arXiv:2603.01373v1 [math.RT] 2 Mar 2026

类型 A有限W-超代数的简单特征公式

SHUN-JEN CHENG 和 WEIQIANG WANG

Abstract. 我们为类型 A 的有限 W-超代数在任意抛物 BGG 型范畴中的不可约模建立了典范基特征公式，其中包括有限维模范畴。这些范畴将类型 A量子群上的不可约多项式表示及其对偶的张量积模范畴化。此外，这些范畴中的标准模和不可约模分别将张量积模中的标准基和 Lusztig 的对偶典范基范畴化。我们的公式统一推广了李超代数的 BGG 类以及类型 A 的 W-代数中若干特征公式。

Contents

1. 引言 1 2. 张量积模上的对偶典范基和标准基 5 3. 超类型 A 16 中单模的特征公式参考文献 27

1. Introduction

1.1. 目标。 与半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零元 e 相关联的有限 W-代数 $U(\mathfrak{g}, e)$，可视为包络代数$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}, 0)$ 的推广，并且它们量子化了 Slodowy切片；综述参见 [Los10、Wan11] 。 $U(\mathfrak{g}, e)$-模的一个 BGG 型范畴 $\mathcal{O}$（其中包含韦尔马模）由[BGK08], 引入，而包含抛物 Verma 模 $U(\mathfrak{g}, e)$-模的抛物范畴随后在 [Los12] 和 [BG13]中提出。 $U(\mathfrak{g}, e)$ 的 Cartan 和 Levi 对应对象同样是有限 W-代数；这里的新颖之处在于，它们是 $U(\mathfrak{g}, e)$ 的子商，而非子代数。将这些定义推广到一般线性李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$十分直接，这也是本文的主要研究对象。

表示论中的一个里程碑是半单李代数的 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的 Kazhdan-Lusztig 理论 [KL79, BB81, BK81], , 其中 Hecke

2020 数学主题分类。主要分类号 17B10、17B37。关键词和短语。有限 W-超代数、典范基、Kazhdan-Lusztig 理论。

代数发挥着关键作用。Brundan [Bru03]为 $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 提出了超 Kazhdan-Lusztig 猜想（现已由 [CLW15]证明；另见 [BLW17]），其中量子群$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_\infty)$ 的张量积模 $\mathbb{V}^{\otimes n} \otimes (\mathbb{V}^-)^{\otimes m}$ 上使用 Lusztig 典范基 [Lus92, Lus10]，以取代 Hecke 代数的典范基；这里 $\mathbb{V} = \mathbb{V}^+$ 表示$\mathbf{U}$ 的自然表示，而 $\mathbb{V}^-$ 表示其限制对偶。对于通常的类型 A，这相当于通过 Jimbo-Schur 对偶 [Jim86]，用张量模 $\mathbb{V}^{\otimes n}$ [FKK98] 上的典范基来重新表述抛物 Kazhdan-Lusztig 基 [KL79, Deo87]。

本文旨在以极一般的情形，为类型 A 的有限 W-超代数发展 Kazhdan-Lusztig 理论。也就是说，我们将为类型 A 的有限 W-超代数的任意抛物 BGG 型范畴中的不可约模（包括所有有限维不可约模）表述并证明一个典范基特征公式。我们的公式统一推广了李超代数的 BGG 类中以及类型 A 的 W-代数的若干特征公式。在超情形中，除 $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 的 BGG 范畴外，我们的公式都是新的；在非超情形中，除有限维 $U(\mathfrak{gl}_n, e)$-模范畴外，我们的公式也都是新的。我们将在 §1.4 中更详细地评述相关工作 [BK08、Los12、CCM23、CW25]。

1.2. **对偶典范基与标准基**。给定一个分拆 λ 和一个符号 ϵ，我们有 (2.12) 中相应的 q-对称幂 $S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)$。我们还定义了 q-外幂$\wedge^{\lambda'}(\mathbb{V}^\epsilon)$ 和一个多项式表示 $P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)$，它们构成以下一列同态（见 (2.20)–(2.21)；参见 [Bru06、BK08]）：

$$\wedge^{\lambda'}(\mathbb{V}^\epsilon) \twoheadrightarrow P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon) \hookrightarrow S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon).$$

带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 是一个对$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\epsilon})$，它带有多重分拆 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(r)})$以及符号序列 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots\ldots, \epsilon_r)$，其中 $\epsilon_i = \pm$。与 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$相关联，我们定义

$$S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) = S^{\lambda^{(1)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_1}) \otimes \ldots \otimes S^{\lambda^{(r)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_r}), \qquad P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) = P^{\lambda^{(1)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_1}) \otimes \ldots \otimes P^{\lambda^{(r)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_r}).$$

我们有一个自然嵌入 $\jmath$： $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) \hookrightarrow S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$。

由(2.18)回顾 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$的基 $\{\Pi_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{行}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$，并由(2.24)（亦见(2.22)）回顾 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$的标准基 $\{\Delta_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{标准}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$。以下是对 [Bru06], 中某些构造的多重分拆推广，其中帽子表示适当的完备化。（如同所引文献，我们的构造容许有限秩变体，此时帽子可以去掉。）作为完备张量积$\mathbf{U}$-模， $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$与$\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$容许条 involution。Lusztig [Lus92、Lus10] 以更一般且略有不同的方式在张量积模上构造了（对偶）典范基。标准基$\{\Delta_{\mathbf{A}}\}$并未出现在Lusztig的构造中，它在此起着关键作用，并且容许范畴化。

定理 A (定理 2.4，定理 2.7，命题 2.8)。

（*1*）存在一个对偶典范基 $\{L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{行}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$ 上的 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$，其特征由条形不变性 $\overline{L_{\mathbf{A}}} = L_{\mathbf{A}}$ 和 $L_{\mathbf{A}} \in \Pi_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}' \prec_{\mathbf{s}_{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}} \mathbf{A}} q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]\Pi_{\mathbf{A}'}$.

（*2*）存在一个对偶典范基 $\{L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in$ 标准（$\boldsymbol{\epsilon\lambda}$）$\}$，用于 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$，其特征由 $L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{A}}$ 和 $L_{\mathbf{A}} \overline{\in \Delta}_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}' \prec_T, \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{A}} q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]\Delta_{\mathbf{A}'}$.（*3*）对偶典范基在嵌入 $\jmath$：$\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) \hookrightarrow \widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 下相容。

1.3. 简单特征公式。给定一个 $(n|m)$ 型的带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，我们在李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$ 中附加一个若尔当型为 $(\lambda^+|\lambda^-)$ 的偶幂零元；见 (2.13)。不同的符号序列 $\boldsymbol{\epsilon}$ 对应于 $\mathfrak{gl}_{n|m}$中不同的非共轭 Borel子代数的选取；参见 [CW12，第 1.3 节。2]考虑相应的 W-超代数$U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$，并依照 Losev[Los12 第 3] 节和 Brown-Goodwin [BG13 第 3] 节构造 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模的抛物范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。

Brundan-Kleshchev [BK08] 通过多项式 U-模 $P^{\lambda}(\mathbb{V})$ 上的对偶典范基，得到了有限维不可约 $U(\mathfrak{gl}_n, \lambda)$-模的特征公式；他们论文中引入的有限维标准模发挥了重要作用。$\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$中的标准模 $\Delta(\mathbf{A})$ 在 (3.23) 中定义为由有限维标准模的张量积抛物诱导而来的模，它们一般并非抛物 Verma 模。记 $[\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$ 为 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 的格罗滕迪克群，上面的帽子表示某种适当的完备化。

定理 B (定理 3.8)。

(1) 存在一个 $\mathbb{Z}$-线性同构 $\Psi : [\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]^{\wedge} \to \widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$，它将标准模 $[\Delta(\mathbf{A})]$ 的类映到标准基 $\Delta_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A} \in \mathit{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$；*(2)* 映射 Ψ将单模的类映到对偶典范基，即$\Psi([L(\mathbf{A})]) = L_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A} \in \mathit{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。

