arXiv:2603.01362v1 [math.AP] 2 Mar 2026

窄过渡区层状多孔介质中达西–布辛涅斯克对流的渐近长时间行为

Kaijian Sha[1*] Xiaoming Wang[1†]Hao Wu[2‡]

[1 1] 宁波东方理工大学数学科学学院，中国宁波[2 2] 复旦大学数学科学学院，中国上海 200433

摘要

我们研究材料性质具有窄过渡区的分层多孔介质中达西–布辛涅斯克对流的渐近长时间行为。随着过渡层宽度趋于零，我们证明全局吸引子、不变测度和努塞尔数上半连续收敛至极限尖锐界面模型中的相应对象。我们还证明全局吸引子的分形维数有限，并给出了关于过渡层宽度一致的显式上界。本研究将精心设计的背景温度/污染物剖面与一种新颖的相空间选取相结合，以确保模型的整体适定性及解半群的渐近紧性，并采用了一种新的插值不等式。该相空间与具有不连续系数的主椭圆算子的分数次幂相关。这些结果为尖锐界面达西–布辛涅斯克模型提供了严格的长时间验证，并将我们先前的有限时间收敛理论（H. Dong 和 X. Wang，《工业与应用数学学会应用数学杂志》85 (2025年), 1621–1642）拓展至长时间区间。

关键词： 层状多孔介质中的对流，Darcy–Boussinesq模型，全局吸引子，不变测度，努塞尔数，材料界面消失极限，上半连续性，插值不等式

2020年数学主题分类： 35Q35, 35Q86, 76D03, 76S99, 76R99

1 引言

多孔结构中的流体对流在自然现象与技术应用中均起着基础性作用。这一课题数十年来持续受到关注；参见

*电子邮箱：kjsha11@eitech.edu.cn

†电子邮箱：wxm.math@outlook.com。通讯作者。

‡电子邮箱：haowufd@fudan.edu.cn

Nield 和 Bejan [23] 的综述。许多数学研究分析了多孔介质环境中的对流，包括适定性、正则性、长时间行为和输运界[8, 11, 12, 18, 24, 25, 34, 7, 5]。除诸如 [5, 10], 等近期贡献外，这一系列工作主要关注具有均匀（空间上恒定）材料性质的介质。

实际上，多孔地层通常呈层状或具有其他非均质性。不同层中的渗透率和输运系数经常发生变化，这些变化源于地质过程（例如沉积物沉积、构造活动、溶解）或工程设计。一个重要的应用是二氧化碳（CO_2）地质封存，在这一领域，层状结构会显著影响稳定性、羽流形态和对流输运；例如参见[3, 17, 14, 15, 13, 21, 22, 20, 26, 27, 35, 6, 16]。Huppert 和 Neufeld 的综述 [17] 总结了大量相关文献，而 [2] 则记录了关于层状结构如何改变——并在某些建模机制下增强——对流输运的最新进展。

一种广泛采用的简化方法是尖锐界面描述，即将材料参数建模为分段常数——每层内部均匀，在界面处不连续——并通过传递条件耦合相邻层 [14, 15, 13, 21, 22, 20, 5]。这种表述在数学上便于处理，而且在宏观尺度上通常有效。然而，它也是一种理想化：在微观尺度上，扩散和混合机制会使突变的参数跃变平滑，因此无限尖锐的过渡在物理上并不存在。此外，尽管均质多孔流动方程可以通过均匀化等方法严格推导，但在分层情形下，尖锐界面模型及其界面条件的系统推导则更为微妙。特别是，传递条件的具体形式——尤其是速度和应力的哪些分量应在界面处连续——可能取决于上尺度假设和建模机制，因此有必要从数学上加以论证。

更真实的描述允许存在弥散界面，即系数在薄过渡层内平滑变化。按照 [1, 28], ，我们将其称为弥散界面模型。一个自然的理论问题是：当过渡层厚度趋于零时，尖锐界面表述（及其传递条件）能否作为弥散界面模型的奇异极限得到论证。

在先前的工作中， [10], 我们证明了在有限时间区间上，弥散界面模型收敛到尖锐界面模型；这一结论是在以系统的线性算子表述的初始正则性假设下得到的。尽管薄过渡区内存在近乎奇异的梯度，在这一短时间范围内仍可恢复尖锐界面动力学。然而，对于许多应用而言，关注的量本质上涉及长时间行为或统计性质，例如描述统计稳态的不变测度，以及长时间平均输运指标，如努塞尔数。

本研究旨在精确探讨该模型在长 $\varepsilon \to 0$时间尺度下的渐近行为。我们证明，随着过渡层厚度(2.5)–(2.7)趋于零，弥散界面模型的全局吸引子、不变测度和努塞尔数收敛于

尖锐界面模型（2.1)–(2.4）中相应的对象，且这种收敛是上半连续的。此外，我们证明全局吸引子的分形维数有限，并得到一个关于 ε一致的显式上界。

该分析与 [10]有很大不同。长时间理论要求相空间既要（i）具有足够的正则性，以便在整个时间范围内控制非线性项；又要（ii）足够大，以便证明解半群关于 ε的一致渐近紧性。为此，我们引入一个相空间，该空间由尖锐界面模型（具有不连续系数）的主椭圆算子的分数幂定义。一个关键的新要素是建立了将该分数幂空间与标准Sobole夫空间联系起来的插值不等式；它确保了全局适定性以及关于ε先验估计的一致性。通过一致的Gronwall型论证，利用关于时间一致的 H^1估计可得到渐近紧性。最后，吸引子的有限维性由半群的挤压型性质推出，其中的常数同样关于过渡层厚度一致。总之，这些结果为尖锐界面Darcy–Boussinesq模型提供了严格的长时间论证，并将 [10]的有限时间收敛理论扩展到了长时间区间。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍锐界面和弥散界面表述。第 3 节给出预备估计。第 4 节证明全局吸引子的存在性，并得到关于界面厚度一致的界。第 5 节证明全局吸引子、不变测度和努塞尔数的上半连续性。第 6 节推导维数估计。第 7 节以若干评述作结，附录则汇集辅助估计以及新的插值不等式的证明。

2 模型描述

我们考虑三维分层区域 $\Omega = (0, L)^2 \times (-H, 0)$, $L, H > 0$ 中的对流。区域 Ω 被位于 $z = z_j \in (-H, 0)$ $j = 1, 2, \cdots, l-1$ 处的 $l-1$ 界面划分为 l 个平坦的“层”或“条带”。此外，我们记 $z_0 = 0, z_l = -H$。第 j 层定义为

$$\Omega_j := \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_z \in (z_j, z_{j-1})\}, \quad \text{for } j = 1, 2, \cdots, l,$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x, \ y, \ z)$，且 $\boldsymbol{e}_z$ 表示 z 方向上的单位向量。

2.1 尖锐界面模型

令 $T>0$。描述分层区域 Ω 中对流的达西–布西内斯克系统具有如下形式（参见 [23]）：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = -\dfrac{K}{\mu}\left(\nabla P + \rho_0(1+\alpha\phi)g\boldsymbol{e}_z\right), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \\ b\partial_t\phi + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi - \nabla\cdot(bD\nabla\phi) = 0, \end{cases} \quad \text{在 } \Omega\times(0,\ T)。 \tag{2.1}$$

这里，未知量 $\boldsymbol{u}:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^3$, $P:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 和 $\phi:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 分别表示流体速度、压力和浓度。常数 ρ_0, α, μ, g 分别表示参考流体密度、膨胀系数、动力黏度和重力加速度。此外，K, b,D 分别表示渗透率、孔隙率和扩散系数。

对于理想化的尖锐界面模型，在每一层 Ω_j 中，假设渗透率、孔隙率和扩散系数为常数，即

$$K = K(\boldsymbol{x}) = K_j, \quad b = b(\boldsymbol{x}) = b_j, \quad D = D(\boldsymbol{x}) = D_j, \quad \forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega_j, \quad 1\le j\le l,$$

对于一组正常数 $\{K_j, b_j, D_j\}_{j=1}^{l}$。在界面上，我们假设

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z,\ P,\ \phi,\ \text{are continuous at } z=z_j, \quad 1\le j\le l-1, \tag{2.2}$$

此外，系统 (2.1) 还需满足初始条件

$$\phi|_{t=0} = \phi_0 \tag{2.3}$$

以及边界条件

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z|_{z=0,-H} = 0, \quad \phi|_{z=0} = c_0, \quad \phi|_{z=-H} = c_{-H}, \tag{2.4}$$

并在水平方向上满足周期性（x, y）。

2.2 弥散界面模型

尖锐界面模型允许物理参数在界面处发生突变$z=z_j$，而更符合物理实际的情形则是允许材料参数由于局部扩散而逐渐变化，尽管这种变化仅发生在厚度为 ε 的薄层内。我们假设

$$0<\varepsilon\ll z_j - z_{j+1}, \quad \forall\, j = 0,1,\cdots,l-1.$$

这意味着渐变过渡层远薄于宏观层。在弥散界面框架下，控制方程具有如下形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^\varepsilon = -\dfrac{K^\varepsilon}{\mu}\left(\nabla P^\varepsilon + \rho_0(1+\alpha\phi^\varepsilon)g\boldsymbol{e}_z\right), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon = 0, \\ b^\varepsilon\partial_t\phi^\varepsilon + \boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\phi^\varepsilon - \nabla\cdot(b^\varepsilon D^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon) = 0, \end{cases} \quad \text{in } \Omega\times(0,T). \tag{2.5}$$

这里，未知量 $\boldsymbol{u}^\varepsilon\colon \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^3$, $P^\varepsilon\colon \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 和 $\phi^\varepsilon\colon \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 分别表示流体速度、压力和浓度。 K^ε, b^ε, D^ε 分别表示渗透率、孔隙率和扩散系数，它们在每个 Ω_j 中基本保持恒定，但在宽度为 2ε 的狭窄薄层内发生变化，从而使相邻条带之间实现平滑过渡。更确切地说，K^ε, b^ε, D^ε 在 Ω 上光滑，且

$$
\begin{aligned}
&K^\varepsilon = K_j,\ b^\varepsilon = b_j,\ D^\varepsilon = D_j, \quad \forall\, z\in[z_j+\varepsilon, z_{j-1}-\varepsilon], \quad 2\le j\le l-1,\\
&K^\varepsilon = K_1,\ b^\varepsilon = b_1,\ D^\varepsilon = D_1, \quad \forall\, z\in[z_1+\varepsilon, z_0],\\
&K^\varepsilon = K_l,\ b^\varepsilon = b_l,\ D^\varepsilon = D_l, \quad \forall\, z\in[z_l, z_{l-1}-\varepsilon].
\end{aligned}
$$

为简便起见，我们假设 K^ε、 D^ε、 b^ε 沿z方向为连续分段线性函数，例如，

$$
K^\varepsilon(z) = K_{j-1} + (z - z_j + \varepsilon)\frac{K_j - K_{j-1}}{2\varepsilon}, \quad \forall\, z\in(z_j-\varepsilon, z_j+\varepsilon),
$$

for $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$。系统（2.5）补充了初始条件

$$
\phi^\varepsilon|_{t=0} = \phi_0^\varepsilon \tag{2.6}
$$

以及边界条件

$$
\boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{e}_z|_{z=0,-H} = 0, \quad \phi^\varepsilon|_{z=0} = c_0, \quad \phi^\varepsilon|_{z=-H} = c_{-H}, \tag{2.7}
$$

并且在水平方向（$x,\ y$）具有周期性。

2.3 边界条件均匀化与约化系统

为简便起见，在后续分析中，我们假设

$$
\mu = 1, \quad \rho_0\alpha g = 1, \quad b = 1.
$$

接下来，为处理 ϕ 和 ϕ^ε 的非齐次边界条件，我们在 $[-H,0]$ 上引入一个光滑函数 $\phi_b(z;\,\delta)$，使其满足

$$
\phi_b(z;\delta) = \begin{cases} c_0, & z = 0,\\ \dfrac{c_0 + c_{-H}}{2} & z\in(-H+\delta, -\delta),\\ c_{-H}, & z = -H \end{cases} \tag{2.8}
$$

and

$$
|\phi_b'| \le \frac{c_\Delta}{\delta}, \quad |\phi_b''| \le \frac{2c_\Delta}{\delta^2}, \tag{2.9}
$$

wh其中 $c_\Delta := |c_0 - c_{-H}|$ 且 $0<\delta\ll 1$ 是一个稍后确定的小参数 r.

取

$$
\psi = \phi - \phi_b \quad \text{and} \quad p = P - \rho_0 g z - \alpha\rho_0\int_{-H}^{z}\phi_b(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
$$

我们可以将尖锐界面模型（2.1）写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = -K\left(\nabla p + \psi \boldsymbol{e}_z\right), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \\ \partial_t \psi + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \psi + \phi_b' \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_z - \nabla \cdot (D \nabla \psi) = D \varphi_b'', \end{cases} \tag{2.10}$$

并辅以界面边界条件

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_z,\ p,\ \psi \quad \text{are continuous at } z = z_j,\ 1 \le j \le l-1, \tag{2.11}$$

初始条件

$$\psi|_{t=0} = \psi_0 := \phi_0 - \phi_b, \tag{2.12}$$

齐次边界条件

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_z|_{z=0,-H} = 0, \quad \psi|_{z=0} = 0, \quad \psi|_{z=-H} = 0, \tag{2.13}$$

以及水平方向上的周期性（x, y）。

注2.1。 注意到， ϕ_b' 是定义在 $[-H, 0]$ 上的光滑函数，并且在 $[-H+\delta, -\delta]$上消失。若 δ 足够小，则$D\phi_b'$ 也光滑。因此，有 $\partial_z(D\phi_b') = D\phi_b''$。

采用相同的背景函数 $\phi_b(z;\delta)$，可将弥散界面模型（2.5）均匀化为

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^\varepsilon = -K^\varepsilon\left(\nabla p^\varepsilon + \psi^\varepsilon \boldsymbol{e}_z\right), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}^\varepsilon = 0, \\ \partial_t \psi^\varepsilon + \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla \psi^\varepsilon + \phi_b' \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_z - \nabla \cdot (D^\varepsilon \nabla \psi^\varepsilon) = D^\varepsilon \varphi_b'', \end{cases} \tag{2.14}$$

并辅以初始条件

$$\psi^\varepsilon|_{t=0} = \psi_0^\varepsilon := \phi_0^\varepsilon - \phi_b, \tag{2.15}$$

齐次边界条件

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_z|_{z=0,-H} = 0, \quad \psi^\varepsilon|_{z=0} = 0, \quad \psi^\varepsilon|_{z=-H} = 0, \tag{2.16}$$

