2.1)，它将两个自变量都移至 $(0,\sqrt{3})$ 的一个紧子区间内，在那里 ω'' 不为零。在此区域应用中值定理可得

$$|\partial_{\eta_1}\phi|=|\omega'(r(\eta_1))-\omega'(-\eta_5)|\approx|\omega''(\theta)|\cdot|r(\eta_1)-(-\eta_5)|\gtrsim|r(\eta_1)+\eta_5|, \tag{4.13}$$

其中 θ 介于 $r(\eta_1)$ 与 $-\eta_5$ 之间。

根据量 $|r(\eta_j)+\eta_5|$ 的大小，我们分两种情况讨论。要么存在 $j\in\{1,2,3,4\}$ 和一个二进尺度 2^{ℓ_j}，满足 $2^{k_*}\ll 2^{\ell_j}\ll 1$，使得 $|r(\eta_j)+\eta_5|\sim 2^{\ell_j}$；要么所有此类量都满足 $|r(\eta_j)+\eta_5|\lesssim 2^{k_*}$。

对于第一种情况，不妨考虑 $j=1$，由 (4.13) 可得

$$|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{\ell_1}.$$

因此，我们引入符号

$$a(\eta,\xi):=\frac{\partial_\xi\phi(\eta,\xi)}{\partial_{\eta_1}\phi(\eta,\xi)},\qquad m(\eta,\xi):=\partial_{\eta_1}a(\eta,\xi).$$

此外，注意到自举假设给出

$$\big\|\partial_{\eta_1}\widehat{f}_{k_1}(\tau,\eta_1)\big\|_{L^2_{\eta_1}}\lesssim\varepsilon_1\Big(1+2^{\frac{k_1}{2}}\Big),\qquad \big\|\partial_{\eta_5}\widehat{f}(\tau,\eta_5)\big\|_{L^2_{\eta_5}}\lesssim\varepsilon_1\Big(1+2^{\frac{\ell_1}{2}}\Big).$$

我们沿 η_1 方向进行分部积分，并定义符号

$$B(\eta,\xi)=\frac{\partial_\xi\phi}{\partial_{\eta_1}\phi}\,\psi_k(\xi-\xi_0)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\eta_j)\,\chi_{\ell_1}\left(r(\eta_1+\eta_5)\right).$$

注意，在这种情况下，我们没有更强衰减 $t^{-\frac{1}{2}}$。然而，证明仍然与引理 4.11 的证明十分接近，只是最坏情形的衰减为 $t^{-\frac{1}{3}}$。此外，符号的次级局部化函数中的 $r(\eta_1)$ 是非线性的，这导致应用多重线性估计时出现困难。因此，我们应用反函数定理，建立一个新的坐标，使得

$$\partial_{\mu_1}=\frac{1}{r'(\eta_1)-1}\partial_{\eta_1}-\partial_{\eta_2}-\partial_{\eta_3}-\partial_{\eta_4}+\partial_\xi$$

其中 $|r'(\eta_j)|\neq 1$。这一恒等式表明，相对于 $(r(\eta_1)+\eta_5)$ 的微分可以表示为原始频率变量中各阶导数的线性组合。由于该符号在关于 $(\eta,\ \xi)$ 的微分下满足相应的界，因此 $\partial_{\mu_1}B$ 也满足相同的界。由此，证明便完全按照引理 4.11 的证明进行。

对于第二种情况，我们有

$$|r(\eta_j)+\eta_5|\lesssim 2^{k_*}\quad\forall\ j=1,2,3,4.$$

由泰勒展开可得

$$\xi-\xi_0=\left(1-r'(\eta_0)\right)(\eta_1-\eta_0)+\sum_{j=2}^{4}(\eta_j-\eta_0)+\mathcal{O}\left(\max\left\{2^{k_*},2^{2k_1}\right\}\right). \tag{4.15}$$

那么在此设定下，对所有 j，有 $r(\eta_j)=-\eta_5+\mathcal{O}(2^{k_*})$。也就是说，对于，3，4，有 $\eta_i=\eta_1+\mathcal{O}(2^{k_*})$。将其代回 (4.15) 得到

$$\xi-\xi_0=\left(4-r'(\eta_0)\right)(\eta_1-\eta_0)+\mathcal{O}\left(\max\left\{2^{k_*},2^{2k_1}\right\}\right).$$

此外，一旦施加二次局部化 $|r(\eta_1)+\eta_5|\lesssim 2^{k_*}$，并固定二进尺度 k_1，输出尺度 k 就被限制在有限集合 $k\in\{k_1+\mathcal{O}(1)\}$ 中。并且，注意到$|r'(\eta_q)|\in(0,\ 2^{-4})$，上文可推出 $2^k\approx 2^{k_1}$。结合这一点与引理 4.7，可得下界 $|\phi|\gtrsim 2^k$。因此，我们将此情形归结为引理 4.9 的证明。

剩余部分需要处理 J_m。在对 $|r(\eta_j)+\eta_5|$进行二次二进局部化后，有两种情况。对于第一种情况，我们有

$$|r(\eta_j)+\eta_5|\sim 2^{\ell_j},\quad 2^{k_*}\lesssim 2^{\ell_j}\ll 1$$

其中，证明可由我们已经讨论过的 I_{mk} 第一种情况推出。注意到 $|\phi|\gtrsim 2^k$，第二种情况可归结为引理 4.9 的证明。□

4.2.2. 退化共振点。现在我们聚焦于原点处退化时空共振点所产生的贡献。回顾

$$\omega(0)=0,\qquad \partial_\xi\phi(0,0,0,0;0)=0.$$

固定一个足够小的 $\delta_2>0$，并对每个二进时间区间 $t\sim 2^m$，定义阈值尺度$k_*\in\mathbb{Z}$ 如下:

$$2^{k_*}:=\max\left\{2^k:2^k\le 2^{-20}\,2^{m(\delta_2-\frac{1}{3})}\right\}. \tag{4.16}$$

引理 4.13。通过运用适用于原点处退化性的泰勒展开，存在~点 $\xi_\theta,\xi_\theta\in(0,\xi)$，以及 $\eta_\theta\in 0,\eta_5$，使得

$$\begin{aligned}\omega(\xi)&=\omega'(\xi_\theta)\,\xi,\\ \partial_\xi\phi&=-\omega'''(\widetilde{\xi_\theta})\,\xi^2+\omega'''(\eta_\theta)\,\eta_5^2.\end{aligned}$$

引理 4.14。 在频率区域

$$\mathcal{D}_1=\left\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi):|\eta_j|\le 2^{k_*}\ \forall j=1,\dots,4,\ and\ |\xi|\le 2^{k_*}\right\},$$

其中 k_* 遵循(4.16)中的定义。于是，在自举假设(4.1)下， $\mathcal{D}_1$ 的贡献满足

$$\sum_m\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5,\qquad \sum_m\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明。 对于 I_m 部分，我们进一步拆分

$$I_{m,k_*}:=\varphi_{\le k_*}(\xi)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}d\tau\,\tau\int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\ \partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\le 2^{k_*}}(\eta_j)\widehat{f}(\tau,\eta_5).$$

由测度估计并按照引理 4.8 的证明可得

$$\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ \tau\ \left\|\varphi_{\le k_*}(\xi)\omega(\xi)\int d\eta_{1234}\ \ e^{-i\tau\phi}\ \partial_\xi\phi\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\le 2^{k_*}}(\eta_j)\widehat{f}(\tau,\eta_5)\right\|_{L^2_\xi}$$

$$\lesssim \varepsilon_1^5 \int_{t_2}^{t_1} d\tau\ \tau\ 2^{k_*}\cdot 2^{2k_*}\cdot 2^{4k_*}\sqrt{\text{meas.}\{\xi:|\xi|\lesssim 2^{k_*}\}} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{m(\frac{15}{2}\delta_2-\frac{1}{2})}.$$

对 m 求和可得

$$\sum_{m=0}^{m_*}\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{m_*(\frac{15}{2}\delta_2-\frac{1}{2})} \lesssim \varepsilon_1^5 t^{(\frac{15}{2}\delta_2-\frac{1}{2})}.$$

选取 $\delta_2>0$ 足够小，使得 $\frac{15}{2}\delta_2-\frac{1}{2}<0$，则上述贡献是可容许的。对于部分 J，我们有

$$\sum_m \|J_m\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \sum_m \varepsilon_1^5 2^{m(4\delta_2-\frac{1}{3})} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

通过选取 δ_2 su fficiently 小，使得 $4\delta_2-\frac{1}{3}\prec 0$，因此上述贡献是可容许的。 □

在转向下一个区域之前，为了在 τ 中进行分部积分，我们回顾剖面的时间导数满足以下界，见 [1]。

引理 4.15。

$$\left\|\partial_\tau \widehat{f}_{\le 2^{k_*}}(\tau,\eta_1)\right\|_{L^\infty_{\eta_1}} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{k_*-m}\varphi_{\le 2^{k_*}}(\eta_1), \qquad \left\|\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^4 \varphi_{\le 2^{k_*}}(\eta_j)\partial_\tau \widehat{f}(\tau,\eta_5)\right\| \lesssim \varepsilon_1^5 2^{k_*-m}.$$

引理 4.16。 在频率区域

$$\mathcal{D}_2=\left\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi):|\eta_j|\le 2^{k_*}\ \forall j=1,2,3,4,\ \textit{and}\ |\xi|\sim 2^k\ \textit{for}\ k_*\le k\ll 1\right\},$$

其中 k_* 遵循(4.16)中的定义。于是，在自举假设(4.1)下， $\mathcal{D}_2$ 的贡献满足

$$\sum_m \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum_m \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 论证与引理 4.9 的证明类似。相位的下界及相应的导数界

$$|\phi|\gtrsim 2^{2k}2^{k_*}, \quad |\partial_\xi\phi|\lesssim 2^{2k}. \tag{4.18}$$

可通过调用泰勒展开得到。由 (4.18) 可得界

$$|m|\lesssim \frac{2^k\cdot 2^{2k}}{2^{2k+k_*}}\lesssim 2^{k-k_*}$$

对于 $m:=\underline{\omega^{\partial_\xi\phi}_{\phi}}$。我们有 I_{mk}

$$I_{mk}:=\psi_k(\xi)\,\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\,\tau\int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\ \partial_\xi\phi\prod_{j=1}^4 \widehat{f}_{\le 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\widehat{f}(\tau,\eta_5).$$