我们概述定理 B 的证明策略。带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 导出 (2.14) 中的一个精化带符号多重分拆 $\epsilon\lambda$。与 (2.14) 中的$\epsilon\lambda$相关联的范畴 $\mathcal{P}(\lambda, \epsilon)$ 是 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模的全子范畴，记为 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，并且我们有弗吉尼亚州-模的一个识别 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) = P^{\epsilon\lambda}(\mathbb{V})$。我们首先通过应用主要结果的 $\boldsymbol{\epsilon}$-变体，对 Whittaker 模范畴进行处理，从而证明 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 的情形下的定理 B；相关文献中的表述处理的是这样的情形：$\boldsymbol{\epsilon}$是标准符号序列，其后依次为 $+$ 和 $-$。

一般形式下的定理 B 可由这个全子范畴版本和定理 A 推出，只需证明以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]^{\wedge} & \xrightarrow{\jmath_o} & [\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]^{\wedge} \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_o} \\ \widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\jmath} & \widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

其中 $\jmath$ 和 $\jmath_o$ 是自然嵌入。

证明上述交换图的主要关键，是以下关于标准模类 $\Delta(\mathbf{A})$ 的特征恒等式，它用另一族

模（记作 $N(\mathbf{A})$ 来表示；回忆一下， $N(\mathbf{A})$ 在 (3.24) 中定义为通过 Miura 变换将 Levi 上的抛物 Verma 模拉回所得。

定理 C (定理3.5)。 以下恒等式在 $[\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$中成立：

$$[\Delta(\mathbf{A})] = [N(\mathbf{A})], \qquad for\ \mathbf{A} \in Std(\boldsymbol{\epsilon\lambda}).$$

我们通过定理 C 的一个特例——即 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 中 Verma 模 $M(B)$ 对应的特征恒等式——推导出定理 C。非超情形下的这一 Verma 模特征恒等式，是 Brundan-Kleshchev [BK08, 推论 6.3]，的一项主要技术结果；其高度非平凡的超推广由 Lu-Peng [LP26] 得出。注意， [BK08, 推论 6.3] 是 [BK08, 定理 6.2] 的推论（实际上与之等价）；后者利用有限 W-代数与杨代数之间的联系，为 Verma 模给出了 Gelfand-Tsetlin 特征公式。

在 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \mu)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, -)$ 的情形下，设 λ 和 μ 分别是 n 和 m 的分拆，并以 $\mathcal{F}(\lambda|\mu)$ 表示抛物范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$（极大抛物范畴）。范畴 $\mathcal{F}(\lambda|\mu)$ 可以认作由整数权的有限维 $U(\mathfrak{gl}_{n|m}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模组成的范畴。

定理 D（定理3.10）。设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \mu)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, -)$。则由 $\Delta(A^{(1)}, A^{(2)}) \mapsto \Delta_{(A^{(1)}, A^{(2)})}$ 映射定义的 $\mathbb{Z}$-模同构 Ψ: $[\mathcal{F}(\lambda|\mu)]^\wedge \to P^\lambda(\mathbb{V}_\mathbb{Z}) \widehat{\otimes} P^\mu(\mathbb{V}_\mathbb{Z}^-)$，将 $[L(A^{(1)}, A^{(2)})]$ 映至 $L_{(A^{(1)}, A^{(2)})}$。

1.4. **与其他工作的关系**。 过去几十年间，文献中已经确立了定理 B 的若干极具代表性的特例。这些特例中的陈述本身就是有力的定理；此前并无迹象表明，在有限 W-超代数情形下，它们能像定理 B 所表述的那样，统一推广为一个广泛的概括。

在非超情形下，符号序列和 $\mathbb{V}^-$都不再需要，因而记号大为简化。有限 W-代数 $U(\mathfrak{gl}_n, \lambda)$ 的定理 B 是新的，但以下情形除外。当多重分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个分拆 λ 时，该范畴化为 有限维 $U(\mathfrak{gl}_n, \lambda)$-模的范畴，而定理 D 中的特征公式是 [BK08, 定理 F] 的主要结果。另一极端情形是$\boldsymbol{\lambda} = \lambda$ 且抛物范畴为全子范畴 $\mathcal{O}(\lambda)$；此时我们注意到，定理 B 中的特征公式可由以下结果结合推出：

- Milinski特征公式 [MS97]关于简单 Whittaker 模；通过 [CCM23]中的 $S^\lambda(\mathbb{V})$ 对 MS 特征公式的重述； [Los12] 给出的 $\mathcal{O}(\lambda)$与 Whittaker 模范畴之间的范畴等价。

这证明了 [BK08，猜想 7.17]；另参见 [dVvD95]。对于 $\lambda = (1^n)$，定理 B 还进一步特化为 [BB81、BK81] 关于 A 型 Kazhdan-Lusztig 猜想的经典定理。

在超情形下（ n， m 均非零），定理 B 已知于一个特殊情形。当 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的所有分拆均为单列分拆时，定理 B 归结为关于任意 Borel 子代数及其抛物变体 [Bru03、CLW15、BLW17], 的著名 Brundan-Kazhdan-Lusztig 猜想，该猜想依赖于 $\wedge^\lambda\mathbb{V} \otimes \wedge^\mu\mathbb{V}^-$ 的典范基，适用于

分拆 λ 和 μ 以及 n 和 m。在另一个极端情形中，当抛物范畴是与标准符号序列相关联的全子范畴 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 时，特征公式建立在 $S^{\lambda}\mathbb{V}\otimes S^{\mu}\mathbb{V}^{-}$的典范基之上；参见定理 3.9 及其证明，其中 [CCM23、CW25、Los12、SX20]中的工作发挥了关键作用。定理 B 中的典范基特征公式最终依赖于关于 BGG 范畴 $\mathfrak{gl}_{n|m}$-模的 Brundan-Kazhdan-Lusztig 特征公式。

从定理 B 中的张量积模表述出发，人们很容易将其与张量积范畴化 [Web17], 联系起来，后者适用于标准分层范畴。范畴 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 很少是标准分层的；然而，它甚至容许一个良好分层子范畴 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})^{\mathrm{ps}}$，其中包含 Verma 模以及与 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 相同的不可约模，这是经由余核范畴的构造得到的；参见 [CCM23]（其中处理了标准符号序列这一特殊情形，但对任意 $\boldsymbol{\epsilon}$均成立）及其中的参考文献。来自 [LW15] 的唯一性定理蕴含 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})^{\mathrm{ps}}$ 与 Webster 图解张量积范畴之间的范畴等价。对于一般的抛物范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，如何构造具有类似良好性质的适当分层范畴仍是一个未决问题，因为余核范畴方法似乎并不适用。

为有限 W-（超）代数的韦尔马模构造 Jantzen 滤过将会很有趣。自然可以猜想，A 型中的 Jantzen 滤过提供了一个q类比，其形式是定理 A 中以对偶典范基表示的特征公式。

在未来的工作中，我们将把这项工作推广到 BCD型；在其中，将使用 Bao-Wang 的 $\imath$典范基，而非 A型中的 Lusztig 典范基。

1.5. **结构安排**。 在第 2 节中，我们在量子群 U 的各种模上构造标准基、对偶典范基以及相关的 Bruhat 序，包括 q-对称张量、 q-反对称张量、多项式模及其张量积模。在第 3 节中，我们为 A型有限 W-超代数构造 BGG 型范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。我们利用前一节构造的对偶典范基，在 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 中建立标准模的特征恒等式和不可约模的特征公式。

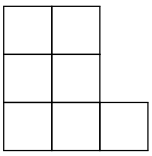
致谢。第一作者的研究部分得到中华民国 NSTC 资助。第二作者的研究部分得到美国国家科学基金会 DMS-2401351 资助。他感谢新加坡国立大学数学系和 IMS、位于台北的中央研究院数学研究所，以及 NSTC 在其休假期间提供了良好的研究环境并给予支持。我们感谢 Chih-Whi Chen 就余核范畴所作的有益讨论。