以及水平方向的周期性（x， y）。

3 适定性

3.1 预备知识

首先，我们回顾 [5] 中引入的一些函数空间框架。设 X 是一个实巴拿赫空间。我们用 $\|\cdot\|_X$ 表示其范数，用 X^* 表示其对偶空间，并用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{X^*,\ X}$ 表示对偶配对。对于 $1 \le r \le \infty$ 和 $k \in \mathbb{N}$，令 $L^r(\Omega)$ 和 $W^{k,\ r}(\Omega)$ 分别表示区域上的常用勒贝格空间和 Sobole夫空间

Ω，它们在水平方向上均具有周期性（x，y）。为简便起见，$L^2(\Omega)$ 中的内积记为 $(\cdot,\cdot)$。当 $r=2$ 时，使用记号 $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$。对于 $s\geq 0$ 和 $1\leq r\leq\infty$，我们用$W^{s,p}(\Omega)$ 表示分数阶 Sobolev–Slobodeckij 空间。当 $p=2$ 时，我们记 $H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$。定义

$$\begin{aligned}\mathbb{V}:=\{&\psi\in C(\overline{\Omega}),\ \psi|_{\Omega_j}\in C^\infty(\overline{\Omega_j})\text{ for any } j=1,2,\cdots,l,\\&\psi\text{ 在水平方向上是周期性的，并满足条件（2.11）、（2.13）}\},\end{aligned}$$

并令 $\mathcal{H}$、$\mathcal{V}$ 分别为 $\mathbb{V}$ 在 L^2 范数和 H^1 范数下的闭包。于是，我们得到 $\mathcal{H}=L^2(\Omega)$和 $\mathcal{V}=H^1_{(0)}(\Omega)$，其中 $H^1_{(0)}(\Omega)$表示 $H^1(\Omega)$的子空间，其函数在$z=0$处$-H$为零，且在水平方向上是周期性的（x、y）。利用 D的有界性和 Poincaré 不等式（见引理A.1），我们可以在 $\mathcal{V}$ 中定义等价范数 $\|\psi\|_{\mathcal{V}}=\|\sqrt{D}\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}$。相应的内积定义为 $(\cdot,\cdot)_1=(D\nabla\cdot,\nabla\cdot)$。为简便起见，我们将 $\mathcal{V}^*$ 与 $\mathcal{V}$ 之间的对偶乘积记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。接下来，我们定义高阶空间

$$\mathcal{W}=\{\psi\in\mathcal{V}:\ \partial_x\psi,\partial_y\psi\in H^1(\Omega),\ D\partial_z\psi\in H^1(\Omega)\}$$

赋予范数

$$\|\psi\|^2_{\mathcal{W}}=\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\partial_x\psi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\partial_y\psi\|^2_{H^1(\Omega)}+\|D\partial_z\psi\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

我们注意到，一般而言，$\mathcal{W}$ 与 $H^2(\Omega)$不同。如果 D 在$z=z_j$处有跳跃不连续性，则$j=1,\cdots,l-1$，可以验证 $\mathcal{W}\cap H^2(\Omega)=\{\psi:\ \psi\in H^2(\Omega)\ \partial_z\psi|_{z=z_j}=0,\ j=1,\cdots,l-1\}$，参见 [5, 备注 2.3]。关于流体速度，我们引入空间

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{V}}:=\{&\boldsymbol{u}\in C(\overline{\Omega})^3,\ \boldsymbol{u}|_{\Omega_j}\in C^\infty(\overline{\Omega_j})^3\text{ for any } j=1,2,\cdots,l,\\&\boldsymbol{u}\text{ 在水平方向上是周期性的，并满足 (2.10)}_2,(2.11),(2.13)\},\end{aligned}$$

并令 $\boldsymbol{H}$ 为 L^2-范数下 $\widetilde{\mathbb{V}}$的闭包。

接下来，我们引入尖锐界面模型 (2.10)–(2.13的弱解概念).

定义3.1。设 $T>0$。对于任意给定的初始数据 $\psi_0\in\mathcal{H}$，三元组（$\boldsymbol{u}$，p，ψ）称为问题（2.10）–（2.13）在 $[0,T]$上的弱解，若满足以下性质：

1. $\psi\in L^\infty(0,T;\mathcal{H})\cap L^2(0,T;\mathcal{V})\cap H^1(0,T;\mathcal{V}^*)$，

$$(\psi(t_2),\varphi)-(\psi(t_1),\varphi)=\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi,\varphi)+(\phi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z,\varphi)+(D\nabla\psi,\nabla\varphi)-(D\phi_b'',\varphi)\,\mathrm{d}t,$$

对于任意 t_1，$t_2\in[0,T]$和 $\varphi\in\mathcal{V}$，此外，$\psi(0)=\psi_0$属于 $\mathcal{H}$；

2. $p\in L^2(0,T;\mathcal{V})$是椭圆问题的弱解

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(K\nabla p)=\nabla\cdot(K\psi\boldsymbol{e}_z), & \text{in }\Omega,\\ \partial_z p(x,y,-H)=\partial_z p(x,y,0)=0,\end{cases}\tag{3.1}$$

且 p 在水平方向上是周期的（x，y）；

3. $\boldsymbol{u} \in L^2(0,\ T;\ \boldsymbol{H})$ 在(2.10)$_1$中几乎处处满足 $\Omega \times (0,\ T)$。

应用 Faedo–Galerkin方法和能量方法，可以得到尖锐界面模型（2.10）–（2.13）的解的存在性、唯一性和正则性结果，参见 [5, 定理3.1、定理4。2]。

命题 3.2。 对于每个 $\psi_0 \in \mathcal{H}$，问题 (2.10)–(2.13) 在 $\boldsymbol{u}$，p，ψ)上存在一个全局弱解 $[0,T]$，其意义见定义 *3.1*。此外，若 $\psi_0 \in \mathcal{V}$，则该解唯一且满足

$$\psi \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \cap L^2(0,T;\mathcal{W}) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}) \quad for\ any\ T > 0.$$

的正则性 $\boldsymbol{u}$ 可由 p 和 ψ的正则性轻易推出。对于任意 $\psi \in \mathcal{H}$，由 Lax–Milgram定理可保证椭圆问题（3.1）存在弱解。若将解 p 限制在 $\mathcal{V}$ 的零均值子空间上，则可得到唯一性。对于分片光滑函数 ψ (在每个层 Ωj上光滑)，可以证明 p 也是分片光滑的。例如，若 $\psi \in \mathcal{V}$，则 p 分片属于 H^2 (Ω)。此外，我们有以下关于（$\boldsymbol{u}$，p）的估计（见 [5, 引理 3.1]）：

引理 3.1。 若 $\psi \in L^r$（Ω） 对于 $r \in$ （1，∞）成立，则椭圆问题 （3.1） 的解 p 满足$p \in W^{1,r}$（Ω），并且

$$\|p\|_{W^{1,r}(\Omega)} \le C_p \|\psi\|_{L^r(\Omega)},$$

其中正常数 $C_p = C_p$（K_j，r）。根据 （2.10）$_1$, 我们还有

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^r(\Omega)} \le C \|\psi\|_{L^r(\Omega)}.$$

注 3.1。 当 $r = 2$时，引理 3.1 的证明是标准的。对于 $r \neq 2$的情形，参见 [9,定理 2。6]。

3.2 $\mathcal{H}^s$ 中的适定性

由于三维情形下缺乏唯一性，无法在相空间 $\mathcal{H}$ 中定义与弱解 $\psi(t)$ 对应的（强）连续半群。因此，我们将在更为正则的希尔伯特空间框架内进行研究。

定义

$$\mathcal{L}\psi = -\nabla \cdot (D\nabla\psi), \quad \forall\, \psi \in \mathcal{W}.$$

由 [5, 引理 2。1] 可知，算子 $\mathcal{L}$ 是一个自伴正算子，并具有一列特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ 其中 $\lambda_k \to \infty$当 $k \to \infty$时。特征函数集 $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{W}$构成 $\mathcal{H}$中的标准正交基，并构成 $\mathcal{V}$中的正交基。此外，范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ 等价于$\|\mathcal{L}\cdot\|_{L^2(\Omega)}$，参见引理A.2。

根据特征函数展开，分数阶算子 $\mathcal{L}^s$ $(s \geq 0)$ 和分数阶范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^s}$ 定义如下：

$$\mathcal{L}^s\psi := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s a_k w_k \quad \text{and} \quad \|\psi\|_{\mathcal{H}^s}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s |a_k|^2 = (\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi, \mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi),$$

$_{\infty}$分别地，对于任意满足 $a_k = (\psi, w_k)$ 的 $\psi = \sum a_k w_k$。于是，我们可以将希尔伯特空间$_{k=1}\mathcal{H}^s = \overline{\text{dom}(\mathcal{L}^{\frac{s}{2}})}$ 定义为 $\mathbb{V}$ 在 $\mathcal{H}^s$-范数下的闭包。由此可得

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^1 = \mathcal{V}, \quad \mathcal{H}^2 = \mathcal{W}.$$

按照惯例，我们将负指数定义为对偶空间，即 $\mathcal{H}^{-s} = (\mathcal{H}^s)^*$ 对于 $s > 0$，其范数为 $\|\psi\|_{\mathcal{H}^{-s}}^2$: $= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} |a_k|^2$。于是，对于 $\mathcal{H}^{s_1} \subset \mathcal{H}^{s_2}$，有稠密包含 s_1，$s_2 \in \mathbb{R}$，$s_1 \geq s_2$；当 $s_1 \geq s_2$ 时为连续嵌入，当 $s_1 > s_2$ 时为紧嵌入。分数阶算子 $\mathcal{L}^s$ 和分数阶空间 $\mathcal{H}^s$ 的更多性质总结于附录B。

本节的主要结果如下

定理 3.3。 假设 $\psi_0 \in \mathcal{H}^s$ 对于某个 $s \in (\frac{1}{2}, 1)$。那么，问题 (2.10)–(2.13) 存在一个全局弱解 $(\boldsymbol{u}, p, \psi)$ 于 $[0, T]$，其意义见定义 *3.1*；该解唯一，并满足以下附加正则性性质

$$\psi \in L^{\infty}(0, T; \mathcal{H}^s) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^{1+s}) \cap H^1(0, T; \mathcal{H}^{s-1}), \quad \textit{for any } T > 0.$$

设 $(\boldsymbol{u}_1, p_1, \psi_1)$ 和 $(\boldsymbol{u}_2, p_2, \psi_2)$ 是分别以初始数据 $\psi_{1,0}$ 和 $\psi_{2,0}$为初始条件的两个解。那么，对任意 $t > 0$，以下连续依赖性估计成立：

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_1(t) - \psi_2(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad \leq \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0} - \psi_{2,0})\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp\left(\int_0^t C\left(\|\psi_1(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}} + \|\psi_2(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}} + 1\right) \mathrm{d}\tau\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

由定理 3.3 和插值理论可知，$\psi \in C([0, T]; \mathcal{H}^s)$ 对任意 $T > 0$均成立。此外，我们还可以得出

推论3.4. 设 $s \in (_{1}{}_{2}, 1)$。问题 (2.10)–(2.13) 在相空间 $\{S_0(t)\}_{t \geq 0}$ 上生成一个强连续半群 $\mathcal{H}^s$，即

$$S_0(t) : \mathcal{H}^s \to \mathcal{H}^s, \quad S_0(t)\psi_0 = \psi(t), \quad \forall\, t \geq 0,$$

其中，ψ 是问题 (2.10)–(2.13)对应于初始数据$\psi_0 \in \mathcal{H}^s$的唯一弱解。

定理3.3中，我们推导一些必要的 先验 估计。

引理 3.2 (L^r-估计（针对 ψ）。 设 $(\boldsymbol{u},\ p,\ \psi)$ 是问题 (2.10)–(2.13)的一个全局弱解。对于任意给定的 $r>2$，我们假设 δ 中 (2.8) 中的常数满足

$$0<\delta\le\delta_1(r):=\left[\frac{\frac{r-1}{r^2}\min_j D_j}{c_\Delta H^{\frac{2}{r}}\sup_j K_j(1+C_p)}\right]^{\frac{r}{r-2}}. \tag{3.3}$$

此外，若 $\psi_0\in L^r(\Omega)$，则 $\psi\in L^\infty(0,\ \infty;\ L^r(\Omega))$ 满足

$$\|\psi(t)\|^r_{L^r(\Omega)}\le\|\psi_0\|^r_{L^r(\Omega)}e^{-\frac{2(r-1)\min_j D_j}{rH^2}t}+\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}\left(1-e^{-\frac{2(r-1)\min_j D_j}{rH^2}t}\right), \tag{3.4}$$

对任意 $t\ge0$，其中正常数 M_0 由下式给出

$$M_0:=\frac{(8rc_\Delta L^{\frac{2}{r}}\delta^{-\frac{1}{r}}\max_j D_j)^r}{r(\min_j D_j)^{r-1}}. \tag{3.5}$$

特别地，我们有

$$\|\psi(t)\|^r_{L^r(\Omega)}\le\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}+1, \tag{3.6}$$

对任意

$$t\ge T_0(\|\psi_0\|_{L^r(\Omega)}):=\frac{rH^2}{2(r-1)\min_j D_j}\ln\left(\|\psi_0\|^r_{L^r(\Omega)}+1\right). \tag{3.7}$$

证明。 将（2.10）$_3$ 与 $r|\psi|^{r-2}\psi$ 结合，并使用分部积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\psi|^r\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{4(r-1)}{r}\int_\Omega D|\nabla|\psi|^{\frac{r}{2}}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+r\int_\Omega(\psi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z|\psi|^{r-2}\psi-D\varphi_b''|\psi|^{r-2}\psi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0. \tag{3.8}$$

注意到 ψ_b' 是一个支集包含于该区域内的光滑函数

$$\Omega_\delta=\Omega\cap(\{-H<z<-H+\delta)\}\cup\{-\delta,0)\})$$

并满足（2.9），由 H¨older 不等式和（2.10）$_1$,可得

$$\begin{aligned}\left|r\int_\Omega\psi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z|\psi|^{r-2}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|&\le rc_\Delta\delta^{-1}\int_{\Omega_\delta}|u_z||\psi|^{r-1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\le rc_\Delta\delta^{-1}\|u_z\|_{L^r(\Omega)}\|\psi\|^{r-1}_{L^r(\Omega_\delta)}\\&\le rc_\Delta\delta^{-1}\sup_j K_j(\|\partial_z p\|_{L^r(\Omega)}+\|\psi\|_{L^r(\Omega)})\|\psi\|^{r-1}_{L^r(\Omega_\delta)}.\end{aligned}$$

