arXiv:2603.01366v1 [cs.LO] 2 Mar 2026

NM-DEKL$^3_\infty$：三层非单调演化依赖类型逻辑

Peng Chen

2026年3月3日

摘要

我们提出一种新的依赖类型系统 NM-DEKL$^3_\infty$（非单调依赖知识增强逻辑），用于形式化动态环境中不断演变的知识。该系统采用三层架构，将计算层、构造性知识层和命题知识层分离开来。我们定义了其语法与语义，并确立了可靠性和等式完备性；我们构造了一个句法模型，并证明它是模型范畴中的始对象，由此可推出等式完备性。我们还给出了向 μ-演算的嵌入，以及严格的表达能力包含关系（包括对非双模拟不变性质的表达能力）。

目录

1 引言 51.1 与现有系统的关系.5

2 NM-DEKL$^{3}_{\infty}$ 6 的语法

2.1 三个宇宙与分层.6 2.2 计算层 Uc 与轨迹.6 2.2.1 有限轨迹（归纳的）. 7 2.2.2 无限轨迹（余归纳的）.7 2.3 构造性知识层 Type$_{\ell}$ 与非单调性 . 7 2.4 恒等类型.8 2.5 构造性知识与因果推理.9 2.6 命题知识层 Prop.9 2.7 μ/ν 不动点（Prop 层）.10 2.8 句法相等（定义相等）.10 2.9 非单调性与限制.10 2.10 判断形式与演算规则.11 2.10.1 判断形式.12 2.10.2 代换.12 2.10.3 上下文规则.13 2.10.4 计算层 Uc 规则.13 2.10.5 迹规则.14 2.10.6 构造层 Type$_{\ell}$ 规则.14 2.10.7 命题层规则.15 2.10.8 恒等类型.15 2.10.9 定义等式规则.15

3 元理论（I）：归约与正规化 16

3.1 主体归约.16 3.2 生产性.16 3.3 归约关系与 Cofix 策略.17 3.4 正规化.17

3.4.1 计算层的强正规化 . . . 18 3.4.2 Type$_{\ell}$ 的相对正规化.18 3.5 一致性.19

3.5.1 空命题没有证明.19

4 NM-DEKL$^{3}_{\infty}$ 20 的范畴语义

4.1 基本范畴结构.20 4.1.1 轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$ .20

4.1.2 无限迹范畴.20 4.2 三层语义结构.21 4.2.1 局部笛卡尔闭范畴与依赖类型.22 4.2.2 计算层：Uc $\mapsto C$ .22 4.2.3 构造层：Type $_\ell \mapsto [\mathcal{T}_f^{op}, C]$ .22 4.2.4 命题层：Prop $\mapsto$ 子对象分类子.23 4.2.5 纤维化结构.23 4.3 非单调性的语义定理.23 4.4 K_∞ 的极限语义.27 4.5 范畴刻画定理.28 4.5.1 三层预层-CwF 模型类 . . . . . 28 4.5.2 主要定理：内语言与分类对象 29 4.5.3 增强 I：非单调性当且仅当预层逆变.30 4.5.4 增强 II：Prop-μ 片段及其与μ-演算的等价性.

5 元理论（II）：可靠性、完备性与初始性 32

5.1 可靠性定理.32 5.2 模型范畴与句法模型.33 5.2.1 模型范畴$\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$ .33 5.2.2 模型态射.33 5.2.3 句法模型 $\mathcal{S}$ .34 5.2.4 初始性定理.35 5.3 完备性与一致性.35 5.3.1 解释相干性（模型相干性） . . . . . 35 5.3.2 一致性与模型相干性.36 5.3.3 命题层（相对）完备性 . . . . . 37 5.4 初始性定理（完整证明）.37 5.5 等式完备性.37 5.5.1 句法相等（定义相等） . . . . . 38 5.5.2 语义相等（在模型中的解释） . . . . . 38 5.5.3 等式完备性定理及证明 . . . . . 38 5.5.4 由完备性推出的模型相干性（可选） . . . . 39 5.6 μ/ν 与非单调性.39 5.6.1 主要问题.39 5.6.2 语义层分离.40 5.7 NM-DEKL$^3_\infty$ 模型的态射.41

6 嵌入定理：计算树逻辑/线性时序逻辑/μ-演算 43

6.1 NM-DEKL$^3_\infty$ 与 LTL/CTL.43

6.1.1 语义基底对齐.43 6.1.2 线性时序逻辑和计算树逻辑的语义.43 6.1.3 嵌入保持性（细化）.43 6.1.4 表达能力比较.44 6.1.5 推理能力比较.45 6.1.6 严格表达能力层级.45 6.1.7 表达能力差距关键定理.46

6.2 μ-演算嵌入定理.48 6.3 严格表达力扩展定理.48 6.4 与 μ-演算的比较：双向翻译 . . . . . 48 6.4.1 Kripke结构与语义设定.48 6.4.2 方向 1：μ-演算 $\to$ 命题-μ （嵌入）. . . . . 49 6.4.3 方向 2：命题-$\mu \to \mu$-演算（反向翻译）. . 49 6.4.4 两种翻译的等价性与表达能力 50 6.5 非双模拟不变性质的可表达性 . . . . . 50 6.5.1 非双模拟不变性质.51 6.5.2 定理：非双模拟不变性质可表达.51 6.5.3 与 μ-演算的比较.51

7 结论 52

8 附录 53

8.1 完整证明（I）：初始性定理.53 8.2 完整证明（II）：可靠性定理（规则归纳） . . . . . 54 8.3 NM-DEKL$^3_\infty$ 的语法.54

参考文献 **54**

1 引言

NM-DEKL$^3_\infty$ 对动态环境中的演化知识进行建模，围绕三**个层**（Uc/类型ℓ/命题）、**双重轨迹**（有限/无限）、**非单调性**（预层逆变性）和**计算内核**（Uc 独立于类型ℓ/命题）展开。推导即构造： $\Gamma \vdash k$：$K_f(\tau)$ 表示存在一个知识见证 k；非单调性由限制的函子定律和预层逆变性刻画（失败的定义及其与非单调性的关系见定义 2.4、定理 2.5 和第 4.3 节）。本文给出了语法和范畴语义、可靠性/等式完备性/初始性，以及相对于μ-演算的嵌入和表达能力结果；该系统建立在依赖类型论、范畴语义（CwF、预层）和模态 μ-演算[7, 4, 1, 6]之上。

在类型论领域，NM-DEKL$^3_\infty$ 不同于静态的 MLTT/HoTT：它将依赖类型与知识演化 和非单调推理相结合，对这样一种动态过程进行形式化：随着轨迹延伸，知识可能受到限制或失效。其应用包括对动态知识推理、因果与反事实推理，以及不确定性或知识更新情境下的建模（例如医学或法律推理）进行形式化。

1.1 与现有系统的关系

对于依赖类型论和范畴语义，我们采用 Martin-Löf 类型论[7], CwF 和内在类型论语义[4, 8], 范畴论[1], 以及类型论语义[10]；对于命题不动点和模态，我们参考 μ-演算[6, 2]。与 $\mathbf{MLTT}/\mathbf{HoTT}$ 相比：后者关注静态类型和（同伦）等同性，其模型是静态范畴或 ∞-群胚[11], ，而 NM-DEKL$^3_\infty$ 使用预层，并限制模型以构造一个动态的、非单调的构造层。与 **μ-演算** 相比：我们将 Prop 层嵌入 μ-演算，并证明严格的表达能力包含关系（包括非双模拟不变性质）；详见嵌入和表达能力章节。与$\mathbf{LTL}/\mathbf{CTL}$ 相比：时序量化和路径量化嵌入 Prop 层，同时保持语义不变[9, 5, 3]；详见 LTL/CTL 嵌入定理。

2 NM-DEKL$^3_\infty$ 的语法

记号约定 我们在全文中始终一致地使用以下符号（避免与其他记号混用）：

- **构造层宇宙**类型$_\ell$ （层级为 Type$_{\ell,\ i}$）；我们不使用 Type$_\ell$、Type_L 等。

- **构造性知识纤维** K_f：在语法上是类型族 FinTrace $\to$Type$_\ell$，在语义上是预层 $K_f : \mathcal{T}_{\mathrm{op}\ f} \to \mathcal{C}$。
- **轨迹扩展类型**Ext$_f(\tau,\ \tau')$；**限制项构造子**restrict$(\epsilon,\ k)$：沿扩展 ϵ：Ext$_f(\tau,\ \tau')$，将项 $k$of $K_f(\tau')$ 限制为 $K_f(\tau)$ 的一个项。Ext$_f$ 和 restrict 一起表达非单调性（见第 4.3 节）。

符号表（常用）：Uc/Uc$_i$ 计算宇宙；Type$_\ell$/Type$_{\ell,\ i}$构造宇宙；Prop 命题层；FinTrace/InfTrace 有限迹/无限迹；State、Event、Nat 分别表示状态、事件、自然数；Step 表示状态转换；K_f、 K_∞表示知识纤维；Ext$_f$、restrict 表示轨迹扩展和限制； $[\![-]\!]$表示语义解释； $\equiv$ 表示定义相等。

正式定义如下；分层见第 2 节 2.10.1。

2.1 三个宇宙与分层

该系统包含三个层:

Uc$_0$： Uc$_1$： Uc$_2$： $\cdots$和 类型$_{\ell,\ 0}$： 类型$_{\ell,\ 1}$： 类型$_{\ell,\ 2}$： $\cdots$和 命题： 类型$_{\ell,\ 0}$

计算层 Uc 不依赖于 Type$_\ell$ 或命题，从而确保拥有独立的计算内核（见第 2 节 2.10.1 中的分层 ）。

2.2 计算层Uc 与轨迹

计算层的基本类型:

$$State : \mathsf{Uc}_0, \quad Event : \mathsf{Uc}_0, \quad Nat : \mathsf{Uc}_0$$

分别表示状态、事件和自然数。

状态转移函数 Step 为

$$\mathsf{Step} : \mathsf{State} \to \mathsf{Event} \to \mathsf{State} \to \mathsf{Uc}_0$$

（由事件触发的转移）。

基本类型

$$\begin{aligned}\mathsf{State} &: \mathsf{Uc}_0\\ \mathsf{Event} &: \mathsf{Uc}_0\\ \mathsf{Nat} &: \mathsf{Uc}_0\end{aligned}$$

2.2.1 有限轨迹（归纳的）

有限轨迹定义如下:

$$\mathsf{FinTrace} : \mathsf{Uc}_0$$

带有构造子

$$\begin{aligned}nil &: State \to \mathsf{FinTrace}\\ step &: \mathsf{FinTrace} \to Event \to State \to \mathsf{FinTrace}\end{aligned}$$

nil 是始对象状态；步进通过一次转移扩展轨迹。

2.2.2 无限轨迹（余归纳的）

无限轨迹定义如下

$$\mathsf{InfTrace} : \mathsf{Uc}_0$$

带有析构子

$$\begin{aligned}head &: \mathsf{InfTrace} \to State\\ tail &: \mathsf{InfTrace} \to Event \times \mathsf{InfTrace}\end{aligned}$$

头部返回当前状态；尾部返回下一个事件和轨迹的剩余部分。

2.3 构造性知识层类型$_\ell$ 与非单调性

构造层由一个预层范畴给出:

$$\mathsf{Ty}_\ell(\Gamma) = [\mathcal{T}_f^{op}, \mathcal{C}/\Gamma]$$

类型$_\ell$ 类型被解释为由有限轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$ 索引的类型族；每个 τ 对应一个类型 $B(\tau)$。

知识族

$$\begin{aligned}K_f &: \mathsf{FinTrace} \to \mathsf{Type}_{\ell,0}\\ K_\infty &: \mathsf{InfTrace} \to \mathsf{Type}_{\ell,0}\end{aligned}$$

轨迹扩展

$$\mathsf{Ext}_f : \mathsf{FinTrace} \to \mathsf{FinTrace} \to \mathsf{Uc}_0$$

非单调限制规则

$$\frac{\Gamma \vdash \epsilon : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau') \quad \Gamma \vdash k : K_f(\tau')}{\Gamma \vdash \mathsf{restrict}(\epsilon, k) : K_f(\tau)}$$

该系统不提供 K_f（τ）$\to K_f$（τ'）。

2.4 恒等类型

（恒等类型用于形式化轨迹和因果等价；参见语义和完备性的讨论。）

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash \mathsf{Id}_A(a, b) : \mathsf{U}_i}$$

$$\Gamma \vdash \mathsf{refl}_a : \mathsf{Id}_A(a, a)$$

恒等消去（J）

给定一个依赖类型族（动机）：

$$\Gamma \vdash C : \Pi(x : A).\, \Pi(y : A).\, \Pi(p : \mathsf{Id}_A(x, y)).\, \mathsf{U}_j$$

以及自反情形的证明项：

$$\Gamma \vdash d : \Pi(x : A).\, C(x, x, \mathsf{refl}_x)$$

消去规则为：

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A : \mathsf{U}_i \\ \Gamma \vdash C : \Pi(x : A).\Pi(y : A).\Pi(p : \mathsf{Id}_A(x, y)).\mathsf{U}_j \\ \Gamma \vdash d : \Pi(x : A).C(x, x, \mathsf{refl}_x) \\ \Gamma \vdash a : A \\ \Gamma \vdash b : A \\ \Gamma \vdash p : \mathsf{Id}_A(a, b)\end{array}}{\Gamma \vdash J_{A,C}(d, a, b, p) : C(a, b, p)}$$

计算规则（β-规则）

$$\Gamma \vdash J_{A,C}(d, a, a, \mathsf{refl}_a) \;\equiv\; d(a) : C(a, a, \mathsf{refl}_a)$$

2.5 构造性知识与因果推理

构造层不仅用于类型，也用于因果推理：结合轨迹和因果链来强化推理。

定义 2.1（因果推理）。 在 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 中，因果推理通过因果链来表达：如果状态 s 通过事件 e 到达 s'（即 步进（s， e， s'）），就可以形成一步因果；给定一条有限轨迹 τ，如果存在序列 e_1， e_2，……， e_n，使状态通过步进从 s_0 演化到 s_n，则可以沿着 τ 推导出一条因果证明链。形式上，沿着 τ 的因果证明如下：

$$\mathrm{CausalProof}(\tau) \iff \exists e_1, \ldots, e_n : \mathsf{Event}.\ s_0 \xrightarrow{e_1} s_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_n} s_n,$$

其中，每个步进 $s_i \xrightarrow{e_{i+1}} s_{i+1}$ 都对应于步进（s_i， e_{i+1}， s_{i+1}）。

定理 2.2（构造性知识与逻辑推理）。 在 *NM- DEKL*$^3_\infty$ 中，构造层不仅能够表示类型，还能通过因果链和轨迹结构来表示更丰富的逻辑推理，包括动态推理、因果推理和依赖历史的推理。

证明思路。 因果链（定义 2.1）与 K_f 以及对轨迹的限制，共同表达了沿轨迹的知识依赖，以及事件之间因果链上的知识依赖。这由构造层以及推导系统中的轨迹/步进结构实现，因此，NM-DEKL$^3_\infty$ 能表达比纯粹真值命题更复杂的推理；关于相对于 μ-演算的非双模拟不变可表达性定理，请参见第6节。 □