2. Dual canonical and standard bases on tensor product modules

本节在 A 型量子群表示的框架下，研究 q 多重线性代数（包括 q 对称张量和 q 反对称张量）。我们构造了各种张量

积模中的标准基和对偶典范基。我们发展了多重杨表和 Bruhat 序的组合学，为张量积模提供参数化。

2.1. 杨表。 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。对于 n 的一个分拆 λ，我们有一个形状为 λ 的左对齐金字塔（或倒置的杨图）。例如，$\lambda = (3,2,2)$ 的金字塔形式如下：



一个 λ-杨表是用整数填入 λ 的方格。对于长度为 ℓ（λ）的 λ，我们总是将 λ-杨表 A 的行从上到下编号为 $1, \ldots, \ell$，并将列从左到右编号为 $1, \ldots, \wp$。序列 c（A）$\in \mathbb{Z}^n$ 由 A 对各列从左边一列开始逐列向下读取其中的项而得到，这称为列读法。记作c（A）$=$（$a_1, \ldots, a_n$），我们可以给 A 赋予一个权

$$\mathrm{wt}(A) := \sum_{i=1}^{n} \delta_{a_i} \in \mathtt{P}, \qquad \text{where } \mathtt{P} := \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}\delta_a. \tag{2.1}$$

另一方面，我们定义序列 ρ（A），其由 A 按行读序得到：从 A 的顶行开始，逐行从左到右读取各项。

用行(λ)表示沿每一行从左到右弱递增的 λ-杨表的集合。用Col(λ)表示列严格 λ-杨表的集合，即沿每一列从下到上严格递增的杨表。一个 λ-杨表 A 是标准的，如果 A 的元素沿各列从下到上严格递增，并且沿各行从左到右弱递增。用标准(λ)或标准($\lambda, +$)表示所有标准 λ-杨表的集合。此处我们的约定大体上与 [Bru06, §2]一致。

我们将需要上文所定义的各种杨表概念的逆向版本；对于 n的一个分拆 μ，它们记为行(μ, –)、Col(μ, –)、标准(μ, –)。更明确地说，我们用行(μ, –)表示沿每一行从左到右弱递减的 μ-杨表的集合。用Col(μ, –)表示逆向列严格 μ-杨表的集合，即沿每一列从下到上严格递减的杨表。一个μ-杨表 B 是逆标准的，如果 A 的元素沿各列从下到上严格递减，并且沿各行从左到右弱递减。用标准(μ, –)表示所有逆标准 μ-杨表的集合。记 $c(A) = (a_1, \ldots, a_n)$，我们赋予$A \in$ 标准(μ, –)权 –wt(A)；记号wt(A)参见(2.1)。

总而言之，对于带有 $\epsilon = \pm$ 的 $A \in$ 标准(λ, ϵ)，我们统一将其权定义为 wt$_\epsilon$(A) := ϵwt(A)。

设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ 是一个多重分拆，其中每个 $\lambda^{(i)}$ 都是一个分拆；设 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r)$ 是与之关联的符号序列，其中每个 $\epsilon_i \in \{\pm\}$。我们称这一对 $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\epsilon})$（或者在需要简洁记法时，简称为 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ ）为一个带符号

多重分拆。对于带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，我们定义如下带符号多重杨表集合:

$$\begin{aligned}\mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}) &= \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Row}(\lambda^{(i)}, \epsilon_i),\\ \mathrm{Col}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}) &= \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Col}(\lambda^{(i)}, \epsilon_i),\\ \mathrm{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}) &= \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Std}(\lambda^{(i)}, \epsilon_i).\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 n， $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，符号序列 $\boldsymbol{\epsilon}$ 称为一个 $(n|m)$-序列，如果它包含 n 个加号和m 个减号; 若其形式为 $(+^n, -^m)$，则称其为标准 的。

例 2.1。 设 λ 为分拆 $(3, 2, 2)$。考虑以下三个 λ-杨表:

2	2	
3	6	
0	0	1

3	6	
2	2	
0	1	0

3	6	
2	2	
0	0	1

第一个属于 $\mathrm{Row}(\lambda, +)$，第二个属于 $\mathrm{Col}(\lambda, +)$，而第三个是标准的。另一方面，以下三个杨表分别属于 $\mathrm{Row}(\lambda, -)$、$\mathrm{Col}(\lambda, -)$ 和 $\mathrm{Std}(\lambda, -)$:

2	2	
1	0	
3	3	6

1	0	
2	2	
3	3	6

1	0	
2	2	
6	3	3

2.2. **Bruhat 序**。 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\epsilon = \pm$。我们将 $f \in \mathbb{Z}^k$ 视为整数的 k-元组 $(f(1), \ldots, f(k))$。若 f ϵ，则称其为占优

$$\begin{cases} f(1) > f(2) > \cdots > f(k), & \text{if } \epsilon = +,\\ f(1) < f(2) < \cdots < f(k), & \text{if } \epsilon = -. \end{cases} \tag{2.3}$$

用 $\mathbb{Z}^k_{,+}{}^{\epsilon}$ 表示 $\mathbb{Z}^k$ 中 ϵ-占优元素的子集。我们称 $f \in \mathbb{Z}^k$ ϵ-反占优，如果

$$\begin{cases} f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k), & \text{if } \epsilon = +,\\ f(1) \geq f(2) \geq \cdots \geq f(k), & \text{if } \epsilon = -. \end{cases} \tag{2.4}$$

用 $\mathbb{Z}^k_{,-}{}^{\epsilon}$ 表示 $\mathbb{Z}^k$ 中 ϵ-反占优元素的子集。自然双射 $\mathbb{Z}^k_+ \leftrightarrow \mathrm{Col}((1^k)\ \epsilon)$ 与 $\mathbb{Z}^k_- \leftrightarrow$ 行$((k)\ \epsilon)$ 将在后文加以推广。

令$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_{n+m})$为一个（$n|m$）-符号序列。我们在$\mathbb{Z}^{n+m}$、 $\preceq_{\mathbf{s}}$上引入一个偏序，该偏序与李超代数 $\mathfrak{gl}_{n|m}$的Bruhat 序相容；参见 [CLW15]。

定义如下 P 的子集，其中 P 来自（2.1）：

$$\mathtt{P}^+ = \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}(\delta_a - \delta_{a+1}). \tag{2.5}$$

We 通过规定 $\nu \geq \mu$，在 ν，$\mu \in \mathtt{P}$ 时，在 $\mathtt{P}$ 上定义一个偏序 $^+$.

对于 $f \in \mathbb{Z}^{n+m}$ 和 $1 \leq j \leq n+m$，我们定义

$$\mathrm{wt}^j_{\mathbf{s}}(f) := \sum_{i=j}^{n+m} s_i \delta_{f(i)} \in \mathtt{P}, \quad \mathrm{wt}_{\mathbf{s}}(f) := \mathrm{wt}^1_{\mathbf{s}}(f) \in \mathtt{P}.$$

我们根据偏序集 $(\mathtt{P}, \leq)$，如下定义 $\mathbb{Z}^{n+m}$上的布鲁哈特序，记作 $\preceq_{\mathbf{s}}$：当且仅当对所有j，$\mathrm{wt}_{\mathbf{s}}(g) = \mathrm{wt}_{\mathbf{s}}(f)$ 且 $\mathrm{wt}^j_{\mathbf{s}}(g) \leq \mathrm{wt}^j_{\mathbf{s}}(f)$ 时，$g \preceq_{\mathbf{s}} f$。注意，当 $m = 0$ 且$\mathbf{s} = (+^n)$ 时，这就是 $\mathfrak{gl}_n$ 的权格 $\mathbb{Z}^n$ 上的通常布鲁哈特序。