由引理3.1、A.1 和 Ω_δ 的定义可得

$$\begin{aligned}\left|r\int_\Omega\psi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z|\psi|^{r-2}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|&\le rc_\Delta\delta^{-1}\sup_j K_j(1+C_p)\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\psi\|^{r-1}_{L^r(\Omega_\delta)}\\&\le rc_\Delta\delta^{-1}\sup_j K_j(1+C_p)\||\psi|^{\frac{r}{2}}\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(\Omega)}\||\psi|^{\frac{r}{2}}\|^{\frac{2(r-1)}{r}}_{L^2(\Omega_\delta)}\\&\le 2rc_\Delta H^{\frac{2}{r}}\delta^{\frac{r-2}{r}}\sup_j K_j(1+C_p)\|\nabla|\psi|^{\frac{r}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

此外，根据 H¨older 不等式、杨氏不等式和引理 A.1，有

$$\begin{aligned}\left|r\int_\Omega D\varphi_b''|\psi|^{r-2}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| &\le 2rc_\Delta\delta^{-2}\max_j D_j\int_{\Omega_\delta}|\psi|^{r-1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\le 2rc_\Delta\delta^{-2}\max_j D_j|\Omega_\delta|^{\frac{1}{r}}\|\psi\|_{L^r(\Omega_\delta)}^{r-1}\\ &\le 8rc_\Delta L^{\frac{2}{r}}\delta^{-\frac{1}{r}}\max_j D_j\|\nabla(|\psi|^{\frac{r}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)}^{\frac{2(r-1)}{r}}\\ &\le \frac{r-1}{r}\min_j D_j\|\nabla(|\psi|^{\frac{r}{2}})\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{(8rc_\Delta L^{\frac{2}{r}}\delta^{-\frac{1}{r}}\max_j D_j)^r}{r(\min_j D_j)^{r-1}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

取 δ 如式（3.3）所示，并将式（3.9）–（3.10）代入式（3.8），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r+\frac{2(r-1)}{r}\|\sqrt{D}\nabla(|\psi|^{\frac{r}{2}})\|_{L^2(\Omega)}^2\le\frac{(8rc_\Delta L^{\frac{2}{r}}\delta^{-\frac{1}{r}}\max_j D_j)^r}{r(\min_j D_j)^{r-1}}=:M_0.\tag{3.11}$$

于是，由引理 A.1和式（3.11）可推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r+\frac{2(r-1)\min_j D_j}{rH^2}\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^r\le M_0,\quad\forall\,t>0.\tag{3.12}$$

对式（3.12）应用格朗沃尔引理，得到估计式（3.4）。估计式（3.6）可直接由式（3.4）推出。证明完毕。 □

引理 *3.3*（ψ的$\mathcal{H}^s$估计）。设 $s\in(\frac{1}{2},1)$。假设 $\psi_0\in\mathcal{H}^s$和 δ满足带有$r=\frac{6}{3-2s}>2$的式（*3.3*）。那么，对于任意 $T>0$，$\psi\in L^\infty(0,T;\,\mathcal{H}^s)\cap L^2(0,T;\,\mathcal{H}^{1+s})\cap H^1(0,T;\,\mathcal{H}^{s-1})$，且满足

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2&\le\|\psi_0\|_{\mathcal{H}^s}^2\exp\left[C\left(\|\psi\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^r}^{\frac{4}{2s-1}}+1\right)t\right]\\&\quad+C\int_0^t\exp\left[C\left(\|\psi\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^r}^{\frac{4}{2s-1}}+1\right)(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau,\quad\forall\,t>0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中$\|\psi\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^r}$ 由 （3.4）控制，使得

$$\|\psi\|_{L_t^\infty L_{\boldsymbol{x}}^r}^r\le\|\psi_0\|_{L^r(\Omega)}^r+\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}.\tag{3.14}$$

证明。 由于空间 $\mathcal{H}^s$ 连续嵌入到 $L^r(\Omega)$，且 $r=\frac{6}{3-2s}$，我们有 $\psi_0\in L^r(\Omega)$。然后由引理 3.2，可知 $\psi\in L^\infty(0,\infty;L^r(\Omega))$ 满足一致时间估计 (3.14。接下来，用 2.10)$_3$ 乘以 $\mathcal{L}^s\psi$，经分部积分后，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi,\mathcal{L}^s\psi)-(\phi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z,\mathcal{L}^s\psi)+(D\varphi_b'',\mathcal{L}^s\psi).\tag{3.15}$$

利用 H¨older 不等式、引理3.1和（2.10）$_1$,可得

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi,\mathcal{L}^s\psi)|&\le\|\boldsymbol{u}\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^{\frac{6}{1+2s}}(\Omega)}\\&\le C(\|\nabla p\|_{L^r(\Omega)}+\|\psi\|_{L^r(\Omega)})\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^{\frac{6}{1+2s}}(\Omega)}\\&\le C\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^{\frac{6}{1+2s}}(\Omega)}.\end{aligned}$$

根据 Sobolev嵌入定理和引理B.1–B.4，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega)} &\le C\sum_{j=1}^{l}\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega_j)} \le C\sum_{j=1}^{l}\|\psi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega_j)} \le C\|\psi\|_{\mathcal{H}^{\frac{3}{2}}}\\ &= C\|\mathcal{L}^{\frac{3}{4}}\psi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{s-\frac{1}{2}}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}-s}\end{aligned}$$

and

$$\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^{\frac{6}{1+2s}}(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^s\psi\|_{H^{1-s}(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi,\mathcal{L}^s\psi)| &\le C\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{s-\frac{1}{2}}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{2}-s}\\ &\le \frac{1}{6}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

此外，利用 $(2.10)_1$ 以及引理 B.1，可得

$$\begin{aligned}|(\phi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z,\mathcal{L}^s\psi)| &\le C\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{6}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned} \tag{3.17}$$

and

$$|(D\varphi_b'',\mathcal{L}^s\psi)| \le \|D\varphi_b''\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}^s\psi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{6}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \tag{3.18}$$

将 (3.16)–(3.18) 代入 (3.15)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\left(\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}+1\right)\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \tag{3.19}$$

由 (3.19)、格朗沃尔引理和 (3.14)，可推得 $\psi\in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^s)\cap L^2(0,T;\mathcal{H}^{1+s})$，对任意$T>0$ 成立，且满足估计式 (3.13)。最后，通过比较 $(2.10)_3$, 可得

$$\begin{aligned}\|\partial_t\psi\|_{\mathcal{H}^{s-1}} &\le \|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\|_{\mathcal{H}^{s-1}} + \|\phi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z\|_{\mathcal{H}^{s-1}} + \|\mathcal{L}\psi\|_{\mathcal{H}^{s-1}} + \|D\varphi_b''\|_{\mathcal{H}^{s-1}}\\ &\le C\left(\|\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\|_{L^{\frac{6}{5-2s}}(\Omega)} + \|\phi_b'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z\|_{L^{\frac{6}{5-2s}}(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}} + \|D\varphi_b''\|_{L^{\frac{6}{5-2s}}(\Omega)}\right)\\ &\le C\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^3(\Omega)} + C\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}} + C\\ &\le C\|\psi\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{1}{2}+s}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}}^{\frac{3}{2}-s} + C\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}} + C,\end{aligned}$$

这意味着 $\partial_t\psi\in L^2(0,\ T;\ \mathcal{H}^{s-1})$。证明完毕。 □

现在我们可以证明定理3.3。

定理3.3的证明。 利用 [5], 中所述的先验估计（见引理3.2、3.3），结合紧性论证，可以建立具有所需正则性的全局解的存在性。因此，我们省略细节。

接下来，我们证明解对初始数据的连续依赖性。设 $(\boldsymbol{u}_1,\ p_1,\ \psi_1)$ 和 $(\boldsymbol{u}_2,\ p_2,\ \psi_2)$ 是分别对应于初始数据 $\psi_{1,\ 0}$ 和 $\psi_{2,\ 0}$ 的两个解。则它们的差 $(\boldsymbol{u},\ \psi,\ p) := (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2,\ \psi_1 - \psi_2,\ p_1 - p_2)$ 满足

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}} = -K(\nabla \overline{p} + \overline{\psi}\boldsymbol{e}_z), \\ \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}} = 0, \\ \partial_t \overline{\psi} + \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \overline{\psi} + \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \psi_2 + \phi_b' \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{e}_z - \operatorname{div}(D \nabla \overline{\psi}) = 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

and

$$\overline{\psi}|_{t=0} = \overline{\psi}_0 := \psi_{1,0} - \psi_{2,0}. \tag{3.21}$$

对（3.20）$_3$ 进行测试，$\mathcal{L}^s\psi$ 并利用分部积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 = -(\boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \overline{\psi}, \mathcal{L}^s\overline{\psi}) - (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \psi_2, \mathcal{L}^s\overline{\psi}) - (\phi_b' \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{e}_z, \mathcal{L}^s\overline{\psi}). \tag{3.22}$$

类似于（3.16）–（3.17，可推导出以下不等式

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\mathcal{L}^{\frac{1+s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad \le C\|\psi_1\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\overline{\psi}\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

其中 $r = \frac{6}{3-2s}$。利用 Sobolev嵌入定理，得到

$$\|\psi_1\|_{L^r(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_1\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\overline{\psi}\|_{L^r(\Omega)} \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}.$$

于是可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}^s\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{6-4s}{2s-1}} \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\qquad + C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{2s-1}} + 1) \\ &\quad \le C\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\|\psi_1\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}} + \|\psi_2\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}} + 1\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

将格朗沃尔引理应用于 (3.23)，可得连续依赖性估计 (3.2)。再结合 $\psi_i \in L^\infty(0,T;\ \mathcal{H}^s)$ 对任意 $T > 0$ 和 $i = 1, 2$ 成立这一事实，可知 $\psi(t)$ 在 $\mathcal{H}^s$ 中连续依赖于其初始数据。特别地，若 $\psi_{1,\ 0} = \psi_{2,0}$，则对所有 $t \ge 0$，均有 $\psi_1(t) = \psi_2(t)$。因此，解是唯一的。

□

关于具有连续系数 K^ε, D^ε 的弥散界面模型 (2.14)–(2.16)，我们类似地引入高阶空间

$$\mathcal{W}^\varepsilon = \{\psi \in \mathcal{V} :\ \partial_x\psi,\, \partial_y\psi \in H^1(\Omega),\ D^\varepsilon\partial_z\psi \in H^1(\Omega)\}$$

赋予如下范数

$$\|\psi\|^2_{\mathcal{W}^\varepsilon} = \|\psi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\partial_x\psi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\partial_y\psi\|^2_{H^1(\Omega)} + \|D^\varepsilon\partial_z\psi\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

根据 D^ε, $\|(D^\varepsilon)'\|_{L^\infty(\Omega)}$ 的构造，对于任意固定的 $0 < \varepsilon \ll 1$，它都是有界的。利用这一事实，我们可以验证 $\mathcal{W}^\varepsilon = \mathcal{V} \cap H^2(\Omega)$。接下来，我们定义自伴正算子

$$\mathcal{L}^\varepsilon\psi := -\operatorname{div}(D^\varepsilon\nabla\psi), \quad \forall\,\psi \in \mathcal{W}^\varepsilon,$$

它具有与以下对象相似的性质： $\mathcal{L}$ （见附录 B）。此外，分数阶空间$\mathcal{H}^s_\varepsilon = \operatorname{dom}((\mathcal{L}^\varepsilon)^{\frac{s}{2}}$定义为 $\mathbb{V}$ 在 $\mathcal{H}^s_\varepsilon$-范数（$s \in \mathbb{R}$）下的闭包。于是有

$$\mathcal{H}^0_\varepsilon = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^1_\varepsilon = \mathcal{V}, \quad \mathcal{H}^2_\varepsilon = \mathcal{W}^\varepsilon.$$

与引理 B.3 类似，分数阶 $\mathcal{H}^s_\varepsilon$-范数（$0 < s < 1$）可解释为 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{V}$之间的插值范数，并且等价于分数阶索伯列夫范数$\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$。对于任意$0 < \varepsilon \ll 1$，我们可以将 $\mathcal{H}^s_\varepsilon = \mathcal{H}^s$ 识别为 $0 < s < 1$。

对于弥散界面模型（2.14）–（2.16），利用尖锐界面模型的类似论证，可以得到相应的结果。特别地，我们有以下 先验 L^r估计：

引理 *3.4.* 设 $(\boldsymbol{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ 是问题 *(2.14)–(2.16)* 的全局弱解。对于任意给定的 $r > 2$，假设 *(2.8)* 中的常数 δ 满足 *(3.3)*。若 $\psi_0^\varepsilon \in L^r(\Omega)$，则 $\psi \in L^\infty(0,\infty; L^r(\Omega))$ 满足

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|^r_{L^r(\Omega)} \le \|\psi_0^\varepsilon\|^r_{L^r(\Omega)} e^{-\frac{2(r-1)\min_j D_j}{rH^2}t} + \frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}\left(1 - e^{-\frac{2(r-1)\min_j D_j}{rH^2}t}\right), \tag{3.24}$$

对于任意 $t \ge 0$，其中常数 M_0 由 (3.5) 给出，且与 ε 无关。特别地，我们有

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|^r_{L^r(\Omega)} \le \frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j} + 1 \tag{3.25}$$

对于任意

$$t \ge T_0(\|\psi_0^\varepsilon\|_{L^r(\Omega)}) = \frac{rH^2}{2(r-1)\min_j D_j}\ln(\|\psi_0^\varepsilon\|^r_{L^r(\Omega)} + 1).$$

借助引理 3.4，我们可以证明弥散界面模型（2.14）–（2.16）在 $\mathcal{H}^s$ 中的适定性，且 $s \in (\frac{1}{2}, 1)$。

定理 *3.5.* 假设 $0 < \varepsilon \ll 1$。对于任意初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$，问题 *(2.14)–(2.16)* 存在一个全局弱解 $(\boldsymbol{u}, p, \psi)$，使得 $\psi^\varepsilon \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\, \mathcal{V}) \cap H^1(0,T;\, \mathcal{V}^*), p^\varepsilon \in L^2(0,T;\, \mathcal{V})$ 且 $\boldsymbol{u}^\varepsilon \in L^2(0,T;\, \boldsymbol{H})$，对任意 $T > 0$ 均成立。此外，若对某个 $s \in (\frac{1}{2}, 1)$，$\psi_0^\varepsilon \in \mathcal{H}^s$，则该解唯一，并满足

$$\psi^\varepsilon \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^s) \cap L^2(0,T;\mathcal{H}^{1+s}_\varepsilon) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}^{s-1}_\varepsilon), \qquad \textit{for any } T > 0,$$