2.6 命题层 知识层 命题

命题层被解释为子对象分类器：

$$\mathsf{Prop}(\Gamma) = \mathsf{Sub}(1_\Gamma)$$

类型为命题的项是证明无关命题。

$\top$， $\bot$: 命题∧， $\vee$， $\to$: 命题 $\to$ 命题 $\to$ 命题$\forall_{x:A} P(x)$: 命题 $\exists_{x:A} P(x)$: 命题（其中 $\Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i$， Γ， $x : A \vdash P$: 命题)

2.7 μ/ν 不动点（Prop 层）

若 F: 命题 $\to$命题是单调的:

$$\mu X.F(X) : \mathsf{Prop} \qquad \nu X.F(X) : \mathsf{Prop}$$

通过折叠/展开: $F(\mu X.F) \leftrightarrow \mu X.F$。层分离定理（定理 5.22）确保 μ/ν 属于 Prop 不会破坏 Type$_\ell$ 的非单调性。

2.8 句法相等（定义相等）

定义 2.3（定义相等 $\equiv$）。在 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 中，当 t 和 t' 在推导系统中通过一系列归约/扩展步骤可相互转换时，定义相等 $t \equiv t'$： A 成立；我们记作 $t \equiv t'$。

定义相等是一种传递等价关系。其生成元包括（参见"定义等式规则"小节）：

- β-规则（必需）：
$$(\lambda x.\, t)\, b \equiv t[b/x].$$
- η-展开（若采用）： $\lambda x.\,(F\,x) \equiv F$ 对于 F： $A \to B$ 满足 $x \notin \mathrm{FV}(F)$。
- 计算规则：例如， J 在恒等类型中对 自反性 的 β-规则，以及 判断相等 中的 限制函子定律。

2.9 非单调性与限制

非单调性通过限制的语法规则和函子定律形式化；在语义上，它对应于预层反变性（见第 4.3 节）。

$$\mathsf{restrict} : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau') \to K_f(\tau') \to K_f(\tau)$$

"失败"的形式化定义 在语法和模型中，**失败** 被定义为构造性不可得:

- **语法**：在轨迹 τ 上"知识失败"意味着不存在满足 $\Gamma \vdash k$： $K_f(\tau)$ 的 k，即 $K_f(\tau)$ 在该上下文中没有元素（没有证据）。这里的失败，是指特定类型在给定轨迹和上下文中失败。
- **模型**：在模型 $\mathcal{M}$ 中，当 Γ 处的 $K_f(\tau)$ 纤维没有任何项时，轨迹 τ 失败；也就是说，$\mathrm{Tm}_\ell([\![\Gamma]\!],\ [\![K_f(\tau)]\!])$ 为空（或该子对象是始对象）。

因此，“失败 $=$ 不可构造性”在形式上意味着没有证据；只有当存在 $\epsilon\colon \mathrm{Ext}^f(\tau, \tau')$ 时，限制才能从 $K_f(\tau')$ 得到 $K_f(\tau)$ 的一个项。如果 τ' 不可达，或不存在扩展证明，就无法为 $K_f(\tau)$ 构造证据，这与模型中的空纤维相符。

定义 2.4（失败）。在 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 中，给定类型 A 和上下文 Γ，如果 A 在 Γ 处于模型 $\mathcal{M}$ 中失败，这意味着 A 在 $\mathcal{M}$ 中的 Γ 处没有元素，即项 $(\llbracket\Gamma\rrbracket_{\mathcal{M}}, \llbracket A\rrbracket_{\mathcal{M}})$ 为空。如果无法在 Γ 处构造满足 $t : A$ 的项 t，我们就说推导 $\Gamma \vdash t\colon A$ 失败。因此，失败指的是“不可构造”，而不是“推导否定”。

定理 2.5（非单调性与失败之间的关系）。在 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 中，非单调性是系统的全局性质，而失败指的是某个类型在推导中不可构造。如果某个类型变得不可构造（失败），系统就在该处表现出非单调性；反过来，非单调性（只允许从长轨迹限制到短轨迹，不允许反向构造）可能使某个类型在短轨迹上没有元素，即导致失败。

证明。**直觉**：非单调性是系统的局部性质：**无法从长轨迹推导出短轨迹**。失败是指某个类型在给定轨迹上“不可构造”。二者的联系是：如果某个类型在某条轨迹上无法构造（即发生失败），那么非单调性便表现为只能沿着缩短的轨迹进行推导，而不能从长轨迹推导到短轨迹。

形式化地说：根据定义 2.4，如果类型 A 在某个上下文或轨迹中没有可构造的项（即在该模型中，$\mathrm{Tm}(\llbracket\Gamma\rrbracket, \llbracket A\rrbracket)$ 为空），那么 A 就会在那里失败。这体现了非单调性：推理时无法从长轨迹延伸到短轨迹，因为短轨迹可能没有可构造的项。因此，非单调性可能导致某些轨迹上的失败；二者彼此相关。 □

非单调性的来源（简述）系统中的非单调性来自：(i) 轨迹缩短时，某个类型在短轨迹上的纤维可能没有截面（类型消失）；(ii) 当扩展 $\epsilon\colon \mathrm{Ext}^f(\tau, \tau')$ 无法到达或无法证明时，就无法通过限制从 $K_f(\tau')$ 得到 $K_f(\tau)$ 的项（路径／扩展切割）。在模型中，这两种情况都表现为“只有逆变限制，没有协变构造”，对应于事件驱动或状态回溯语义下的信息不可逆性；关于失败和推理路径，参见第 4.3 节。

2.10 判断形式和演算规则

本小节汇集判断形式、Uc 规则、迹规则、类型 ℓ 规则（包括限制和函子定律）、Prop 规则（包括 μ/ν 折叠/展开），

以及供参考和元理论证明使用的定义相等；前面的小节均为概念性内容。

2.10.1 判断形式

基本判断形式如下：

$$\begin{array}{l} \vdash \Gamma \text{ ctx 上下文 良构} \Gamma \vdash A\text{: Uc}_i \text{ 计算} \\ \text{类型} \Gamma \vdash B \text{ :Type}_{\ell,\ i} \text{ 构造性类型} \\ \Gamma \vdash P\text{: Prop 命题类型} \Gamma \vdash t\text{: } A \text{ 项} \\ \Gamma \vdash t \equiv t'\text{: } A \text{ 定义相等} \end{array}$$

包含以下三层：

$\text{Uc}_i \subseteq$ 计算层， $\text{Type}_{\ell,\ i} \subseteq$ 构造层， $\text{Prop} \subseteq \text{Type}_{\ell,\ 0}$。

分层

- **允许**：类型$_\ell$ 以及命题类型/命题的形成可以依赖于 Uc 中的变量（例如 Γ, x： $A \vdash B$： 类型$_\ell$，其中 A： Uc）。
- **禁止**：Uc 类型的形成不得依赖于类型$_\ell$ 或命题（不存在从“$\Gamma \vdash P$： 命题”到“$\Gamma \vdash A$： Uc”的规则）。
- **禁止**：不允许从命题消去到 Uc（不存在“若 $\Gamma \vdash p$： P，则 $\Gamma \vdash t$： Uc”），因此计算内核保持纯粹。

2.10.2 代换

代换是初始性证明和 CwF 结构的基础。下面给出最简设置。

代换判断

$$\Delta \vdash \sigma : \Gamma \quad (\sigma \text{ 是从 } \Delta \text{ 到 } \Gamma \text{的代换})$$

替换下的类型与项： $A[\sigma]$, $t[\sigma]$ （当 $\Gamma \vdash A$: Uc_i 且 $\Delta \vdash \sigma$： Γ， $\Delta \vdash A[\sigma]$: Uc_i 时；项亦同）。

复合与恒等

$$(\sigma \circ \delta) : \Delta \to \Gamma \quad \text{when } \Delta \vdash \sigma : \Psi,\ \Psi \vdash \delta : \Gamma; \quad \text{id}_\Gamma : \Gamma \to \Gamma.$$

定义相等中的替换律

$$A[\mathrm{id}] \equiv A, \quad A[\sigma \circ \delta] \equiv (A[\sigma])[\delta]; \quad \text{same for terms.}$$

引理 2.6（代换引理）。若 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$，则类型与项的可推导性得以保持：若 $\Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i$ 则 $\Delta \vdash A[\sigma] : \mathsf{Uc}_i$；若 $\Gamma \vdash t : A$则 $\Delta \vdash t[\sigma] : A[\sigma]$。对类型$\ell$与命题同样成立。恒等与复合满足 $A[\mathrm{id}] \equiv A$, $A[\sigma \circ \delta] \equiv (A[\sigma])[\delta]$（对项亦然）。

2.10.3 上下文规则

空上下文

$$\frac{}{\vdash \cdot \ \mathsf{ctx}}$$

空上下文是良构的。ctx 是元层次判断标记。

扩展

$$\frac{\vdash \Gamma \ \mathsf{ctx} \qquad \Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i}{\vdash \Gamma, x : A \ \mathsf{ctx}}$$

若 Γ 是良构的且 $\Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i$，则 $\Gamma, x : A$ 是良构的。

2.10.4 计算层Uc规则

宇宙形成

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{Uc}_i : \mathsf{Uc}_{i+1}}$$

变量

$$\frac{\vdash \Gamma, x : A, \Delta \ \mathsf{ctx}}{\Gamma, x : A, \Delta \vdash x : A}$$

Π-类型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathsf{Uc}_i}{\Gamma \vdash \Pi x : A.\, B : \mathsf{Uc}_i}$$

λ-引入

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, t : \Pi x : A.\, B}$$

应用

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi x : A.\, B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\, a : B[a/x]}$$

2.10.5 迹规则

有限迹　　e

$$\frac{\Gamma \vdash s : \mathsf{State}}{\Gamma \vdash \mathsf{nil}(s) : \mathsf{FinTrace}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : \mathsf{FinTrace} \qquad \Gamma \vdash e : \mathsf{Event} \qquad \Gamma \vdash s : \mathsf{State}}{\Gamma \vdash \mathsf{step}(\tau, e, s) : \mathsf{FinTrace}}$$

扩展关系　　ation

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : \mathsf{FinTrace}}{\Gamma \vdash \mathrm{id}_\tau : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \epsilon_1 : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau') \qquad \Gamma \vdash \epsilon_2 : \mathsf{Ext}_f(\tau', \tau'')}{\Gamma \vdash \epsilon_2 \circ \epsilon_1 : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau'')}$$

2.10.6 构造性层 类型$_\ell$ 规则

类型$_\ell$ **宇宙**

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{Type}_{\ell,i} : \mathsf{Type}_{\ell,i+1}}$$

轨迹索引族

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : \mathsf{FinTrace}}{\Gamma \vdash K_f(\tau) : \mathsf{Type}_{\ell,0}}$$

限制

$$\frac{\Gamma \vdash \epsilon : \mathsf{Ext}_f(\tau, \tau') \qquad \Gamma \vdash k : K_f(\tau')}{\Gamma \vdash \mathsf{restrict}(\epsilon, k) : K_f(\tau)}$$

限制函子定律（判断相等）以下是确保类型$_\ell$ 构成预层的定义相等（判断相等）规则；当句法模型按 ≡取商后，函子性成立。

$$\mathsf{restrict}(\mathrm{id}, k) \equiv k, \qquad \mathsf{restrict}(\epsilon_1, \mathsf{restrict}(\epsilon_2, k)) \equiv \mathsf{restrict}(\epsilon_2 \circ \epsilon_1, k).$$

示例：restrict(id k) $\equiv k$ 表示沿恒等扩展进行限制不会改变证据；restrict(ϵ_1,restrict(ϵ_2, k)) $\equiv$ restrict($\epsilon_2 \circ \epsilon_1, k$)表示沿 $\tau \to \tau'' \to \tau'$进行两次限制等同于沿复合扩展进行一次限制，这与预层函子定律相符。

2.10.7 Prop 层规则

命题宇宙

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{Prop} : \mathsf{Type}_{\ell,0}}$$

$\wedge$ 引入

$$\frac{\Gamma \vdash P : \mathsf{Prop} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathsf{Prop}}{\Gamma \vdash P \wedge Q : \mathsf{Prop}}$$

μ-形成（需要单调性）

$$\frac{\Gamma, X : \mathsf{Prop} \vdash \varphi(X) : \mathsf{Prop} \qquad (\varphi \text{ monotone/positive in } X)}{\Gamma \vdash \mu X.\varphi(X) : \mathsf{Prop}}$$

μ 折叠/展开（证明项） 引入与消去由证明项给出，而非逻辑符号 $\Rightarrow$:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{fold} : \varphi(\mu X.\varphi) \to \mu X.\varphi} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{unfold} : \mu X.\varphi \to \varphi(\mu X.\varphi)}$$

它们在定义相等下互为逆（例如 $\mathsf{fold}(\mathsf{unfold}(w)) \equiv w$）。 ν 以类似方式定义（$\mathsf{out} : \nu X.\psi \to \psi(\nu X.\psi)$、$\mathsf{in}$ 等）。

2.10.8 恒等类型

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash \mathsf{Id}_A(a,b) : \mathsf{Uc}_i}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{refl}_a : \mathsf{Id}_A(a,a)}$$

消去规则 J 省略。

2.10.9 定义相等规则

β

$$(\lambda x.\, t)\, a \equiv t[a/x]$$

η

$$\lambda x.\, (f\, x) \equiv f$$

等式闭包

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv u : A \qquad \Gamma \vdash u \equiv v : A}{\Gamma \vdash t \equiv v : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \equiv u : A}{\Gamma \vdash u \equiv t : A}$$

3 元理论（I）：归约与正规化

3.1 主体归约

如果 $\Gamma \vdash t : A$ 且 $t \to t'$，那么 $\Gamma \vdash t' : A$（类型在归约下得以保持）。下面的归约和 cofix 策略是规范化陈述所必需的。

3.2 生产性

对于余归纳对象（例如 InfTrace），可以使用 cofix 构造无限对象，但必须满足守卫性 条件。

守卫条件 设 InfTrace 为以下余归纳类型：

$$\mathsf{InfTrace} \;\cong\; State \times (Event \times \mathsf{InfTrace})$$

我们允许

$$\mathsf{cofix}\ f.\, t$$

构造无限轨迹，前提是满足守卫性条件：

在 t 中，每次使用递归变量 f 都必须位于一层可观测结构之后，即位于外部构造子内部

$$State \times (Event \times \mathsf{InfTrace}).$$

形式上，有效定义的形式为

$$\mathsf{cofix}\ f.\, \langle s, (e, f') \rangle$$

其中 f' 可以包含对 f 的递归调用，但此类调用必须出现在 $(e, \ \cdot)$ 的第二分量中。

例如：

$$\mathsf{cofix}\ f.\ \langle s,\ (e,\ f)\rangle$$

有效，

而

$$\mathsf{cofix}\ f.\ f$$

则不是。

这确保了，对于任何用 cofix 构造的对象，每次应用析构子

$$head : \mathsf{InfTrace} \to State, \qquad tail : \mathsf{InfTrace} \to Event \times \mathsf{InfTrace}$$