2.3. 张量 U-模 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$。令 q 为一个不定元。量子群 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 定义为由 E_a，F_a，K_a，K_a^{-1}，$a \in \mathbb{Z}$ 生成的、定义在 $\mathbb{Q}(q)$ 上的结合代数，并满足以下关系式（a，$b \in \mathbb{Z}$）：

$$\begin{aligned}
K_aK_a^{-1} &= K_a^{-1}K_a = 1, \quad K_aK_b = K_bK_a,\\
K_aE_bK_a^{-1} &= q^{\delta_{a,b}-\delta_{a,b+1}}E_b,\\
K_aF_bK_a^{-1} &= q^{\delta_{a,b+1}-\delta_{a,b}}F_b,\\
E_aF_b - F_bE_a &= \delta_{a,b}\frac{K_{a,a+1} - K_{a+1,a}}{q-q^{-1}},\\
E_a^2E_b + E_bE_a^2 &= (q+q^{-1})E_aE_bE_a, \quad \text{if } |a-b| = 1,\\
E_aE_b &= E_bE_a, \quad \text{if } |a-b| > 1,\\
F_a^2F_b + F_bF_a^2 &= (q+q^{-1})F_aF_bF_a, \quad \text{if } |a-b| = 1,\\
F_aF_b &= F_bF_a, \quad \text{if } |a-b| > 1.
\end{aligned}$$

这里 $K_{a,a+1} := K_aK_{a+1}^{-1}$. 对于 $r \geq 1$，我们引入除幂 $E_a^{(r)} = E_a^r/[r]!$ 和$F^{(r)}_a = F_a^r/[r]!$，其中 $[r] = (q^r - q^{-r})/(q - q^{-1})$。

令 $q = q^{-1}$ 在 $\mathbb{Q}(q)$ 上诱导一个自同构，记作 $^-$。定义 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 上的 bar 对合为反线性自同构 $-: U_q(\mathfrak{gl}_\infty) \to U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$，由 $E_a = E_a$、$F_a = F_a$ 和 $K_a = K_a^{-1}$ 确定。这里，反线性 表示，对于$f \in \mathbb{Q}(q)$ 和 $u \in U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$，有 $fu = fu$。量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 是由$\{E_a, F_a, K_{a,a+1} | a \in \mathbb{Z}\}$生成的子代数。

令 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$，并用 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}} = \mathbf{U}(\mathfrak{sl}_\infty)_{\mathcal{Z}}$ 表示 Lusztig 整形式量子群，即由除幂 $E_i^{(r)}$，$F_i^{(r)}$ 生成的 $\mathcal{Z}$-子代数，其中 $i \in \mathbb{Z}$ 和$r \geq 0$。

令 $\mathbb{V}=\mathbb{V}^+$ 为自然的 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$-模，其基为 $\{v_a\}_{a\in\mathbb{Z}}$；令 $\mathbb{V}^-$ 为受限对偶模，其基为 $\{v_a^-\}_{a\in\mathbb{Z}}$，使得

$$\langle v_a^-, v_b\rangle = (-q)^{-a}\delta_{a,b}.$$

$U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 在 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{V}^-$ 上的作用由下列公式给出：

$$K_a v_b = q^{\delta_{ab}} v_b, \qquad E_a v_b = \delta_{a+1,b} v_a, \qquad F_a v_b = \delta_{a,b} v_{a+1},$$
$$K_a v_b^- = q^{-\delta_{ab}} v_b^-, \quad E_a v_b^- = \delta_{a,b} v_{a+1}^-, \quad F_a v_b^- = \delta_{a+1,b} v_a^-.$$

我们还记 $v_a^+ := v_a$，这样对于符号 ϵ，就可以写成 v_a^ϵ。于是，$\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}^\epsilon := \sum_{a\in\mathbb{Z}} \mathcal{Z} v_a^\epsilon$ 是 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$-子模，且包含于 $\mathbb{V}^\epsilon$ 中。

我们将使用 Δ 在 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 上定义的余乘法

$$\begin{aligned} &\Delta(E_a) = 1\otimes E_a + E_a \otimes K_{a+1,a}, \\ &\Delta(F_a) = F_a \otimes 1 + K_{a,a+1}\otimes F_a, \quad \Delta(K_a) = K_a \otimes K_a, \end{aligned} \tag{2.6}$$

它限制为 $U_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 上的余乘法。这里的 Δ 与[Lus10] 中所使用的不同。

令 n，$m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。给定一个 $(n|m)$-符号序列 $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_{n+m})$，我们在 $\mathbb{Q}(q)$ 上定义如下张量空间：

$$\mathbb{T}^{\mathbf{s}} = \mathbb{T}^{\mathbf{s}}(\mathbb{V}) := \mathbb{V}^{s_1}\otimes\mathbb{V}^{s_2}\otimes\ldots\otimes\mathbb{V}^{s_{n+m}}.$$

例如，与标准符号序列 $\mathbf{st}=(+^n,-^m)$ 相关联，我们有 $\mathbb{T}^{\mathbf{st}}=\mathbb{V}^{\otimes n}\otimes\mathbb{V}^{-\otimes m}$；若 $m=0$ 或 $n=0$，我们就分别简写为 $\mathbb{T}^n(\mathbb{V})$ 和 $\mathbb{T}^m(\mathbb{V}^-)$。量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$通过迭代余乘法作用于 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$。

对于 $f\in\mathbb{Z}^{n+m}$，我们定义

$$M_f = M_f^{\mathbf{s}} := v_{f(1)}^{s_1}\otimes v_{f(2)}^{s_2}\otimes\cdots\otimes v_{f(n+m)}^{s_{n+m}}. \tag{2.7}$$

我们称 $\{M_f \mid f\in\mathbb{Z}^{n+m}\}$ 为 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$的单项式基。记 $\mathbb{T}_{\mathcal{Z}}^{\mathbf{s}}$ 为 $\{M_f \mid f\in\mathbb{Z}^{n+m}\}$的 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-张成空间。

记$\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$ 为 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$ 关于 Bruhat序 $\preceq$中的单项式基的（向下）完备化，即其元素是有限个线性组合，每一项都可以是无穷和，形式为 $M_f+\sum_{f'\prec f} c_{f,f'}(q)M_{f'}$，其中 $c_{f,f'}\in\mathbb{Q}(q)$。我们类似地定义 $\mathbb{T}_{\mathcal{Z}}^{\mathbf{s}}$。下面我们还会遇到若干类似的（向下）完备化。

存在一个 R-involution（参见 [Lus92, Bru03, CLW15]），使得 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$ 由准条矩阵定义 $M_f\in M_f+\sum_{g\prec_{\mathbf{s}} f}\overline{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}M_g$. 由 [Lus10, 引理 24.2.1] 可知，存在对偶典范基 $\{\pounds_f \mid f\in\mathbb{Z}^{n+m}\}$ 于 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}}$ 中，其特征由$\pounds_f=\pounds_f$ 及以下性质刻画

$$\pounds_f \in M_f + \sum_{g\prec_{\mathbf{s}} f} q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]M_g. \tag{2.8}$$

2.4. q-对称张量。 对称群 $\mathfrak{S}_k$ 由作用在 $\{1,2,\ldots,k\}$ 上的简单对换 $s_i=(i、i+1)$ 生成，其中 $1\leq i\leq k-1$。Hecke 代数 $\mathcal{H}_k$

是由 H_i、 $1 \le i \le k-1$ 生成的结合 $\mathbb{Q}(q)$-代数，满足关系式 $(H_i - q^{-1})(H_i + q) = 0$ 以及通常的辫关系。对于具有一个约化表达式 $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ 的 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$，我们定义元素 $H_\sigma := H_{i_1} \cdots H_{i_t}$. $\mathcal{H}_k$ 上的条 involution 是唯一的反线性自同构，使得 $q = q^{-1}$ 且 $H_\sigma = H_{\sigma^{-1}}^{-1}$，对所有$\sigma \in \mathfrak{S}_k$均成立。

考虑 $\mathbb{V}^\epsilon$ 的第 k 个张量空间 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$。回忆 (2.7)，对于 $f \in \mathbb{Z}^k$，有 $M_f = v^\epsilon_{f(1)} \otimes \cdots \otimes v^\epsilon_{f(k)}$。代数 $\mathcal{H}_k$ 在 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$ 上通过右乘作用：

$$M_f H_i = \begin{cases} M_{f \cdot s_i}, & \text{if } f \prec f \cdot s_i, \\ q^{-1} M_f, & \text{if } f = f \cdot s_i, \\ M_{f \cdot s_i} - (q - q^{-1}) M_f, & \text{if } f \succ f \cdot s_i. \end{cases} \tag{2.9}$$