界 (4.18) 使得我们可以在 τ 中进行分部积分。在 τ 中分部积分将得到三项 I_j, $j=1$，2，3，我们将分别估计各项。. 我们给出分部积分所得项 I_1 的证明，因此省略项 I_2 和 I_3。由此可得

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^2_\xi} &\lesssim \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left\|\int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\tau\,\partial_\tau\left(\prod_{j=1}^4 \widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}\,(\tau,\eta_5)\right)\right\| \\ &\lesssim \int_{t_2}^{t_1} d\tau\ 2^m 2^{k-k_*}\left(\varepsilon_1^9 2^{4k_*-m}+\varepsilon_1^5 2^{k_*-m}\right)\sqrt{\text{meas.}\{\xi:|\xi|\sim 2^k\}} \\ &\lesssim 2^{\frac{3}{2}k+3k_*}(\varepsilon_1^9+\varepsilon_1^5).\end{aligned}$$

因此，

$$\|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim 2^{m(\frac{9}{2}\delta_2-\frac{3}{2})}\left(\varepsilon_1^9+\varepsilon_1^5\right).$$

取 δ_2 足够小，使得 $\frac{9}{2}\delta_2-\frac{3}{2}<0$,- 并对满足$k_*\le k\ll 1$ 和 m 的频率求和，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|I_{m,k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

对于 J_{mk}，可得

$$\|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5 2^{-k-k_*}2^{4k_*}+\varepsilon_1^9 2^{3k_*-k}\lesssim\varepsilon_1^5 2^{-k}2^{3k_*}.$$

对满足 $k_*\le k\ll 1$ 和 m 的频率求和，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5 t^{2\delta_2-\frac{2}{3}}$$

取 δ_2 足够小，即可得到所需的界。 □

引理 4.17。 令 $\mathcal{D}_3$ 为由以下条件定义的频率区域：

- 输入频率满足

$$|\eta_j|\sim 2^{k_j},\qquad 2^{k_*}\le 2^{k_j}\le 2^{-10},\qquad j=1,2,3,4,$$

并按以下顺序排列

$$k_1\ge k_2\ge k_3\ge k_4,$$

且它们之间至少存在一处严格分离，即

$$\max_{i<j}(k_i-k_j)\gg 1.$$

- 输出频率满足以下任一条件

$$|\xi|\le 2^{k_*},\quad or\quad |\xi|\sim 2^k,\qquad 2^{k_*}\le 2^k\le 2^{-10},$$

其中 $k\lesssim k_1$。

那么，在自举假设下， $\mathcal{D}_3$ 的贡献满足

$$\sum_m\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5,\qquad\sum_m\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明。 不失一般性，我们考虑 $k_1\gg k_2$ 且 $|\xi|\sim 2^k$的情形。对相位进行泰勒展开可得

$$\left|\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi\right|\gtrsim 2^{2k_1}.$$

此外，由中值定理可得

$$|\partial_\xi\phi|=\left|\omega'(\eta_5)-\omega'(\xi)\right|\le\sup_{s\in[\xi,\eta_5]}|\omega''(s)|\cdot|\eta_5-\xi|.$$

注意，在 $\mathcal{D}_3$ 中有 $|\eta_5-\xi|\lesssim 2^{k_1}$。此外，应用三角不等式可得

$$\sup_{s\in[\xi,\eta_5]}|\omega''(s)|\lesssim\sup_{s\in[\xi,\eta_5]}|s|\lesssim\max\{|\xi|,|\eta_5|\}\lesssim 2^k+2^{k_1}\lesssim 2^{k_1}.$$

因此，我们有如下界

$$|\partial_\xi\phi|\lesssim 2^{2k_1},\qquad|\partial^2_{\eta_1-\eta_2}\phi|\lesssim 2^{k_1}.$$

因此，我们有

$$|a(\eta,\xi)|\lesssim 1,\quad |m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-2k_1}2^{k_1}\lesssim 2^{-k_1}.$$

其中符号

$$a(\eta,\xi):=\frac{\partial_\xi\phi}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi},\qquad m(\eta,\xi):=\partial_{\eta_1-\eta_2}a(\eta,\xi).$$

由于在此情形下有 $2^k\lesssim 2^{k_1}$，因此可得

$$B_1(\eta,\xi)=a(\eta,\xi)\ \psi_k\left(\xi\right)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}\left(\tau,\eta_j\right),\qquad B_2(\eta,\xi)=m(\eta,\xi)\ \psi_k\left(\xi\right)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}\left(\tau,\eta_j\right).$$

其中 $A=1$，2^{-k_1}分别满足 [1, 引理 B。3]的假设。我们沿 $\eta_1-\eta_2$ 方向分部积分，并写成

$$I_{m,k_1k_2k_3k_4,k}=i\big(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_3\big),$$

其中

$$\tilde{I}_1:=-\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,a(\eta,\xi)\,(\partial_{\eta_1}\hat{f}_{k_1})\prod_{j=2}^{5}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\,d\eta_{1234}\,d\tau,$$

$$\tilde{I}_2:=\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,a(\eta,\xi)\,\hat{f}_{k_1}(\partial_{\eta_2}\hat{f}_{k_2})\prod_{j=3}^{5}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\,d\eta_{1234}\,d\tau,$$

$$\tilde{I}_3:=-\psi_k(\xi-\xi_0)\omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2}\int e^{-i\tau\phi}\,m(\eta,\xi)\prod_{j=1}^{4}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\hat{f}(\tau,\eta_5)\,d\eta_{1234}\,d\tau.$$

应用 [1,命题 B.1]可得

$$\begin{aligned}\|I_{mk_1k_2k_3k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ 2^k\big(2^{-k_1}\big)\big(\varepsilon_1 2^{\frac{1}{2}k_1}\big)\prod_{j=2}^{4}\big(\varepsilon_1 2^{-\frac{1}{2}k_j}2^{-\frac{m}{2}}\big)\big(\varepsilon_1 2^{-\frac{m}{3}}\big)\\ +\ 2^k\Big(2^m+2^{\frac{1}{2}k_1}\Big)\prod_{j=2}^{4}\big(\varepsilon_1 2^{-\frac{1}{2}k_j}2^{-\frac{m}{2}}\big)\big(\varepsilon_1 2^{-\frac{m}{3}}\big)\\ \lesssim\varepsilon_1^5\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ 2^{k-\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4)}2^{-\frac{11}{6}m}+2^{k-\frac{1}{2}(k_2+k_3+k_4)}2^{-\frac{11}{6}m}.\end{aligned}$$

对频率求和并结合 m可得

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|I_{mk_1k_2k_3k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left(t^{-2\delta_2-\frac{1}{6}}+t^{-\frac{3}{2}\delta_2-\frac{4}{3}}\right)\lesssim\varepsilon_1^5.$$

对于 J_m，注意到

$$\left|\partial_{\eta_1-\eta_2}\left(\frac{1}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi}\right)\right|\lesssim 2^{-3k_1}.$$

因此，定义符号

$$\tilde{a}(\eta,\xi):=\frac{1}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi},\qquad \tilde{m}(\eta,\xi):=\frac{\partial^2_{\eta_1-\eta_2}\phi}{(\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi)^2}.$$

因此，符号的估计为

$$|\tilde{a}(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-2k_1},\quad |\tilde{m}(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-3k_1}.$$

利用多线性估计，我们得到

$$\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ \tau^{-1}\ 2^k\ 2^{-3k_1}\left(\varepsilon_1 2^{\frac{k_1}{2}}\right)\prod_{j=2}^{4}\big(\varepsilon_1 2^{-\frac{1}{2}k_j}2^{-\frac{m}{2}}\big)\left(\varepsilon_1\right)$$

$$+\ \tau^{-1}\ 2^{k}\ 2^{-2k_1}\varepsilon_1\prod_{j=2}^{4}\left(\varepsilon_1 2^{-\frac{1}{2}k_j}2^{-\frac{m}{2}}\right)(\varepsilon_1)$$
$$\lesssim \varepsilon_1^5\left[2^{-\frac{3}{2}k_1-\frac{k_2}{2}-\frac{k_3}{2}-\frac{k_4}{2}-m}+2^{-k_1-\frac{k_2}{2}-\frac{k_3}{2}-\frac{k_4}{2}-\frac{5m}{2}}\right].$$

对所有频率求和并 m，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\sum_m\varepsilon_1^5\cdot\left[2^{(-3m\delta_2)}+2^{m(-\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\delta_2)}\right]\lesssim\varepsilon_1^5$$

如所欲证。 □

引理 4.18. 设 $\mathcal{D}_4$ 为由下列条件定义的频率区域:

- 输入频率满足

$$|\eta_j|\sim 2^{k_j},\qquad 2^{k_*}\le 2^{k_j}\ll 1,\qquad j=1,2,3,4,$$

并具有如下排序

$$k_1\ge k_2\ge k_3\ge k_4.$$

- 输出频率满足以下二者之一

$$|\xi|\sim 2^{k},\qquad 2^{k_*}\le 2^{k_j}\ll 1$$

满足条件 $2^k\lesssim 2^{k_1}$。

那么，在自举假设下， $\mathcal{D}_4$ 的贡献满足

$$\sum\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5,\qquad\sum\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明。 证明结合了引理 4.12 和引理 4.17 的证明。我们有

$$|\partial_{\eta_1}\phi|\approx|\omega(\eta_1)-\omega(\eta_5)|\gtrsim|\eta_5|^2\gtrsim 2^{2k}.$$

这意味着可以对 η_1 进行分部积分。利用泰勒展开可得

$$|\partial_\xi\phi|\approx|\omega'(\eta_5)-\omega'(\xi)|\lesssim 2^k\cdot|\eta_5-\xi|\lesssim 2^{2k}$$

并且

$$|\partial_{\eta_1}\partial_\xi\phi|\lesssim 2^k,\qquad|\partial^2_{\eta_1}\phi|\lesssim 2^k.$$

因此，我们得到符号界 s d

$$|a(\eta,\xi)|\lesssim 1,\quad|m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-k},$$

with

$$a(\eta,\xi):=\frac{\partial_\xi\phi}{\partial_{\eta_1}\phi},\qquad m(\eta,\xi):=\partial_{\eta_1}a(\eta,\xi).\tag{4.19}$$

定义,

$$B_1(\eta,\xi)=a(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\tau,\eta_j),\qquad B_2(\eta,\xi)=m(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\tau,\eta_j)$$