都会立即产生一层可观察结构，从而保证余归纳对象的生产性。

3.3 归约关系与 Cofix 策略

为精确陈述正规化，我们固定归约关系和 cofix 展开策略。

归约 $t \to t'$ 由以下规则生成（在上下文和 $\equiv$ 下封闭）：

- β: $(\lambda x.\, t)\, v \to t[v/x]$;
- **恒等** J-β: 消去自反性时按定义计算;
- 限制-β: restrict(id k) $\to k$, restrict(ϵ_1, restrict(ϵ_2, k)) $\to$ restrict($\epsilon_2 \circ \epsilon_1$, k).

cofix 展开策略 余归纳的展开 采用“观察时展开”：仅当项被头部/尾部析构子观察时才展开一步，从而避免任意展开导致发散。守卫性 通过语法强制执行：递归调用必须出现在构造子的严格正位置（例如 cons、step）中。

3.4 正规化

借助三层结构，可以逐层证明正规化。

3.4.1 计算层的强正规化

定理 3.1 （Uc 的强正规化）。若

$$\Gamma \vdash t : A \quad and \quad \Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}_i,$$

那么 t 在计算层 Uc 中是强正规化的。

证明思路。计算层具有：

- 作为纯 MLTT 子系统的 Uc；
- 不依赖 Type$_\ell$ 或 Prop；
- 没有 μ/ν；
- 不存在一般递归；
- 不存在非结构化共递归定义。

因此，Uc 是一个标准的强正规化依赖类型系统。

可以使用 Girard–Tait 可约性候选或逻辑关系，证明所有类型良构项都强正规化。因此，定理得证。

□

3.4.2 类型的相对正规化ℓ

定理 3.2 （类型ℓ的相对正规化）。 若

$$\Gamma \vdash t : B \quad and \quad \Gamma \vdash B : \mathsf{Type}_{\ell,i},$$

那么，只要cofix 不展开， t 就是弱规范化的。

证明思路。类型ℓ 具有：

- 非单调限制仅作为结构映射，不产生新的归约路径；
- 在类型ℓ中没有 μ；
- cofix 仅用于 InfTrace；
- 所有 cofix 均受保护。

因此：不存在发散的构造性证据；限制不会增加归约深度；证据项不会生成无限多个新的可归约表达式。因此，在有限观察下，弱正规化成立。

□

注记 这就是“相对正规化”：如果不展开 cofix，就不存在无限归约链。

3.5 一致性

3.5.1 空命题没有证明

定理 3.3（一致性）。如果

$$\Gamma \vdash t : \bot,$$

那么该系统是不一致的。

证明思路。为了证明一致性，我们证明不存在闭项

$$\vdash t : \bot.$$

不带 μ 扩展:

- 命题被解释为子对象分类子 Ω 的内在逻辑;
- $\bot$ 作为初始子对象;
- 如果基范畴是一致的（存在非始对象），$\bot$就没有全局截面。

因此，在任何一致模型中，$[\![\bot]\!] = \emptyset$。根据可靠性，如果 $\vdash t : \bot$，那么 $[\![t]\!]$就会是该空对象的一个元素，这就产生了矛盾。因此，该系统是一致的。□

Set 模型（具体地体现一致性）取基范畴 $\mathcal{C}$ =**Set** 和 $\mathcal{T}_f$有限迹范畴（由 State,Event 生成的自由范畴）。那么 PSh($\mathcal{T}_{\mathrm{op}f}$, **Set**) 就给出了 Type$_\ell$ 的预层语义；Prop 是子对象分类子 Ω，$\bot$是初始子对象（空集/空截面）。根据可靠性，不存在闭项 $\vdash t$: $\bot$，因此在该模型中 $[\![\bot]\!] = \emptyset$；一致性得证。

重要说明 如果将 μ/ν 扩展到命题，则需要满足单调性条件以保持一致性。仅使用单调不动点时，一致性仍由标准 μ-演算语义保证。

摘要 主体归约、强正规化(Uc)、相对正规化 (类型ℓ)以及一致性都可以按层建立。

4 NM-DEKL$^3_\infty$ 的范畴语义

本节仅介绍模型结构，不再重复动机。计算层在 CwF 中进行解释；构造层在预层范畴 $[\mathcal{T}_{\text{对偶}\,f}, \mathcal{C}/\Gamma]$中进行解释；命题层则解释为子对象分类器 $\mathsf{Sub}(1_\Gamma)$。模型中的非单调性由限制对应的自然变换给出：$[\![\text{限制}(\epsilon, k)]\!] = [\![K_f]\!](m_\epsilon)([\![k]\!])$。

我们给出精确的范畴语义。首先描述轨迹范畴，然后介绍三层模型，最后讨论无限知识的非单调性和极限语义。

4.1 基本范畴结构

4.1.1 轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$

定义 4.1 (轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$)。 令状态 为状态集合，令事件 为事件集合。有限轨迹构成一个自由范畴：

$$\mathcal{T}_f = \mathrm{FreeCat}(\mathsf{State}, \mathsf{Event}).$$

结构：

- 对象：状态 $s \in$ 状态；
- 态射：从 s 到 s'，所有从 s 到 s'的有限事件序列；
- 复合：序列的串接；
- 恒等：空序列。

$\mathcal{T}_f$ 刻画有限演化的复合：对象是状态 $\mathsf{Ob}(\mathcal{T}_f)$ =状态，态射是有限事件序列（有限轨迹），复合是串接，恒等是空序列 $\mathsf{id}_s : s \to s$。作为态射的事件序列只体现复合结构；某个事件能否在某个状态发生，以及转移函数，都是自由范畴中未包含的额外语义。

4.1.2 无限轨迹范畴

自由范畴 $\mathcal{T}_f$ 描述有限可复合结构：态射是有限事件序列，复合是串接。因此它编码“有限演化”。无限轨迹更适合建模为“永不终止的流”，通常通过余代数（观察/展开）而非代数（生成）。

定义 4.2（无限轨迹的余代数结构）。设函子

$$F(X) = \mathsf{State} \times (\mathsf{Event} \times X)$$

定义在一个合适的范畴 C 上。若终余代数 νF 存在，则令

$$\mathsf{InfTrace} := \nu F$$

其结构映射为

$$\mathrm{out} : \mathsf{InfTrace} \to \mathsf{State} \times (\mathsf{Event} \times \mathsf{InfTrace}).$$

这刻画了无限演化。

在**集合范畴**中，若 State 和 Event 是集合，则终余代数存在（依据标准余代数理论）。

含义： $F(X)$ = 状态 $\times$ (事件 $\times$ X) 一个 F-结构的元素包括：当前状态 $+$ 下一事件 $+$ 剩余部分（同样是一个 F-结构）。因此，对于“无限轨迹对象”，我们可以观察到：当前状态 $s \in$ State；下一事件 $e \in$ Event；以及作为无限轨迹的其余部分。结构映射 out：InfTrace $\to$ State $\times$ (Event $\times$ InfTrace) 将一条无限轨迹分解为头部（状态 $+$事件）和尾部（剩余部分）。

终余代数一个 F-余代数是一个二元组 (X, γ)，其中 γ：$X \to F(X)$。终余代数 $(\nu F, \mathrm{out})$ 满足：对于任意 (X, γ)，都存在唯一的余代数态射 $[\![-]\!]$: $X \to \nu F$，使得

$$\mathrm{out} \circ [\![-]\!] = F([\![-]\!]) \circ \gamma.$$

因此，νF 是“所有可能的无限行为”的规范容器；任何具有结构 $X \to$ State $\times$ (Event $\times$ X) 的系统都唯一地映射到 νF，从而给出其行为语义。

在 集合范畴 在 **集合范畴**中，νF （同构于）无限序列（s_0，e_0，s_1，e_1，s_2，e_2，.....）。映射的形式为头部/尾部：out（完整轨迹） = (s_0，(e_0，rest))。

4.2 三层语义结构

我们使用纤维化局部笛卡尔闭范畴（LCCC）：

- **计算层**： $\mathsf{Uc} \mapsto C$ 具有 C 一个局部笛卡尔闭范畴。

- **构造层**：类型$_\ell \mapsto \mathrm{PSh}(\mathcal{T}_f,\ C) = [\mathcal{T}_f^{op}, C]$。
- **命题层**：Prop $\mapsto \Omega$，其中 Ω 是 C中的子对象分类器。

因此，Uc $\mapsto C$，Type$_\ell \mapsto$ PSh($\mathcal{T}_f,\ C$)，Prop $\mapsto \Omega$。这便构成了一个纤维化局部笛卡尔闭范畴，其构造层是计算层之上的预层纤维。

4.2.1 局部笛卡尔闭范畴与依赖类型

令 C 为一个局部笛卡尔闭范畴（LCCC）。这是一个关键的结构性假设。

- 笛卡尔闭范畴（CCC）具有 $A \times B$ 和 $A \to B$。
- 局部笛卡尔闭范畴还要求，对每个对象 X，切片 C/X都是一个笛卡尔闭范畴。

这对应于依赖类型论：$\Sigma_{x:X} A(x)$ 和 $\Pi_{x:X} A(x)$。因此，C 是局部笛卡尔闭范畴，当且仅当其语义支持依赖类型、上下文替换和依赖函数构造。

4.2.2 计算层：Uc $\mapsto C$

计算层在局部笛卡尔闭范畴中进行解释：Uc $\mapsto C$。它承载数据（例如 Nat、Bool）、程序和函数，以及基本的执行结构。C 可以是**集合范畴**、域论范畴，或带有资源的执行对象范畴。这一层本质上是标准编程语言的语义。

4.2.3 构造层：类型$_\ell \mapsto [\mathcal{T}_f^{op}, C]$

构造层是预层范畴 Type$_\ell \mapsto$ PSh($\mathcal{T}_f, C$) $= [\mathcal{T}_f^{op}, C]$。

预层的含义 预层 $F:\ \mathcal{T}_f^{op} \to C$ 为每个状态s指派一个对象 $F(s) \in C$，并为每条轨迹 $t:\ s \to s'$指派一个重指标映射 $F(t)$: $F(s') \to F(s)$。根据反变性，这会将结构从“较晚”拉回到“较早”，并沿轨迹重新解释证据与类型。 $[\mathcal{T}_f^{op}, C]$ 描述随状态和轨迹变化的类型或知识对象； $F(s)$ 是在状态 s 上可构造或可验证的内容。重新索引确保证据与对象在系统演化过程中被一致地传输并接受审计。

4.2.4 命题层：命题 ↦子对象分类子

命题层是子对象分类器：命题 $\mapsto$ 子对象分类子。在 **集合范畴** 中，子对象分类子 $=\{$真，假$\}$；在一般托扑斯中，子对象分类子是真值对象。对于每一个单态射 $m\colon U \hookrightarrow X$，存在唯一的特征映射 $\chi_m\colon X \to$ 子对象分类子。因此，命题 =子对象，性质 = 特征映射；证明论通过子对象与特征映射来解释。

4.2.5 纤维化结构

这三层组织成一个纤维化结构：

$$p : \mathsf{Type}_\ell \to \mathsf{Uc}.$$

含义是：当基（计算层）发生变化时，上面的类型会被重新索引。在依赖类型语义中，代换 σ 对应于拉回。由于 C 是一个局部笛卡尔闭范畴，切片范畴支持 Π/Σ，因此依赖类型在重新索引下得以保持。三层结构是一个纤维化局部笛卡尔闭范畴，其中构造层是计算层之上的预层纤维。总结：计算层 C （基础程序语义）；构造层 $[\mathcal{T}_f^{op}, C]$ （状态与轨迹索引类型/知识）；命题层 子对象分类子（子对象分类器）。

4.3 非单调性的语义定理

定理 4.3 （反变结构的限制）。 设 $K_f\colon \mathcal{T}_f^{op} \to C$是一个预层。那么对于每个态射

$$m : \tau \to \tau'$$

在 $\mathcal{T}_f$ 中存在一个反变映射：

$$\mathrm{res}_m : K_f(\tau') \to K_f(\tau).$$

这个映射由预层结构唯一确定。

证明。 由于 K_f 是反变的，

$$K_f : \mathcal{T}_f^{op} \to C,$$

每个 $m\colon \tau \to \tau'$ 在 $\mathcal{T}_f$ 中都会产生一个态射

$$K_f(m) : K_f(\tau') \to K_f(\tau)$$

在 C中。该结构满足

$$K_f(\mathrm{id}) = \mathrm{id}, \qquad K_f(m \circ n) = K_f(n) \circ K_f(m).$$

因此，限制映射源自预层逆变性。 □

（1）restrict 的模型语义 令 $K_f:\ \mathcal{T}_f^{op} \to C$ 为构造层预层，且 $\epsilon:\ \mathrm{Ext}_f(\tau, \tau')$ 对应于态射 $m_\epsilon:\ \tau \to \tau'$ in $\mathcal{T}_f$。那么在任意模型 $\mathcal{M}$ 中，限制的语义为：

$$[\![\mathsf{restrict}(\epsilon, k)]\!] = [\![K_f]\!](m_\epsilon)\big([\![k]\!]\big),$$

其中

$$[\![K_f]\!](m_\epsilon) : [\![K_f(\tau')]\!] \to [\![K_f(\tau)]\!].$$

So:

- 从 $K_f(\tau')$ 到 $K_f(\tau)$ 的限制映射仅当存在扩展 $\epsilon:\ \tau \to \tau'$ 时才存在；
- 限制由预层逆变性唯一确定；
- 它表示“重新索引／证据的反向解释”，而非“正向构造”。

限制是迹维度上的代换 $=$ 拉回。

（2）模型中的失败：空对象与没有全局元素 在模型中，失败的特征如下。设 Γ 为一个上下文，A为一个类型，其解释为 $[\![A]\!] \to [\![\Gamma]\!]$。如果以下任一等价条件成立，我们就称 A 在模型中于 失败：

1.（无全局元素）态射集$(1_{[\![\Gamma]\!]},\ [\![A]\!]) = \varnothing$；2.（集合语义）项$([\![\Gamma]\!],\ [\![A]\!]) = \varnothing$；3.（若 C 有始对象 0） $[\![A]\!]$ 在 $C/[\![\Gamma$中是始对象
$]\!]$。

注意：“没有全局元素” $\not\equiv$ “对象是始对象”
在一般的局部笛卡尔闭范畴中，两者并不等价。

Thus

$$\text{failure} = \text{no inhabitants (no constructive term)}.$$

这与“不可构造”的句法概念相符。

(3) 非单调性的模型推理 非单调性源于预层逆变性：

$$m : \tau \to \tau' \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{res}_m = K_f(m) : K_f(\tau') \to K_f(\tau),$$

但一般来说，不存在映射 $K_f(\tau) \to K_f(\tau')$。因此：证据可以从长轨迹限制到短轨迹，但不能从短轨迹“正向构造”到长轨迹。这就是非单调性的范畴刻画。

(4) 失败沿限制传播 设 $\mathrm{res}_m: K_f(\tau') \to K_f(\tau)$。若态射集$(1, K_f(\tau')) = \varnothing$，则 k 没有语义值，因此限制(ϵ, k) 也没有。因此：若长轨迹没有项，就不能通过限制得到短轨迹证据。这称为

失败沿限制传播。

注意，这并不意味着 $K_f(\tau) = \varnothing \Rightarrow K_f(\tau') = \varnothing$，除非在 $C =$**集合范畴**中，且"失败 =空集"。