这里，当 $\epsilon = +$ 时， $f \cdot s_i \prec f$；而当 $\epsilon = -$时， $f \prec f \cdot s_i$，若 $f(i) > f(i+1)$。根据 Jimbo-Schur 对偶（[Jim86]）， $U_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ 和 $\mathcal{H}_k$ 在张量空间 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$ 上的作用彼此交换。令

$$\mathtt{Sym}_k := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} q^{\ell(w_k) - \ell(\sigma)} H_\sigma, \qquad \mathtt{Ant}_k := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-q)^{\ell(\sigma) - \ell(w_k)} H_\sigma, \tag{2.10}$$

其中 w_k 表示 $\mathfrak{S}_k$ 中的最长元。众所周知， $\mathtt{Sym}_k$ 和 $\mathtt{Ant}_k$ 都是 bar 不变的，而且

$$\begin{aligned} \mathtt{Sym}_k H_\sigma &= q^{-\ell(\sigma)} \mathtt{Sym}_k = H_\sigma \mathtt{Sym}_k, \\ \mathtt{Ant}_k H_\sigma &= (-q)^{\ell(\sigma)} H_\sigma = H_\sigma \mathtt{Ant}_k, \end{aligned} \qquad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_k. \tag{2.11}$$

右乘 $\mathtt{Sym}_k$ 定义了一个U-模同态 $\mathtt{Sym}_k$： $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon) \to \mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$。我们将 $\mathbb{V}^\epsilon$ 的第 k 个 q-对称张量定义为

$$S^k(\mathbb{V}^\epsilon) := \mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon) / \ker \mathtt{Sym}_k.$$

事实上，$\ker \mathtt{Sym}_k$是U-同态 $H_i + q$、 $1 \le i \le k-1$的核之和。由于 $\mathtt{Sym}_k$ 是条不变的，因此U在 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$上的作用以及条 involution 可下降为U-模 $S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$上的条 involution。 $S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$中的单项式基按定义为典范映射 π： $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon) \to S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$下的像 $\{\pi(M_f) | f \in \mathbb{Z}^k_{,\_^\epsilon}\}$；关于 $\mathbb{Z}^k_{,\_^\epsilon}$，参见（2.4）。

得益于U和 $\mathcal{H}_k$ 在 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)$上的交换作用，我们看到 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)\mathtt{Sym}_k$是一个U-模。由于 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon) = \ker \mathtt{Sym}_k \oplus \mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)\mathtt{Sym}_k$ 作为 U- 模，投影 π： $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon) \to S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$ 导出了一个 U- 模同构 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)\mathtt{Sym}_k \cong S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$。令 $S^k(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}})$为 $S^k(\mathbb{V}^\epsilon)$中单项式基的 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-张成空间。此外，令 $\mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}})\mathtt{Sym}_k$为 $M_f\mathtt{Sym}_k$的$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-张成空间，其中 $f \in \mathbb{Z}^{k,\epsilon}$。那么，将 $\pi(M_f)$映至 $\mapsto M_f\mathtt{Sym}_k$的 $\mathcal{Z}$-线性映射（其中 $f \in \mathbb{Z}^k_{,\_^\epsilon}$）给出一个$\mathbf{U}_\mathcal{Z}$-模同构 $S^k(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}}) \cong \mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}})\mathtt{Sym}_k$，且具有相容的条 involution。该同构将 $S^k(\mathbb{V})$的单项式基 $\{\pi(M_f) | f \in \mathbb{Z}^k_{,\_^\epsilon}\}$ 与 $\mathbb{T}^k_\mathcal{Z}(\mathbb{V}^\epsilon)$中 $\{M_f\mathtt{Sym}_k | f \in \mathbb{Z}^{k,\epsilon}_-\}$ 的单项式基对应起来$\mathtt{Sym}_k$。

对于合成 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_\ell)$ 和符号 ϵ，我们令

$$S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon) = S^{\lambda_\ell}(\mathbb{V}^\epsilon) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_1}(\mathbb{V}^\epsilon), \quad S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}}) = S^{\lambda_\ell}(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}}) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_1}(\mathbb{V}^\epsilon_{\mathcal{Z}}). \tag{2.12}$$

我们有一个典范映射 $\mathbb{T}^{|\lambda|}(\mathbb{V}^{\epsilon}) \to S^{\lambda}(\mathbb{V}^{\epsilon})$。

对于带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(r)})$且 $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1, \ldots\ldots, \epsilon_r)$，我们定义组合

$$\lambda=\bigcup_{i=1}^{r}\lambda^{(i)}, \qquad \lambda^{+}=\bigcup_{i:\epsilon_i=+}\lambda^{(i)}, \qquad \lambda^{-}=\bigcup_{i:\epsilon_i=-}\lambda^{(i)}, \tag{2.13}$$

使得每当 $i<j$时，$\lambda^{(i)}$ 的各部分位于 $\lambda^{(j)}$ 的各部分之前。记 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots)$，然后我们定义一个新的带符号多重分拆$(\underline{\lambda}, \underline{\epsilon})$，其中

$$\underline{\lambda}=((\lambda_1),(\lambda_2),\ldots), \qquad \underline{\epsilon}=(\epsilon_1^{\ell(\lambda^{(1)})}, \ldots, \epsilon_r^{\ell(\lambda^{(r)})}). \tag{2.14}$$

我们定义

$$S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})=S^{\lambda^{(1)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_1})\otimes\ldots\otimes S^{\lambda^{(r)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_r}), \quad S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}})=S^{\lambda^{(1)}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}^{\epsilon_1})\otimes\ldots\otimes S^{\lambda^{(r)}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}^{\epsilon_r}). \tag{2.15}$$

现在我们假设 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 在 $|\lambda^{+}|=n$ 且 $|\lambda^{-}|=m$的意义下为$(n|m)$型。与 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$相关联，我们可以构成一个$(n|m)$-符号序列

$$\mathbf{s}_{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}=(\epsilon_1^{|\lambda^{(1)}|}, \ldots, \epsilon_r^{|\lambda^{(r)}|}). \tag{2.16}$$

例2.2。考虑带符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)})$且$\boldsymbol{\epsilon}=(+--+)$，其中 $\lambda^{(1)}=(3, 3, 1)$ $\lambda^{(2)}=(4, 2)$ $\lambda^{(3)}=(2)$，且 $\lambda^{(4)}=(3, 1)$。则$\lambda=\big((3), (3), (1), (4), (2), (2), (3), (1)\big)$，$\epsilon=(+++---+-)$，以及$\mathbf{s}_{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}=(+^7-^6+^2-^4)$。比较例 3.1(2)。

给定一个分拆 $\lambda=(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_\ell)$，我们用 $\mathtt{Sym}_{\lambda}=\mathtt{Sym}_{\lambda_\ell}\ldots\mathtt{Sym}_{\lambda_1}$ 表示 $\mathcal{H}_{\lambda}:=\mathcal{H}_{\lambda_\ell}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_1}$ 中的 q-对称化算子（$\mathcal{H}_{|\lambda|}$的一个子代数）。对于一个多重分拆 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(r)})$，我们用 $\mathtt{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}=\mathtt{Sym}_{\lambda^{(1)}}\ldots\mathtt{Sym}_{\lambda^{(r)}}$ 表示 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}}:=\mathcal{H}_{\lambda^{(1)}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda^{(r)}}$ 中的 q-对称化算子（$\mathcal{H}_{n+m}$的一个自然子代数）。

回顾第 2.1 节中杨表 A 的行读序 $\rho(A)$。设 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 属于 $(n|m)$-型，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(r)})$ 且 $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1, \ldots\ldots, \epsilon_r)$。给定 $\mathbf{A}=(A^{(1)}, \ldots\ldots, A^{(r)})\in\mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，行读序 $\rho(\mathbf{A})\in\mathbb{Z}^{n+m}$ 指先取 $\rho(A^{(1)})$ 的行读序，接着取 $\rho(A^{(2)})$ 的行读序，依此类推。我们定义 $\mathbb{Z}^{n+m}$ 的如下子集：

$$\mathbb{Z}_{-}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}:=\{\rho(\mathbf{A})\in\mathbb{Z}^{n+m}\mid\mathbf{A}\in\mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\},$$