分别取 $A=1,\ 2^{-k}$。由此可得与引理 4.17 的证明类似的估计，从而得到

$$\|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ 2^{-\frac{1}{2}(-k_1+k_2+k_3+k_4)}2^{-\frac{11}{6}m}+2^k2^{-\frac{1}{2}(k_2+k_3+k_4)}2^{-\frac{11}{6}m}.$$

对频率和 m 求和，我们得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left(t^{-2\delta_2-\frac{1}{6}}+t^{-\frac{3}{2}\delta_2-\frac{4}{3}}\right)\lesssim\varepsilon_1^5.$$

对于部分 J_m，我们得到如下界

$$\sum_{m=0}^{m_*}\sum_{\text{freq.}}\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5$$

根据引理 4.17 证明中第 J 部分的估计。 □

引理 4.19。令 $\mathcal{D}_5$ 为由以下条件定义的频率区域：

- 输入频率满足

$$|\eta_j|\sim 2^{k_j},\qquad 2^{k_*}\lesssim 2^{k_j}\lesssim 1,\qquad j=1,2,3,4,$$

且满足关系

$$k_1\approx k_2\approx k_3\approx k_4.$$

- 输出频率满足以下任一条件

$$|\xi|\lesssim 2^{k_*},\quad 2^{k_*}\lesssim 2^{k_1}\quad or\quad |\xi|\sim 2^k,\quad 2^{k_*}\lesssim 2^k\lesssim 1,\quad 2^k\lesssim 2^{k_1}.$$

那么，在自举假设(4.1)下，$\mathcal{D}_5$ 的贡献满足

$$\sum\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5,\qquad \sum\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明。由泰勒展开可得

$$|\partial_{\eta_j}\phi|\gtrsim|\eta_j-\eta_5|\ |\eta_j+\eta_5|.$$

因此，我们根据 $|\eta_j\pm\eta_5|$的大小将讨论分为几种情形。若所有这些项都局部化在尺度 $\lesssim 2^{k_*}$上，则相互作用局限于退化共振点附近，估计便归结为引理 4.14 的证明。接下来，我们开始讨论其余四种情形。

情形 *1*

假设至少存在一个 j 使得

$$|\eta_j\pm\eta_5|\sim 2^{\ell_j},\quad 2^{k_*}\lesssim 2^k\ll 1\quad\forall j=1,2,3,4.$$

不失一般性，固定 $j=1$。根据 2^{ℓ_1} 和 2^{k_1}的相对大小，我们分两种情形讨论。首先，假设 $2^{\ell_1}\gtrsim 2^{k_1}$。此时，我们有$|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{2\ell_1}$。由引理 4.17 的证明，并取局部化 $2^{k_1}\lesssim 2^k$，可得

$$|a(\eta,\xi)|\lesssim 2^{2k_1-2\ell_1}\lesssim 1,\quad |m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{2k_1}2^{-2\ell_1}\lesssim 2^{-2\ell_1}$$

其中 a 与 m 遵循(4.19)中的定义。为了归结到引理 4.17 的证明，我们由于二次局部化而定义符号 $2^{k_1}\lesssim 2^{\ell_1}$

$$B_1(\eta,\xi)=a(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^4\psi_{k_j}(\eta_j)\prod_{j=1}^4\psi_{\ell_j}(\eta_j\pm\eta_5)\tag{4.20}$$

$$B_2(\eta,\xi)=m(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^4\psi_{k_j}(\eta_j)\prod_{j=1}^4\psi_{\ell_j}(\eta_j\pm\eta_5),\tag{4.21}$$

其满足 [1, 引理 B3] 的条件，其中 $A=1$，$2^{-\ell_1}$，分别。由此，证明归结为遵循引理 4.17 的证明，只需注意到 $2^{-\ell_1}\le 2^{-k_1}$。

接下来，我们假设 $2^{\ell_1}\ll 2^{k_1}$，在这种情况下，$|\eta_1+\eta_5|\gtrsim 2^{k_1}$、$|\eta_1-\eta_5|\gtrsim 2^{k_1}$中仅有一个成立。根据中值定理，我们有 $|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{k_1}2^{\ell_1}$，这意味着

$$|a(\eta,\xi)|\lesssim 2^{2k_1}2^{-2\ell_1}\lesssim 2^{k_1}2^{-\ell_1},\quad |m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{2k_1}2^{-2\ell_1}\lesssim 2^{k_1}2^{-2\ell_1}$$

其中 a 和 m 的定义与（4.19）中的定义一致。我们按照（4.20）和（4.21）定义符号 $B_1(\eta,\ \xi)$ 和 $B_2(\eta,\ \xi)$，其中分别取 $A=2^{k_1}2^{-\ell_1}$ 和 $A=2^{k_1}2^{-2\ell_1}$，因此可得

$$\begin{aligned}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4}\|_{L^2_\xi} &\lesssim \varepsilon_1^5 2^k 2^m \left(2^{-\frac{k_1}{2}}2^{-\frac{m}{2}}\right)^4 \cdot \left(2^{k_1}2^{-2\ell_1}2^{\frac{k_1}{2}} + 2^{k_1}2^{-\ell_1}2^{\frac{k_1}{2}}\right)\\ &\lesssim \varepsilon_1^5\, 2^k\, 2^{-m}\, 2^{-\frac{1}{2}k_1}\Big(2^{-2\ell_1}+2^{-\ell_1}\Big).\end{aligned}$$

对所有频率求和，并且 m且固定 δ_2 足够小，可得，

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|I_{mk_1k_2k_3k_4k\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4}\|_{L^2_\xi} \lesssim \sum_{m=0}^{m_*} \varepsilon_1^5\, m^6\Big(t^{-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\delta_2} \ +\ t^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\delta_2}\Big) \lesssim \varepsilon_1^5.$$

情形 *2*

我们首先在这个子情形中定义一些记号。令

$$\sigma_j \in \{\pm 1\} \quad \text{for} \quad j=1,2,3,4,5,\xi$$

它满足

$$\sigma_\xi - \sum_{j=1}^4 \sigma_j = \sigma_5.$$

此外，令 $\eta_j = (\sigma_j\sigma_5)\eta_5$ 对 $j=1$，2，3，4。在这种情形下，假设

$$\begin{cases}|\eta_j-\eta_5| \lesssim 2^{k_*} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=1\\ |\eta_j+\eta_5| \lesssim 2^{k_*} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=-1\end{cases}$$

但另外三种组合为 $\gtrsim 2^{k_*}$。上述局部化意味着 t

$$\begin{cases}|\eta_j+\eta_5| \sim 2^{k_1} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=1\\ |\eta_j-\eta_5| \sim 2^{k_1} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=-1\end{cases}.$$

上述局部化意味着

$$\xi = \left(\sum_{j=1}^4 \sigma_j\sigma_5 + 1\right)\eta_5 + \sum_{j=1}^4 (\eta_j - \sigma_j\sigma_5\eta_5)$$

且由于 $\sum \sigma_j\sigma_5 \in \{0,\pm 2\}$，可得 $|\xi| \sim |\eta_5| \sim 2^{k_1}$.。由此可见，这种情形与上一小节中的反常共振情形相近。接下来，我们根据

$$\begin{cases}|\eta_j-\eta_5| \sim 2^{k} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=1\\ |\eta_j+\eta_5| \sim 2^{k} & \text{if} \quad \sigma_j\sigma_5=-1\end{cases},$$

其中 $2^{-100m} \le 2^k \le 2^{k_*} \ll 2^{k_1}$. 。因此，我们有

$$|\partial_{\eta_1}\phi| \gtrsim |\eta_1-\eta_5|\ |\eta_1+\eta_5| \sim 2^k 2^{k_1}.$$

因此，$|\partial_\xi\phi| \lesssim 2^{2k_1}$ 给出

$$|a(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-k}2^{k_1}, \quad |m(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-k},$$

其中 a 和 m遵循 (4.19) 中的定义。我们定义符号

$$B_1(\eta,\xi) = a(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^4 \psi_{k_j}(\tau,\eta_j), \qquad B_2(\eta,\xi) = m(\eta,\xi)\psi_k(\xi)\prod_{j=1}^4 \psi_{k_j}(\tau,\eta_j)$$

分别为 $A=1,\ 2^{-k}$。应用 L^2_ξ 多线性估计可得

$$\begin{aligned}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi} &\lesssim \varepsilon_1^5 2^k 2^m \left(2^{-\frac{k_1}{2}}2^{-\frac{m}{2}}\right)^4\cdot\left(2^{\frac{k_1}{2}}+2^{-k}2^{\frac{k_1}{2}}\right)\\ &\lesssim \varepsilon_1^5\, 2^{-m}\left(2^{k-\frac{3}{2}k_1}+2^{-\frac{3}{2}k_1}\right).\end{aligned}$$

S对所有频率求和，并令 m 和 δ_2 足够小，可得 t,

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\sum_m\varepsilon_1^5\, m^6\left(t^{-(\frac{5}{6}+\frac{\delta_2}{2})}+t^{-(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\delta_2)}\right)\lesssim\varepsilon_1^5.$$

情形 *3*

接下来我们假设

$$|\eta_j-\eta_5|\lesssim 2^{k_*}\quad\forall\ j=1,2,3,4,\quad\text{but}\quad|\eta_j+\eta_5|\gtrsim 2^{k_*}\quad\forall\ j=1,2,3,4.$$

在此局部化下，可得

$$|\eta_j+\eta_5|\sim 2^{k_1}\quad\forall\ j=1,2,3,4.$$

根据 ξ 的大小，我们分两种情形讨论。若 $|\xi|\sim 2^{k_*}$，则按照引理 **4.14** 的证明处理其贡献。若 $|\xi|\sim 2^{k_1}$，则可由上文证明的 情形 *2* 得出。

对于 J_m，我们发现，当 $|\xi|\sim 2^k\gtrsim 2^{-100m}$ 时，有

$$|\tilde a(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-k}2^{-k_1},\quad |\tilde m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{-k}2^{-2k_1}.$$

其中

$$\tilde a(\eta,\xi):=\frac{1}{\partial_{\eta_1}\phi},\quad \tilde m(\eta,\xi):=\partial_{\eta_1}\tilde a(\eta,\xi).$$

因此，进行分部积分后可得

$$\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left[2^{-\frac{3}{2}k_1-\frac{k_2}{2}-\frac{k_3}{2}-\frac{k_4}{2}-m}+2^{-k_1-\frac{k_2}{2}-\frac{k_3}{2}-\frac{k_4}{2}-\frac{5m}{2}}\right].$$