(5) 失败与非单调性 若 τ 处的纤维在 Γ 处失败（态射集$(1, K_f(\tau)) = \varnothing$），则：在 τ 处没有直接证据；唯一可能的来源是来自某个 $\tau' \supseteq \tau$ 的限制；但如果所有延拓轨迹同样没有项，则 τ 永久失败。因此：

失败 = 没有全局元素 =没有正向构造

非单调性 =仅存在逆向限制

这两者在该模型中逻辑等价。非单调性本质上是知识纤维的逆变函子性。

定理 *4.4*（统一语义：单调时间与逆变知识）。设 $\mathcal{T}_f$ 为轨迹范畴（对象为轨迹，态射为扩展），C 为局部笛卡尔闭范畴，且 $K: \mathcal{T}_f^{op} \to C$ 为预层。则：*(1)* $\mathcal{T}_f$ 中的态射$\tau \to \tau'$ 表示时间／状态的单调扩展。*(2)* 对每个m，都有一个限制映射 $K(m): K(\tau') \to K(\tau)$，用于沿轨迹重新索引知识。*(3)* 预层公理并不蕴含$K(\tau) \preceq K(\tau')$或 $K(\tau') \preceq K(\tau)$，因此知识不一定是单调的。*(4)* 该预层可以具有 $m: \tau \to \tau'$，其中 $K(\tau')$在结构上比 $K(\tau)$更丰富。*(5)* 若在给定上下文中 $\mathit{Hom}(1, K(\tau)) = \varnothing$，则该轨迹上的知识不可构造；但这并不意味着 $K(\tau)$是始对象。因此，预层语义在一个范畴结构中统一了单调时间、逆变知识以及可能出现的非单调失败。

定理 *4.5*（预层不会强制单调性，但允许丰富化）。设 C 为一个范畴，$\mathcal{T}_f$ 为一个小范畴（轨迹范畴），且 $K: \mathcal{T}_f^{op} \to C$ 为一个预层。那么：*(1)*（不会强制单调性）仅凭预层公理，无法推出沿每条 $m: \tau \to \tau'$ 知识都单调增加；除非在 C 上添加一个序 $\preceq$ 并假设$K(m)$是相容的，否则无法从 $K(m): K(\tau') \to K(\tau)$ 推出$K(\tau) \preceq K(\tau')$ 或 $K(\tau') \preceq K(\tau)$。*(2)*（允许丰富化）预层

公理并不禁止 $m\colon \tau \to \tau'$比 $K(\tau')$ $K(\tau)$“更丰富”；对于 $C =$**集合范畴**，可以构造一个预层 K，以及某个 $m\colon \tau \to \tau'$，使得 $|K(\tau')| > |K(\tau)|$。

证明。 证明分为两部分。

(1) 预层并不强制单调性。预层是一个函子$K\colon \mathcal{T}_f^{op} \to C$，满足关于 $m\colon \tau \to \tau'$, $n\colon \tau' \to \tau''$ in $\mathcal{T}_f$ 的函子定律 (??)–(??)。这些定律只涉及：对对象和态射的赋值，以及与恒等和复合的相容性。“单调增长”是一种序关系陈述（例如，在集合范畴中 $K(\tau) \subseteq K(\tau')$，或在一般的 C 中 $K(\tau) \preceq K(\tau')$）。预层的定义既没有在 C 上给出任何这样的序，也没有对 $K(m)$ 施加额外条件。因此，仅凭 (??)–(??) 无法推导出 $K(\tau)$ 与 $K(\tau')$ 之间的任何序关系。在集合范畴中，预层的 $|K(\tau')| < |K(\tau)|$ 或 $|K(\tau')| > |K(\tau)|$（见第 (2) 部分）；因此，预层结构并不意味着单调增长。这表明预层并不强制单调性。

(2) 预层允许丰富化：在集合范畴中的显式构造。令$C =$ **集合范畴**。我们构造一个最小的轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$：其对象是两个轨迹点 τ，τ'，态射包括恒等态射和一个非恒等态射 $m : \tau \to \tau'$ （可将其视为有向图$\tau \to \tau'$上的自由范畴）。定义预层 $K : \mathcal{T}_f^{op} \to$ **集合范畴**如下：

- 在对象上：
$$K(\tau) = \{0\}, \qquad K(\tau') = \{0, 1\}.$$
Then
$$|K(\tau')| = 2 > |K(\tau)| = 1,$$
因此，扩展后的轨迹具有“更丰富”的知识。

- 在态射上：

  – 恒等态射映射为恒等函数：
  $$K(\mathrm{id}_\tau) = \mathrm{id}_{\{0\}}, \qquad K(\mathrm{id}_{\tau'}) = \mathrm{id}_{\{0,1\}}.$$

  –由于 K是反变的， $m : \tau \to \tau'$在 $\mathcal{T}_f$中变为 $m^{op} : \tau' \to \tau$在 $\mathcal{T}_f^{op}$中，因此我们需要一个函数 $K(m) : K(\tau') \to K(\tau)$，也就是 $K(m)$: $\{0, 1\} \to \{0\}$。取唯一可能的选择（常值映射）：
  $$K(m)(0) = 0, \qquad K(m)(1) = 0.$$

接下来我们验证 K 满足函子定律。

恒等 (??)。 根据定义， $K(\mathrm{id}_\tau)$ 和 $K(\mathrm{id}_{\tau'})$ 是相应集合上的恒等函数，因此 (??) 成立。

复合 (??). 在这个极小范畴中，唯一的非恒等态射是 m。唯一可能的复合是：

- $\mathrm{id}_\tau \circ \mathrm{id}_\tau = \mathrm{id}_\tau$, $\mathrm{id}_{\tau'} \circ \mathrm{id}_{\tau'} = \mathrm{id}_{\tau'}$;
- $m \circ \mathrm{id}_\tau = m$;
- $\mathrm{id}_{\tau'} \circ m = m$;

不存在 $m \circ m$，因为 m 的陪域是 τ'，而其定义域是 τ。对于这三种情形：(i) 恒等复合由 K 保持；(ii) 对于 $m \circ \mathrm{id}_\tau = m$，反变性要求

$$K(m \circ \mathrm{id}_\tau) = K(\mathrm{id}_\tau) \circ K(m),$$

左端是 $K(m)$，右端是 $\mathrm{id}_{\{0\}} \circ K(m) = K(m)$，因此成立；(iii) 对于 $\mathrm{id}_{\tau'} \circ m = m$，反变性要求

$$K(\mathrm{id}_{\tau'} \circ m) = K(m) \circ K(\mathrm{id}_{\tau'}),$$

左边是 $K(m)$，右边是 $K(m) \circ \mathrm{id}_{\{0,1\}} = K(m)$，因此成立。所以 K 是一个预层。我们构造了一个满足预层公理的 K，以及一个态射 $m\colon \tau \to \tau'$，满足 $|K(\tau')| > |K(\tau)|$。因此，随着轨迹延伸，该预层允许 更丰富的纤维对象（丰富化）。

结论。 (1) 从预层定义只能得到反变重新索引和函子性，得不到任何单调性；(2) 在**集合范畴** 中，有一个明确的预层示例，表明“扩展带来丰富化”并不违反预层公理。定理得证。 □

4.4 K∞ 的极限语义

令 $\pi \in \mathrm{InfTrace}$，并定义其有限前缀：

$$\mathsf{prefix}(n, \pi) \in \mathcal{T}_f.$$

定义 4.6 （ K_∞ 的极限解释）。 定义

$$[\![K_\infty]\!](\pi) = \varprojlim_n [\![K_f]\!]\big(\mathsf{prefix}(n, \pi)\big).$$

i.e.

$$[\![K_\infty]\!](\pi) = \lim_{\longleftarrow n} K_f(\mathsf{prefix}(n, \pi)).$$

这将无限迹上的知识定义为所有有限前缀上知识的逆极限。

定理 4.7（极限存在性）。 若基范畴 C 是完备的，则上述逆极限存在于 C中。

证明。 逆极限是以自然数为索引的图表（一个小图表）的极限。在完备范畴 C中，所有小极限都存在；特别地，由 $\mathbb{N}$索引的对象与态射序列$f_{n,\ m}$: $A_n \to A_m$ ($n \leq m$)的逆极限存在于 C中。因此$\lim_{\longleftarrow n} A_n$ 存在。这就证明了该定理。 □

语义解释 $K_\infty(\pi)$表示沿无限演化 π稳定存在的知识，即

$$K_\infty(\pi) = \{(k_0, k_1, k_2, \dots) \mid \mathrm{res}(k_{n+1}) = k_n\}.$$

因此：在有限层级，知识可能失效（非单调性）；在无限层级，它被定义为稳定一致的极限结构。

4.5 范畴刻画定理

本小节将NM-DEKL$^3_\infty$ 的模型论语义从“给出一个模型”提升到“用等价定理刻画一类结构”。主要目标是证明NM-DEKL$^3_\infty$ 的语法是一类范畴结构的内语言，且其句法模型扮演分类对象的角色。

4.5.1 三层预层-CwF 模型类

动机 我们以类型论领域的标准方式描述模型：计算层为 CwF/理解范畴，构造层为预层纤维，命题层为子对象分类子 Ω（或等价的海廷结构），并通过分层避免命题污染计算内核。

定义 4.8 (三层预层-CwF 模型 **(PShCwF^3-模型))**。 *NM-DEKL$^3_\infty$* 的三层范畴模型 $\mathcal{M}$由以下部分组成：*(1)* 计算性 ***CwF***：一个带有类型$_c$、项$_c$、代换、理解、支持 Π/Σ（以及可选的 *Id*）的 *CwF* $\mathcal{C}$ ；*(2)* 轨迹范畴：一个小范畴 $\mathcal{T}_f$；*(3)* 构造性预层纤维：对每个Γ，都有类型$_\ell(\Gamma) = [\mathcal{T}_f^{op}, \mathcal{C}/\Gamma]$，其沿代换的拉回进行重新索引；*(4)* 命题层：

命题(Γ) $=\mathsf{Sub}^{\mathcal{C}/\Gamma}(1_\Gamma)$ 在每个切片上均成立，并与重新索引相容；*(5)* 分层：类型$_\ell$/命题 只能依赖计算项；不允许对命题 $\to$ Uc进行消去；*(6)(* 可选*)* 不动点： μ/ν 作用于命题，并满足单调性及折叠/展开。这些对象及保结构同态构成一个范畴，记作

$$\mathbf{PShCwF}^3_{\text{NMDEKL}}.$$

备注 定义 4.8 并非"单个模型"，而是一类结构化对象；它是后续刻画定理的语义基础。

4.5.2 主要定理：内语言与分类对象

定义 4.9 （句法模型（句法$\mathbf{PShCwF}^3$））。 令 $\mathcal{S}$ 为 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 的句法模型：其语境范畴由对代换取商后的句法上下文构成；Ty_c、Tm_c 分别由可导类型和项给出；Ty_ℓ 由语法中的轨迹索引类型族给出（包括限制函子定律）；Prop由带有证明无关性的句法命题（或句法Ω）给出。

定理 4.10 （分类性／初始性）。 句法模型 $\mathcal{S}$ 是范畴 $\mathbf{PShCwF}^3$ NMDEKL 中的始对象：对每个模型 $\mathcal{M}$ ，都存在唯一的态射

$$F_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}.$$

证明思路。 与标准的类型论初始性证明相同：通过对推导规则作结构归纳来定义解释$[\![-]\!]_{\mathcal{M}}$；代换／限制引理保证它保持重新索引和预层逆变性；唯一性由句法生成性推出。完整证明见定理 5.11。 □

定理 4.11 (内语言刻画**)。** *NM-DEKL*$^3_\infty$ 是范畴$\mathbf{PShCwF}^3$ NMDEKL的内语言：对于每个模型 $\mathcal{M}$，语法推导

$$\Gamma \vdash t : A$$

成立，当且仅当经解释后：

$$[\![t]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathsf{Tm}\big([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![A]\!]_{\mathcal{M}}\big).$$

定义相等在模型中解释为态射相等。

证明。 我们证明两个方向。(⇒) 可靠性：如果 $\Gamma \vdash t : A$ ，那么 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathsf{Tm}([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![A]\!]_{\mathcal{M}})$，这是根据由该推导定义的解释得出的。(⇐)

完备性：如果 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathsf{Tm}([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}},\ [\![A]\!]_{\mathcal{M}})$，那么根据句法模型的初始性（定理 4.10），所有模型中的语义相等蕴含句法可导性，因此 $\Gamma \vdash t :\ A$。定义相等在模型中被解释为态射相等。定理得证。

□

备注（为何这是高阶）定理 4.10–4.11 将理论从“我们构造了预层语义”提升到“该语法是这一类结构的自由对象／分类对象”。我们还可以进一步问，模型范畴是否等价于某个预层余单子 CwF。

定理 4.12（NM-DEKL$^3_\infty$句法模型的自由对象定理）。*NM-DEKL* 的句法模型 $\mathcal{S}^{\,3}_{\infty}$ 是自由对象，属于$\mathbf{PShCwF}^{3}{}_{\mathrm{NMDEKL}}$，并且是$\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$中的始对象。

证明思路。根据定理 4.10，对于每个模型 $\mathcal{M}$，都存在唯一的态射$F_{\mathcal{M}}$：$\mathcal{S} \to \mathcal{M}$，因此 $\mathcal{S}$ 是始对象。自由性：$\mathcal{S}$ 由推导规则生成；任意模型都由 $\mathcal{S}$ 通过这一态射唯一确定。完整证明见定理 5.11。

□

4.5.3 增强 I：非单调性当且仅当预层反变性

我们已经证明预层蕴含限制；更强的刻画是二者等价。

定义 4.13（语法非单调结构（限制结构））。给定轨迹范畴 $\mathcal{T}_f$ 与对象赋值 $K : \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_f) \to \mathrm{Ob}(C)$。我们称 (K, res) 为限制结构，若对每个态射 $m\colon \tau \to \tau'$，我们有 $\mathrm{res}_m\colon K(\tau') \to K(\tau)$ 以及恒等与复合法则：

$$\mathrm{res}_{\mathrm{id}_\tau} = \mathrm{id}, \qquad \mathrm{res}_{m\circ n} = \mathrm{res}_n \circ \mathrm{res}_m.$$

定理 4.14（非单调性刻画（限制 $\Leftrightarrow$ 预层））。设 C 为一个范畴，且 $\mathcal{T}_f$ 为一个小范畴。下列数据等价：*(1)* 一个预层 $K_f :\ \mathcal{T}_f^{op} \to C$；*(2)* 一个对象赋值 K 与限制结构 (K,res)（定义 *4.13*）。在此等价下，非单调性（“仅从长轨迹限制到短轨迹”）恰好对应于逆变函子性。

证明。我们证明两个方向。

从 (1) 到 (2) 给定一个预层 K_f：$\mathcal{T}_f^{op} \to C$，对于 $\mathcal{T}_f^{op}$ 中的每个态射 m：$\tau \to \tau'$，定义限制映射

$$\mathrm{res}_m := K_f(m) : K(\tau') \to K(\tau)$$

因此，每个态射 m 都有一个限制映射 res_m；函子 K_f 是反变的，因此恒等和复合律成立。于是，从 K_f 我们得到对象赋值 K 以及定义 4.13 中的限制结构 (K, res)。从 (2) 到 (1)：给定 (K, res)，定义 $K_f(\tau) := K(\tau)$ 和 $K_f(m) := \mathrm{res}_m$；限制律蕴含 K_f 是一个反变函子。