因此我们得到一个双射

$$\mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\xrightarrow{1-1}\mathbb{Z}_{-}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}, \qquad \mathbf{A}\mapsto\rho(\mathbf{A}),$$

其逆映射记为 $f\mapsto\mathbf{A}^{f\cdot}$ 我们将 $f\in\mathbb{Z}_{-}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}$称为 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$-反占优。这推广了式（2.4）中的 $\mathbb{Z}^{k}_{,-}{}^{\epsilon}$。

将分拆 λ 对应的典范映射 $\mathbb{T}^{|\lambda|}(\mathbb{V}^{\epsilon})\to S^{\lambda}(\mathbb{V}^{\epsilon})$ 推广后，我们得到一个典范映射

$$\pi:\mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}}\longrightarrow S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}). \tag{2.17}$$

回顾 (2.7) 中 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}$ 的单项式基 $\{M_f \mid f \in \mathbb{Z}^{n+m}\}$。记

$$\Pi_{\mathbf{A}} = \pi(M_{\rho(\mathbf{A})}), \quad \text{for } \mathbf{A} \in \mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}). \tag{2.18}$$

以下引理由 $\boldsymbol{\lambda}$ 是分拆的情形立即得到。

引理2.3。 我们有一个 $\mathbf{U}$-模同构 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) \cong \mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}} \mathit{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$，以及一个 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$-模同构 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}_{\mathcal{Z}}(\mathbb{V}) \cong \mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}_{\mathcal{Z}} \mathit{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$。此外，该同构将 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}_{\mathcal{Z}}(\mathbb{V})$ 中的单项式基$\{\Pi_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{行}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$ 与 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}_{\mathcal{Z}} \mathit{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 中的 $\{M_f \mathit{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}} | f \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}_{-}\}$ 对应起来。

记 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 为 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 关于偏序 $\prec_{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}$下的单项式基的完备化。回顾完备化$\widehat{\mathbb{T}}^{\mathbf{s}}$ 中的对偶典范基 $\{\mathcal{L}_f \mid f \in \mathbb{Z}^{n+m}\}$，如式（2.8）所示。根据引理2.3中的同构，我们可以将 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$（相应地，将关于 Bruhat序下的单项式基的适当完备化 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$）视为 $\mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}$ 的一个子空间（相应地， $\mathbb{T}^{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}}$）。

定理 2.4。 存在一个对偶典范基 $\{L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{行}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$在 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$上，其由 $L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{A}}$ 和刻画，

$$L_{\mathbf{A}} \in \Pi_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}' \prec_{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}} \mathbf{A}} q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]\Pi_{\mathbf{A}'}.$$

（这里允许无穷和。）此外，我们有如下恒等识别 $L_{\mathbf{A}} = \mathcal{L}_{\rho(\mathbf{A})} \mathit{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$。

证明。 这是对 [CCM23, 定理 10], 的自然推广；该定理处理了 $\boldsymbol{\epsilon}$ 为标准符号序列（$+^a, -^b$）的情形。

通过标准 论证（详见定理 2.7 的类似证明），我们有

$$\overline{\Pi_{\mathbf{A}}} \in \Pi_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}' \prec_{\mathbf{s}_{\epsilon\boldsymbol{\lambda}}} \mathbf{A}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\Pi_{\mathbf{A}'},$$

其中通常涉及无穷和。因此，应用 [Lus10, 引理 24.2.1], 我们得到 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}})$ 上具有所需性质的对偶典范基 $\{L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{行}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$。

利用引理2.3中的对应关系 $\Pi_{\mathbf{A}} = M_{\rho(\mathbf{A})}\mathtt{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$，我们看到$\mathcal{L}_{\rho(\mathbf{A})}\mathtt{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$满足对偶典范基元素 $L_{\mathbf{A}}$的相同刻画，因此$L_{\mathbf{A}} = \mathcal{L}_{\rho(\mathbf{A})}\mathtt{Sym}_{\boldsymbol{\lambda}}$。 □

2.5. **q-外幂张量**。 我们将 k阶 q外幂定义为（ $\epsilon = \pm$时），

$$\wedge^k(\mathbb{V}^\epsilon) := \mathbb{T}^k(\mathbb{V}^\epsilon)\mathtt{Ant}_k.$$

给定一个分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$和一个符号 ϵ，我们定义$\mathbf{U}$-模

$$\wedge^\mu(\mathbb{V}^\epsilon) := \wedge^{\mu_1}(\mathbb{V}^\epsilon) \otimes \cdots \otimes \wedge^{\mu_\ell}(\mathbb{V}^\epsilon).$$

给定一个多重分拆 $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(1)}、\ldots\ldots、\mu^{(s)})$ 及其对应的符号序列 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1、\ldots\ldots、\epsilon_s)$，我们定义 $\mathbf{U}$-模

$$\wedge^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}(\mathbb{V}) := \wedge^{\mu^{(1)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_1}) \otimes \cdots \otimes \wedge^{\mu^{(s)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_s}). \tag{2.19}$$

给定一个分拆 $\mu=(\mu_1、\ldots\ldots、\mu_\ell)$，记 $\mathtt{Ant}_\mu=\mathtt{Ant}_{\mu_1}\ldots\mathtt{Ant}_{\mu_\ell}$ 为 $\mathcal{H}_\mu$ 中的 q-反对称化子：$=\mathcal{H}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\mu_\ell}$（$\mathcal{H}_{|\mu|}$的一个子代数）。对于一个多重分拆$\boldsymbol{\mu}=(\mu^{(1)}、\ldots\ldots、\mu^{(s)})$，记 $\mathtt{Ant}_{\boldsymbol{\lambda}}=\mathtt{Ant}_{\mu^{(1)}}\ldots\mathtt{Ant}_{\mu^{(s)}}$ 为 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ 中的 q-反对称化子：$=\mathcal{H}_{\mu^{(1)}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\mu^{(s)}}$（$\mathcal{H}_{n+m}$的一个自然子代数）。令 $w_{\boldsymbol{\mu}}$ 为 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}=\mathfrak{S}_{\mu^{(1)}}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{\mu^{(s)}}$中的最长元，其中 $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}=\mathfrak{S}_{\mu^{(1)}}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{\mu^{(s)}}$是 $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$的一个杨子群。

回顾第 2.1 节中杨表 A 的列读法 $c(A)$。设 $\boldsymbol{\epsilon\mu}$为 $(n|m)$-型，其中 $\boldsymbol{\mu}=(\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(s)})$ 且 $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_s)$。给定 $\mathbf{A}=(A^{(1)},\ldots,A^{(s)})\in\mathrm{Col}(\boldsymbol{\epsilon\mu})$，列读法 $c(\mathbf{A})\in\mathbb{Z}^{n+m}$ 指先取列读法 $c(A^{(1)})$，接着取$c(A^{(2)})$，依此类推。我们定义 $\mathbb{Z}^{n+m}$的如下子集：

$$\mathbb{Z}_+^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}:=\{c(\mathbf{A})\in\mathbb{Z}^{n+m}\mid\mathbf{A}\in\mathrm{Col}(\boldsymbol{\epsilon\mu})\},$$

因此，我们有一个双射 $\mathrm{Col}(\boldsymbol{\epsilon\mu})\to\mathbb{Z}_+^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}$,$\mathbf{A}\mapsto c(\mathbf{A})$，其逆映射记为$f\mapsto\mathbf{A}f$· 我们称 $f\in\mathbb{Z}_+^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}$ 为 $\boldsymbol{\epsilon\mu}$-占优。这推广了式 (2.3) 中的 $\mathbb{Z}^k_{,+}{}^{\epsilon}$。

对于 $f\in\mathbb{Z}_+^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}$，我们设定 $\mathcal{K}_f:=M_{fw_{\boldsymbol{\mu}}}\mathtt{Ant}_{\boldsymbol{\mu}}$，而 $\{\mathcal{K}_f\mid f\in\mathbb{Z}_+^{\boldsymbol{\epsilon\mu}}\}$ 构成了$\wedge^{\boldsymbol{\mu}}(\mathbb{V})$的单项式基；我们也记作 $\mathcal{K}_{\mathbf{A}_f}=\mathcal{K}_f$。