对所有频率求和并 m，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\sum_m\varepsilon_1^5\cdot\left[2^{(-3m\delta_2)}+2^{m(-\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\delta_2)}\right]\lesssim\varepsilon_1^5$$

如所需。 □

4.2.3. 非退化共振点。 本节开始考察非退化共振点。这里，来自 [1] 的某些零条件不再适用。回顾一下，我们有如下非退化共振点:

$$(\sigma_1\sqrt{3},\sigma_2\sqrt{3},\sigma_3\sqrt{3},\sigma_4\sqrt{3};\sigma_\xi\sqrt{3})$$

其中 $\sigma_{j,\ \xi}\in\{\pm1\}$ 对于 $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$，使得 $\sigma_\xi-\sum_{j=1}^4\sigma_j\in\{\pm1\}$。此外我们指出，对于 σ_5，若 $\mathcal{S}:=\sum_{j=1}^4\sigma_j$，则

$$\sigma_5\in\{\mathcal{S}-1,\mathcal{S}+1\}\cap\{\pm1\}.$$

我们将阈值尺度 $k_*\in\mathbb{Z}$ 定义为

$$2^{k_*}:=\max\left\{2^k:2^k\le 2^{-20}\,2^{m(\delta_3-\frac{1}{3})}\right\}.\tag{4.22}$$

其中 $\delta_3>0$ 足够小，以便我们稍后进行选择。

引理 4.20. 本节中，相位函数的泰勒展开为

$$\phi = \frac{1}{32}\left(\sum_{j=1}^{5}(\eta_j - \sigma_j\sqrt{3})^3 - (\xi - \sqrt{3})^3\right) + \{\text{Higher Order Terms}\}.$$

由此可得，群速度之差的首项为

$$\partial_\xi\phi = \frac{3}{32}\left[\left((\xi - \sqrt{3}) - \left((\eta_1 + \sqrt{3}) + (\eta_2 + \sqrt{3}) + (\eta_3 - \sqrt{3}) + (\eta_4 - \sqrt{3})\right)\right)^2 - (\xi - \sqrt{3})^2\right].$$

证明。 我们首先计算常数项。由此可得 $\phi^{(0)} = -\omega(\sqrt{3}) + \sum_{j=1}^{5}\omega(\sigma_j\sqrt{3})$。代入该值，得到

$$\phi^{(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{j=1}^{5}\sigma_j\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{5}\sigma_j = 1$，这意味着 $\phi^{(0)} = 0$.

对于线性项，有 $\omega'(\pm\sqrt{3}) = -\frac{1}{8}$.因此可得

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= -\omega'(\sqrt{3})\left(\sum\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}\right) + \sum_{j=1}^{5}\omega'(\sigma_j\sqrt{3})(\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}) \\ &= -(-\frac{1}{8})(\sum\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}) + \sum(-\frac{1}{8})\eta_j - \sigma_j\sqrt{3} = 0.\end{aligned}$$

对于二次项，由此可得 $\omega''(\sqrt{3}) = 0$。因此，

$$\phi^{(2)} = -\frac{1}{2}\omega''(\sqrt{3})\left(\sum_{j=1}^{5}\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}\right)^2 + \sum_{j=1}^{5}\frac{1}{2}\omega''(\sigma_5\sqrt{3})(\eta_j - \sigma_j\sqrt{3})^2 = 0.$$

最后，对于三次项，可得 $\omega'''(\pm\sqrt{3}) = \frac{3}{16}$，因此，

$$\begin{aligned}\phi^{(3)} &= -\frac{1}{6}\omega'''(\sqrt{3})\left(\sum_{j=1}^{5}\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}\right)^3 + \sum_{j=1}^{5}\frac{1}{6}\omega''(\sigma_5\sqrt{3})(\eta_j - \sigma_j\sqrt{3})^3 \\ &= -\frac{1}{32}\left(\sum_{j=1}^{5}(\eta_j - \sigma_j\sqrt{3})^3 - (\xi - \sqrt{3})^3\right).\end{aligned}$$

群速度之差可通过对相位函数取 ξ 阶导数得到。 □

引理 4.21. 设 k_* 由(4.22)定义。我们定义区域

$$\mathcal{U}_1 := \left\{(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \xi) : |\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}| \le 2^{k_*}\ \forall j = 1, 2, 3, 4,\ |\xi - \sigma_5\sqrt{3}| \le 2^{4k_*}\right\},$$

其中 σ_j、 $\sigma_5 \in \{\pm 1\}$ 满足符号约束 $\sigma_5 - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j \in \{\pm 1\}$。那么，在自举假设(4.1)下， $\mathcal{U}_1$ 的贡献满足

$$\sum\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。我们按照引理 4.8 的证明，使用测度估计来进行证明。首先，对于因子 $\partial_\xi\phi$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_\xi\phi &\approx \omega'(\eta_5) - \omega'(\xi) \\ &\approx \left[\omega'(\xi) + \omega''(\xi)(\eta_5 - \xi) + \frac{1}{2}\omega'''(\xi)(\eta_5 - \xi)\right] - \omega'(\xi).\end{aligned}$$

注意，在当前设定下，我们有 $\xi \approx \sqrt{3}$ ，由此可知，主导项将是高阶项。因此，我们有

$$\partial_\xi \phi \sim 2^{2k_*}.$$

由此可得估计

$$\begin{aligned}\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} &\lesssim \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau \left\| \varphi_{2^{4k_*}}(\xi-\sqrt{3})\omega(\xi) \int d\eta_{1234} e^{-i\tau\phi}\partial_\xi\phi \prod_{j=1}^{4} \hat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\hat{f}(\tau,\eta_5)\right\|_{L^2_\xi} \\ &\lesssim \varepsilon_1^5 \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau\ 2^{6k_*}\sqrt{\text{meas.}(|\xi-\sigma_5\sqrt{3}|) \lesssim 2^{4k_*}} \lesssim \varepsilon_1^5 \cdot 2^{m(8\delta_3-\frac{2}{3})}.\end{aligned}$$

取 δ_3 充分小，并对 m 求和，得到

$$\sum_m \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

对于 J_m的部分，采用相同的方法可得

$$\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \cdot 2^{2k_*} \cdot 2^m \lesssim \varepsilon_1^5 \cdot 2^{m(4\delta_3-\frac{1}{3})}.$$

对 m 求和，并取足够小的 δ_3 ，可得

$$\sum_m \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5$$

正如所期望的。 □

引理 4.22. 设 k_* 由 (4.22) 定义。我们定义区域

$$\mathcal{U}_2 := \Big\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi) : |\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}| \le 2^{k_*}\ \forall j=1,2,3,4,\ |\xi-\sigma_5\sqrt{3}| \sim 2^k,\ 2^{4k_*} \lesssim 2^k \ll 1\Big\},$$

其中 σ_j、 $\sigma_5 \in \{\pm 1\}$ 满足符号约束 $\sigma_5 - \sum_{j=1}^4 \sigma_j \in \{\pm 1\}$。于是，在自举假设 (4.1) 下， $\mathcal{U}_2$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明. 再次利用引理 4.20 中的泰勒展开，在该区域中，对于 $|\partial_\xi\phi| \lesssim 2^{2k}$，我们建立下界

$$|\phi| \gtrsim 2^{2k+k_*}.$$

此处，泰勒展开中的首个非零项来自 $\omega'''(\xi)$，从而我们有 $|\omega(\xi)| \sim \mathcal{O}(1)$。对 τ 进行分部积分并应用测度估计，可得

$$\begin{aligned}\|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim \int_{t_1}^{t_2} \tau \left\| \omega(\xi)\psi_k(\xi-\sigma_5\sqrt{3}) \int e^{-i\tau\phi}\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\,\partial_\tau \widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\eta_1) \prod_{j=2}^{4} \widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}(\tau,\eta_5)\,\mathrm{d}\eta \right\|_{L^2_\xi} \mathrm{d}\tau \\ + \varepsilon_1^5 \int_{t_1}^{t_2} 2^{m\left(4\delta_3-\frac{4}{3}\right)} 2^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}\tau + \{\text{similar terms}\} \\ =: I_1 + I_2 + \{\text{similar terms}\}.\end{aligned}$$

对于 I_1，我们定义符号

$$B(\eta,\xi) = a(\eta,\xi) \prod_{j=1}^{4} \varphi_{\lesssim 2^{k_*}}(\eta_j + \sigma_j\sqrt{3})$$

其中 $a(\eta,\xi) = \frac{\partial_\xi\phi}{\phi}$ 且该符号满足 [1, 引理 B。3] 其中 $A = 2^{-k}$。因此，应用多线性估计可得

$$\|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim 2^{-k}\cdot\int_{t_1}^{t_2} d\tau\, 2^m\ \left\|\partial_\tau f_{\lesssim 2^{k_*}}\right\|_{L^2_x}\ \left(\varepsilon_1 2^{-\frac{m}{3}}\right)^4 + 2^{-k}\cdot\varepsilon_1^5\ \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, 2^{m\left(4\delta_3-\frac{4}{3}\right)}2^{\frac{k}{2}} + \{\text{similar terms}\}\,.$$

注意到 (1.1) 可以改写为 $\partial_\tau f \simeq u^5$，于是可得

$$\|I_{mk}\|_{L^2_\xi} \lesssim 2^{-k}\cdot\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \varepsilon_1^9 2^{-\frac{5}{3}m} + \varepsilon_1^5 2^{m\left(4\delta_3-\frac{4}{3}\right)}2^{\frac{k}{2}}.$$

对满足 $4k_* \lesssim k \ll 0$ 和 m 的频率求和，得到

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|I_{m,k}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^9\, t^{-\delta_3-\frac{1}{3}} + \varepsilon_1^4 2^{4\delta_3-\frac{1}{3}}$$

通过将 δ_3 取得足够小，这就是所需的界。

对于 J_m，我们有

$$\|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \left\|\omega(\xi)\psi_k\left(\xi-\sigma_5\sqrt{3}\right)\int d\eta_{1234}\ e^{-i\tau\phi}\prod_{j=1}^{4}\widehat{f}_{\lesssim 2^{k_*}}(\tau,\eta_j)\,\widehat{f}\,(\tau,\eta_5)\right\|_{L^2_\xi}.$$