这也意味着 $\psi^\varepsilon \in C([0,T];\mathcal{H}^s)$。设 $(\boldsymbol{u}_1^\varepsilon,\psi_1^\varepsilon,p_1^\varepsilon)$ 和 $(\boldsymbol{u}_2^\varepsilon,\psi_2^\varepsilon,p_2^\varepsilon)$ 是分别对应于初始数据 $\psi_{1,0}^\varepsilon$ 和 $\psi_{2,0}^\varepsilon$的两个解。则对任意 $t>0$，以下连续依赖性估计成立：

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{L}^\varepsilon)^{\frac{s}{2}}(\psi_1^\varepsilon(t)-\psi_2^\varepsilon(t))\|_{L^2(\Omega)}^2\\&\quad\le\|(\mathcal{L}^\varepsilon)^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}^\varepsilon-\psi_{2,0}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2\exp\left(\int_0^t C\Big(\|\psi_1^\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}}+\|\psi_2^\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}}+1\Big)\,\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}\tag{3.26}$$

根据定理 3.5，我们有

推论 3.6。设 $s\in(\frac12,1)$ 且 $0<\varepsilon\ll1$。问题 (2.14)–(2.16) 生成一个强连续半群 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\ge0}$，作用于相空间 $\mathcal{H}^s$，即

$$S_\varepsilon(t):\mathcal{H}^s\to\mathcal{H}^s,\quad S_\varepsilon(t)\psi_0^\varepsilon=\psi^\varepsilon(t),\quad\forall\,t\ge0,$$

其中 ψ^ε 是问题 (2.14)–(2.16) 对应于初始数据$\psi_0^\varepsilon\in\mathcal{H}^s$的唯一弱解。

4 全局吸引子的存在性

本节在无穷维动力系统的框架下，研究尖锐界面模型（2.10）–(2.13)和弥散界面模型（2.14）–(2.16)的全局弱解的长时间行为。更准确地说，我们证明这两个模型在相空间 $\mathcal{H}^s$中存在全局吸引子，其中 $s\in(\frac12,1)$。

下面的引理（见 [29]）在推导时间一致估计时起着关键作用。

引理 4.1 (一致 Gronwall 引理)。设 g、h、y 是定义在(t_0,∞)上的三个正常数局部可积函数，且 y' 在 (t_0,∞) 上局部可积，并满足

$$y'\le gy+h,\quad\forall\,t>t_0,$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\,\mathrm{d}s\le a_1,\quad\int_t^{t+r}h(s)\,\mathrm{d}s\le a_2,\quad\int_t^{t+r}y(s)\,\mathrm{d}s\le a_3,\quad\forall\,t>t_0.$$

其中 r、a_1、a_2、a_3 均为正常数。则

$$y(t+r)\le\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)e^{a_1},\quad\forall\,t\ge t_0.$$

4.1 锐界面模型

我们首先研究尖锐界面模型（2.10）–（2.13）。

定理 4.1. 设 $s\in(1\!2,1)$。半群 $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$与尖锐界面模型(2.10)–(2.13) 相关联，拥有全局吸引子 $\mathscr{A}_0\subset\mathcal{H}^s$，其在 $\mathcal{V}$ 中有界，并在 $\mathcal{H}^s$ 中紧且连通。

下面的引理给出了 $\mathcal{H}$ 中吸收集的存在性。

引理 4.2 (耗散 L^2-估计)。 设 $\psi_0\in\mathcal{H}$ 和常数 δ 在 (2.8) 满足

$$0<\delta\leq\delta_2:=\frac{\min_j K_j\min_j D_j}{32(\max_j K_j)^2c_\Delta}. \tag{4.1}$$

则问题 ψ 的解 (2.10)–(2.13)满足

$$\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t}+\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}\left(1-e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t}\right),\quad\forall\, t\geq 0, \tag{4.2}$$

其中

$$M_1=\frac{8c_\Delta^2L^2}{\delta}\frac{(\max_j D_j)^2}{\min_j D_j}. \tag{4.3}$$

此外，对于任意

$$t\geq T_1:=T_1(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)})=\frac{H^2}{\min_j D_j}\ln(\|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)}+1),$$

成立

$$\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1,\quad\int_t^{t+1}\|\sqrt{D}\nabla\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\leq\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1+M_1. \tag{4.4}$$

证明。 对（2.10）$_3$ 进行 ψ 测试并利用分部积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\sqrt{D}\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)}=-\int_\Omega\phi_b'u_z\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega D\varphi_b''\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由（2.8）和（2.9），可得

$$\left|\int_\Omega\phi_b'u_z\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|=\left|\int_{\Omega_\delta}\phi_b'u_z\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leq c_\Delta\delta^{-1}\|u_z\|_{L^2(\Omega_\delta)}\|\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)}, \tag{4.5}$$

其中 $\Omega_\delta:=\Omega\cap(\{-H<z<-H+\delta\}\cup\{-\delta<z<0\})$。注意到 u_z和 ψ在边界 $\{z=0\}\cup\{z=-H\}$上均为零，由引理 A.1 可知

$$\|u_z\|_{L^2(\Omega_\delta)}\leq 2\delta\|\partial_z u_z\|_{L^2(\Omega_\delta)},\quad\|\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)}\leq 2\delta\|\partial_z\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)}. \tag{4.6}$$

因此，有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\phi_b'u_z\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|&\leq 4c_\Delta\delta\|\partial_z u_z\|_{L^2(\Omega_\delta)}\|\partial_z\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)}\\&\leq 4c_\Delta\delta(\|\partial_x u_x\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_y u_y\|_{L^2(\Omega)})\|\partial_z\psi\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

这里，我们使用不可压缩条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$。根据（2.10）$_1$, 可得

$$\|\partial_x \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_j K_j (\|\partial_x \nabla p\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}), \tag{4.8}$$

其中压力 p由椭圆问题 (3.1确定。由于渗透率系数K 与 x无关，我们可以对 (3.1) 关于 x求导，得到

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K \nabla \partial_x p) = \operatorname{div}(K \partial_x \psi \boldsymbol{e}_z), & \text{in } \Omega, \\ \partial_z \partial_x p(x, -H) = \partial_z \partial_x p(x, 0) = 0, \end{cases}$$

且 $\partial_x p$是周期的 在水平方向上（x, y）周期。由标准椭圆估计可得

$$\|\partial_x \nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\max_j K_j}{\min_j K_j} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

结合 (4.8)，可得

$$\|\partial_x \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(\max_j K_j)^2}{\min_j K_j} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

类似地，我们有

$$\|\partial_y \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(\max_j K_j)^2}{\min_j K_j} \|\partial_y \psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

因此，

$$\left| \int_\Omega \phi_b' u_z \psi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leq \frac{8(\max_j K_j)^2 c_\Delta \delta}{\min_j K_j} \|\nabla \psi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.9}$$

On 另一方面，利用 H¨older 不等式、杨氏不等式和（4.6），我们得到 d

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega D \varphi_b'' \psi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| &\leq 2 c_\Delta \delta^{-2} \max_j D_j |\Omega_\delta|^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)} \\ &\leq 4 c_\Delta L \delta^{-\frac{1}{2}} \max_j D_j \|\partial_z \psi\|_{L^2(\Omega_\delta)} \\ &\leq \frac{1}{4} \min_j D_j \|\nabla \psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{16 c_\Delta^2 L^2}{\delta} \frac{(\max_j D_j)^2}{\min_j D_j}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

将（4.9）、（4.10）代入（4.7），并选取 δ 使其满足（4.1），可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{D} \nabla \psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{32 c_\Delta^2 L^2}{\delta} \frac{(\max_j D_j)^2}{\min_j D_j} =: M_1. \tag{4.11}$$

由引理A.1，我们还可由（4.11）推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\min_j D_j}{H^2} \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_1.$$

应用经典 Gronwall 引理，可得估计式（4.2）。特别地，由（4.2）可得

$$\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j} + 1, \quad \forall\, t \geq T_1 = \frac{H^2}{\min_j D_j} \ln(\|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 1). \tag{4.12}$$

此外，对于 $t \geq T_1$，我们对 $[t, t+1]$ 上的能量不等式（4.11）积分，得到

$$\|\psi(t+1)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_t^{t+1} \|\sqrt{D} \nabla \psi(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, \mathrm{d}s \leq \|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + M_1 \leq \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j} + 1 + M_1. \tag{4.13}$$

结合（4.12）与（4.13），我们得出结论（4.4）。 □

下一个引理给出了 ψ 在 $\mathcal{V}$ 中对大时间的一致估计，这意味着轨道$\psi(t)$在 $\mathcal{H}^s$ 中关于 $s\in(\frac{1}{2},1)$是一致紧的。

引理 4.3. 令 $s\in(\frac{1}{2},1)$且 $\psi_0\in\mathcal{H}^s$。取 $r=\frac{6}{3-2s}$和

$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},\tag{4.14}$$

其中 δ_1 和 δ_2 分别由 *(3.3)* 和 *(4.1)* 给出。对于任意 $\tau\in(0,1)$，问题 *(2.10)–(2.13)* 的解 ψ 满足 $\psi\in L^\infty(\tau,\infty;\mathcal{V})$。此外，对于任意 $t\geq\max\{T_0,T_1\}+1$，其中 T_0、T_1 分别由引理 *3.2*、引理 *4.2* 给出，有

$$\begin{aligned}\|\sqrt{D}\nabla\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2&\leq\left(M_2+\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1+M_1\right)\exp\left[M_3+M_4\left(\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}+1\right)^{\frac{2}{r-3}}\right]\\&=:M_5.\end{aligned}\tag{4.15}$$

with

$$M_2=32c_\Delta^2L^2\delta^{-3}(\max_j D_j)^2,\quad M_3=\frac{32(\max_j K_j)^4c_\Delta^2}{(\min_j K_j)^2\min_j D_j},\tag{4.16}$$

and

$$M_4=\frac{2C_s\left[(1+C_p)C_2C_u^{\frac{3}{r}}\max_j K_j\right]^{\frac{2r}{r-3}}}{\min_j D_j}.\tag{4.17}$$

证明. 根据定理 3.3，对于任意 $T\geq1$，有 $\psi\in L^2(0,T;\mathcal{H}^{1+s})\subset L^2(0,T;\mathcal{V})$。于是，对于任意 $\tau\in(0,1)$，存在某个 $\tau'\in(0,\tau)$，使得 $\psi(\tau')\in\mathcal{V}$。由唯一性，$\psi$可视为定义在 $[\tau',T]$上的解，其初始数据为 $\psi|_{t=\tau'}=\psi(\tau')$。由命题 3.2，得到 $\psi\in L^\infty(\tau',T;\mathcal{V})$。

接下来，我们证明 $\psi\in L^\infty(\tau',\infty;\mathcal{V})$。将$2.10_3$乘以 $\mathcal{L}\psi$并在 Ω 上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{D}\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega\phi_b'u_z\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega D\varphi_b''\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\tag{4.18}$$

利用 H¨older 不等式、杨氏不等式以及（4.6），可得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D\varphi_b''\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|&\leq2c_\Delta\delta^{-2}\max_j D_j|\Omega_\delta|^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega_\delta)}\\&\leq\frac{1}{4}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2+16c_\Delta^2L^2\delta^{-3}(\max_j D_j)^2.\end{aligned}\tag{4.19}$$

与（4.5）–（4.9）类似，我们可以推导出

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\phi_b'u_z\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|&\leq c_\Delta\delta^{-1}\|u_z\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq2c_\Delta(\|\partial_xu_x\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_yu_y\|_{L^2(\Omega)})\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq\frac{4(\max_j K_j)^2c_\Delta}{\min_j K_j}(\|\partial_x\psi\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_y\psi\|_{L^2(\Omega)})\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{16(\max_j K_j)^4 c_\Delta^2}{(\min_j K_j)^2}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{4.20}$$

此外，利用 H¨older 不等式、杨氏不等式、（2.10）$_1$ 以及引理 A.2、A.4，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi\mathcal{L}\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1+C_p)\max_j K_j\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1+C_p)C_2C_u^{\frac{3}{r}}\max_j K_j\|\psi\|_{L^r(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{r}}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{1+\frac{3}{r}} \\
&\leq \frac{1}{4}\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_s\big[(1+C_p)C_2C_u^{\frac{3}{r}}\max_j K_j\big]^{\frac{2r}{r-3}}\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{2r}{r-3}}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中 $r=\frac{6}{3-2s}$ 且 $C_s>0$ 是仅依赖于 s 的一致常数。将估计式（4.19）–（4.21）代入（4.18），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{D}\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M_2 + \left(M_3 + M_4\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{2r}{r-3}}\right)\|\sqrt{D}\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{4.22}$$

对任意 $t>0$，其中常数 M_2、M_3、M_4 由（4.16）和（4.17）给出。令

$$y(t) := \|\sqrt{D}\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad g(t) := M_3 + M_4\|\psi\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{2r}{r-3}}, \quad h(t) := M_2.$$

此外，若 $t\geq\max\{T_0,T_1\}$，由引理 3.2 和引理 4.2 可得 hat

$$\int_t^{t+1} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq \frac{M_1H^2}{\min_j D_j} + 1 + M_1$$

and

$$\int_t^{t+1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq M_3 + M_4\sup_{\xi\in[t,t+1]}\|\psi(\xi)\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{2r}{r-3}} \leq M_3 + M_4\left(\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}+1\right)^{\frac{2}{r-3}}.$$

然后应用引理 4.1 得到

$$y(t+1) \leq \left(M_2 + \frac{M_1H^2}{\min_j D_j} + 1 + M_1\right)\exp\left[M_3 + M_4\left(\frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j}+1\right)^{\frac{2}{r-3}}\right],$$

对所有 $t\geq\max\{T_0,T_1\}$ 均成立。证明完毕。 □

定理 *4.1* 的证明。设 $B(0,\ R)\subset\mathcal{H}^s$ 是以 0 为中心、半径为 $R>0$ 的闭球。假设初始数据 $\psi_0\in B(0,\ R)$。根据 Sobolev嵌入定理，我们得到

$$\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_0\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|\psi_0\|_{\mathcal{H}^s} < CR =: R', \quad \text{where } r=\frac{6}{3-2s}.$$

定义集合

$$B_1 := \left\{\psi\in\mathcal{V}:\ \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1,\quad \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{M_5}{\min_j D_j}\right\}, \tag{4.23}$$

其中， M_1 由 (4.3) 给出， M_5 由 (4.15) 确定。根据引理 4.2 和 4.3，对任意 $t \geq \max\{T_0(R')\ T_1(R')\} + 1$，解 $\psi(t) = S_0(t)\psi_0$ 都属于集合 B_1。由于 B_1 在 $\mathcal{V}$ 中有界，且在 $\mathcal{H}^s$中相对紧，因此它是相空间 $\mathcal{H}^s$中半群$\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ 的一个紧吸收集。应用抽象结果 [29, 定理 1.1], ，可得 $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ 存在全局吸引子 $\mathscr{A}_0$ ，其表达式为

$$\mathscr{A}_0 = \bigcap_{\xi\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq \xi} S_0(t)B_1}.$$