限制结构中的非单调性（“只能从长轨迹限制到短轨迹”）恰好就是逆变函子性：预层反转了态射的方向。因此，等价性得证。 □

含义 定理 4.14 给出了非单调性的等价范畴刻画：它并非额外公理，而是与标准预层结构相同。

4.5.4 增强 II：命题-μ 片段及其与 μ-演算的等价性

我们给出如下刻画：Prop-μ（真值）片段是 μ-演算的内部语言。

定义 4.15 (Prop-μ真值片段)。令Prop^{μ} 为由布尔联结词、模态算子（一步可达性）以及具有单调性的 μ/ν 构成的 ***Prop*** 片段；不允许对类型ℓ 证据进行量化（仅涉及真值性质）。

定理 4.16 (刻画：Prop^{μ} 与 μ-演算等价)。在 ***Kripke*** 语义下，Prop^{μ} 与模态 μ-演算具有相同的表达能力：存在双向翻译Enc：μ-演算 $\to \mathsf{Prop}^{\mu}$和 $\mathsf{Dec} : \mathsf{Prop}^{\mu} \to \mu$-演算，使得 $M, s \models \varphi \iff \vdash \mathsf{Enc}(\varphi)(s)$ 以及$\vdash P(s) \iff M, s \models \mathsf{Dec}(P)$成立，并且它们在 α-等价意义下互为逆变换。

证明思路。通过结构归纳定义 Enc 和 Dec。Enc：原子命题 $p \mapsto P_p$；联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 逐分量处理；$\Box, \Diamond$ 作为路径量化；$\mu X.\varphi(X) \mapsto \mu X.\mathsf{Enc}(\varphi(X))$。Dec：$P_p \mapsto p$；联结词和模态逐分量处理；$\mu X.P(X) \mapsto \mu X.\mathsf{Dec}(P(X))$。正确性：这两种转换构成双射

$$M, s \models \varphi \iff \vdash \mathsf{Enc}(\varphi)(s), \qquad \vdash P(s) \iff M, s \models \mathsf{Dec}(P),$$

并且它们在语义意义上互为逆。定理随之成立。 □

严格扩展（从刻画到严格包含）根据定义4.15，一旦我们允许在NM-DEKL$^3_\infty$中对类型ℓ证据进行量化（例如“存在一条具体因果证明链”），这就超出了μ-演算的真值语义，从而给出严格包含：μ-演算 $\equiv$ 命题$_\mu \subsetneq$ NM-DEKL$^3_\infty$。

5 元理论（II）：可靠性、完备性与初始性

概述与逻辑顺序 本节的三个主要结果：**可靠性**（语法推导在每个模型中都可解释）是语义正确性的基础；我们定义**模型范畴**和**句法模型**$\mathcal{S}$并证明**初始性**；由初始性可得**等式完备性**。由模型的存在性和可靠性可推出一**致性**。技术基础：代换引理、限制引理和解释的一致性。

预备引理 以下内容将在可靠性和初始性证明中反复使用。

定理5.1（代换）。若 $\Gamma,\ x:\ A \vdash t:\ B$ 且 $\Gamma \vdash a:\ A$，则$\Gamma \vdash t[a/x]$: $B[a/x]$。

定理5.2（主体归约）。若 $\Gamma \vdash t:\ A$ 且 $t \to t'$，则 $\Gamma \vdash t':\ A$.

定理5.3（非单调性）。 若Ext$_f(\tau, \tau')$，则存在限制 : $K_f(\tau') \to K_f(\tau)$；一般而言，不存在反方向的映射。

5.1 可靠性定理

以下定理说明 NM-DEKL$^3_\infty$ 的语法与语义之间的一致性。

定理 5.4（可靠性）。 对于每个 *NM-DEKL$^3_\infty$* 模型 $\mathcal{M}$，$[\![-]\!]_{\mathcal{M}}$ 满足:

1. 若 $\Gamma \vdash A:$ Uc，则 $[\![A]\!]_{\mathcal{M}} \in$ 项$_c([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$。
2. 若 $\Gamma \vdash t:\ A$，则 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} \in$ 项$_c([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![A]\!]_{\mathcal{M}})$。
3. 若 $\Gamma \vdash B:$ 类型$_\ell$，则 $[\![B]\!]_{\mathcal{M}} \in$ 类型$_\ell($ $[\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$。*4.* 若 $\Gamma \vdash u:\ B$，则 $[\![u]\!]_{\mathcal{M}} \in$ 项$_\ell($ $[\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![B]\!]_{\mathcal{M}})$。

5. 若 $\Gamma \vdash P$: 命题，则 $[\![P]\!]_{\mathcal{M}} \in$ 命题$([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$。

证明。 对推导规则作结构归纳：每条规则（计算／构造／命题）均由相应的 CwF、预层和子对象分类子结构解释；代换与限制的相干性由引理 5.12 和 5.13 给出。逐条规则的完整证明见附录 8.2。 □

等式完备性（预览）模型相干性（由可靠性推出）：若 $\Gamma \vdash t \equiv t' : A$，则在每个模型中都有 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}}$。等式完备性是其逆命题：若所有模型中的解释都相等，则 $\equiv$ 可在语法中导出；证明由初始性（定理 5.20）得出。

5.2 模型范畴与句法模型

我们给出模型范畴、模型态射和句法模型 $\mathcal{S}$ 的定义；初始性和等式完备性的完整陈述与证明见以下小节。标准路径是：构造 $\mathcal{S}$，证明其初始性，从而得到等式完备性； $\mathcal{S}$ 由推导规则生成，且每个模型都由唯一态射$F_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$唯一确定。

5.2.1 模型范畴 $\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$

我们首先定义 NM-DEKL$^3_\infty$ 的模型范畴。

定义 5.5 (模型范畴)。 $\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$ 的对象是满足以下条件的三层模型：*(1)* 计算层：一个 *CwF* $(\mathcal{C},$类型$_{\mathcal{C}},$ 项$_{\mathcal{C}})$；*(2)* 构造层：预层纤维 类型$_{\ell}(\Gamma) = [\mathcal{T}_f^{op}, \mathcal{C}/\Gamma]$；*(3)* 命题层：子对象分类子子对象分类子；*(4)* 恒等结构；*(5)* 与预层逆变性相容的限制；*(6)*（可选） μ/ν 不动点结构。态射是保持所有这些结构的同态。

5.2.2 模型态射

定义 5.6 (模型态射)。 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是两个模型。模型态射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 由以下部分构成：*(1)* 一个函子 $F_c : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$，保持终对象、拉回和理解；*(2)* 保持计算类型和项的代换；*(3)* 对构造层， $F_\ell(B) = F_c \circ B \circ F_t^{op}$；*(4)* 限制保持： $F_\ell(B(F_t(m)) = F_c(B(m))$；*(5)* 保持命题上的海廷结构；*(6)* 保持恒等结构；*(7)* 如果存在 μ/ν，则保持折叠/展开。

态射保持推导结构 态射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$保持所有推导规则。(1) 代换：根据代换引理和引理 5.12，$[\![A[\sigma]]\!] = [\![A]\!][[\![\sigma]]\!]$；$F_c$ 保持 CwF 重索引和拉回，因此代换得到保持。(2) Π-类型：F_c 保持理解和 Π，因此 Π-恒等引入和 Π-恒等消去得到保持。(3) Σ-类型：同理。(4) 恒等：F_c 保持恒等结构，因此恒等引入和恒等消去得到保持。(5) 限制：根据引理 5.13，F_ℓ 保持限制；依赖于限制的构造性规则得到保持。命题层：海廷结构和 μ/ν 折叠/展开得到保持。因此，每条规则都由 F 保持；初始性证明可通过结构归纳逐条验证规则。有了这一点，$\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$ 是一个范畴。

5.2.3 句法模型 $\mathcal{S}$

句法相等

固定定义相等 $\equiv$，并对所有推导取其商。

定义 5.7 (句法上下文范畴 $\mathcal{C}_{\mathrm{syn}}$)。 对象：可推导上下文 $\vdash \Gamma$ ctx的等价类 $[\Gamma]$ 。态射：代换 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$的等价类 $[\sigma]$。复合：句法替换复合。恒等：变量替换。

句法计算层 CwF

定义 5.8 (句法 CwF)。 类型$_c([\Gamma]) = \{[A] \mid \Gamma \vdash A : \mathsf{Uc}\}$; 项$_c([\Gamma], [A]) = \{[t] \mid \Gamma \vdash t : A\}$; 重新索引 $[A][\sigma] = [A[\sigma]]$; 理解 $[\Gamma].[A] = [\Gamma, x : A]$。

句法替换引理确保 CwF 公理成立。

句法类型$_\ell$ **作为预层**

定义 5.9 (句法预层结构)。 设 $B : \Gamma \vdash$类型$_\ell$。

对每个 $\Gamma \vdash \tau :$ FinTrace，定义分量 $B(\tau)$。对每个 $\epsilon :$Ext$_f(\tau, \tau')$，定义

$$\mathsf{restrict}(\epsilon, -) : B(\tau') \to B(\tau).$$

满足

$$\mathsf{restrict}(\mathrm{id}, k) = k, \qquad \mathsf{restrict}(\epsilon_1, \mathsf{restrict}(\epsilon_2, k)) = \mathsf{restrict}(\epsilon_2 \circ \epsilon_1, k).$$

因此，B 构成了 $\mathcal{T}_f^{op}$ 上的句法预层。

句法 Prop 层

定义 5.10 (句法命题)。 命题$([\Gamma])$ 是 $\Gamma \vdash P$： 命题 的等价类集合；证明项按证明无关性取商。

由此得到句法模型 $\mathcal{S}$。

5.2.4 初始性定理

定理 5.11 (句法模型的初始性)。 句法模型 $\mathcal{S}$ 是**模型范畴**$_{\mathrm{NMDEKL}}$中的始对象：对于每个模型 $\mathcal{M}$，都存在唯一的态射

$$F_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}.$$

证明概要。 (1) 定义 $F_{\mathcal{M}}$：对于每个句法对象，令

$$F_{\mathcal{M}}([A]) = [\![A]\!]_{\mathcal{M}}.$$

(2) 代换由语义代换引理保持：

$$[\![A[\sigma]]\!] = [\![A]\!][[\![\sigma]\!]].$$

(3) 限制在预层反变结构下保持不变。(4) 唯一性：根据句法生成性，任何保持规则的同态都必须等于此解释。

□

等式完备性 根据初始性：如果 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![u]\!]_{\mathcal{M}}$ 在每个模型$\mathcal{M}$中成立，那么特别地在 $\mathcal{S}$ 中成立，因此 $\Gamma \vdash t \equiv u$。正式陈述和完整证明见定理 5.20 （第 5.5.3 节）。

5.3 完备性与一致性

解释相干性是初始性和等式完备性证明的技术基础；等式完备性的正式陈述见第 5.5.3 节。

5.3.1 解释相干性（模型相干性）

引理 5.12 （代换相干性）。 设 $\mathcal{M}$ 是任意一个 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 模型。如果 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$，那么对于每个可推导判断：

$$[\![A[\sigma]]\!]_{\mathcal{M}} \cong [\![A]\!]_{\mathcal{M}}[[\![\sigma]\!]_{\mathcal{M}}], \qquad [\![t[\sigma]]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_{\mathcal{M}}[[\![\sigma]\!]_{\mathcal{M}}],$$

其中 类型$_\ell$ 采用逐点拉回，命题采用子对象逆像。

证明。这是引理 2.6 的直接语义表述：计算层通过 CwF 拉回重新索引；构造层通过逐点预层重新索引；命题通过子对象拉回。

□

引理 5.13（限制的相干性）。设 $\Gamma \vdash \epsilon : \mathrm{Ext}_f(\tau,\ \tau')$ 且 $\Gamma \vdash k : K_f(\tau')$。那么

$$[\![\mathsf{restrict}(\epsilon, k)]\!]_{\mathcal{M}} = [\![K_f]\!]_{\mathcal{M}}(m_\epsilon)\big([\![k]\!]_{\mathcal{M}}\big),$$

并且与代换相容：

$$[\![\mathsf{restrict}(\epsilon, k)[\sigma]]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\mathsf{restrict}(\epsilon[\sigma], k[\sigma])]\!]_{\mathcal{M}}.$$

证明。这是引理 5.17 的直接语义表述；反变预层作用给出限制；与代换的相容性则由逐点拉回和函子性推出。

□

等式完备性（摘要）等式完备性：若某个等式在所有模型中都成立，则它可在语法中导出；这由初始性推出。参见第 5.5.3 节（定义 5.19、定理 5.20）。

5.3.2 一致性与模型相干性

一致性意味着该系统无法导出类型为 $\bot$ 的闭项。在三层系统中，$\bot$ ：命题（也可选择 $\mathbf{0}$ ：类型$_\ell$）可以作为不一致性的见证。

定义 5.14（一致性）。*NM-DEKL*$^3_\infty$ 是一致的，如果不存在推导 $\vdash p : \bot$（等价地，若使用 $\mathbf{0}$:类型$_\ell$，则不存在 $\vdash z : \mathbf{0}$）。

定理 5.15（由模型得出的一致性）。若存在一个 *NM-DEKL*$^3_\infty$模型 $\mathcal{M}$，其中 $[\![\bot]\!]_{\mathcal{M}}$ 无居留元（没有全局截面），则该系统是一致的（定义 *5.14*）。

证明。用反证法：若该系统不一致，则将存在$\vdash p : \bot$；由可靠性（定理 5.4），有 $[\![p]\!]_{\mathcal{M}} : [\![\bot]\!]_{\mathcal{M}}$，从而 $[\![\bot]\!]_{\mathcal{M}}$ 将有居留元，与该模型矛盾。因此该系统是一致的。

□

推论 5.16（句法模型一致性蕴含系统一致性）。若在句法模型 $\mathcal{S}$ 中，类型 $[\![\bot]\!]_{\mathcal{S}}$ 无居留元，则该系统是一致的。

证明。取定理 5.15 中的 $\mathcal{M} = \mathcal{S}$。 □

5.3.3 命题层（相对）完备性

注记 命题的强完备性（“若在所有模型中有效，则可在句法上证明”）通常要求将命题解释为预层拓扑斯的句法子对象分类子，并证明相应的逻辑完备性（或将命题限制为不含不动点或额外公理的片段）。本文在主线中建立“等式完备性”与“一致性”，并将命题完备性视为可选的后续工作：对于不含额外公理的 Heyting 片段，可在句法拓扑斯设定中给出更强的完备性；在有 μ/ν 时，需要单调性与不动点存在条件，且完备性相对于某一模型类。

5.4 初始性定理（完整证明）

初始性定理（定理 5.11）及其证明概要已在上文给出。下面的引理和定理重述句法模型 $\mathcal{S}$ 及形式化的初始性陈述；**存在性与唯一性的完整归纳证明**见附录 8.1。