因此，对 τ进行分部积分，并利用该界

$$\left|\omega(\xi)\frac{e^{-i\tau\phi}}{\phi}\right| \lesssim 2^{-2k-k_*}$$

结合测度估计，我们得到

$$\|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5\cdot 2^{k_*} + 2^{-2k-k_*}\cdot\int_{t_2}^{t_1}\varepsilon_1^9\cdot\tau^{-\frac{8}{3}}\mathrm{d}\tau \lesssim \varepsilon_1^5 2^{m(4\delta_3-\frac{1}{3})} + \varepsilon_1^9 2^{-\frac{2}{3}m}.$$

对 m 求和并固定一个较小的 δ_3，得到

$$\sum_m \|J_{mk}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5$$

这就是所需的界。 □

引理 4.23. 令 k_* 如 (4.22) 中所定义。我们定义区域

$$\mathcal{U}_3 := \Big\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi) : |\eta_j-\sigma_j\sqrt{3}| \sim 2^{k_j},\ 2^{k_*}\lesssim 2^{k_j} \ll 1\ \forall j,\ k_1\geq k_2\geq k_3\geq k_4,$$
$$|\xi-\sigma_5\sqrt{3}| \sim 2^k,\ 2^{4k_*}\lesssim 2^k \ll 1,\ 2^k \gg 2^{4k_1}\Big\},$$

其中 σ_j、 $\sigma_5\in\{\pm 1\}$ 满足符号约束 $\sigma_5-\sum_{j=1}^4\sigma_j\in\{\pm 1\}$。那么，在自举假设 (4.1) 下， $\mathcal{U}_3$ 的贡献满足

$$\sum\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5, \qquad \sum\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明. 在此区域内，由引理 4.20 可知，我们有 $|\phi|\gtrsim 2^{2k+k_*}$ 和 $|\partial_\xi\phi|\lesssim 2^{2k}$。此外，在此区域内，频率截断结合 (2.2) 给出更强的衰减。因此我们有

$$\left\|u_{k_j}\right\|_{L^\infty_x}\lesssim\varepsilon_1 2^{-\frac{k_j}{2}-\frac{m}{2}}, \qquad j=1,2,3,4.$$

With 得到更强的衰减后，证明的其余部分可由引理 4.22 的证明推出 . □

引理 4.24。 令 k_* 如(4.22)中所定义。我们定义区域

$$\mathcal{U}_4 := \Big\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi) : |\eta_j-\sigma_j\sqrt{3}| \sim 2^{k_j},\ 2^{k_*}\lesssim 2^{k_j} \ll 1\ \forall j,\ k_1\gg k_2\geq k_3\geq k_4,$$
$$|\xi-\sigma_5\sqrt{3}| \sim 2^k,\ 2^{4k_*}\lesssim 2^k \ll 1,\ 2^k\lesssim 2^{4k_1}\ or\ |\xi|\lesssim 2^{4k_*}\Big\},$$

其中 σ_j、 $\sigma_5 \in \{\pm 1\}$ 满足符号约束 $\sigma_5 - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j \in \{\pm 1\}$。那么，在自举假设下， $\mathcal{U}_4$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 在此区域中，引理 4.20 不会被完全抵消。此外，根据 (2.2)，频率截断带来更强的衰减。因此我们有

$$\left\|u_{k_j}\right\|_{L^\infty_x} \lesssim \varepsilon_1 2^{-\frac{k_j}{2}-\frac{m}{2}}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

With 由更强的衰减可知，证明的其余部分可由引理 4.22 的证明得到 . □

命题 4.25。 设 $\mathcal{U}_5$ 为由以下条件定义的频率区域:

- 输入频率满足

$$|\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}| \sim 2^{k_j}, \qquad 2^{k_*} \lesssim 2^{k_j} \ll 1, \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

  满足关系

$$k_1 \approx k_2 \approx k_3 \approx k_4.$$

- 输出频率满足以下条件之一

$$|\xi - \sigma_5\sqrt{3}| \sim 2^k, \quad 2^{4k_*} \lesssim 2^k \ll 1, \quad 2^k \lesssim 2^{4k_1} \quad or \quad |\xi - \sigma_5\sqrt{3}| \lesssim 2^{4k_*}.$$

那么，在自举假设下， $\mathcal{U}_5$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \tag{4.23}$$

$$\sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5. \tag{4.24}$$

证明。 在 $\mathcal{U}_5$ 中，我们将对 ∂_{η_1} 进行分部积分。由引理 4.20 可知，可能出现若干种符号组合。不失一般性，我们只考虑以下组合:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4; \sigma_\xi) = (-1, 1, 1, 1; 1)$$

and

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4; \sigma_\xi) = (-1, -1, 1, 1; \pm 1).$$

对于 $\rho_j := \sigma_j\sigma_5 \in \{\pm 1\}$，我们有

$$|\partial_{\eta_j}\phi| \gtrsim |\eta_j - \rho_j\,\eta_5| \left|\eta_j + \rho_j\,\eta_5 - \sigma_j\,2\sqrt{3}\right|, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

然而，当 $\sigma_1 = -1$、 $\sigma_j = 1$ 对于 $j = 2$，3，4 时，需要进行二次局部化。也就是说，我们在二进尺度 2^{ℓ_j} 处进行局部化，其中

$$2^{k_*} \lesssim 2^{\ell_j} \ll 1.$$

更确切地说，对于每个 j，我们假设以下条件之一成立

$$\left|\eta_j + \sigma_j\eta_5\right| \lesssim 2^{k_*} \quad \text{or} \quad \left|\eta_j + \sigma_j\eta_5\right| \sim 2^{\ell_j},$$

并且或者

$$\left|\eta_j - \sigma_j\eta_5 - \sigma_j(2\sqrt{3})\right| \lesssim 2^{k_*} \quad \text{or} \quad \left|\eta_j - \sigma_j\eta_5 - \sigma_j(2\sqrt{3})\right| \sim 2^{\ell_j}.$$

因此，证明归结为下文将要证明的引理 4.26–4.29。 □

引理 4.26. 在命题 *4.25* 中定义的 $\mathcal{U}_5$ 设定下，并进一步假设

$$|\eta_j + \sigma_j\eta_5| \lesssim 2^{k_*}, \quad and \quad \left|\eta_j - \sigma_j\eta_5 - \sigma_j(2\sqrt{3})\right| \lesssim 2^{k_*},$$

对所有 j 均成立。因此，(4.23) 和 (4.24) 成立。

证明。 这意味着

$$|\xi - \sigma_5\sqrt{3}| \lesssim 2^{k_*} \quad \text{and} \quad |\eta_j - \sigma_j\sqrt{3}| \lesssim 2^{k_*}.$$

因此，证明可直接由引理 4.21 得出。 □

引理 4.27. 在命题 *4.25* 中定义的 $\mathcal{U}_5$ 设定下，我们进一步假设

$$|\eta_1 + \eta_5| \sim 2^{\ell_1} \quad and \quad \left|\eta_1 - \eta_5 + 2\sqrt{3}\right| \sim 2^{\ell_1}.$$

那么，(4.23)和(4.24) 成立。

证明. 我们将论证分为两种情况。首先，考虑 $2^{\ell_1} \gtrsim 2^{k_1}$ ，结合引理 4.20 中的泰勒展开，可得

$$|\partial_{\eta_1}\phi| \gtrsim 2^{2\ell_1}.$$

由上述下界可得

$$|a(\eta,\xi)| \lesssim 1 \quad \text{and} \quad |m(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-\ell_1}$$

其中 $a(\eta, \xi) := \frac{\partial_\xi\phi}{\partial_{\eta_1}\phi}$ 且 $m(\eta, \xi) := \partial_{\eta_1} a(\eta, \xi)$。因此我们定义符号

$$B_1(\eta,\xi) = a(\eta,\xi)\psi_k\ \psi_{k_1}(\eta_1+\sqrt{3})\psi_{k_2}(\eta_2-\sqrt{3})\psi_{k_3}(\eta_3-\sqrt{3})\psi_{k_4}(\eta_4-\sqrt{3})$$
$$B_2(\eta,\xi) = m(\eta,\xi)\psi_k\ \psi_{k_1}(\eta_1+\sqrt{3})\psi_{k_2}(\eta_2-\sqrt{3})\psi_{k_3}(\eta_3-\sqrt{3})\psi_{k_4}(\eta_4-\sqrt{3}).$$

符号 $B_1(\eta, \xi)$ 和 $B_2(\eta, \xi)$ 满足 [1, 引理 B。3] 分别取 $A = 1$, $2^{-\ell_1}$。在 η_1 上分部积分，并利用 [1, 命题 B。1], 的多线性估计，可得

$$\begin{aligned}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi} &\lesssim \varepsilon_1^5 \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ 2^{-\ell_1}\ 2^{-\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)} 2^{-2m} + 2^{-\frac{1}{2}(\ell_2+\ell_3+\ell_4)} 2^{-\frac{3}{2}m} \\ &\lesssim \varepsilon_1^5 \left(2^{-3\delta_3 m} + 2^{-\frac{3}{2}\delta_3 m}\right).\end{aligned}$$

对 m 求和可得

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|I_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

对于 J，用同样的策略即可得出。我们有，

$$|\tilde{a}(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-3\ell_1}, \quad |\tilde{m}(\eta,\xi)| \lesssim 2^{-2\ell_1}$$

其中 $\tilde{a}(\eta, \xi) := \frac{\partial^2_{\eta_1}}{(\partial_{\eta_1}\phi)^2}$ 且 $\tilde{m}(\eta, \xi) := \frac{1}{\partial_{\eta_1}\phi}$。沿 η_1 方向分部积分，并利用 [1, 命题 B.6] 的多线性估计，可得

$$\begin{aligned}\|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi} &\lesssim \varepsilon_1^5 \int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau^{-1}\tau^{-\frac{3}{2}}\ 2^{-3\ell_1} 2^{\frac{1}{2}(\ell_1-\ell_2-\ell_3-\ell_4)} + \tau^{-1} 2^{-2\ell_1} 2^{-\frac{1}{2}(\ell_2+\ell_3+\ell_4)} \tau^{-\frac{3}{2}} \\ &\lesssim \varepsilon_1^5 \left(2^{m(-4\delta_3-\frac{1}{6})} + 2^{m(-\frac{7}{2}\delta_3-\frac{1}{3})}\right).\end{aligned}$$

对 m 和频率求和可得

$$\sum_m \sum_{\text{freq.}} \|J_{mk_1k_2k_3k_4k}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