证明完毕。 □

4.2 弥散界面模型

我们接下来研究弥散界面模型（2.14）–（2.16）。下面两个引理给出了与引理 4.2 和 4.3中的估计类似的估计。关键在于，这些估计与参数 ε无关。

引理 4.4。 设 $\psi_0^\varepsilon \in \mathcal{H}$ 且 δ 中的常数 (2.8) 满足 (4.1)。则问题 ψ 的解(2.14)–(2.16) 满足

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t} + \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j}\left(1 - e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t}\right), \quad \forall\, t \geq 0, \tag{4.24}$$

其中 M_1 由(4.3)给出。此外，若

$$t \geq T_1(\|\psi_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}) := \frac{H^2}{\min_j D_j}\ln(\|\psi_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + 1),$$

则有

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j} + 1, \quad \int_t^{t+1} \|\sqrt{D^\varepsilon}\nabla\psi^\varepsilon(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau \leq \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j} + 1 + M_1. \tag{4.25}$$

引理 *4.5.* 设 $s \in$*(1 2, 1)* 且 $\psi_0^\varepsilon \in \mathcal{H}^s$。取 $r = \frac{6}{3-2s}$，并令 *(2.8)* 中的常数 δ 满足 *(4.14)*。对于任意 $\tau \in$*(0, 1)*，问题 *(2.14)–(2.16)* 的解 ψ^ε 满足 $\psi^\varepsilon \in L^\infty$*(*$\tau, \infty$*;* $\mathcal{V}$*)*。此外，对于任意 $t \geq$ *max*$\{T_0, T_1\} + 1$，其中 T_0, T_1 分别由引理 *3.4*、引理 *4.4* 给出，有

$$\|\sqrt{D^\varepsilon}\nabla\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_5, \tag{4.26}$$

其中 M_5 定义同 (4.15)。

注 4.1. 引理 4.4、4.5 的证明与引理 4.2、4.3的证明采用相同的论证，利用了 K^ε、D^ε 与 K、D 具有相同的上下界这一事实。特别是，在推导高阶估计 (4.26) 时，应使用引理 A.3 ，而不是引理 A.2。细节从略。

与定理 4.1 类似，对每一个 $0 < \varepsilon \ll 1$，我们可以应用引理 4.4、4.5 来证明半群 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\geq 0}$ 的全局吸引子的存在性，该半群与弥散界面模型 (2.14)–(2.16) 相关联。

定理 4.2。 设 $s \in (1/2, 1)$。对任意 $0 < \varepsilon \ll 1$，半群 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\geq 0}$与弥散界面模型 (2.14)–(2.16) 相关联，具有全局吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon \subset \mathcal{H}^s$，它在 $\mathcal{V}$ 中有界，且在 $\mathcal{H}^s$ 中紧且连通。特别地，我们有

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcap_{\xi\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq \xi} S_\varepsilon(t) B_1},$$

其中集合 B_1 由 (4.23)给出。

5 长时间渐近行为

本节研究弥散界面模型（2.14）–（2.16）的全局吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 的渐近行为，以及其平稳统计性质，其中过渡层的宽度为$\varepsilon \to 0$。

5.1 吸引子的上半连续性

首先，我们研究全局吸引子族 $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\geq 0}$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时的稳定性。

定理5.1。 设 $s \in (1/2, 1)$。定理 $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\geq 0}$*4.1*、*4.2*中构造的全局吸引子族在 $\varepsilon = 0$ 处上半连续，即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) = 0,$$

其中$\operatorname{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0)$ 是 $\mathscr{A}_\varepsilon$与 $\mathscr{A}_0$ 之间由下式定义的*Hausdorff* 半距离

$$\operatorname{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) := \sup_{f\in\mathscr{A}_\varepsilon} \inf_{g\in\mathscr{A}_0} \|f - g\|_{\mathcal{H}^s}.$$

由于我们关注的是 $\varepsilon \to 0$时的极限，故可取充分小的 $\varepsilon_0 > 0$ ，并在后续分析中着重考虑情形 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ 。

引理 5.1. 设 $s \in (1/2, 1)$。对于 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$，我们有

$$\cup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \mathscr{A}_\varepsilon \subset B_1,$$

其中集合 B_1 由(4.23)给出。设初始数据 $\psi_0^\varepsilon \in B_1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$。则解 ψ^ε 关于尖锐界面模型(2.10)–(2.13) （当 $\varepsilon = 0$）或弥散界面模型(2.14)–(2.16) （当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$)满足

$$\|\psi^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M_1 H^2}{\min_j D_j} + 1, \quad \|\nabla\psi^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_6, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{5.1}$$

where 常数 $M_6 \geq 1$ 依赖于 $D_j, K_j, M_0, M_1, M_5, s, \Omega$。此外，成立

$$\int_0^t \|\mathcal{L}^\varepsilon\psi^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\, \mathrm{d}s \leq M_7(t), \quad \forall\, t \geq 0, \tag{5.2}$$

满足 $M_7(t) > 0$ 由 (5.6)确定。

证明。回顾一下，$B_1 \subset \mathcal{V}$（见（4.23））是 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\geq 0}$ 的紧吸收集，$\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$。根据全局吸引子的定义，我们有 $\mathscr{A}_\varepsilon \subset B_1$ 对每个 $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ 都成立，因此全局吸引子族 $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中一致有界。

关于估计式（5.1），我们只讨论 $\varepsilon = 0$ 的情形；对于 $\varepsilon > 0$ 的情形，用类似的方法并采用相同的界即可处理。首先，由（4.2）可得

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1\right)e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t} + \frac{M_1H^2}{\min_j D_j}\left(1-e^{-\frac{\min_j D_j}{H^2}t}\right)\\ &\leq \frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1, \quad \forall\, t\geq 0.\end{aligned}$$

对（4.11）积分可得

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\sqrt{D}\nabla\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau &\leq \|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + M_1 t\\ &\leq \frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1+M_1t, \quad \forall\, t\geq 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

利用插值，对于 $r = \frac{6}{3-2s}$，我们也有

$$\|\psi_0\|_{L^r(\Omega)} \leq C_s\|\psi_0\|^{1-s}_{L^2(\Omega)}\|\sqrt{D}\nabla\psi_0\|^s_{L^2(\Omega)} \leq C_s\left(\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1\right)^{\frac{1-s}{2}} M_5^{\frac{s}{2}}.$$

结合引理3.2，可得

$$\|\psi(t)\|^r_{L^r(\Omega)} \leq C_s\left(\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1\right)^{\frac{3(1-s)}{3-2s}} M_5^{\frac{3s}{3-2s}} + \frac{rM_0H^2}{2(r-1)\min_j D_j} =: \widetilde{M}, \quad \forall\, t\geq 0. \tag{5.4}$$

借助（5.4）、有限区间 $[0,\max\{T_0,T_1\}+1]$ 上的经典 Gronwall 引理以及 $[\max\{T_0,T_1\}+1$ 上的一致 *Gronwall* 引理，$\infty)$，由（4.22）可推出

$$\|\sqrt{D}\nabla\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M_5', \quad \forall\, t\geq 0, \tag{5.5}$$

其中某个 M_5' 仅依赖于 D_j，K_j，M_0，M_1，M_5，s。然后我们令

$$M_6 = \frac{M_5'}{\min_j D_j},$$

由此得到估计式（5.1）。此外，对（4.22）关于时间积分，由（5.3）、（5.4）可推得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^t \|\mathcal{L}\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leq \|\sqrt{D}\nabla\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t M_2 + \left(M_3+M_4\|\psi(\tau)\|^{\frac{2r}{r-3}}_{L^r(\Omega)}\right)\|\sqrt{D}\nabla\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leq M_5 + M_2t + \left(M_3+M_4\widetilde{M}^{\frac{2}{r-3}}\right)\left(\frac{M_1H^2}{\min_j D_j}+1+M_1t\right)\\ &=: \frac{1}{2}M_7(t).\end{aligned} \tag{5.6}$$

证明完成。 □

引理 5.1 表明 $\cup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}\mathscr{A}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}^s$中相对紧。接下来，我们证明解关于参数 ε的连续依赖性。设 $(\boldsymbol{u}, p, \psi)$ 和 $(\boldsymbol{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ 分别是尖锐界面模型 (2.10)–(2.13) 和弥散界面模型 (2.14)–(2.16) 的解。记解之差

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^\varepsilon, \quad \widetilde{p} = p - p^\varepsilon, \quad \widetilde{\psi} = \psi - \psi^\varepsilon,$$

以及系数

$$\widetilde{K} := K - K^\varepsilon, \quad \widetilde{D} := D - D^\varepsilon.$$

~那么（$\widetilde{\boldsymbol{u}}$， $\widetilde{p}$， ψ）满足以下系统

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{u}} = -K^\varepsilon\big(\nabla\widetilde{p} + \widetilde{\psi}\boldsymbol{e}_z\big) - \widetilde{K}\big(\nabla p + \psi\boldsymbol{e}_z\big), \\ \nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}} = 0, \\ \partial_t\widetilde{\psi} + \boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\widetilde{\psi} + \widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\psi + \phi_b'\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e}_z - \nabla\cdot(D^\varepsilon\nabla\widetilde{\psi}) - \nabla\cdot(\widetilde{D}\nabla\psi) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

并补充初始条件

$$\widetilde{\psi}|_{t=0} = 0, \tag{5.8}$$

以及边界条件

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e}_z|_{z=0,-H} = 0, \quad \widetilde{\psi}|_{z=0} = 0, \quad \widetilde{\psi}|_{z=-H} = 0, \tag{5.9}$$

并在水平方向上具有周期性（x， y）。

~**引理 5.2**。 假设 $\psi_0 = \psi_0^\varepsilon \in B_1$，其中 B_1 定义见 (4.23)。那么 ψ 满足以下估计

$$\|\widetilde{\psi}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le M_8(t)\varepsilon^{\frac{1}{6}}, \quad \forall\, t \ge 0, \tag{5.10}$$

其中 $M_8(t) > 0$ 取决于 K_j ,D_j, M_0, M_1, M_5, Ω 和 t，参见 (5.21)。

~ ~证明。 我们注意到，系数 K, D 之差是支撑在宽度为 2ε的窄层内的分段线性函数。因此，我们有

$$\|\widetilde{K}\|_{L^r(\Omega)} \le C\varepsilon^{\frac{1}{r}}, \quad \|\widetilde{D}\|_{L^r(\Omega)} \le C\varepsilon^{\frac{1}{r}}, \quad \forall\, r \in [2,\infty). \tag{5.11}$$

由于 $\widetilde{p}$由椭圆问题决定

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(K^\varepsilon\nabla\widetilde{p}) = \nabla\cdot\big[K^\varepsilon\widetilde{\psi}\boldsymbol{e}_z + \widetilde{K}(\nabla p + \psi\boldsymbol{e}_z)\big], & \text{in } \Omega, \\ \partial_z\widetilde{p}(x,-H) = \partial_z\widetilde{p}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{5.12}$$

在水平方向上满足周期性（x， y），由引理 3.1 和（5.11）可得

$$\begin{aligned} \|\nabla\widetilde{p}\|_{L^4(\Omega)} &\le C(\|K^\varepsilon\widetilde{\psi}\boldsymbol{e}_z\|_{L^4(\Omega)} + \|\widetilde{K}\nabla p\|_{L^4(\Omega)} + \|\widetilde{K}\psi\|_{L^4(\Omega)}) \\ &\le C\big(\|K^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + \|\widetilde{K}\|_{L^{12}(\Omega)}(\|\nabla p\|_{L^6(\Omega)} + \|\psi\|_{L^6(\Omega)})\big) \\ &\le C\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{1}{12}}\|\psi\|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

由 Sobolev嵌入定理和引理5.1，可得

$$\|\nabla\widetilde{p}\|_{L^4(\Omega)} \le C\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{1}{12}}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + CM_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{12}}. \tag{5.13}$$

因此，有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^4(\Omega)} &\le \|K^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}(\|\nabla\widetilde{p}\|_{L^4(\Omega)} + \|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)}) + \|\widetilde{K}\|_{L^{12}(\Omega)}(\|\nabla p\|_{L^6(\Omega)} + \|\psi\|_{L^6(\Omega)}) \\ &\le C\big(\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + M_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{12}}\big) + C\varepsilon^{\frac{1}{12}}\|\psi\|_{L^6(\Omega)} \\ &\le C\big(\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + M_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{12}}\big) + C\varepsilon^{\frac{1}{12}}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\big(\|\widetilde{\psi}\|_{L^4(\Omega)} + M_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{12}}\big).\end{aligned} \tag{5.14}$$

同理，可得

$$\|\nabla\widetilde{p}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\widetilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)} + CM_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{5.15}$$

~接下来，将方程（5.7）$_3$ 乘以 ψ 并利用分部积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{D^\varepsilon}\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \big[\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\psi + \phi_b'\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e}_z - \nabla\cdot(\widetilde{D}\nabla\psi)\big]\widetilde{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \tag{5.16}$$

借助（5.13）–（5.15）、引理 A.2–A.4 以及杨氏不等式，我们可以推得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\psi)\widetilde{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| &= \left|\int_\Omega(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\widetilde{\psi})\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \le \|\nabla\widetilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^4(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^4(\Omega)} \\ &\le \frac{\min_j D_j}{8}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\psi\|^2_{L^4(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^4(\Omega)} \\ &\le \frac{\min_j D_j}{8}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)}(\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^4(\Omega)} + M_6\varepsilon^{\frac{1}{6}}) \\ &\le \frac{\min_j D_j}{8}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6(\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^4(\Omega)} + M_6\varepsilon^{\frac{1}{6}}) \\ &\le \frac{\min_j D_j}{8}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6\|\widetilde{\psi}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)} + CM_6^2\varepsilon^{\frac{1}{6}} \\ &\le \frac{\min_j D_j}{4}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6^4\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6^2\varepsilon^{\frac{1}{6}},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi_b'\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e}_z\widetilde{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| &\le c_\Delta\delta^{-1}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C(\|\widetilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)} + M_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{3}})\|\widetilde{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6\varepsilon^{\frac{2}{3}}\end{aligned} \tag{5.18}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega -\nabla\cdot(\widetilde{D}\nabla\psi)\widetilde{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| &= \left|\int_\Omega \widetilde{D}\nabla\psi\cdot\nabla\widetilde{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\ &\le \frac{\min_j D_j}{4}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\widetilde{D}\|^2_{L^3(\Omega)}\|\nabla\psi\|^2_{L^6(\Omega)} \\ &\le \frac{\min_j D_j}{4}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\psi\|^2_{\mathcal{W}}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\min_j D_j}{4}\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\mathcal{L}\psi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.19}$$