句法模型 $\mathcal{S}$（回顾）令 $\mathcal{S}$ 为 NM-DEKL$^3_\infty$ 的句法模型：上下文和代换是可推导上下文和代换的等价类；计算类型/项是 $\Gamma \vdash A$: Uc 及$\Gamma \vdash t$: A 的等价类；构造性类型/项是 $\Gamma \vdash B$: Type$_\ell$ 及 $\Gamma \vdash u$: B 的等价类；Prop 是 $\Gamma \vdash P$: Prop 关于证明无关性的商集；限制由句法规则 restrict 给出，并满足函子性（见下文引理）。

引理 *5.17*（扩展/限制的函子性（句法侧））。在句法模型中，对于任意 B: 类型 ℓ 以及扩张证据 ϵ_1: *Ext$_f$*(τ, τ'),ϵ_2: *Ext$_f$*(τ', τ'')，有 *restrict*$(\epsilon_1$, *restrict*$(\epsilon_2, k))$ $\equiv$*restrict*$(\epsilon_2 \circ \epsilon_1, k)$，且 *restrict*$(id_\tau, k)$ $\equiv$ k。因此，每个 B 在 $\mathcal{T}_f^{op}$ 上都满足逆变函子性（构成一个句法预层）。

定理 5.18（句法模型的初始性）。句法模型 $\mathcal{S}$是 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$ 中的始对象：对于每个 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 模型 $\mathcal{M}$，都存在唯一的模型态射 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$。

完整证明：附录 8.1（通过归纳证明存在性 (I.1)–(I.6) 和唯一性 (II)）。

5.5 等式完备性

本小节从初始性出发给出 NM-DEKL$^3_\infty$ 的 等式完备性：它刻画了语法推导（包括

定义相等）与模型语义之间的对应关系。

定义相等及其模型解释 在任意模型 $\mathcal{M}$ 中，定义相等 $\equiv$都解释为 t 与 t' 具有相同的解释（相同的态射或等价类），即 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}}$ 属于 $\mathsf{Tm}([\![\Gamma]\!], [\![A]\!])$。在 CwF 中，这就是“相同的证明/构造”。模型相干性：若 $\Gamma \vdash t \equiv t' : A$，则对于每个 $\mathcal{M}$ 都有 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}}$（根据可靠性）。完备性 是其逆命题：若所有模型中的解释都相等，则$\equiv$ 可推导；证明利用初始性，以及 $\mathcal{S}$ 是通过对 $\equiv$ 取商构造这一事实。

目标 我们要证明：若对于所有 模型 $\mathcal{M}$，t 和 t' 的解释相等（$[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}}$），则 $t \equiv t'$ 可在语法中推导。证明分为三个步骤：(1) 回顾句法相等的定义 $\equiv$；(2) 定义语义相等（在所有模型中的解释相等）；(3) 从初始性推出完备性。

5.5.1 句法相等（定义相等）

定义相等 $\equiv$ 已在第 2 节（定义 2.3）中给出：$\Gamma \vdash t \equiv t' : A$由计算规则（$\beta/\eta$、恒等、限制函子定律等）的闭包生成，并在上下文与代换下封闭。因此 $\equiv$是一种计算相等，而非命题可证性。

5.5.2 语义相等（模型中的解释）

定义 5.19 （语义相等（在所有模型中的有效性））。给定推导 $\Gamma \vdash t : A$ 与 $\Gamma \vdash t' : A$。我们称 t 与 t' 在所有模型中语义相等，记作 $\models_{\mathrm{NMDEKL}} t = t' : A\ [\Gamma]$，如果对每个 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 模型 $\mathcal{M}$，我们有

$$[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}} \quad in \quad \mathsf{Tm}\big([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![A]\!]_{\mathcal{M}}\big).$$

注记 该定义刻画了“模型态射意义上的”相等：若两个项在每个模型中具有相同的解释，则它们在语义上不可区分。

5.5.3 等式完备性定理与证明

定理 5.20 （等式完备性）。 若

$$\models_{\mathrm{NMDEKL}} t = t' : A\ [\Gamma],$$

则 $t \equiv t'$ 可在以下语法中推导： $\Gamma \vdash t \equiv t' : A$。

证明。设 $\mathcal{S}$ 为 NM-DEKL$^3_\infty$ 的句法模型，它在$\mathbf{Mod}_{\mathrm{NMDEKL}}$ 中是始对象（定理 5.11）。根据假设，语义相等在所有模型中都成立，因此特别地，在 $\mathcal{S}$ 中有 $[\![t]\!]_{\mathcal{S}} = [\![t']\!]_{\mathcal{S}}$。句法模型$\mathcal{S}$ 是通过对定义相等取商构造的：对于任意项 u， $[\![u]\!]_{\mathcal{S}}$ 是等价类 $[u]_{\equiv}$，而 $\mathcal{S}$ 中的相等就是这些等价类的相等。因此$[\![t]\!]_{\mathcal{S}} = [\![t']\!]_{\mathcal{S}} \iff [t]_{\equiv} = [t']_{\equiv} \iff \Gamma \vdash t \equiv t' : A$。结论由此得出。 □

证明概要（引理的作用）在初始性证明中，解释态射 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ 的构造用到了两个相干性引理：

- **代换引理：** $[\![u[\sigma]]\!] = [\![u]\!][[\![\sigma]\!]]$;
- **限制引理：** $[\![\text{限制}(\epsilon, k)]\!] = [\![K_f]\!](m_\epsilon)([\![k]\!])$。

它们保证从句法模型到任意模型的解释是保结构且唯一的，因此“在所有模型中成立”可归结为“在句法模型中成立”，进而归结为句法可导性。

5.5.4 完备性带来的模型相干性（可选）

推论 5.21 （模型相干性（定义相等的可靠性））。 如果$\Gamma \vdash t \equiv t' : A$ 在语法中，则 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = [\![t']\!]_{\mathcal{M}}$ 对于每个模型 $\mathcal{M}$。

证明。 这是可靠性的直接推论： $\equiv$ 的每条生成规则在每个模型中都被解释为同一个态射，并且等式由推导闭包保持。

□

小结 等式完备性给出 $\Gamma \vdash t \equiv t' : A \iff \models_{\mathrm{NMDEKL}} t = t' : A \ [\Gamma]$； $\Leftarrow$ 使用初始性以及 $\mathcal{S}$的商集构造， $\Rightarrow$ 使用可靠性。

5.6 μ/ν 与非单调性

我们已经给出了非单调性的语法刻画与语义刻画。现在我们要问，将 μ/ν 加入 Prop 层是否会破坏它，并证明各层保持独立。

5.6.1 主要问题

在命题中加入 $\mu X.\varphi(X)$、 $\nu X.\varphi(X)$会破坏非单调性吗？**不会**；参见引理5.23和定理5.24。

5.6.2 语义层分离

这三层严格分离：范畴 C中的Uc；预层范畴 $[\mathcal{T}_f^{op}, C]$中的类型$_\ell$ ；子对象分类子Ω中的命题。非单调性源于反变预层结构； μ/ν 只作用于Ω。因此，它们的语义来源各不相同。

定理5.22 (层分离定理)。 假设 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 满足：*(1)*Uc 强正规化；*(2)*类型$_\ell$ 不含 μ/ν；*(3)*不存在从命题 到 Uc的消去。则将 μ/ν 添加到命题中，不会影响Uc的一致性或强正规化。

证明。 μ/ν 只构造命题项；不存在命题到 $\to$ Uc 的消去，因此命题中的不动点不会影响计算层。计算归约和类型形成规则不依赖于命题。因此，Uc 的归约闭包、强正规化和一致性均保持不变。 □

引理 5.23 (μ/ν 对计算层或构造层没有影响)。在 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 中：*(1)*Uc 和类型$_\ell$ 的类型形成规则，其前提中不包含“$\Gamma \vdash P$: 命题”或 μ/ν 项；*(2)* μ/ν 引入/消去规则只产生命题 项；*(3)*因此， μ/ν 扩展不会改变计算层或构造层中的可推导性，也不会影响 K_f、限制等。

证明。 根据分层（2.10.1），Uc 的形成仅依赖 Uc 和迹类型；Type$_\ell$ 的形成依赖 Ext$_f$, K_f、限制和代换，而不依赖 Prop 或 μ/ν。根据 μ/ν 的语法， $\mu X.\varphi(X)$ 和 $\nu X.\varphi(X)$ 的类型为 Prop，且折叠/展开仅作用于 Prop。因此，新的 μ/ν 规则不会出现在 Uc/Type$_\ell$ 推导树中；非单调性保持不变。 □

定理 5.24 （ μ/ν 扩展对非单调性的影响）。 在 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 中， μ/ν 扩展仅影响命题层推理；它不会改变Uc 或Type$_\ell$中的非单调性，也不会从 *Prop* 反向影响这些层。

证明。 步进 1（语法）：根据引理 5.23， μ/ν 仅产生 Prop 项，而 Uc/Type$_\ell$ 的形成不依赖 Prop。步进 2 （模型）： μ/ν 在子对象分类子 Ω 中解释；$[\![K_f]\!]$ 和 $[\![$限制$]\!]$ 来自预层，与 Ω 无关。步进 3：定理 5.22 表明不存在 Prop $\to$ 对 Uc 的反射；结合步进 1–2，μ/ν 扩展不会与非单调性冲突。 □

层独立性与推理一致性（摘要）在类型论中， μ/ν 只生成命题项，而 Uc/类型$_\ell$ 的形成不依赖命题（引理 5.23）。在模型中， μ/ν 被解释为子对象分类子中的对象，而 K_f,

在预层中加以限制，因此语义彼此独立。要实现完全隔离，我们要求：
μ/ν 只作用于子对象分类子；不存在命题 $\to$ 的 Uc 消去；类型$_\ell$ 没有 μ/ν。
因此， μ/ν 扩展只丰富命题层；定理 5.22 是其句法表述。

构造对象上的推导规则与限制 范畴地说： μ/ν 引入/消去规则只生成命题层 对象（子对象分类子 Ω 的元素）； K_f，限制则生成预层层 对象。Uc 和 Type$_\ell$ 的类型形成不依赖于“$\Gamma \vdash P : \mathsf{Prop}$”或 μ/ν，因此在语义中，这两类规则作用于不同的层，彼此之间没有跨层依赖。因此μ/ν 与非单调结构保持独立且一致。

5.7 NM-DEKL$^3_\infty$ 模型的态射

定义 5.25 （NM-DEKL$^3_\infty$ 模型的态射）。 设

$$\mathcal{M} = (\mathcal{C}, \mathcal{T}_f, \mathsf{Ty}_\ell, \mathsf{Prop}, \dots) \quad and \quad \mathcal{N} = (\mathcal{C}', \mathcal{T}'_f, \mathsf{Ty}'_\ell, \mathsf{Prop}', \dots)$$

是两个 *NM-DEKL$^3_\infty$* 模型。

模型态射 $F \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 由以下部分组成：

(1) 计算层函子

一个满足以下条件的函子 $F_c \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$

- 保持终对象和有限极限；
- 对于每个 Γ，一个自然变换

$$F_{\mathsf{Ty}_c} : \mathsf{Ty}_c(\Gamma) \to \mathsf{Ty}'_c(F_c(\Gamma)),$$

and

$$F_c(A[\sigma]) = F_c(A)[F_c(\sigma)].$$

- 项的保持性：

$$F_c(t[\sigma]) = F_c(t)[F_c(\sigma)].$$

- 理解的保持：

$$F_c(\Gamma.A) \cong F_c(\Gamma).F_c(A).$$

(2) 轨迹函子

一个函子

$$F_t : \mathcal{T}_f \to \mathcal{T}'_f.$$

（***3***）构造层保持

对于每个 Γ，一个自然变换

$$F_\ell : \mathsf{Ty}_\ell(\Gamma) \to \mathsf{Ty}'_\ell(F_c(\Gamma))$$

满足

- 对于每个 $B:\ \mathcal{T}_f^{op} \to \mathcal{C}/\Gamma$,

$$F_\ell(B) = F_c \circ B \circ F_t^{op}.$$

- 限制保持：对于每个 $m:\ \tau \to \tau'$,

$$F_\ell(B)(F_t(m)) = F_c(B(m)).$$

- 代换相容性：

$$F_\ell(B[\sigma]) = F_\ell(B)[F_c(\sigma)].$$

(4) 命题层保持

对于每个 Γ,

$$F_{\mathsf{Prop}} : \mathsf{Prop}(\Gamma) \to \mathsf{Prop}'(F_c(\Gamma))$$

满足

- 保持 $\top$、$\bot$、$\wedge$、$\vee$、$\to$;
- 保持 $\forall$、$\exists$;
- 证明无关结构的保持。

（***5***）恒等结构保持

$$F_c(\mathsf{refl}) = \mathsf{refl}, \qquad F_c(J) = J.$$

如果上述条件成立，则将 F 称为 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 模型的态射。

6 嵌入定理：计算树逻辑/线性时序逻辑/μ-演算

6.1 NM-DEKL$^3_\infty$ 与LTL/CTL

我们给出结构化比较：首先介绍一种改进的嵌入和保持定理，然后逐点比较 NM-DEKL$^3_\infty$ 与 LTL/CTL 之间的表达能力和推理能力。

6.1.1 语义基础对齐

假设： $\mathcal{T}_f$ 是有限迹范畴；InfTrace $= \nu F$ 是无限迹（终余代数）；Paths$_\infty(\sigma)$ 是从状态 σ出发的无限路径集合；NM-DEKL$^3_\infty$ 的Prop 层在纤维化局部笛卡尔闭范畴中得到解释。我们将经典时态公式解释为轨迹/路径上的谓词。

6.1.2 线性时序逻辑与计算树逻辑的语义

线性时序逻辑（路径语义）线性时序逻辑公式 ϕ的语义是关于单路径 π的断言：

$$\mathbf{G}\phi(\pi) \;\equiv\; \forall n : \mathsf{Nat}.\ \phi(\mathsf{prefix}(n, \pi)).$$

这里 prefix(n, π) 是轨迹 π 的长度为-n 前缀。

CTL（分支语义）CTL 通过路径量化表达分支性质：

$$\mathbf{A}\psi(\sigma) \;\equiv\; \forall \pi : \mathsf{Paths}_\infty(\sigma).\ \psi(\pi).$$

6.1.3 嵌入保持性（精化）

定理 6.1（嵌入保持性：将 LTL/CTL 嵌入 NM-DEKL$^3_\infty$）。存在翻译映射

$$[\![-]\!]_{\mathrm{LTL}},\quad [\![-]\!]_{\mathrm{CTL}}$$

将每个 *LTL/CTL* 公式映射为 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 的 *Prop* 层公式，使得：*(1)*语义保持：对于任意克里普克结构 $\mathcal{K}$ 及相应的模型 $\mathcal{M}$，对于任意状态 σ 或路径 π, $\mathcal{K}, \pi \models \phi \iff \mathcal{M} \models [\![\phi]\!](\pi)$。*(2)* 路径量化保持：*CTL* 路径量化对应于 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 中对路径$_\infty(\sigma)$ 的依赖 Π/Σ ， 因此分支语义得以保持。

证明思路 LTL 时序算子 **X**、**G**、**F**、**U** 通过对前缀或 InfTrace 进行递归来表达；CTL **A**、**E** 则通过对 $\mathsf{Paths}_\infty(\sigma)$ 的 Π/Σ 来表达；Prop 层存在于带依赖量化的 LCCC 中，因此该嵌入保持语义。