接下来，我们假设 $2^{\ell_1} \ll 2^{k_1}$。这意味着

$$|\eta_1 + \eta_5| \sim 2^{k_1} \tag{4.25}$$

成立，或者

$$|\eta_1 - \eta_5 + 2\sqrt{3}| \sim 2^{k_1} \tag{4.26}$$

成立。然而，(4.25) 和 (4.26) 不可能同时成立。更具体地说，若有$|\eta_1+\eta_5|\sim 2^{\ell_1}$，则可推出

$$\begin{aligned}|\eta_1-\eta_5+2\sqrt{3}| &= |\eta_1-\Big(-\eta_1+\mathcal{O}(2^{\ell_1})\Big)+2\sqrt{3}|\\ &= |2(\eta_1+\sqrt{3})-\mathcal{O}(2^{\ell_1})|\sim 2^{k_1}.\end{aligned}$$

因此，我们有 $|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{k_1+\ell_1}$。证明由此归结为第一种情况的证明。 □

引理 4.28。在 命题 *4.25* 中定义的 $\mathcal{U}_5$ 的设定下，我们进一步假设 t

$$|\eta_1+\eta_5|,|\eta_2+\eta_5|,|\eta_3-\eta_5|,|\eta_4-\eta_5|\lesssim 2^{k_*}.$$

那么，(4.23) 和 (4.24) 成立。

证明。在这种情况下，我们处理的是

$$|\eta_1+\eta_5|,|\eta_2+\eta_5|,|\eta_3-\eta_5|,|\eta_4-\eta_5|\lesssim 2^{k_*}.$$

这意味着我们有

$$\Big|\eta_1-\eta_5+2\sqrt{3}\Big|=\mathcal{O}(2^{k_1})$$

以及界

$$|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{2k_1}.$$

因此，证明归结为引理 4.27 中的第一种情形。 □

引理 4.29。在 命题 *4.25* 中定义的 $\mathcal{U}_5$ 的设定下，并且我们进一步假设 t

$$|\eta_1-\eta_5|,|\eta_2+\eta_5|,|\eta_3+\eta_5|,|\eta_4+\eta_5|\lesssim 2^{k_*}$$

or

$$|\eta_1-\eta_5|,|\eta_2-\eta_5|,|\eta_3+\eta_5|,|\eta_4+\eta_5|\lesssim 2^{k_*}.$$

那么，(4.23)和(4.24) 成立。

证明。 这两种特殊情形的出现，是因为我们对 σ_ξ 采用了不同的选择。具体而言，这里有 $\sigma_1\neq\sigma_5$ 和 $\sigma_3=\sigma_5$ 。然而，这会得到一个存在退化可能性的界

$$|\partial_{\eta_1}\phi|\gtrsim 2^{k_1}|\eta_1-\eta_5|$$

因此，在 η_1 中进行分部积分可能会导致发散。相反，我们在 η_3中进行分部积分。接着，注意到

$$|\eta_3-\eta_5-2\sqrt{3}|\gtrsim 2^{k_1}$$

证明归结为引理 4.27 □

4.2.4. 时空共振线。 我们考虑时空共振线的贡献

$$L=\Big\{\,(\sigma_1\eta,\sigma_2\eta,\sigma_3\eta,\sigma_4\eta;\ \xi=\sigma_\xi\eta)\ :\ \eta\in\mathbb{R},\ \sigma_j\in\{\pm1\},\ \sigma_\xi-\sum_{j=1}^4\sigma_j=\pm1\,\Big\}\subseteq\mathbb{R}^5,$$

包括点 (0，0， 0， 0;0)，并且，当 $|\eta|=\sqrt{3}$ 时，所有形如以下形式的符号-排列点

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi)=(\sigma_1\eta,\sigma_2\eta,\sigma_3\eta,\sigma_4\eta;\ \xi=\sigma_\xi\eta),\quad \sigma_j\in\{\pm1\},$$

满足共振符号约束

$$\sigma_\xi-\sum_{j=1}^4\sigma_j\in\{\pm1\}$$

（等价地，在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5$ 中恰好有 3 $+\eta$个与 2 $-\eta$个，或反之）。对应于 $\eta\approx 0$和 $\eta\approx\pm\sqrt{3}$的退化贡献已在上一

节中讨论过。因此我们限于情形 $|\eta| \gg 1$，此时无穷远处的退化性仍须加以控制。共振线由线性约束给出

$$\eta_1 - \eta_2 = 0, \qquad \eta_3 - \eta_4 = 0, \qquad \eta_1 + \eta_3 = 0.$$

固定一个二进 时间尺度 2^m。我们将下阈值尺度和上阈值尺度 k_{lo}，$k_{\mathrm{hi}} \in \mathbb{Z}$ 定义为

$$2^{k_{\mathrm{lo}}} := \max\Big\{2^k : 2^k \le C_{\mathrm{lo}}\, 2^{m(\delta_2 - \frac{1}{3})}\Big\}, \tag{4.27}$$

and

$$2^{k_{\mathrm{hi}}} := \min\Big\{2^k : 2^k \ge C_{\mathrm{hi}}\, 2^{m(\frac{1}{9} - \delta_4)}\Big\}, \tag{4.28}$$

其中 $\delta_2 > 0$ 如对 **(0, 0,0, 0; 0)** 共振的分析中那样固定，而 $\delta_4 > 0$ 将选取得足够小。排除退化情形 $\eta = 0$ 和 $\eta = \pm\sqrt{3}$后，只需估计共振线高频部分的贡献，我们将其记为

$$L_{\mathrm{hi}} = \Big\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi) \in \mathbb{R}^5 \ : \ 2^5 \le |\eta_1| \le 2^{k_{hi}},\ |\eta_1| \sim |\eta_2| \sim |\eta_3| \sim |\eta_4| \sim |\xi|,$$
$$\max(|\eta_1 - \eta_2|, |\eta_3 - \eta_4|, |\eta_1 + \eta_3|, |\xi - \eta_1|) \le 2^{k_{\mathrm{lo}}}\Big\}.$$

我们进一步将 L_{hi} 分解为二进分块

$$L_{\mathrm{hi},k,k_1,\ell_1,\ell_2,\ell_3} = \begin{Bmatrix} |\eta_1| \sim 2^{k_1} \in [2^5, 2^{k_{\mathrm{hi}}}], \\ |\eta_1 - \eta_2| \le 2^{k_{\mathrm{lo}}} \text{ or } \sim 2^{\ell_1}, \\ |\eta_3 - \eta_4| \le 2^{k_{\mathrm{lo}}} \text{ or } \sim 2^{\ell_2}, \\ |\eta_1 + \eta_3| \le 2^{k_{\mathrm{lo}}} \text{ or } \sim 2^{\ell_3}, \\ |\xi - \eta_1| \le 2^{k_{\mathrm{lo}}} \text{ or } \sim 2^{k} \end{Bmatrix}.$$

对 k，k_1，ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3和 m求和，即可得到所需的界。

引理 4.30。 在本小节中，对于 $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}$，相位函数在时空共振点$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4;\ \xi) = (\tilde{\eta}, \tilde{\eta}, -\tilde{\eta}, -\tilde{\eta};\ \tilde{\eta})$ 附近的泰勒展开为 $|\eta| \gg 1$

$$\phi \approx \big(-\omega'(\tilde{\eta}) + \omega'(\tilde{\eta})\big)(\xi - \tilde{\eta}) + \frac{1}{2}\omega''(\tilde{\eta})\Big[(\eta_1 - \tilde{\eta})^2 + (\eta_2 - \tilde{\eta})^2 - (\eta_3 + \tilde{\eta})^2 - (\eta_4 + \tilde{\eta})^2$$
$$+ \Big((\xi - \tilde{\eta}) - \sum(\eta_j \pm \tilde{\eta})\Big)^2 - (\xi - \tilde{\eta})^2\Big]. \tag{4.29}$$

对于 $|\tilde{\eta}| \gtrsim 2^5$，(4.29) 化简为

$$\phi \approx \frac{1}{2}\omega''(\tilde{\eta})\left[\mathcal{O}\left((\eta_j \pm \tilde{\eta})^2\right) + \mathcal{O}\left((\xi - \tilde{\eta}) \cdot (\sum_{j=1}^{4} \eta_j)\right)\right].$$

这意味着，若 $k \gtrsim k_{\min}$ 且 ℓ_1，ℓ_2，$\ell_3 \gtrsim \ell_{\min}$，则 $k_{\min} = \ell_{\min}$。与退化点分析中一样，为了应对 ξ，$\eta \to \infty$ 附近色散的损失，我们选取

$$\ell_{\min} = k_{\mathrm{lo}} \approx -\frac{m}{3}.$$

不失一般性，我们假设排序关系为 $\ell_1 \ge \ell_2 \ge \ell_3$。

命题4.31。 设 k_{lo} 由(4.27)定义。我们定义区域

$$\mathcal{L}_1 := \Big\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\xi) : |\eta_1 - \eta_2|, |\eta_3 - \eta_4|, |\eta_1 + \eta_3| \lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}},\ |\xi - \eta_1| \lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}}.\Big\},$$

那么，在自举假设下， $\mathcal{L}_1$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 由于在此区域内不允许进行分部积分，因此我们引入符号

$$B(\eta,\xi)=\partial_\xi\phi\ \varphi_{\lesssim k_{\mathrm{lo}}}(\xi-\eta_1)\ \varphi_{\lesssim k_{\mathrm{lo}}}(\eta_1-\eta_2)\ \varphi_{\lesssim k_{\mathrm{lo}}}(\eta_3-\eta_4)\ \varphi_{\lesssim k_{\mathrm{lo}}}(\eta_1+\eta_3)\prod_{j=1}^{4}\psi_{k_j}(\eta_j).$$

注意，在共振线 $\xi=\eta_1=\eta_2=-\eta_3=-\eta_4$ 上，我们有

$$\partial_\xi\phi=-\omega'(\xi)+\omega'(\eta_5)=0.$$

此外， $\omega''(\eta)\sim\eta^{-3}$ 因此我们有如下小量，

$$|\partial_\xi\phi|\approx|\omega''(\eta_1)|\cdot|\eta_5-\xi|\lesssim 2^{-3k_1}\cdot 2^{k_{\mathrm{lo}}}.$$