2.6. U-模 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$。用 $P^\lambda(\mathbb{V})$ 表示由分拆 λ 标记的 U 的多项式表示。这是 $U_q(\mathfrak{gl}_N)$（对于 $N\geq n$）的最高权为 λ 的多项式表示的直接 ∞-秩版本，不过在这个无限秩极限下，$P^\lambda(\mathbb{V})$ 不再是最高权模。类似地，我们有一个 U-模 $P^\lambda(\mathbb{V}^-)$。

用 λ' 表示与 λ 相关联的转置分拆。对于 $\epsilon=\pm$，我们考虑复合映射

$$\xi_\lambda:\wedge^{\lambda'}(\mathbb{V}^\epsilon)\hookrightarrow\mathbb{T}^n(\mathbb{V}^\epsilon)\xrightarrow{\mathcal{R}_\lambda}\mathbb{T}^n(\mathbb{V}^\epsilon)\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon).\tag{2.20}$$

这里，$\mathcal{R}_\lambda$ 表示一个适当的 R-矩阵，而 π 是典范投影；这是对 [BK08, 第39页，(4.10)] 的重新表述。众所周知（例如参见 [Bru06]），$\mathrm{Im}\xi_\lambda$ 是不可约的 U-模 $P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)$，因此我们得到了以下映射：

$$\wedge^{\lambda'}(\mathbb{V}^\epsilon)\twoheadrightarrow P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)\hookrightarrow S^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon).\tag{2.21}$$

例 2.5. 我们有 $P_{(n)}(\mathbb{V}^\epsilon)=S^n(\mathbb{V}^\epsilon)$和 $P^{(1^n)}(\mathbb{V}^\epsilon)=\wedge^n(\mathbb{V}^\epsilon)$。

U-模 $P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)$具有标准基

$$\{V_A:=\xi_\lambda(\mathcal{K}_A)\mid A\in\mathrm{Std}(\lambda,\epsilon)\}.\tag{2.22}$$

由 [Bru06的定理 26] 以及 [BK08的(4.12)]（它们仅考虑情形 $\epsilon=+$，但推广到 $\epsilon=-$ 是平凡的）可知，$\xi_\lambda(\mathcal{L}_A)\neq0$ 当且仅当 $A\in$ 标准(λ,ϵ)，并且集合 $\{\xi_\lambda(\mathcal{L}_A)\mid A\in$标准$(\lambda,\epsilon)\}$ 构成 $P^\lambda(\mathbb{V}^\epsilon)$中相对于标准基 $\{V_A\mid A\in$ 标准$(\lambda,\epsilon)\}$的对偶典范基。

我们将上述构造推广到多重分拆的情形。给定 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)}、\ldots\ldots、\lambda^{(r)})$以及符号序列 $\boldsymbol{\epsilon}=(\epsilon_1、\ldots\ldots、\epsilon_r)$，我们定义 U-模

以及 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$-模分别为:

$$P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) = \bigotimes_{i=1}^{r} P^{\lambda^{(i)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_i}), \qquad P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}) = \bigotimes_{i=1}^{r} P^{\lambda^{(i)}}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}^{\epsilon_i}). \tag{2.23}$$

对于 $\mathbf{A} = (A^{(1)}, \dots, A^{(r)}) \in \mathsf{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$, 其中 $A^{(i)} \in \mathsf{Std}(\lambda^{(i)}, \epsilon_i)$, 我们在 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}_{\mathcal{Z}}(\mathbb{V})$ 中定义如下元素:

$$\Delta_{\mathbf{A}} := \otimes_{i=1}^{r} V_{A^{(i)}}. \tag{2.24}$$

于是, $\{\Delta_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \mathsf{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$ 构成 $\mathbb{Q}(q)$ 的一个基, 以及 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 的一个 $\mathcal{Z}$-基。它将被称为标准基。

例 2.6。 我们列出 (2.23) 中与标准符号序列相关的 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 的若干重要特殊情形:

(1) $S^{\lambda}(\mathbb{V}) \otimes S^{\mu}(\mathbb{V}^{-})$, 其中 $\boldsymbol{\lambda} = \big((\lambda_1) \dots, (\lambda_\ell), (\mu_1) \dots, (\mu_p)\big)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, 以及 $\boldsymbol{\epsilon} = (+^{\ell}, -^{p})$。(2) $P^{\lambda}(\mathbb{V}) \otimes P^{\mu}(\mathbb{V}^{-})$, 其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \mu)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, -)$。(3) $\bigwedge^{a_1}(\mathbb{V}) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{a_r}(\mathbb{V}) \otimes \bigwedge^{b_1}(\mathbb{V}^{-}) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{b_s}(\mathbb{V}^{-})$, 其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r+s)})$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (+^{r}, -^{s})$, 且 $\lambda^{(i)} = (1^{a_i})$ 和 $\lambda^{(r+j)} = (1^{b_j})$, 对于 $1 \le i \le r$ 和 $1 \le j \le s$。

若进一步令 $s = 0$ 和 $\mu = \emptyset$, 则可得到更多特化形式, 其中涉及 $\mathbb{V}^{-}$ 的张量因子被删去: $S^{\lambda}(\mathbb{V})$ $P^{\lambda}(\mathbb{V})$, 以及 $\bigwedge^{a_1}(\mathbb{V}) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{a_r}(\mathbb{V})$。

Th由 (2.21) 得到的嵌入 $\jmath_i$: $P^{\lambda^{(i)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_i}) \hookrightarrow S^{\lambda^{(i)}}(\mathbb{V}^{\epsilon_i})$ 导致一个嵌 g

$$\jmath : P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}) \longrightarrow S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}). \tag{2.25}$$

2.7. 标准 Std 上的偏序$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$. 我们在标准杨表上定义如下偏序 $\le_{T,\epsilon}$; 参见 [Bru06, §2]。固定 $\epsilon = \pm$。令 $A, A' \in \mathsf{Row}(\lambda, \epsilon)$。令 $A_{\le r}$ 表示从 A 中删去高于第 r行的所有方格后得到的杨表, 其中 $r \ge 1$; 特别地, $A_{\le 1} = A$。回忆 (2.1) 中的 $\mathsf{wt}(A)$ 和 (2.5) 中的 $\mathtt{P}^{+}$。我们规定

$$A' \le_{T,\epsilon} A \text{ if and only if } \epsilon\,\mathrm{wt}(A_{\le r}) - \epsilon\,\mathrm{wt}(A'_{\le r}) \in \mathtt{P}^{+}\ \forall r \ge 1 \text{ and } \mathrm{wt}(A) = \mathrm{wt}(A').$$

作为 $\mathsf{Row}(\lambda, \epsilon)$ 的子集, $\mathsf{Std}(\lambda, \epsilon)$ 继承偏序 $\le_{T,\epsilon}$。

我们将杨表上的偏序 $\le_{T,\epsilon}$ 扩展到与多重分拆相关的杨表上的 $\preceq_{T,\boldsymbol{\epsilon}}$。设 $\mathbf{A} = (A^{(1)}, \dots, A^{(r)}) \in \mathsf{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$, 其中 $A^{(i)} \in \mathsf{Std}(\lambda^{(i)}, \epsilon_i)$。我们为 $\mathbf{A}$ 定义一列 (部分) 权, 对 $1 \le j \le r$ 有:

$$\mathrm{wt}^{j}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}) := \sum_{i=j}^{r} \epsilon_i\,\mathrm{wt}(A^{(i)}) \in \mathtt{P}.$$

我们将$\mathbf{A}$ 的 (总) 权定义为 $\mathsf{wt}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}) := \mathsf{wt}^{1}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A})$。