将（5.17）–（5.19）代入（5.16）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \min_j D_j\|\nabla\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq CM_6^4\|\widetilde{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} + CM_6^2\varepsilon^{\frac{1}{6}} + C\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\mathcal{L}\psi\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.20}$$

~这里我们用到了以下事实 $M_6 \geq 1$ 以及 $\varepsilon \in (0,1)$。由于 $\psi(0) = 0$，由格朗沃尔引理和引理5.1可得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\psi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_0^t \left(CM_6^2\varepsilon^{\frac{1}{6}} + C\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\mathcal{L}\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)e^{\int_\tau^t CM_6^4\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leq Ce^{CM_6^4 t}\left(M_6^2\varepsilon^{\frac{1}{6}}t + \varepsilon^{\frac{2}{3}}M_7(t)\right)\\ &\leq Ce^{CM_6^4 t}\left(M_6^2 t + M_7(t)\right)\varepsilon^{\frac{1}{6}} =: M_8(t)\varepsilon^{\frac{1}{6}}, \quad \forall\, t \geq 0.\end{aligned} \tag{5.21}$$

证明完毕。 □

现在我们可以证明定理5.1。

定理5.1的证明。反设该断言不成立。则存在常数 $c > 0$ 以及一个递减序列 $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty \subset (0, \varepsilon_0]$ 收敛到 0，使得

$$\mathrm{dist}(\mathscr{A}_{\varepsilon_j}, \mathscr{A}_0) \geq c, \quad \forall\, j \geq 1.$$

由于 $\mathscr{A}_{\varepsilon_j}$ 在 $\mathcal{H}^s$中是紧的，存在一个 $a_j \in \mathscr{A}_{\varepsilon_j}$ 使得

$$\mathrm{dist}(a_j, \mathscr{A}_0) = \mathrm{dist}(\mathscr{A}_{\varepsilon_j}, \mathscr{A}_0) \geq c.$$

另一方面，由于 $\mathscr{A}_0$ 吸引 $\mathcal{H}^s$中的所有有界集，我们可以选取充分大的 $T_* = T_*(B_1) > 0$，使得

$$\mathrm{dist}(S_0(T_*)B_1, \mathscr{A}_0) < \frac{c}{4}.$$

全局吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 关于 $S_\varepsilon(t)$ $t \geq 0$对任意 $S_\varepsilon(t)\mathscr{A}_\varepsilon = \mathscr{A}_\varepsilon$均保持不变，即 $a_j \in \mathscr{A}_{\varepsilon_j}$。因此，对每个 $b_j \in \mathscr{A}_{\varepsilon_j}$，存在 $S_{\varepsilon_j}(T_*)b_j = a_j$使得对所有$j \in \mathbb{Z}^+$。这意味着$b_j \in \mathscr{A}_{\varepsilon_j} \subset B_1$。由引理5.1 和5.2，可得

$$\begin{aligned}\|a_j - S_0(T_*)b_j\|_{\mathcal{H}^s} &\leq C_s\|a_j - S_0(T_*)b_j\|^{1-s}_{L^2(\Omega)}\|\nabla(a_j - S_0(T_*)b_j)\|^s_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C_s\left[M_8(T_*)\varepsilon_j^{\frac{1}{6}}\right]^{\frac{1-s}{2}}\left(\|\nabla(S_{\varepsilon_j}(T_*)b_j)\|_{L^2} + \|\nabla(S_0(T_*)b_j)\|_{L^2(\Omega)}\right)^s\\ &\leq 2C_sM_6^{\frac{s}{2}}\left[M_8(T_*)\right]^{\frac{1-s}{2}}\varepsilon_j^{\frac{1-s}{12}} < \frac{c}{4},\end{aligned}$$

只要 j 足够大。因此，有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(a_j, \mathscr{A}_0) &\leq \|a_j - S_0(T_*)b_j\|_{\mathcal{H}^s} + \mathrm{dist}(S_0(T_*)b_j, \mathscr{A}_0)\\ &\leq \|a_j - S_0(T_*)b_j\|_{\mathcal{H}^s} + \mathrm{dist}(S_0(T_*)B_1, \mathscr{A}_0) \leq \frac{c}{2},\end{aligned}$$

由此得出矛盾。证明完毕。 □

5.2 不变测度的上半连续性

现在，我们借助不变测度研究弥散界面模型（2.14）–（2.16）的平稳统计性质（见 [32]）。为此，我们回顾以下定义：

定义 5.2。考虑希尔伯特空间X上的抽象连续动力系统 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$。如果一个博雷尔测度 μ 满足以下条件，则称其为 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$的不变测度：

$$\mu(E) = \mu(S^{-1}(t)E),$$

对于任意 $t \geq 0$ 和博雷尔可测集 E，均有。

由于不变测度支撑在全局吸引子上，[33], 定理 5.1中所建立的全局吸引子的上半连续性表明，弥散界面模型（2.14）–（2.16）的统计性质可能接近尖锐界面模型（2.10）–（2.13）的统计性质。

对于任意 $0 < \varepsilon \ll 1$，记 $\mathcal{IM}_\varepsilon$ <style id='7'}为分别对应于尖锐界面模型（$S_\varepsilon(t)$ $\mathcal{H}^s$）和弥散界面模型（$\varepsilon = 0$）的动力系统（$\varepsilon > 0$）的所有不变测度的集合。引理 5.1 表明，半群 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\geq 0}$，$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 是一致耗散的。另一方面，根据引理 5.2、一致估计（5.1）和插值不等式，我们得到

$$\|\widetilde{\psi}(t)\|_{\mathcal{H}^s} \leq C M_6^{\frac{s}{2}} \left[M_8(t)\right]^{\frac{1-s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-s}{12}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

这意味着，S_ε的轨道在吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$上于任意时间区间 $[0, T]$ 内一致收敛到 S_0 的轨道。因此，应用抽象结果 [33,定理 4], ，我们可以得出

定理 5.3. 设 $s \in (1 2, 1)$。不变测度集 $\{\mathcal{IM}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$是上半连续的，具体而言，对于任意序列 $\{\mu_\varepsilon \in \mathcal{IM}_\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$，存在一个 $\mu_0 \in \mathcal{IM}_0$ 及其子序列（仍记为 $\{\mu_\varepsilon\}$），使得 μ_ε 在弱意义下当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛到 μ_0。

5.3 努塞尔数的上半连续性

通过长时间平均定义的努塞尔数衡量垂直方向上的浓度输运（见 [8, 31]）：

$$\mathrm{Nu}_\varepsilon = \sup_{\psi_0^\varepsilon \in \mathcal{H}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_z \psi^\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t. \tag{5.22}$$

作为定理 5.3的推论，我们可以得到努塞尔数的上半连续性：$\varepsilon \to 0$。例如，参见 [33, 定理 5]，其中包含证明的详细内容。

定理 5.4. 存在遍历不变测度 $\nu_\varepsilon \in \mathcal{IM}_\varepsilon$ 和 $\nu_0 \in \mathcal{IM}_0$，使得

$$\mathrm{Nu}_\varepsilon = \int_{\mathcal{H}} \int_\Omega \boldsymbol{u}_0^\varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_z \psi_0^\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\nu_\varepsilon(\psi_0^\varepsilon) \quad \textit{and} \quad \mathrm{Nu}_0 = \int_{\mathcal{H}} \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{e}_z \psi_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\nu_0(\psi_0).$$

此外，努塞尔数关于参数 ε 是上半连续的，其意义为

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Nu}_\varepsilon \leq \mathrm{Nu}_0.$$

6 全局吸引子的有限维性

吸引子通常是相空间的分形子集。有限维性是刻画全局吸引子结构的一个重要性质。让我们回顾分形维数的定义（参见 [37,定义 4.1]）：

定义 6.1. 设 $\mathcal{M}$ 是度量空间 $\mathcal{X}$ 中的一个预紧集。 $N_\eta(\mathcal{M},\ \mathcal{X})$ 是覆盖集合 $\mathcal{M}$ 的半径为 η 的闭球的最小数量。定义 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中的柯尔莫哥洛夫熵为

$$\mathcal{H}_\eta(\mathcal{M},\mathcal{X})=\log_2 N_\eta(\mathcal{M},\mathcal{X}).$$

则 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中的分形维数（盒计数维数）定义为

$$\dim_{\mathrm{f}}(\mathcal{M},\mathcal{X})=\limsup_{\eta\to 0}\frac{\mathcal{H}_\eta(\mathcal{M},\mathcal{X})}{\log_2(1/\eta)},$$

以下归因于 [37, 定理 4.1] 的结果给出了一种证明紧集具有有限分形维数的一般方法。

定理 6.2. 设 E_1 和 E 是巴拿赫空间， E_1 紧嵌入于 E ，且 $X\subset E_1$。假设存在映射 $\mathcal{S}$: $X\to X$，使得 $\mathcal{S}(X)=X$，并且以下“平滑”性质成立

$$\|\mathcal{S}a_1-\mathcal{S}a_2\|_{E_1}\le C\|a_1-a_2\|_E,\quad \forall\, a_1,a_2\in X. \tag{6.1}$$

则分 X 在 E 中的分形维数有限，并且可以按以下方式估计

$$\dim_{\mathrm{f}}(X,E)\le \mathcal{H}_{\frac{1}{4C}}(B(1,0,E_1),E),$$

其中 C与 (6.1) 中相同，且 $B(1,0,E_1)$ 表示 E_1中的单位球。

本节的主要结果如下

定理 6.3。 设 $s\in(\frac{1}{2},1)$。对每个 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，定理*4.1*、*4.2*中构造的全局吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon$具有有限的分形维数。此外，有

$$\dim_{\mathrm{f}}(\mathscr{A}_\varepsilon,\mathcal{H}^s)\le \mathcal{H}_{\frac{1}{4C_A}}(B(1,0,\mathcal{V}),\mathcal{H}^s),\quad \forall\,\varepsilon\in[0,\varepsilon_0], \tag{6.2}$$

其中，常数 $C_A>0$ 仅取决于 D_j、 K_j、Ω、 c_Δ、 δ、 M_1 和 M_5，与参数 ε无关。

为了证明定理 6.3，还需验证半群 $\{S_\varepsilon(t)\}_{t\ge 0}$、$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$的平滑性质。我们先考虑 $\varepsilon=0$:

引理 6.1。 设 $s\in(\frac{1}{2},1)$。假设 $(\boldsymbol{u}_1,p_1,\psi_1)$和 $(\boldsymbol{u}_2,p_2,\psi_2)$是尖锐界面模型 (2.10)–(2.13) 的两个解，分别对应初始数据 $\psi_{1,0},\psi_{2,0}\in\mathscr{A}_0$。则有

$$\|\nabla\psi_1(t)-\nabla\psi_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le M_{11}\left(\frac{1}{t}+t^2\right)e^{M_9 t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}-\psi_{2,0})\|^2_{L^2(\Omega)},\quad \forall\, t>0, \tag{6.3}$$

其中 M_9、 M_{11} 是仅依赖于 D_j、 K_j、Ω、 c_Δ、 δ、 M_1 和 M_5的正常数 .

证明。 解的差 $(\boldsymbol{u},\ \psi,\ p) := (\overline{\boldsymbol{u}_1}-\overline{\boldsymbol{u}}_2,\ p_1-p_2,\ \psi_1-\psi_2)$ 满足带有初始条件（3.20）的系统（3.21）。对（3.23）关于时间积分，并利用（3.2），得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau \le \int_0^t \|\mathcal{L}^s\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad\le \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}-\psi_{2,0})\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\left(\|\psi_1(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}}+\|\psi_2(\tau)\|_{\mathcal{H}^s}^{\frac{4}{2s-1}}+1\right)\mathrm{d}\tau\\
&\quad\le \|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}-\psi_{2,0})\|_{L^2(\Omega)}^2\left(1+M_9te^{M_9t}\right).
\end{aligned}\tag{6.4}$$

这里，我们利用 $\psi_1,\ \psi_2\in\mathscr{A}_0$ 在 $\mathcal{V}$ 中一致有界这一事实，并取

$$M_9 = C\big(M_5^{\frac{2}{2s-1}}+1\big).$$

接下来，将方程 $(3.20)_3$ 与 $\mathcal{L}\psi$ 相乘，并利用分部积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 = -(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\overline{\psi},\mathcal{L}\overline{\psi})-(\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\psi_2,\mathcal{L}\overline{\psi})-(\phi_b'\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{e}_z,\mathcal{L}\overline{\psi}).\tag{6.5}$$

(6.5) 的右端可估计如下：

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \phi_b'\overline{u}_z\mathcal{L}\overline{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| &\le c_\Delta\delta^{-1}\|\overline{u}_z\|_{L^2(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le 2c_\Delta(\|\partial_x\overline{u}_x\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_y\overline{u}_y\|_{L^2(\Omega)})\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{4(\max_j K_j)^2c_\Delta}{\min_j K_j}(\|\partial_x\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_y\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)})\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{1}{4}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{16(\max_j K_j)^4c_\Delta^2}{(\min_j K_j)^2}\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

此外，利用 H¨older 不等式、杨氏不等式、$(2.10)_1$ 以及引理 A.2、A.4，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\overline{\psi}\mathcal{L}\overline{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\\
&\quad\le \|\boldsymbol{u}_1\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\le (1+C_p)\max_j K_j\|\psi_1\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\le (1+C_p)C_2C_u^{\frac{1}{2}}\max_j K_j\|\psi_1\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\\
&\quad\le \frac{1}{8}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2+864\big[(1+C_p)C_2C_u^{\frac{1}{2}}\max_j K_j\big]^4\|\psi_1\|_{L^6(\Omega)}^4\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}\tag{6.7}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\psi_2\mathcal{L}\overline{\psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\\
&\quad\le \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\psi_2\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\le (1+C_p)\max_j K_j\|\overline{\psi}\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\psi_2\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\le C_1(1+C_p)\max_j K_j\|\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_2\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{C_1(1+C_p)\max_j K_j}{(\min_j D_j)^{\frac{1}{2}}}\|\nabla\psi_2\|_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\|\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{1}{8}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 864\frac{[C_1(1+C_p)\max_j K_j]^4}{(\min_j D_j)^2}\|\nabla\psi_2\|_{L^3(\Omega)}^4\|\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\le \frac{1}{8}\|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 864\frac{[C_1C_2C_u(1+C_p)\max_j K_j]^4}{(\min_j D_j)^2}\|\mathcal{L}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|\nabla\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2. \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

将 (6.6)–(6.8) 代入 (6.5)，得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \le M_{10}\|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + M_{10}\|\mathcal{L}\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|\overline{\psi}\|^2, \qquad (6.9)
$$