因此，它满足 [1, 引理 B。3] 和 [1, 引理 B。4]，其中 $A=2^{-3k_1}\cdot 2^{k_{\mathrm{lo}}}$。由多线性估计可得

$$\begin{aligned}\|I_{m,k_1}\|_{L^2_\xi}&\lesssim\varepsilon_1^5 2^{k_1}\int_{t_1}^{t_2}d\tau\,\tau\cdot\left(2^{-3k_1}2^{k_{\mathrm{lo}}}\right)\cdot\|f_{k_1}\|_{L^2}\cdot\left(\varepsilon_1\tau^{-\frac12}2^{\frac32 k_1}\right)^4\\&\lesssim\varepsilon_1^5 2^{k_{\mathrm{lo}}}\int_{t_1}^{t_2}d\tau\,2^m\cdot 2^{k_{\mathrm{lo}}}\cdot 2^{-3k_1}\cdot 2^{-2m}\cdot 2^{6k_1}\end{aligned}$$

对频率求和并且 m可得

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|I_{m,k_1}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\cdot 2^{m(-\frac19+\delta_2-2\delta_4)}.$$

固定 $\delta_2-2\delta_4<\frac13$，于是有 $\sum_m\sum_{\text{频率。}}\|I_{m,\ k_1}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_{1\text{。}}^5$ 对于 J_m 部分，由测度估计可得

$$\|J_m\|_{L^\infty_\xi}\lesssim 2^{-k_1}\cdot\varepsilon_1^5\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{meas.}(\tau)\,d\tau\lesssim\varepsilon_1^5 2^{-k_1}\int_{t_1}^{t_2}\tau^{-\frac43+4\delta_2}\,d\tau$$

这给出

$$\|J_m\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\cdot 2^{-k_1}\cdot 2^{m(-\frac13+4\delta_2)}$$

对频率求和并且 m 得到界

$$\sum_m\|J_m\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5$$

如所需。 □

命题 4.32。 令 $\mathcal{L}_2$ 为由以下条件定义的频率区域：

- 输入频率满足

$$\begin{aligned}|\eta_1-\eta_2|&\sim 2^{\ell_1},\quad & 2^{k_{\mathrm{lo}}}&\lesssim 2^{\ell_1}<2^{-10},\\|\eta_3-\eta_4|&\sim 2^{\ell_2},\quad & 2^{k_{\mathrm{lo}}}&\lesssim 2^{\ell_2}<2^{-10},\\|\eta_1+\eta_3|&\sim 2^{\ell_3},\quad & 2^{k_{\mathrm{lo}}}&\lesssim 2^{\ell_3}<2^{-10},\end{aligned}$$

  or

$$\begin{aligned}|\eta_1-\eta_2|&\lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}},\\|\eta_3-\eta_4|&\lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}},\\|\eta_1+\eta_3|&\lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}}.\end{aligned}$$

- 输出频率满足

$$|\xi-\eta_1|\sim 2^k,\quad 2^{k_{\mathrm{lo}}}\lesssim 2^k<2^{-10}\quad k\gg\ell_1.$$

于是，在自举假设下， $\mathcal{L}_2$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5, \qquad \sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。只需处理构型 $|\eta_3-\eta_4|\sim 2^{\ell_2}\gtrsim 2^{k_{\mathrm{lo}}}$，因为其余情形可以用同一论证的更简单变体来处理。在分离条件 $k\gg \ell_j$ 下，相位满足

$$|\phi| \approx \frac{1}{2}|\omega''(\eta_1)|(\xi-\eta_1)^2 \sim 2^{-3k_1}2^{2k}.$$

因此可以对时间进行分部积分，从而得到乘子的界

$$\left|\frac{1}{\phi}\right| \lesssim 2^{3k_1}2^{-2k}.$$

我们有

$$I_{m,k} = \omega(\xi)\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ \tau \int d\eta_{1234}\, e^{i\tau\phi}\,\partial_\xi\phi \prod_{j=1}^{4}\hat{f}_{k_j}(\tau,\eta_j)\hat{f}_{\sim 2^k}(\xi-\eta_1).$$

并且对 τ 进行分部积分，得到边界项 I_1 （不含关于时间的积分），以及体项 I_2 （此时时间导数作用于非线性项）。在此情形下，我们有 $k\gg k_{\mathrm{lo}}$，这意味着最坏的情况是 ℓ 位于共振边界 $\ell\sim k_{\mathrm{lo}}$ 上。因此，

$$k\sim k_{\mathrm{lo}} \implies 2^{-2k}\sim 2^{-2k_{lo}} \approx (t^{-\frac{1}{3}})^{-2} = t^{2/3}.$$

因此，对于边界项，我们有:

$$\|I_1\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{-k_1}\cdot 2^{3k_1}\cdot 2^{-2k}\cdot 2^{-\frac{4}{3}m} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{m(\frac{2}{9}-2\delta_4)}\cdot 2^{\frac{2}{3}m}\cdot 2^{-\frac{4}{3}m} \lesssim 2^{-m(\frac{4}{9}+2\delta_4)}.$$

对频率求和并 m，得到

$$\sum_m \|I_1\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 t^{-\frac{4}{9}+2\delta_4}.$$

固定 $2\delta_4<\frac{4}{9}$ 即可得到所需的界。对于体项，我们有

$$\|I_2\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^9\cdot 2^{-k_1}\int_{t_1}^{t_2} d\tau\ 2^{3k_1}2^{-2k}\cdot 2^{-\frac{8}{3}m} \lesssim \varepsilon_1^9 2^{-m(\frac{7}{9}-2\delta_4)}.$$

对频率求和并 m，得到

$$\sum_m \|I_2\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 t^{-\frac{7}{9}+2\delta_4}$$

并固定 $2\delta_4<\frac{7}{9}$，即可得到所需的界。

对于加权范数项 J，我们有乘子

$$\frac{\partial_\xi\phi}{\phi}\sim \frac{2^{-3k_1}2^k}{2^{-3k_1}2^{2k}} = 2^{-k}$$

由此可得

$$\|J_{m,k}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 2^{\frac{1}{3}m}\cdot 2^m\cdot 2^{-\frac{4}{3}m} \lesssim \varepsilon_1^5$$

这就是所需的界。 □

命题 4.33. 设 $\mathcal{L}_3$ 为由以下条件定义的频率区域:

- 输入频率满足

$$\begin{aligned}
&|\eta_1-\eta_2|\sim 2^{\ell_1}, \quad 2^{k_{\mathrm{lo}}}\lesssim 2^{\ell_1}<2^{-10},\\
&|\eta_3-\eta_4|\sim 2^{\ell_2}, \quad 2^{k_{\mathrm{lo}}}\lesssim 2^{\ell_2}<2^{-10},\\
&|\eta_1+\eta_3|\sim 2^{\ell_3}, \quad 2^{k_{\mathrm{lo}}}\lesssim 2^{\ell_3}<2^{-10}.
\end{aligned}$$

- 输出频率满足

$$|\xi-\eta_1|\sim 2^k,\quad 2^{k_{\rm lo}}\lesssim 2^k<2^{-10}\quad 2^k\lesssim 2^{\ell_3},$$

or

$$|\xi-\eta_1|\lesssim 2^{k_{\rm lo}}.$$

那么，在自举假设下， $\mathcal{L}_3$ 的贡献满足

$$\sum\|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5,\qquad \sum\|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5.$$

证明。只需考虑情形 $|\xi|\sim 2^k$，其余情形可用类似论证处理。由中值定理及界 $|\omega''(\eta_1)|\sim 2^{-3k_1}$，可得 $|\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi|\gtrsim 2^{-3k_1}2^{\ell_1}$。因此

$$|a(\eta,\xi)|\lesssim 2^{3k_1-\ell_1},\quad \text{and}\quad |m(\eta,\xi)|\lesssim 2^{3k_1-2\ell_1},$$

其中

$$a(\eta,\xi):=\frac{\partial_\xi\phi}{\partial_{\eta_1-\eta_2}\phi},\qquad m(\eta,\xi):=\partial_{\eta_1-\eta_2}a(\eta,\xi).$$

注意，这些满足 [1, 引理 B.3]以及 [1,引理 B.4]。此外，我们还有，

$$|\omega(\xi)a(\eta,\xi)|\lesssim 2^k\cdot 2^{3k_1-\ell_1}\lesssim 2^{3k_1},\qquad |\omega(\xi)m(\eta,\xi)|\lesssim 2^k\cdot 2^{3k_1-2\ell_1}\lesssim 2^{3k_1-\ell_1}.\tag{4.30}$$

通过分部积分，结合 [1, 引理 B.3], [1, 命题 B.1],和 (4.30)，可得

$$\|I_{m,k}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\int_{t_1}^{t_2}d\tau\ 2^{3k_1-\ell_1}2^{-\frac{4m}{3}}+2^{3k_1}2^{-\frac{4}{3}m}$$

对频率和 m求和，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freqs.}}\|I_{mk_1k_2k_3k_4k\ell_1\ell_2\ell_3}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left(t^{-3\delta_4}+t^{1-3\delta_4}\right)$$

这就是所需的界。

对于 J_m，我们仍然只给出 $|\xi|\sim 2^k$的证明。利用 (4.30) 对$\partial_{\eta_1-\eta_2}$ 进行分部积分，再结合多线性估计，得到

$$\|J_{\dots}\|_{L^\infty_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left[2^{7k_1}2^{-\frac{4}{3}m}+2^{7k_1-\ell_1}\cdot 2^{-\frac{4}{3}m}\right]$$

对频率和 m求和，得到

$$\sum_m\sum_{\text{freq.}}\|J_{\dots}\|_{L^2_\xi}\lesssim\varepsilon_1^5\left[2^{m(\frac{7}{9}-7\delta_4)}\cdot 2^{-\frac{4}{3}m}+2^{m(-\frac{2}{9}-\delta_2-7\delta_4)}\right]\lesssim\varepsilon_1^5,$$

如所需。 □

4.2.5. 时空共振曲线。 现在我们转向时空共振曲线 Γ 所产生的贡献，该曲线定义于 (3.4)。这条曲线上的最奇异点，即符号置换构型

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4;\xi)=(\sigma_1\eta,\sigma_2\eta,\sigma_3\eta,\sigma_4\eta;\ \xi=\sigma_\xi\eta),\quad \sigma_j\in\{\pm1\},$$