证明。1. 将 LTL 嵌入 Prop。LTL 时序算子 X（下一时刻）、G（全局）、F（最终）、U（直到）在 Prop 层中表示：$\mathbf{X}\varphi$ 通过对 InfTrace 递归定义（例如 $\exists e.(\sigma \xrightarrow{e} \sigma' \wedge \varphi(\sigma'))$）；$\mathbf{G}\varphi$ 通过 $\forall\sigma.\varphi(\sigma)$ 表示；$\mathbf{F}\varphi$ 通过 $\exists\sigma.\varphi(\sigma)$ 表示；$\mathbf{U}(\varphi,\psi)$ 通过依赖积/和表示。2. 将 CTL 嵌入 Prop。路径量词 A（所有路径）和 E（存在路径）通过对 $\mathsf{Paths}_\infty(\sigma)$ 上的依赖 Π和 Σ 表示：$\mathbf{A}\varphi = \Pi_{p\in\mathsf{Paths}_\infty(\sigma)}\varphi(p)$，$\mathbf{E}\varphi = \Sigma_{p\in\mathsf{Paths}_\infty(\sigma)}\varphi(p)$。3. 语义保持。对于对应的 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{M}$，该翻译满足 $\mathcal{K},\pi \models \phi \iff \mathcal{M} \models [\![\phi]\!](\pi)$；克里普克结构中的路径转移对应于 NM-DEKL$^3_\infty$ 中的迹索引和 Π/Σ 。4. 路径量化。A 和 E 分别对应依赖积和依赖和，因此分支语义得以保持。因此，LTL/CTL 可以嵌入 NM-DEKL$^3_\infty$ ，同时保持语义和路径量化。 □

6.1.4 表达能力比较

表达对象

系统	对象
LTL	单路径
CTL	分支结构
NM-DEKL$^3_\infty$	轨迹 $+$迹间依赖 $+$ 证据对象

NM-DEKL$^3_\infty$ 可以表达：路径性质（$\supseteq$线性时序逻辑）、分支量化（$\supseteq$ 计算树逻辑）、依赖于迹前缀的类型、证据存在、可构造性与失败、非单调更新。因此，我们有严格包含关系：

$$\mathrm{LTL} \subsetneq \mathrm{NM\text{-}DEKL}^3_\infty, \qquad \mathrm{CTL} \subsetneq \mathrm{NM\text{-}DEKL}^3_\infty.$$

量化结构

线性时序逻辑允许：

$$\forall n : \mathsf{Nat}.$$

计算树逻辑允许：

$$\forall \pi \in \mathsf{Paths}_\infty(\sigma).$$

NM-DEKL$^3_\infty$ 允许：

$$\Pi_{\pi:\mathsf{Paths}_\infty(\sigma)} A(\pi),$$

并且 $A(\pi)$ 可以依赖于 π 的前缀结构并携带证据；因此，NM-DEKL$^3_\infty$ 支持高阶依赖量化，而 LTL/CTL 仅支持一阶路径量化。

非单调表达能力

LTL/CTL 是单调的：一旦某个公式成立，它在模型扩展后仍然成立。NM-DEKL$^3_\infty$ 可通过预层逆变性表达：证据失败；在一条轨迹上可构造，而扩展后失败；非单调知识更新。例如："在轨迹 τ 上存在证据，但在 $\tau \cdot e$ 上证据失败。"这无法用 LTL/CTL 表达。

6.1.5 推理能力比较

可判定性

系统	可判定性
LTL	PSPACE 完全
CTL	EXPTIME 完全
NM-DEKL$^3_\infty$	取决于基础类型论（通常不可判定）

NM-DEKL$^3_\infty$ 通常因依赖类型和高阶结构而不可判定，但具有更强的表达能力。

证明对象

LTL/CTL：只有真值；没有证明对象。NM-DEKL$^3_\infty$：命题携带证明对象；证明是一等对象。因此，轨迹 $=$ 证明。

构造性

LTL/CTL：语义是模型满足；不构造证据。NM-DEKL$^3_\infty$：命题是类型；可构造性居于核心地位；失败恰恰意味着"没有全局元素"。

6.1.6 严格表达能力层级

层级关系为：命题时序逻辑 $\subset$分支时序逻辑$\subset$ 依赖时序类型理论，即 LTL $\subsetneq$CTL $\subsetneq$ NM-DEKL$^3_\infty$。这是严格包含，因为 CTL 无法表达依赖命题，而 NM-DEKL$^3_\infty$ 能够表达逐路径依赖和证据对象。

6.1.7 表达能力差距的关键定理

定理 6.2 (表达能力严格差距)。 存在一个 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 公式 Φ ，其语义取决于轨迹上的证据或失败，而且不存在与之等价的 *LTL* 或 *CTL* 公式。

证明思路 考虑如下性质：“存在一条轨迹，使得类型 A在某个前缀处可构造，但在某个扩展处不可构造。”这涉及纤维可居性、预层逆变限制和类型层构造。

LTL/CTL 无法表达“可构造性”层级。

维度	LTL	CTL	NM-DEKL^3 $_\infty$
路径语义	✓	✓	✓
分支量化	×	✓	✓
依赖类型	×	×	✓
证据对象	×	×	✓
非单调失败	×	×	✓
构造性	×	×	✓
可判定性	可判定的	可判定的	通常不可判定

NM-DEKL$^3_\infty$ 严格包含 LTL 和 CTL 的表达能力，并增加了依赖类型和构造性语义；代价是失去一般可判定性。

定理 6.3 （严格包含：NM-DEKL$^3_\infty$ 严格强于 LTL/CTL（证明概要）。 假设 *NM-DEKL*$^3_\infty$ 的语义模型为 $\mathcal{M} =$（状态、步进、标记 K_f，.....），其中 （状态、步进、标记）给出了底层的可达性与原子标记，而 K_f： $\mathcal{T}_f^{op} \to C$ 是构造层预层（证据/知识纤维）。令Kr 为 *Kripke*结构范畴。那么我们有以下严格包含：

$$\text{LTL} \subsetneq \text{NM-DEKL}^3_\infty, \qquad \text{CTL} \subsetneq \text{NM-DEKL}^3_\infty.$$

证明概要。 证明分为两部分：嵌入与分离。

(I) 遗忘函子与嵌入保持性 定义遗忘函子 U : Mod(NM-DEKL$^3_\infty$) $\to$ Kr：对于每个 NM 模型 $\mathcal{M}$ =(状态, 步进, 标记 $K_f, \ldots$)，忘掉除 (状态, 步进, 标记) 之外的结构，从而得到克里普克结构 $U(\mathcal{M})$ =(状态 $\to$, 标记)，其中 $\sigma \to \sigma'$ 当且仅当存在事件 e 使得 Step$(\sigma, e) = \sigma'$ （或等价的可达关系）。

根据嵌入保持定理，存在转换 ι_{LTL} : $\mathrm{Form}_{\mathrm{LTL}} \to$ 命题$_{\mathrm{NM}}$ 和 ι_{CTL} : $\mathrm{Form}_{\mathrm{CTL}} \to$ 命题$_{\mathrm{NM}}$ ，使得对于任意 LTL/CTL 公式和任意 NM 模型 $\mathcal{M}$, Kripke 语义与 NM 命题语义一致： $U(\mathcal{M})\ \pi \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \iota_{\mathrm{LTL}}(\varphi)(\pi)$ 且 $U(\mathcal{M})\ \sigma \models \psi \iff \mathcal{M} \models \iota_{\mathrm{CTL}}(\psi)(\sigma)$。因此我们有集合包含关系：

$$\mathrm{LTL} \subseteq \text{NM-DEKL}^3_\infty, \qquad \mathrm{CTL} \subseteq \text{NM-DEKL}^3_\infty.$$

（II）分离：一个无法用 LTL/CTL 表达的 NM 公式 我们证明，存在一个 NM 命题公式 Φ，其真值取决于 K_f 的可居留性/证据；遗忘这些信息后，这一点便不可见，因此没有任何 LTL/CTL 公式能够表达它。

步进 1：遗忘后相同的两个模型 取一个底层克里普克结构 $\mathcal{K} = (S, \to,$ 标记），并构造两个 NM 模型 $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$，使得 $U(\mathcal{M}_1) = \mathcal{K} = U(\mathcal{M}_2)$（状态、可达关系和原子标记相同）；唯一的区别在于构造性预层：$K_f^{(1)} \neq K_f^{(2)}$。例如，在 $C =$**集合范畴**中，固定一个轨迹点 τ_0，令 $K_f^{(1)}(\tau_0) = \varnothing$、$K_f^{(2)}(\tau_0) = \{*\}$，并使二者在其他 τ 上一致（限制映射由函子性补全）。因此，$\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ 在底层克里普克行为上相同，但在“是否存在证据”这一点上有所不同。

步进 2：一个可由 NM 表达、对 LTL/CTL 不可见的性质 取 NM 命题公式 $\Phi(\tau_0) := \exists k.\ K_f(\tau_0).\top$（“$K_f(\tau_0)$ 被居留／具有全局元素”）。根据构造，$\mathcal{M}_1 \not\models \Phi(\tau_0)$ 与 $\mathcal{M}_2 \models \Phi(\tau_0)$。

步进 3：没有任何 LTL/CTL 公式能够区分 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ LTL/CTL 语义完全由被遗忘的克里普克结构所决定，且 $U(\mathcal{M}_1) = U(\mathcal{M}_2) = \mathcal{K}$。因此，对任意线性时序逻辑公式 φ 与路径 π，$U(\mathcal{M}_1)\ \pi \models \varphi \iff U(\mathcal{M}_2)\ \pi \models \varphi$；对任意计算树逻辑公式 ψ 与状态 σ，$U(\mathcal{M}_1)\ \sigma \models \psi \iff U(\mathcal{M}_2)\ \sigma \models \psi$。

因此，不存在能在所有模型中与 Φ 等价的 LTL/CTL 公式（否则便能区分 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$）。因此，存在一个无法用 LTL 或 CTL 表达的 NM 公式 Φ，从而得到严格包含：

$$\mathrm{LTL} \subsetneq \text{NM-DEKL}^3_\infty, \qquad \mathrm{CTL} \subsetneq \text{NM-DEKL}^3_\infty.$$

□

6.2 μ-演算嵌入定理

定理 6.4 (μ-演算嵌入)。 对于每个 μ-演算公式 φ，都存在一个 *Prop* 层公式 $\widehat{\varphi}$，使得对于每个克里普克结构 M 和状态 s:

$$M, s \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \widehat{\varphi}(s).$$

证明。 通过结构归纳定义嵌入 $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$： 原子命题 $p \mapsto P_p$; 布尔联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ 按分量; $\Box\varphi$ 与 $\Diamond\varphi$ 作为 $\mathcal{T}_f$上的路径量
化; $\mu X.\varphi(X) \mapsto \mu X.\varphi(X)$, $\nu X.\varphi(X)$ $\mapsto \nu X.\varphi(X)$。语义等价: M, $s \models \varphi \iff \Gamma \vdash \widehat{\varphi}(s)$由塔斯基/克林不动点语义以及命题的子对象解释得出。因此该嵌入保持语义。 □

6.3 严格表达能力扩展定理

定理 6.5 （严格表达能力扩展）。 存在一个性质 Ψ，它在 μ-演算中不可表达, 但在*NM-DEKL*$^3_\infty$中可表达。

证明思路。 考虑性质 $\Psi :=$ “存在一个具体的构造性因果证明 c 链”。 在 NM-DEKL$^3_\infty$ 中，它是 $\exists k$: $K_f(\tau)$。CausalProof(k)，其中 k 是一个构造性证据对象。 μ-演算只能表达真值性质 M, $s \models \varphi$，无法量化或构造具体证据。 μ-演算的语义以真值为基础；NM-DEKL$^3_\infty$ 的语义以构造为基础。因此, 存在一些性质可以用 NM-DEKL$^3_\infty$ 表达，却无法用 μ-演算表达。 □

6.4 与 μ-演算的比较：双向翻译

命题-μ片段与 μ-演算可以相互翻译；完整系统则严格更强（证据对象和因果构造无法用 μ-演算表达）。

6.4.1 Kripke结构与语义设定

定义 6.6 （克里普克结构）。 克里普克结构是 $M = (S, R, V)$，其中 S 是状态集合， $R \subseteq S \times S$ 是可达关系，V: AP $\to \mathcal{P}(S)$ 是原子命题赋值。

定义 6.7 (μ-演算语法（标准）。公式 φ 由以下形式给出: $\varphi ::$ $= p \mid \neg p \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \langle R\rangle\varphi \mid [R]\varphi \mid X \mid \mu X.\varphi \mid \nu X.\varphi$，其中 $p \in$ AP，X 是变量, 并且 μ/ν 只允许正向出现 X （单调性）。

定义 6.8 (Prop-μ NM-DEKL 的 Prop 片段$^3_\infty$)。令命题$^\mu$ 为由以下形式生成的 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 的 ***Prop*** 片段：$P, Q ::= \widehat{p}(s) \mid \neg\widehat{p}(s) \mid P \wedge Q \mid P \vee Q \mid P \to Q \mid \Diamond P \mid \Box P \mid X(s) \mid \mu X.\, P$，$\nu X.\, P$，其中 s：状态，X：状态 $\to$ 命题，且 $\Diamond, \Box$ 是用于一步可达性的模态算子（见下文）。我们要求 X 在 μ/ν中正向出现。

内化模态算子 假设计算层给出一步可达关系（由步进或轨迹观察诱导）：

$$R(s, s') \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists e : \mathsf{Event}.\ \mathsf{Step}(s, e, s').$$

定义 $\Diamond P(s) :\Leftrightarrow \exists s'.R(s, s') \wedge P(s')$ 以及 $\Box P(s) :\Leftrightarrow \forall s'.R(s, s') \to P(s')$。

6.4.2 方向 1： μ-演算 $\to$ 命题-μ （嵌入）

定义 6.9 （翻译$\mathsf{Enc}(-)$： μ-演算到命题-μ）。给定一个 μ-演算公式 φ，按如下方式递归定义$\mathsf{Enc}(\varphi)$：状态 $\to$ 命题（当省略 s 时，其为默认参数）：

$$\begin{aligned}
\mathsf{Enc}(p) &:= \widehat{p}(s) \\
\mathsf{Enc}(\neg p) &:= \neg\widehat{p}(s) \\
\mathsf{Enc}(\varphi \wedge \psi) &:= \mathsf{Enc}(\varphi) \wedge \mathsf{Enc}(\psi) \\
\mathsf{Enc}(\varphi \vee \psi) &:= \mathsf{Enc}(\varphi) \vee \mathsf{Enc}(\psi) \\
\mathsf{Enc}(\langle R\rangle\varphi) &:= \Diamond\, \mathsf{Enc}(\varphi) \\
\mathsf{Enc}([R]\varphi) &:= \Box\, \mathsf{Enc}(\varphi) \\
\mathsf{Enc}(X) &:= X(s) \\
\mathsf{Enc}(\mu X.\varphi) &:= \mu X.\, \mathsf{Enc}(\varphi) \\
\mathsf{Enc}(\nu X.\varphi) &:= \nu X.\, \mathsf{Enc}(\varphi).
\end{aligned}$$