其中 M_{10} 是仅依赖于 D_j、K_j、Ω c_Δ、δ、M_1、M_5 的正常数。将（6.9）乘以 $t>0$ 并在 $[0,t]\subset[0,\infty)$ 上积分，得到

$$
\begin{aligned}
&t\|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\le \int_0^t (1+M_{10}\tau)\|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau + M_{10}\int_0^t \tau\|\mathcal{L}\psi_2(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\|\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau \qquad (6.10)\\
&\le (1+M_{10}t)\int_0^t \|\sqrt{D}\nabla\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}\tau + M_{10}tM_7(t)\sup_{\tau\in[0,t]}\|\overline{\psi}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
$$

将其与（3.2）和（6.4）结合，即可得到结论（6.3）。 □

注 6.1。 对于 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ 的情形，采用与引理 6.1 相同的论证，可以得到类似的估计：

$$
\|\nabla\psi_1^\varepsilon(t)-\nabla\psi_2^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le M_{11}\left(\frac{1}{t}+t^2\right)e^{M_9 t}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}^\varepsilon-\psi_{2,0}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad \forall\, t>0. \qquad (6.11)
$$

仔细考察这些估计可知，估计式（6.11）中的系数与参数 ε 无关。

定理 *6.3* 的证明。 当 $\varepsilon=0$ 时，取

$$
\mathcal{S}=S_0(1),\quad E_1=\mathcal{V},\quad E=\mathcal{H}^s,\quad X=\mathscr{A}_0.
$$

由引理 6.1可得

$$
\|\nabla\psi_1(1)-\nabla\psi_2(1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 2M_{11}e^{M_9}\|\mathcal{L}^{\frac{s}{2}}(\psi_{1,0}-\psi_{2,0})\|_{L^2(\Omega)}^2.
$$

根据抽象结果定理 6.2，我们可以得出，$\dim_{\mathrm{f}}(\mathscr{A}_0,\ \mathcal{H}^s)$ 是有限的，如 (6.2) 所述，其常数为

$$
C_A=\left(2M_{11}e^{M_9}\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

由 (6.11)，可得 $\mathscr{A}_\varepsilon$，$\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ 也有类似结论，且常数 C_A 相同。因此，全局吸引子族 $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ 的分形维数具有相同的上界。证明完毕。

□

备注 6.2. 定理 $\{\mathscr{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ 中得到的6.3分形维数上界与体积收缩方法相比可能并不尖锐（参见 [29] 及其中的参考文献）。然而，后一种方法要求半群 $S_\varepsilon(t)$ 关于初始数据一致准可微，而由于解的正则性较低，这一条件在此处并不成立。

7 结论

简化模型的长期有效性是一个核心问题，因为它们常用于复杂物理系统的预测。本文通过证明三维锐界面 Darcy–Boussinesq 模型可作为更符合物理实际的弥散材料界面表述在界面厚度趋于零时的极限，确立了该模型用于层状多孔介质中对流的长期有效性。我们通过全局吸引子的上半连续性、不变测度、努塞尔数等长期平均统计量，以及吸引子分形维数的一致上界，验证了这一模型。我们的结果扩展了 [10], 的有限时间收敛分析；该研究考察了解的行为以及速度场的近奇异结构。

该分析依赖于推导关于时间一致且与过渡层厚度无关的界，这些界是在自然相空间中紧嵌入的空间内得到的。通过将 Hopf–Constantin–Doering 型框架 [8, 31] 调整至分层情形，并结合针对所研究模型精心选择的加权函数空间，以及与不连续系数的主线性椭圆算子的分数次幂相关联的新型插值空间，可以获得这些估计。虽然本文聚焦于平直界面，但只要界面足够光滑且彼此间隔充分，就可以通过采用曲线坐标，以类似方式推广至曲线界面。

尽管我们已经证明了长时间动力学的上半连续性，仍有若干问题尚待解决。一个自然的研究方向是探究能否得到完全连续性，尤其是在动力学具有湍流特征或本质上具有随机性的情形下。对全局吸引子进行更细致的刻画，特别是在对流 onset 的临界 Rayleigh–Darcy 阈值附近，也值得进一步研究。从统计角度来看，确定不变测度的收敛速率具有重要的实际意义。理解努塞尔数对瑞利数的依赖关系，仍是对流理论中的核心问题。最后，由于物理系统不可避免地受到随机性的影响，分析微小随机扰动如何影响长时间动力学也颇具意义。

致谢

Wuis 是中华人民共和国教育部非线性科学数学重点实验室（复旦大学）的成员。

A 一些基本引理

在附录中，我们汇总了一些前文证明中经常用到的基本引理。首先，我们给出层域中的 Poincar´e 型不等式。

引理 A.1. 设 $E=(0,L)^2\times(0,h)$ 是 $\mathbb{R}^3$, $L,h>0$ 中的一个层域。则有

$$\|\psi\|_{L^2(E)}\le h\|\partial_z\psi\|_{L^2(E)} \tag{A.1}$$

对于任意在边界 $[0,L]^2\times\{0\}$ （或 $[0,L]^2\times\{h\}$）上为零的 $\psi\in H^1(\Omega)$。

证明。只需证明光滑函数满足（A.1）。对于任意（x,y,z）$\in E$，利用微积分基本定理和 H¨older 不等式，可得

$$|\psi(x,y,z)|^2=\left(\psi(x,y,0)+\int_0^z\partial_z\psi(x,y,s)\,\mathrm{d}s\right)^2\le\left(\int_0^h|\partial_z\psi|\,\mathrm{d}s\right)^2\le h\int_0^h|\partial_z\psi|^2\,\mathrm{d}s.$$

将上述不等式在 E 上积分，可得

$$\|\psi\|_{L^2(E)}^2\le h\int_0^h\mathrm{d}z\int_{(0,L)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^h|\partial_z\psi|^2\,\mathrm{d}s=h^2\|\partial_z\psi\|_{L^2(E)}^2,$$

由此得出结论。 □

以下 引理给出了一些涉及空间 $\mathcal{W}$ （见 [5, 引理 2.2] 的估计）).

引理 A.2 . 存在两个常数 C_l、$C_u>0$，它们仅依赖于 H 和 D_j，使得

$$C_l\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}\le\|\psi\|_{\mathcal{W}}\le C_u\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)},\quad\forall\,\psi\in\mathcal{W}. \tag{A.2}$$

类似地，我们有

引理 A.3. 给定 $0<\varepsilon\ll1$。存在两个常数 C_l、$C_u>0$，它们仅依赖于 H 和 D_j，使得

$$C_l\|\mathcal{L}^\varepsilon\psi\|_{L^2(\Omega)}\le\|\psi\|_{\mathcal{W}^\varepsilon}\le C_u\|\mathcal{L}^\varepsilon\psi\|_{L^2(\Omega)},\quad\forall\,\psi\in\mathcal{W}^\varepsilon, \tag{A.3}$$

证明。容易验证，

$$\|\mathcal{L}^\varepsilon\psi\|_{L^2(\Omega)}\le\|D^\varepsilon\partial_x^2\psi\|_{L^2(\Omega)}+\|D^\varepsilon\partial_y^2\psi\|_{L^2(\Omega)}+\|\partial_z(D^\varepsilon\partial_z\psi)\|_{L^2(\Omega)}\le(1+2\max_j D_j)\|\psi\|_{\mathcal{W}^\varepsilon}.$$

对于任意 $\psi\in\mathcal{W}^\varepsilon$。接下来，对于任意 $\psi\in\mathcal{W}^\varepsilon$，记 $f:=\mathcal{L}^\varepsilon\psi\in L^2(\Omega)$。那么 ψ 可视为椭圆问题的唯一强解

$$\begin{cases}\mathcal{L}^\varepsilon\psi=f & \text{in }\Omega,\\ \psi=0 & \text{for } z=0,-H,\quad\text{and periodic in the horizontal directions } (x,y).\end{cases} \tag{A.4}$$

用 ψ 测试方程 $\mathcal{L}^\varepsilon\psi = f$，并使用分部积分，可得

$$\|\sqrt{D^\varepsilon}\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

结合引理 A.1可得

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{H}{\min_j D_j}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{H^2}{\min_j D_j}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.5}$$

接下来，以 $-\partial_x^2\psi$ 测试方程 $\mathcal{L}^\varepsilon\psi = f$，并利用分部积分，得到

$$(D^\varepsilon\nabla\partial_x\psi, \nabla\partial_x\psi) = -(f, \partial_x^2\psi),$$

由此结合 H¨older 不等式和 Young 不等式可得

$$\|\nabla\partial_x\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\min_j D_j}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.6}$$

于是我们有

$$\|\partial_x(D^\varepsilon\partial_z\psi)\|_{L^2(\Omega)} = \|D^\varepsilon\partial_z\partial_x\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \max_j D_j\|\partial_z\partial_x\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\max_j D_j}{\min_j D_j}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.7}$$

对 $\|\partial_y(D^\varepsilon\partial_z\psi)\|_{L^2(\Omega)}$ 也有类似的估计。最后，利用表达式 $-\partial_z(D^\varepsilon\partial_z\psi) = D^\varepsilon\partial_x^2\psi + D^\varepsilon\partial_y^2\psi + f$，得到

$$\|\partial_z(D^\varepsilon\partial_z\psi)\|_{L^2(\Omega)} \le \left(\frac{2\max_j D_j}{\min_j D_j} + 1\right)\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.8}$$

结合式（A.5）–（A.8），我们得出结论（A.3）。证明完毕。 □

引理 A.4. 设 $r \in [2, 6]$。对于任意 $\psi \in \mathcal{V}$，有

$$\|\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C_1\|\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{L^2(\Omega)}. \tag{A.9}$$

此外，我们有

$$\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C_2\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{\mathcal{W}}, \quad \forall\,\psi \in \mathcal{W}, \tag{A.10}$$

$$\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C_2\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{\mathcal{W}^\varepsilon}, \quad \forall\,\psi \in \mathcal{W}^\varepsilon. \tag{A.11}$$

这里，正常数 C_1、 C_2 仅依赖于 r、Ω和 D_j。

证明。 $r = 2$,6 的情形是标准的（参见 [5, 引理 2.3]）。对于任意 $\psi \in \mathcal{V}$ 和 $r \in (2,6)$，由经典的 Gagliardo–Nirenberg不等式可得

$$\|\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{L^2(\Omega)}\|\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} + C\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

由于 ψ 在 $\partial\Omega$ 的顶部和底部均为零，由引理A.1 th at

$$\|\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C(1 + H^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}})\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{L^2(\Omega)}\|\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} =: C_1\|\nabla\psi\|^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}_{L^2(\Omega)}\|\psi\|^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},$$

~由此得到（A.9）。接下来，我们考虑 $\psi \in \mathcal{W}$。设 $\nabla\psi := (\partial_x\psi,\ \partial_y\psi,\ D\partial_z\psi)$。根据定义，有$\widetilde{\nabla}\psi \in H^1(\Omega)$ 且

$$\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{H^1(\Omega)} \le \|\psi\|_{\mathcal{W}}.$$

~对 $\nabla\psi$应用 Gagliardo–Nirenberg不等式，得到

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^r(\Omega)} &\le C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}\|\nabla(\widetilde{\nabla}\psi)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}} + C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}} + C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}} \\
&\le C\|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}\|\psi\|_{\mathcal{W}}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}},
\end{aligned}$$

其中，$C>0$ 取决于 r 和 Ω。利用这一事实

$$\min_j D_j\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)} \le \|\widetilde{\nabla}\psi\|_{L^r(\Omega)} \le \max_j D_j\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)},$$

3 1我们可以得出（A.10），其中 $C_2 = \frac{C}{\text{最大值}_j D_j^{r-2}\text{最小值}_j D_j}$。

类似地，对于 $\psi \in \mathcal{W}^\varepsilon$，我们定义 $\nabla^\varepsilon\psi := (\partial_x\psi, \partial_y\psi, D^\varepsilon\partial_z\psi)$，使得

$$\|\nabla^\varepsilon\psi\|_{H^1(\Omega)} \le \|\psi\|_{\mathcal{W}^\varepsilon}.$$

对 $\nabla^\varepsilon\psi$ 应用 Gagliardo–Nirenberg不等式，得到

$$\|\nabla^\varepsilon\psi\|_{L^r(\Omega)} \le C\|\nabla^\varepsilon\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{r}-\frac{1}{2}}\|\psi\|_{\mathcal{W}^\varepsilon}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}}.$$

注意到

$$\min_j D_j\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)} \le \|\nabla^\varepsilon\psi\|_{L^r(\Omega)} \le \max_j D_j\|\nabla\psi\|_{L^r(\Omega)},$$

我们得到（A.11）。证明完毕。 □

B 分数阶Sobolev空间

基于算子 $\mathcal{L}$ 的特征函数展开，对任意 $\psi = \sum_{k=1}^\infty a_k w_k$，我们定义

$$\mathcal{L}^s\psi := \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^s a_k w_k, \quad s \in \mathbb{R}.$$

然后我们定义空间 $\mathcal{H}^s = \mathrm{dom}(\mathcal{L}^{\frac{s}{2}})$，其范数为

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s}^2 := \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^s |a_k|^2.$$

引理 B.1. 对于任意 $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$ 以及满足 $\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_2}} < \infty$ 的任意 ψ，我们有

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_1}} \leq \lambda_1^{s_1-s_2}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_2}},$$

and

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \leq \|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_1}}^{\theta}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_2}}^{1-\theta}, \qquad \textit{for any } s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2 \textit{ with } \theta \in (0,1).$$

证明。 根据 [5], 特征值 $\{\lambda_k\}$ 自伴正算子 $\mathcal{L}$满足

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots.$$

因此,

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_1}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{s_1}|a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{s_2}}{\lambda_k^{s_2-s_1}}|a_k|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^{s_2-s_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{s_2}|a_k|^2 = \lambda_1^{s_1-s_2}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_2}}^2.$$

Th插值不等式由 H¨older 不等式的离散形式得出 ty,

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{\mathcal{H}^s}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}|a_k|^{2\theta+2(1-\theta)} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{s_1}|a_k|^2\right)^{\theta}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{s_2}|a_k|^2\right)^{1-\theta}\\ &= \|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_1}}^{2\theta}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s_2}}^{2(1-\theta)}.\end{aligned}$$

证明完毕。 □

引理 B.2. 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^0}$、 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ 分别等价于范数$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$、 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$。

证明。 任意 $\psi \in \mathcal{H}$ 都可以在 $\mathcal{H}$ 中表示为标准正交基 $\{w_k\}$ 的级数，使得

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty}(\psi, w_k)w_k.$$

那么，其 L^2 范数由帕塞瓦尔恒等式给出

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(\psi, w_k)|^2.$$

这意味着$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$和 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^0}$是 $\mathcal{H}$上的等价范数。