此前已经讨论过。因此， Γ的剩余部分可以通过类似的论证来处理。按照我们的约定， $|\eta_1|$ 是主导频率，只需控制这些二进分块的贡献

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{hi},kk_1\ell_1\ell_2\ell_3}=\Big\{&|\eta_1|\sim 2^{k_1}\in\left[2^5,2^{k_{\rm hi}}\right],\ |\eta_1-\eta_2|\le 2^{k_{\rm lo}}\text{ or }\sim 2^{\ell_1},\\&|\eta_1+\eta_3|\le 2^{k_{\rm lo}}\text{ or }\sim 2^{\ell_2},\ |r(\eta_1)+\eta_4|\le 2^{k_{\rm lo}}\text{ or }\sim 2^{\ell_3},\ |\xi+r(\eta_1)|\le 2^{2k_{\rm lo}}\text{ or }\sim 2^k\Big\}\end{aligned}$$

其中， k_{lo}， k_{hi} 定义见 (4.27) 和 (4.28)。此外，与对共振线的分析一样，频率参数 k_j 和 ℓ_j 的相对大小可以通过相位在参考点 $(\eta,\ \eta,\ -\eta,\ -r(\eta);\ -r(\eta))$ 处的泰勒展开来确定。因此可得

$$\phi \approx \omega'\left(r(\overline{\eta})\right)\left(\xi + r(\overline{\eta})\right) + \mathcal{O}\left(\left(\eta_1-\overline{\eta}\right)^2, \left(\eta_2-\overline{\eta}\right)^2, \left(\eta_3+\overline{\eta}\right)^2, \left(\eta_4+r(\overline{\eta})\right)^2\right),$$

特别地，这表明当前采用的局部化方式与上一小节中的方式一致。因此，合适的策略是在时间上进行分部积分。接下来我们陈述一个命题，该命题揭示了单个因子改进衰减的来源。

引理 4.34 (改进的 L_x^∞衰减)。 固定一个二进时间尺度 $t \in [2^m, 2^{m+1}]$， 在$\Gamma_{\mathrm{hi},\ kk_1\ell_1\ell_2\ell_3}$的支集上，我们有 $|\eta_4| \approx 1$。因此，相应的输入因子满足改进的色散衰减

$$\|u_{k_4}(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \varepsilon_1 2^{-\frac{m}{2}}.$$

证明。 我们有 $|\eta_1| \gg 1, |\eta_1-\eta_2| \ll 1$ ，这意味着 $|\eta_2| \sim 2^{k_1}$。类似地， $|\eta_1+\eta_3| \ll 1$ 意味着$|\eta_3| \gg 1$。对于 $|r(\eta_1)+\eta_4|$，我们有 $r(\eta_1) \approx 1$ ，因为 $|\eta_1| \gg 1$。这意味着 $|\eta_4| \approx 1$ ，其衰减更快。□

上一节中情形 1 和情形 2（共振线）的类似情形，在转到共振曲线时也可以用相同的方法处理。此外，在命题 4.34 中，我们证明了我们的衰减 $\|u_{k_4}\|_{L_x^\infty} \lesssim \varepsilon_1 2^{-\frac{m}{2}}$ 优于最坏情形的界 $\varepsilon_1 \lesssim 2^{-\frac{m}{3}}$ 。因此，沿用上一节完全相同的方法即可处理这些情形，而更强的衰减足以完成这一情形。接下来，我们通过引入变量替换来展平坐标

$$\Psi : (\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) \mapsto (\mu,\eta_2,\eta_3,\eta_4), \qquad \mu := r(\eta_1). \tag{4.31}$$

在当前的非线性情形下， [1, 引理 B。4] 不再适用。取而代之的是，我们通过变量替换进行坐标平坦化，并借助 [1, 注 B。5]。这会引入一个雅可比因子 $|r'(\eta_1)|^{-1} \sim 2^{3k_1}$。因此，所得的界与分析共振线时得到的界完全相同。

接下来，我们证明命题 (4.33) 的类似结论，它涵盖了唯一剩余的情形。

命题 4.35. 设 $\mathcal{C}$ 为满足以下条件所定义的频率区域：

- 输入频率满足

$$|\eta_1-\eta_2| \sim 2^{\ell_1}, \qquad |\eta_1+\eta_3| \sim 2^{\ell_2}, \qquad |r(\eta_1)+\eta_4| \sim 2^{\ell_3}$$

其中

$$2^{k_{\mathrm{lo}}} \lesssim 2^{\ell_j} < 2^{-10} \quad \forall j=1,2,3, \qquad \ell_3 \geq \max\{\ell_1,\ell_2\}.$$

- 输出频率满足

$$|\xi + r(\eta_1)| \sim 2^k, \quad 2^{2k_{\mathrm{lo}}} \lesssim 2^k < 2^{-10}, \quad 2^k \lesssim 2^{\ell_3},$$

or

$$|\xi + r(\eta_1)| \lesssim 2^{k_{\mathrm{lo}}}$$

那么，在自举假设下， $\mathcal{C}$ 的贡献满足

$$\sum \|I_{m,k_*}\|_{L^2_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \qquad \sum \|J_{m,k_*}\|_{L^\infty_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5.$$

证明。 在区域 $\mathcal{C}$中，我们有

$$|\partial_{\eta_1}\phi| = |\omega'(\eta_1)-\omega'(\eta_4)| = |\omega'\left(r(\eta_1)\right)-\omega'(-\eta_4)| \gtrsim |r(\eta_1)+\eta_4| \sim 2^{\ell_3}.$$

因此，这意味着我们可以对 ∂_{η_1} 进行分部积分。经过一次时间分部积分，并利用 (4.31) 将坐标展平后，可得符号 $\lesssim 2^{3k_1}2^{-\ell_3}$。因此，情形归结为

在共振线情形下应用情形 3 的论证，并注意到我们在 η_4 项中得到的是改进衰减，而不是最坏情形下的衰减 $\varepsilon_1 2^{-\frac{m}{3}}$。□

4.3. **第五部分：加权 L^2_x 和 L^∞_ξ非共振情形中的界**。对于四次 gBBM，Morgan [1] 通过在时间或空间（频率）上进行标准分部积分，利用非驻相获得时间可积性，从而处理这些贡献。对于本文研究的五次问题，这些非共振项的分析也同样适用（稍作相应修改）。此外，与四次情形相比，五次非线性还提供了额外的色散衰减因子。具体而言，多线性积分涉及五个输入而非四个，因此在物理空间中，衰减最差的项会多出一个因子

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \varepsilon_1 t^{-\frac{1}{3}}.$$

因此，这些非共振区域中的自举估计闭合，可直接由 [1]，中已确立的论证推出，并且收敛速率有所提高。为简洁起见，我们省略重复的细节。

5. Scattering

命题 5.1. 存在唯一的 $F(x) \in H^s_x$满足 $\widehat{F} \in H^1_\xi$，使得剖面 $f(t,x)$ 属于$u(t,x)$ 并满足

$$\lim_{t\to\infty} \|f(t,x) - F(x)\|_{H^s_x} = \lim_{t\to\infty} \left\|\widehat{f}(t,\xi) - \widehat{F}(\xi)\right\|_{H^1_\xi} = 0.$$

特别地，$u(t,x)$ 在 H^s_x 中散射。

证明。我们首先考虑在 H^1_ξ 中的收敛性。任取 $1 < t_1 < t_2$。令 m_1 为满足 $2^{m_1} \le t_1$ 的最大整数，并令 m_2 为满足 $2^{m_2} \ge t_2$ 的最小整数。于是

$$[t_1,t_2] \subset \bigcup_{m=m_1}^{m_2} \big([2^m, 2^{m+1}] \cap [t_1,t_2]\big).$$

接着，我们在频率空间中写出杜哈梅尔公式，作差可得

$$\widehat{f}(t_2,\xi) - \widehat{f}(t_1,\xi) = \sum_{m=m_1}^{m_2} J_m(\xi),$$

其中，J_m 表示限制在 $[2^m, 2^{m+1}] \cap [t_1,t_2]$ 上的时间积分贡献。根据上一节的结果，特别是引理 4.6，我们已证明存在常数 $\alpha > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\|J_m\|_{H^1_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5\, 2^{-\alpha m} \quad \text{for all } m \ge m_1.$$

因此，

$$\|\widehat{f}(t_2) - \widehat{f}(t_1)\|_{H^1_\xi} \le \sum_{m=m_1}^{m_2} \|J_m\|_{H^1_\xi} \lesssim \varepsilon_1^5 \sum_{m=m_1}^{\infty} 2^{-\alpha m} \lesssim \varepsilon_1^5\, 2^{-\alpha m_1} \lesssim \varepsilon_1^5\, t_1^{-\alpha}.$$

令 $t_1 \to \infty$，可知 $\widehat{f}(t)$ 在 H^1_ξ 中是柯西列。由于 H^1_ξ 是完备的，存在唯一的 $\widehat{F} \in H^1_\xi$，使得

$$\widehat{f}(t,\xi) \to \widehat{F}(\xi) \quad \text{in } H^1_\xi \text{ as } t \to \infty.$$

为考察 H^s_x 中的收敛性，我们只需仿照命题 4.1 中的论证，对 Duhamel公式 (3.1) 应用 Minkowski 不等式、普朗歇尔定理和逐点衰减 (4.3)。□

References

[1] A. George. Morgan, *Scattering for quartic generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, Nonlinear Anal. 261 (2025), 1–49. [2] A. George Morgan, *Scattering for a generalized Benjamin–Bona–Mahony equation*. 博士论文, 多伦多大学, 2024年。[3] P. Germain, *Space-time resonances* (2011), 见 1102.1695。[4] P. Germain、N. Masmoudi 和 J. Shatah。 *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations*。Int. Math. Res. Not. IMRN, (3):414–432, 2009。[5] P. Germain、F. Pusateri 和 F. Rousset,

Asymptotic stability of solitons for mKdV 299 272 330, ,

2016

Adv. Math., : – 。[6] S. Gustafson、K. Nakanishi 和 T.-P. Tsai。

Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions ´ 8 7 1303 1331, 2007 ,

Ann. Henri Poincare, ( ): – 。[7] S. Gustafson、K. Nakanishi 和 T.-P. Tsai,

Scattering theory for the Gross–Pitaevskii equation in three dimensions, Commun. Contemp. Math., 11(4):657–707, 2009

Department of Mathematics, University of Wisconsin–Madison, Madison, WI 53706, USA *Email address*: zhang2734@wisc.eduSchool of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA*Email address*: gc@math.gatech.edu