定理 6.10 （对 μ-演算的可靠嵌入）。对任意克里普克结构$M = (S, R, V)$与状态 $s \in S$，将状态解释为 S，并将 $\widehat{p}$ 解释为 $V(p)$。则对任意 μ-演算公式 φ，$M, s \models \varphi \iff \vdash \mathsf{Enc}(\varphi)(s)$。

证明思路。对公式作结构归纳。布尔联结词和模态由 $\Diamond/\Box$ 的定义可知是一致的；不动点采用标准的塔斯基／克莱尼语义（μ 最小，ν 最大），“X 正”确保了单调性。 □

6.4.3 方向 2：命题-μ $\to$ μ-演算（反向翻译）

反向翻译仅限于真值片段 Prop-μ（不对证据进行量化）；否则，NM-DEKL$^3_\infty$ 严格更强。

定义 6.11 （翻译Dec（$-$）：Prop-μ到 μ-演算）。 对于一个 *Prop*-μ公式 P： 状态 $\to$ 命题，定义 μ-演算公式 Dec（P）（以 s 为当前点）：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Dec}(\widehat{p}(s)) := \ p\mathsf{Dec}(\neg\widehat{p}(s)) :\\
=\ &\neg p\mathsf{Dec}(P \wedge Q) := \mathsf{Dec}(P) \ \wedge\\
&\mathsf{Dec}(Q)\ \mathsf{Dec}(P \vee Q) := \mathsf{Dec}(P) \ \vee\\
&\mathsf{Dec}(Q)\ \mathsf{Dec}(\Diamond P) := \ \langle R\rangle\, \mathsf{Dec}(P)\\
&\mathsf{Dec}(\Box P) := \ [R]\, \mathsf{Dec}(P)\ \mathsf{Dec}(X(s))\\
&:= \ X\mathsf{Dec}(\mu X.\, P) := \ \mu X.\, \mathsf{Dec}(P)\\
&\mathsf{Dec}(\nu X.\, P) := \ \nu X.\, \mathsf{Dec}(P)。
\end{aligned}$$

定理 6.12 (Prop-μ的反向翻译正确性。 在与定理 *6.10* 相同的解释下，对于任意 *Prop*-μ 公式 P 和状态 s,$\vdash P(s) \iff M, s \models \mathsf{Dec}(P)$。

证明思路。 对 P 进行结构归纳。布尔情形和模态情形由 $\widehat{p}$ 与 $\Diamond/\Box$ 的对应关系得出；不动点情形则在 Prop-μ 中使用正 X 来保证单调性，因此克莱尼迭代和塔斯基语义与内部的 Prop 不动点构造相匹配。 □

6.4.4 两种翻译的等价性与表达能力

定理 6.13 (双向翻译（等价性）)。 对于任意 μ-演算公式 φ，$\mathsf{Dec}(\mathsf{Enc}(\varphi)) \ \equiv \ \varphi$（在 α-等价和句法相等意义下）。对于任意 *Prop*-μ 公式 P，$\vdash \forall s$： 状态.$\big(P(s) \leftrightarrow \mathsf{Enc}(\mathsf{Dec}(P))(s)\big)$。
证明思路。 第一部分可由翻译的定义通过归纳得出；第二部分则由定理 6.10 和 6.12 的语义等价性得出。 □

推论 6.14 (表达能力关系)。 在真值语义下，*Prop*-μ 片段与 μ-演算具有相同的表达能力： μ-演算 $\equiv$命题$_\mu$。完整的 ***NM-DEKL***$^3_\infty$ 系统则严格更强：它能够表达一些μ-演算无法表达的性质（涉及证据对象／因果构造链）。

6.5 非双模拟不变性质的可表达性

本小节指出，NM-DEKL$^3_\infty$ 能够表达**非双模拟不变**性质，并将其表达能力与 μ-演算进行比较。

6.5.1 非双模拟不变性质

在 Kripke 语义中，如果某个性质仅取决于状态之间的可达性，而不取决于状态的具体构造，那么它就是**双模拟不变**的；这类性质通常通过真值判断（例如 μ- 演算公式）来表达，比如判断是否存在一条从当前状态出发的路径，或者某个命题是否在所有可达状态中都成立。**非双模拟不变**性质可能取决于内部结构或构造性证据（例如“从一个状态到另一个状态的一条具体因果证明链”）。NM-DEKL$^3_\infty$ 可以通过依赖类型和构造层表达这类性质。

6.5.2 定理：非双模拟不变性质可以表达

定理 6.15 （非双模拟不变性质可以表达）。*NM-DEKL*$^3_\infty$ 能够表达 μ-演算无法表达的非双模拟不变性质。特别是，“存在一条具体的构造性因果证明链”之类的性质并非双模拟不变性质，而 *NM-DEKL*$^3_\infty$能够表达它们。

证明思路。 μ-演算通过 Kripke结构中的可达性定义真值，因此只能表达双模拟不变性质。NM-DEKL$^3_\infty$的构造层（类型ℓ）可以定义证据对象（例如因果链、路径构造），而这些对象并非双模拟不变。因此，N M-DEKL$^3_\infty$ 能够表达这类性质； μ-演算则不能。 □

6.5.3 与 μ-演算的比较

定理 6.16 (表达能力： μ-演算与 NM-DEKL 的比较$^3_\infty$)。 在 *Kripke* 语义下： μ-演算只能表达双模拟不变性质（可达性）； *NM-DEKL*$^3_\infty$ 则可以表达非双模拟不变性质（例如“存在一条具体因果证明链”），这些性质依赖于构造性结构，超越了 μ-演算的表达能力。

与 μ-演算和 HoTT 的比较（总结）相较于μ-演算，NM-DEKL$^3_\infty$ 保留了命题层嵌入（定理 6.4），并通过 K_f、限制和因果链（定理 6.15）增强了非双模拟不变性质的表达能力。相较于 HoTT/MLTT，后者对静态类型和（同伦）等同性进行建模；NM-DEKL$^3_\infty$ 模型则具有用于知识演化和失败的动态构造性层（预层和反变性）。因此，NM-DEKL$^3_\infty$ 在表达能力上严格扩展了 μ-演算，并且在动态／非单调推理方面相较于 HoTT/MLTT 有着明确的定位。

推论 6.17（严格表达能力包含）。*NM-DEKL*$^3_\infty$ 能够表达 μ-演算无法表达的非双模拟不变性质。因此， μ-演算 $\subsetneq$*NM-DEKL*$^3_\infty$。

解释 NM-DEKL$^3_\infty$ 能够表达所有 μ-演算性质，以及非双模拟不变性质（例如因果链等构造性证据）。构造层为超越真值语义的知识演化和因果推理提供了一个框架。

7 结论

系统与主要结果 我们提出了 NM-DEKL$^3_\infty$，一种三层非单调演化依赖类型逻辑。我们定义了其语法和语义，并证明了可靠性和等式完备性；我们构造了句法模型，并证明它是模型范畴中的始对象，由此可推出等式完备性。

理论深度 我们对失败 （定义 2.4）及其与非单调性的关系（定理 2.5）给出了精确定义；我们界定了μ/ν对非单调性的影响（定理 5.24）；我们将因果推理与构造层结合起来（定义 2.1、定理 2.2）；我们证明了句法模型是一个自由对象 （定理 4.12）；并展示了非双模拟不变的表达能力（定理 6.15 ）。该系统为动态、非单调的知识建模提供了形式化基础。

应用与示例NM-DEKL$^3_\infty$ 可支持动态知识推理、因果推理与反事实推理的形式化，以及不确定性条件下的建模（例如决策支持、医疗或法律推理）。潜在应用包括对知识图谱上的演化推理与因果推理进行形式化验证，以及对非单调信念更新进行类型安全建模。

与 MLTT/HoTT 的比较 MLTT 与 HoTT 对静态类型及（同伦）相等进行建模；NM-DEKL$^3_\infty$ 模型具有用于知识演化与失败的动态构造层（预层 K_f 与限制），从而为动态且非单调的推理提供此前形式化程度较低的类型论工具。

与 μ-演算的比较及未来工作 相对于 μ-演算，NM-DEKL$^3_\infty$ 能够表达非双模拟不变性质（定理 6.15），并将命题不动点与构造层统一起来。初始性与自由对象定理确立了它在面向动态推理的依赖类型论中的位置；与 HoTT 中同伦范畴的更深入比较留待未来工作。

8 附录

8.1 完整证明（I）：初始性定理

我们给出定理 5.18 的完整归纳证明（句法模型 $\mathcal{S}$ 是模型范畴中的始对象）。

（I）存在性：定义 $F_{\mathcal{M}}$ 设 $\mathcal{M}$为任意一个 NM-DEKL$^3_\infty$ 模型。定义候选态射 $F_{\mathcal{M}} = (F_c,\ F_t,\ F_\ell,\ F_{\mathsf{Prop}})$，并检查它满足定义 5.6。（I.1）关于上下文和代换： $F_c([\Gamma]) := [\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}}$,$F_c([\sigma]) := [\![\sigma]\!]_{\mathcal{M}}$；根据可靠性，模 $\equiv$ 良定义；恒等和复合由引理 2.6 得出。（I.2）关于计算类型/项： $F_{\mathsf{Ty}_c}([A]) := [\![A]\!]_{\mathcal{M}}$,$F_{\mathsf{Tm}_c}([t]) := [\![t]\!]_{\mathcal{M}}$；代换相容性由引理 2.6 得出。

(I.3) 轨迹部分 F_t：若 $\mathcal{T}_f$ 在所有模型中均为同一个固定小范畴，则令 $F_t = \mathrm{Id}_{\mathcal{T}_f}$；否则将 F_t 定义为 $\mathcal{M}$中轨迹对象/态射的解释。(I.4) 构造层 F_ℓ：对于 $[B]$ （$\Gamma \vdash B$: 类型$_\ell$），令 F_ℓ（$[B]$）：$= [\![B]\!]_{\mathcal{M}}$；对于 $[u]$ （$\Gamma \vdash u$: B），令 F_ℓ（$[u]$）：$= [\![u]\!]_{\mathcal{M}}$。代换相容性由引理 2.6(3)(4)得出；限制保持性由引理 5.17 得出。(I.5) 命题 F_{Prop}：对于 $[P]$（$\Gamma \vdash P$：命题），令 F_{Prop}（$[P]$）：$= [\![P]\!]_{\mathcal{M}}$；证明项进入 $[\![p]\!]_{\mathcal{M}}$ （按证明无关性取商后的命题）。联结词与代换保持性由定理 5.4 与引理 2.6(5)得出。(I.6) 恒等： $F_{\mathcal{M}}$凭借模型的恒等结构与可靠性保持自反性以及 J。因此 $F_{\mathcal{M}}$ 是一个模型态射；存在性完成。

(II) 唯一性。令 G: $\mathcal{S} \to \mathcal{M}$ 也是一个模型态射。上下文：对上下文形成（空上下文和理解）作归纳， $G([\Gamma])$ =$F_{\mathcal{M}}([\Gamma])$。代换：由归纳得， $G([\sigma]) = F_{\mathcal{M}}([\sigma])$。类型和项：语法由这些规则生成，且两个态射都保持这些规则（包括限制和 Id），因此对生成元作归纳可得 $G = F_{\mathcal{M}}$，进而对所有情形成立。所以 $\mathcal{S}$ 是始对象。□

8.2 完整证明（II）：可靠性定理（规则归纳）

定理 5.4 的完整证明概要：对推导规则作结构归纳，验证若 $\Gamma \vdash J$，则 $[\![J]\!]_{\mathcal{M}}$ 属于相应的语义对象。**计算层**：(1) 若 J 是 $\Gamma \vdash A : \mathrm{Uc}_i$，则由 CwF 和类型形成规则可得 $[\![A]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Ty}_c([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$。(2) 若 J 是 $\Gamma \vdash t : A$，则由 CwF 和项规则可得 $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Tm}_c([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}},\ [\![A]\!]_{\mathcal{M}})$。代换情形由引理 5.12 得出。**构造层**：(3)(4) $\Gamma \vdash B : \mathrm{Type}_\ell$ 和 $\Gamma \vdash u : B$ 给出 $[\![B]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Ty}_\ell([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$ 和 $[\![u]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Tm}_\ell(\ldots)$，这是由预层和引理 5.13 得出的。**命题层**：(5) $\Gamma \vdash P : \mathrm{Prop}$ 给出 $[\![P]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Prop}([\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M}})$（Prop 作为 Ω-纤维）。每条规则都对应一个语义构造；归纳步由闭包性和相干性引理得出。因此可靠性成立。$\square$

8.3 NM-DEKL$^{3}_{\infty}$ 的语法

一个最简代换示例

$\vec{\ }$（在本例中，(A, n) 是一种依赖向量类型；Type 对应于正文中的 Type_ℓ，仅用于说明。）设 $\Gamma = (x : \text{自然数},\ y : (A, x))$，且 $\Delta = (u : \text{自然数})$。从 Δ 到 Γ 的代换是 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$，其中 $\sigma = (u, \mathrm{nil})$：变量 x 被 u 替换，而 y 被 nil 替换，且 $\Delta \vdash \mathrm{nil} : (A, u)$。若 $\Gamma \vdash A'(x, y) : \mathrm{Type}_\ell$，则 $\Delta \vdash A'[\sigma] \equiv A'(u, \mathrm{nil}) : \mathrm{Type}_\ell$。若 $\Gamma \vdash t(x, y) : A'(x, y)$，则 $\Delta \vdash t[\sigma] \equiv t(u, \mathrm{nil}) : A'(u, \mathrm{nil})$。因此，判断 $\Delta \vdash \sigma : \Gamma$ 将 Γ 中的每个变量指派为 Δ 中的一个项，从而将 Γ 中的类型/项实例化为 Δ 中的类型/项。

参考文献

参考文献

[1] S. Awodey. 范畴论。牛津逻辑指南丛书。牛津大学出版社，第 2 版，2009 年。[2] J. Bradfield 和 C. Stirling。模态 μ-演算。载于模态逻辑手册，第 721–756 页。爱思唯尔，2007 年。[3] E. M. Clarke、E. A. Emerson 和 A. P. Sistla。使用时序逻辑规约自动验证有限状态并发系统。*ACM*《编程语言与系统汇刊》，8(2)：244–263，1986 年。

[4] P. Dybjer。内在类型论。载于证明与程序的类型（*TYPES 1995*），计算机科学讲义第 1158 卷，第 120–134 页。施普林格，1996 年。[5] E. A. Emerson 和 J. Y. Halpern。分支时间时态逻辑中的判定过程与表达能力。《计算机与系统科学杂志》，30(1)：1–24，1985 年。[6] D. Kozen。命题 μ-演算中的结果。《理论计算机科学》，27(3)：333–354，1983 年。[7] P. Martin-Löf。直觉主义类型论。Bibliopolis，1984 年。[8] A. M. Pitts。范畴逻辑。载于计算机科学逻辑手册，第 *5* 卷：代数与逻辑结构，第 39–128 页。牛津大学出版社，2000 年。[9] A. Pnueli。程序时态逻辑。载于第 *18* 届计算机科学基础年会论文集，第 46–57 页。电气电子工程师学会，1977 年。[10] T. Streicher。类型论语义。理论计算机科学进展丛书。比克豪泽，1991 年。[11] 单值基础计划。同伦类型论：数学的单值基础。高等研究院，2013 年。