对于 $s = 1$的情形，由于 $\{w_k\}$也是 $\mathcal{V}$中的一个正交基，任意 $\psi \in \mathcal{V}$都可以写成级数

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty}(\psi, w_k)_1 w_k := \sum_{k=1}^{\infty}(D\nabla\psi, \nabla w_k)w_k,$$

它在 $\mathcal{V}$中收敛。我们有范数

$$\|\psi\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(\psi, w_k)_1|^2(w_k, w_k)_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|(\psi, w_k)_1|^2(\mathcal{L}w_k, w_k) = \sum_{k=1}^{\infty}|(\psi, w_k)_1|^2\lambda_k,$$

它也等价于范数 $\|\psi\|_{\mathcal{H}^1}$。

最后，任意 $\psi \in \mathcal{W} \subset \mathcal{H}$ 均可展开为 $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$，其中该级数至少在 $L^2(\Omega)$中收敛。于是我们有

$$\mathcal{L}\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{L} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k w_k.$$

因此，

$$\|\mathcal{L}\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 = \|\psi\|_{\mathcal{H}^2}^2.$$

这些，toge ther与引理 A.3，表明 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$ 与 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ 是其上的等价范数 $\mathcal{W}$. □

我们有如下关于分数阶范数 $\mathcal{H}^s$ 与经典索博列夫范数 $H^s(\Omega)$，$s \in (0, 1)$的等价性，其证明受 [4, 附录 B]启发。

引理 B.3. 设 $s \in (0, 1)$。分数阶 $\mathcal{H}^s$-范数可解释为 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{V}$之间的插值范数，且等价于分数阶 *Sobolev* 范数$\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$。此外，分数阶 $\mathcal{H}^{1+s}$-范数可解释为 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{W}$之间的插值范数。

证明。令 我们使用 K 方法引入 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{V}$ 之间的插值范数 [30]:

$$\|\psi\|_{s,\mathcal{H},\mathcal{V}} := \left(\int_0^{\infty} t^{-2s} K^2(t, \psi, \mathcal{H}, \mathcal{V}) \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{for } s \in (0, 1),$$

其中， K-函子定义为

$$K^2(t, \psi, \mathcal{H}, \mathcal{V}) := \inf_{\psi_1 \in \mathcal{V}} \|\psi - \psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\psi_1\|_{\mathcal{V}}^2.$$

Let

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \qquad \text{and} \qquad \psi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_k.$$

Then

$$\|\psi - \psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\psi_1\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2 + t^2 b_k^2 \|w_k\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2 + t^2 b_k^2 \lambda_k.$$

求解极小化问题可得

$$K^2(t, \psi, \mathcal{H}, \mathcal{V}) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2 + t^2 b_k^2 \lambda_k \Big|_{b_k = \frac{a_k^2}{t^2 \lambda_k + 1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 t^2 \lambda_k}{1 + t^2 \lambda_k}.$$

因此，

$$\int_0^{\infty} t^{-2s} K^2(t, \psi, \mathcal{H}, \mathcal{V}) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{1-2s} \frac{a_k^2 \lambda_k}{1 + t^2 \lambda_k} \, \mathrm{d}t = \left(\frac{2}{\pi} \sin \pi s \right)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s |a_k|^2.$$

因此，对于任意 $\psi \in \mathcal{V}$，有 $\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\sin \pi s}\|\psi\|_{s,\mathcal{H},\mathcal{V}}$。

$\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{W}$ 之间的插值范数定义为

$$\|\psi\|_{s,\mathcal{V},\mathcal{W}} := \left(\int_0^\infty t^{-2s} K^2(t,\psi,\mathcal{V},\mathcal{W})\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{for } s \in (0,1),$$

其中，K-函子变为

$$K^2(t,\psi,\mathcal{V},\mathcal{W}) := \inf_{\psi_1 \in \mathcal{W}} \|\psi - \psi_1\|_{\mathcal{V}}^2 + t^2\|\psi_1\|_{\mathcal{W}}^2.$$

根据引理A.3，我们可以使用 $K^2(t,\psi,\mathcal{V},\mathcal{W})$的以下等价形式：

$$\inf_{\psi_1 \in \mathcal{W}} \|\psi - \psi_1\|_{\mathcal{V}}^2 + t^2\|\mathcal{L}\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

同理，我们有

$$\inf_{\psi_1 \in \mathcal{W}} \|\psi - \psi_1\|_{\mathcal{V}}^2 + t^2\|\mathcal{L}\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^\infty (a_k - b_k)^2\lambda_k + t^2 b_k^2\lambda_k^2\big|_{b_k = \frac{a_k^2}{t^2\lambda_k+1}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k^2 t^2 \lambda_k^2}{1+t^2\lambda_k},$$

因此，

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty t^{1-2s}\frac{a_k^2\lambda_k^2}{1+t^2\lambda_k}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{\pi}\sin \pi s\right)^{-1}\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{s+1}|a_k|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\sin \pi s\right)^{-1}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}}^2.$$

这意味着对于任意 $\psi \in \mathcal{W}$，$\|\psi\|_{s、\mathcal{V}、\mathcal{W}}$ 和 $\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}}$ 等价。 □

我们注意到，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{1+s}}$ 并不等价于$\|\cdot\|_{H^{1+s}(\Omega)}$，因为空间 $\mathcal{W}$ 一般不同于经典的 $H^2(\Omega)$空间，参见[5]。尽管如此，我们有如下结果

引理 B.4. 对于任意 $s \in (0,\ 1)$ 以及 $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l$，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|\psi\|_{H^{1+s}(\Omega_j)} \le C\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}}, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{W},$$

其中$\|\cdot\|_{H^{1+s}(\Omega j)}$ 是层Ω_j上的分数阶 *Sobolev* 范数。

证明。 对于任意 $j = 1,\ \cdots,\ l$，记

$$\mathcal{V}|_{\Omega_j} = \{\psi|_{\Omega_j} :\ \psi \in \mathcal{V}\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}|_{\Omega_j} = \{\psi|_{\Omega_j} :\ \psi \in \mathcal{W}\}.$$

则 $\mathcal{V}|_{\Omega_j}$ 与 $\mathcal{W}|_{\Omega_j}$ 之间的插值范数定义为

$$\|\psi\|_{s,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}} := \left(\int_0^\infty t^{-2s} K^2(t,\psi,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j})\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{for } s \in (0,1),$$

其中

$$K^2(t,\psi,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}) = \inf_{\psi_1 \in \mathcal{W}|_{\Omega_j}} \|\psi - \psi_1\|_{\mathcal{V}|_{\Omega_j}}^2 + t^2\|\psi_1\|_{\mathcal{W}|_{\Omega_j}}^2.$$

注意到

$$K^2(t,\psi,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}) \le \inf_{\psi_1\in\mathcal{W}} \|\psi-\psi_1\|_{\mathcal{V}}^2 + t^2\|\psi_1\|_{\mathcal{W}}^2 = K^2(t,\psi,\mathcal{V},\mathcal{W}),$$

有

$$\|\psi\|_{s,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}} \le \|\psi\|_{s,\mathcal{V},\mathcal{W}}, \quad \forall\,\psi\in\mathcal{W}.$$

回忆一下，任意函数 ψ 属于 $\mathcal{W}$ 时都是分段 $H^2(\Omega)$。于是，限制范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}|_{\Omega_j}}$ 与经典索博列夫范数 $\|\cdot\|_{H^2(\Omega_j)}$ 相同，而插值范数 $\|\cdot\|_{s,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}}$ 也等价于分数阶 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{1+s}(\Omega_j)}$。因此，

$$\|\psi\|_{H^{1+s}(\Omega_j)} \le C\|\psi\|_{s,\mathcal{V}|_{\Omega_j},\mathcal{W}|_{\Omega_j}} \le C\|\psi\|_{s,\mathcal{V},\mathcal{W}} \le C\|\psi\|_{\mathcal{H}^{1+s}}, \quad \forall\,\psi\in\mathcal{W}.$$

证明完毕。 □

注 B.1. 对算子 $\mathcal{L}^\varepsilon$ 以及空间 $\mathcal{H}^s_\varepsilon$、$\mathcal{W}^\varepsilon$，类似结果同样成立。根据 D^ε 的构造，相应估计中的通用正常数 C 与过渡层 ε 的厚度无关。

参考文献

[1] D. M. Anderson、G. B. McFadden 和 A. A. Wheeler。流体力学中的弥散界面方法。载于《流体力学年度评论》第*30*卷，第139–165页。Annual Reviews，加利福尼亚州帕洛阿尔托，1998年。[2] H.-R. Bahrami 和 A.-E. Sharifi。利用神经网络和 NSGA-II 将多层多孔介质应用于双管换热器传热优化。*Sci. Rep.*，14(1)：论文编号31509，2024年。[3] M. J. Bickle、A. Chadwick、H. E. Huppert、M. A. Hallworth 和 S. Lyle。斯莱普纳二氧化碳积聚的建模：对地下碳封存的启示。《地球与行星科学快报》，255(1-2)：164–176，2007年。[4] J. H. Bramble 和 X. Zhang。多重网格方法分析。载于《数值分析手册》第七卷，《数值分析手册》第VII卷，第173–415页。North-Holland，阿姆斯特丹，2000年。[5] Y. Cao、W. Niu 和 X. Wang。分层多孔介质中达西–布oussinesq系统的适定性与正则性。《离散与连续动力系统*B*辑》，30(12)：4764–4783，2025年。[6] M. De Paoli。储层性质对二氧化碳迁移流动力学的影响。*Phys. Fluids*，33(1)：论文编号016602，2021年1月。[7] M. De Paoli、S. Pirozzoli、F. Zonta 和 A. Soldati。三维多孔介质中的强瑞利–达西对流状态。《流体力学杂志》，943：论文编号A51，2022年。

[8] C. R. Doering 和 P. Constantin。多孔层中的热输运界限。《流体力学杂志》，376：263–296，1998年。[9] H. Dong 和 Z. Li。满足测度条件的非光滑区域中的余法向与罗宾边值问题。《函数分析杂志》，281(9)：论文编号109167，2021年。[10] H. Dong 和 X. Wang。达西–布oussinesq系统的精确物质界面极限。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，85(4)：1621–1642，2025年。[11] P. Fabrie。多孔介质自然对流模型的强解与渐近行为。《应用数学学报》，7(1)：49–77，1986年。[12] P. Fabrie 和 B. Nicolaenko。模拟多孔介质对流的非耗散系统的指数吸引子。《渐近分析》，12(4)：295–327，1996年。[13] D. R. Hewitt。分层多孔介质中对流的演化。《流体力学杂志》，941：论文编号A56，2022年。[14] D. R. Hewitt、J. A. Neufeld 和 J. R. Lister。含有薄低渗透率层的多孔介质中的高瑞利数对流。《流体力学杂志》，756：844–869，2014年。[15] D. R. Hewitt、G. G. Peng 和 J. R. Lister。分层多孔介质中的浮力驱动羽流。《流体力学杂志》，883：A37，25，2020年。[16] J. J. Hidalgo、J. Fe、L. Cueto-Felgueroso 和 R. Juanes。多孔介质中对流混合的标度关系。*Phys. Rev. Lett.*，109：论文编号 264503，2012年。[17] H. E. Huppert 和 J. A. Neufeld。二氧化碳封存的流体力学。载于《流体力学年度评论》，第46卷，第255–272页。Annual Reviews，加利福尼亚州帕洛阿尔托，2014年。[18] H. Ly 和 E. Titi。达西–普朗特数为零的多孔介质 Bénard 对流的整体盖弗雷正则性。《非线性科学杂志》，9：333–362，1999年。[19] T. Ma 和 S. Wang。《相变动力学》。施普林格，查姆，第二版，2019年。[20] R. McKibbin。由交替的厚层和薄层组成的多孔介质中的热对流。《国际传热与传质杂志》，26(5)：761–780，1983年。[21] R. McKibbin 和 M. J. O’Sullivan。从下方加热的分层多孔介质中的对流 onset。《流体力学杂志》，96(2)：375–393，1980年。[22] R. McKibbin 和 M. J. O’Sullivan。从下方加热的分层多孔介质中的热传递。《流体力学杂志》，111：141–173，1981年。[23] D. A. Nield 和 A. Bejan。《多孔介质中的对流》。施普林格，查姆，第五版，2017年。[24] M. Oliver 和 E. S. Titi。多孔介质中 Bénard 对流部分耗散模型吸引子的盖弗雷正则性。《微分方程杂志》，163(2)：292–311，2000年。

[25] J. Otero、L. A. Dontcheva、H. Johnston、R. A. Worthing、A. Kurganov、G. Petrova 和 C. R. Doering。流体饱和多孔层中的高瑞利数对流。《流体力学杂志》，500:263–281，2004年。[26] C. K. Sahu 和 M. R. Flynn。渗透率突变对多孔介质充填箱流的影响。《运输多孔介质》，119(1):95–118，2017年。[27] A. K. R. Salibindla、R. Subedi、V. C. Shen、A. U. M. Masuk 和 R. Ni。非均质多孔介质中的溶解驱动对流。《流体力学杂志》，857:61–79，2018年。[28] S. K. F. Stoter、P. M ller、L. Cicalese、M. Tuveri、D. Schillinger 和 T. J. R. Hughes。纳维–斯托克斯/达西方程的弥散界面法：基于磁共振成像扫描的患者特异性人体肝脏灌注分布。《计算力学与工程方法》，321:70–102，2017年。[29] R. Temam。力学与物理学中的无穷维动力系统，应用数学科学第68卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1997年。[30] H. Triebel。插值理论、函数空间、微分算子，*North-Holland Mathematical Library*第18卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约，1978年。[31] X. Wang。大普朗特数下垂直热输运的上界。《物理学*D*辑》，237(6):854–858，2008年。[32] X. Wang。大普朗特数下瑞利–贝纳德对流的平稳统计性质。《纯粹与应用数学通讯》，61(6):789–815，2008年。[33] X. Wang。耗散系统平稳统计性质的上半连续性。《离散与连续动力系统》，23(1-2):521–540，2009年。[34] B. Wen、L. T. Corson 和 G. P. Chini。大瑞利数下稳态多孔介质对流的结构与稳定性。《流体力学杂志》，772:197–224，2015年。[35] R. A. Wooding、S. W. Tyler 和 I. White。蒸发盐湖下方地下水中的对流：1. 失稳起始。《水资源研究》，33(6):1199–1217，1997年。[36] L.-S. Young。什么是SRB测度，哪些动力系统具有这类测度？《统计物理学杂志》，108(5-6):733–754，2002年。[37] S. Zelik。具有超临界非线性的非线性反应扩散系统的吸引子及其维数。《意大利国家科学院*XL*辑：数学与应用回忆录》*(5)*，24:1–25，2000年。