将 $\preceq_{\mathbf{s}}$ 上的偏序推广, 我们在 $\mathsf{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 上定义偏序 $\preceq_{T,\boldsymbol{\epsilon}}$ 如下。设 $\mathbf{A} = (A^{(1)}, \dots, A^{(r)})$、$\mathbf{A}' = (A'^{(1)}, \dots, A'^{(r)}) \in \mathsf{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。若 $\mathsf{wt}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}') = \mathsf{wt}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A})$, 且 $\mathsf{wt}^{i}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}) - \mathsf{wt}^{i}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}') \in \mathtt{P}^{+}\ \forall i$, 则称 $\mathbf{A}' \preceq_{T,\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{A}$; 此外, $A'^{(i)} \le_{T,\epsilon_i} A^{(i)}\ \forall i$ 属于

当 $\mathsf{wt}^i_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}) = \mathsf{wt}^i_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{A}')\ \forall i$ 时（或等价地，$\mathsf{wt}(A^{(i)}) = \mathsf{wt}(A'^{(i)})\ \forall i$）。若 $\mathbf{A}' \prec_{T,\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{A}$，则记作 $\mathbf{A}' \preceq_{T,\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{A}$，且 $\mathbf{A}' \neq \mathbf{A}$。

2.8. **对偶典范基，针对** $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V})$。用 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V})$ 与 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$ 表示相对于偏序 $\prec_{T,\,\boldsymbol{\epsilon}}$ 中标准基的完备化。Lusztig [Lus92] 以更一般且略有不同的方式，在有限维最高权模的张量积模上构造了（对偶）典范基。我们有如下 [Bru06，定理 26]的多重分拆推广。

定理 2.7. 存在一个对偶典范基 $\{[L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \underline{\text{标准}}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda})\}$，适用于 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V})$，它由条形不变性 $L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{A}}$ 以及如下性质所刻画

$$L_{\mathbf{A}} \in \Delta_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}' \prec_{T,\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{A}} q^{-1}\mathbb{Z}[q^{-1}]\Delta_{\mathbf{A}'}.$$

（此处允许无穷和。）此外，$\{[L_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \text{标准}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda})\}$ 构成 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$ 的一个 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-基。

证明。用 ψ 表示张量积模 $S^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V})$ 及其子模 $P^{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda}}(\mathbb{V})$ 上的条 involution。我们将证明，对于 $\mathbf{A} \in \text{标准}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda})$,

$$\psi(\Delta_{\mathbf{A}}) \in \Delta_{\mathbf{A}} + \sum_{\mathbf{A}'' \prec_{T,\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{A}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\Delta_{\mathbf{A}''}, \tag{2.26}$$

其中可能涉及无穷和。为记号简便起见，我们仅写出当 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ 时的细节，从而 $\mathbf{A} = (A^{(1)}, A^{(2)})$ $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$，以及 $\Delta_{\mathbf{A}} = V_{A^{(1)}} \otimes V_{A^{(2)}}$。一般情形可通过迭代 ψ 及下述论证类似地容易得到。

由于余乘法 Δ 在 (2.6) 中的约定，$\mathbf{U}$ 的拟$\mathcal{R}$-矩阵具有如下形式

$$\Theta = 1 \otimes 1 + \sum_{\gamma \in \mathtt{P}^+ \setminus 0} \Theta_\gamma, \quad \text{for } \Theta_\gamma \in \mathbf{U}^+_\gamma \otimes \mathbf{U}^-_{-\gamma}, \tag{2.27}$$

其中 $\mathbf{U}^{\pm}_{\pm\gamma}$ 表示量子群 $\mathbf{U}^{\pm}$ 的两半中权为$\pm\gamma$的权子空间。现在，对于两个带基模 W'与 W 的张量积，张量积模 $W' \otimes W$ 上的一个新的条 involutionψ 由 $\underline{\psi}(v \otimes \underline{w}) := \Theta(v \otimes w)$ 按 [Lus10, 27.3.1]定义。

回顾 [Bru06] 可知

$$\overline{V_{A^{(i)}}} \in V_{A^{(i)}} + \sum_{A'^{(i)} \prec_{T,\epsilon_i} A^{(i)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]V_{A'^{(i)}}, \qquad \text{for } i = 1, 2.$$

根据偏序 $\prec_{T,\,\boldsymbol{\epsilon}}$ 的定义，并出于权的原因，我们有

$$\Theta_\gamma(V_{A'^{(1)}} \otimes V_{A'^{(2)}}) \in \sum_{(A''^{(1)}, A''^{(2)}) \prec_{T,\boldsymbol{\epsilon}} (A'^{(1)}, A'^{(2)})} \mathbb{Z}[q, q^{-1}]V_{A''^{(1)}} \otimes V_{A''^{(2)}}, \quad \text{for } \gamma \in \mathtt{P}^+ \setminus 0.$$

因此，根据（2.27），我们有

$$\psi(V_{A^{(1)}}\otimes V_{A^{(2)}})=\Theta(\overline{V_{A^{(1)}}}\otimes\overline{V_{A^{(2)}}})=\overline{V_{A^{(1)}}}\otimes\overline{V_{A^{(2)}}}+\sum_{\gamma\in\mathbb{P}^+\setminus 0}\Theta_\gamma(\overline{V_{A^{(1)}}}\otimes\overline{V_{A^{(2)}}})$$
$$\in V_{A^{(1)}}\otimes V_{A^{(2)}}+\sum_{(A''^{(1)},A''^{(2)})\prec_{T,\boldsymbol{\epsilon}}(A^{(1)},A^{(2)})}\mathbb{Z}[q,q^{-1}]V_{A''^{(1)}}\otimes V_{A''^{(2)}}.$$

这就证明了 (2.26)。定理现可由应用 [Lus10, 引理 24.2.1] 得出。 □

这里，对于 $P^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 中的对偶典范基，我们采用与定理 2.4 中 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 相同的记号。由于以下结果，这里不会产生歧义。

命题 2.8. 嵌入 $\jmath:\ \widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})\ \to\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ （与横线对合相容，并）将 $L_{\mathbf{A}}$ （属于 $\widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ ）映至 $L_{\mathbf{A}}$ （属于 $\widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ ），其中 $\mathbf{A}\ \in$ 标准 $(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。

证明。当 $\boldsymbol{\lambda}=\lambda$ 是一个分拆时，这一结论已为人所知；参见 [Bru06] （其考虑了 $\epsilon=+$ 的情形，而 $\epsilon=-$ 的情形同理），其中证明了对于 $A\in\mathrm{Std}(\lambda)$， V_A 属于由 $\{M_B\mid B\in\mathrm{Row}(\lambda)\}$ 张成的 $\mathbb{Z}[q^{-1}]$-格。一般情形可通过相同论证得出，只需证明 $\jmath(L_{\mathbf{A}})$ 满足 $S^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V})$ 中对偶典范基元素的刻画。细节从略。□

3. Character formulas of simple modules in super type A

本节中，我们为 W型A超代数构造一般的抛物范畴，并引入这些范畴中的标准模。我们证明，这些范畴及其不可约模将上一节给出的张量积$\mathbf{U}$-模和对偶典范基范畴化。

3.1. $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 上的分次与 Levi。 设

$$I(n|m):=\{1,\dots,n,\overline{1},\dots,\overline{m}\},\tag{3.1}$$

$^{-}$，其全序由 $1<\ldots<n<\bar{1}<\ldots<\bar{m}$给定。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_{n|m}$为一般线性李超代数，由 $\mathbb{C}$ 上的$(n+m)\times(n+m)$-矩阵组成。它带有一个 $\mathbb{Z}_2$-分次$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\bar0}\oplus\mathfrak{g}_{\bar1}$，其中$\mathfrak{g}_{\bar0}=\mathfrak{gl}_n\oplus\mathfrak{gl}_m$。我们可以并且经常采用不同的矩阵形式，此时行（或列）的奇偶性可能不是标准的。

我们在 $\mathfrak{g}$ 上固定一个非退化不变双线性型，记为 $(\cdot|\cdot)$。设 $e\in\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_{\bar0}$ 中的幂零元， $\{e,h,f\}$ 为 $\mathfrak{g}_{\bar0}$ 中的一个 $\mathfrak{sl}(2)$- 三元组（因而也在 $\mathfrak{g}$ 中）。我们令 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，使得 $h\in\mathfrak{h}$。

对于子集 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$，我们记 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}=\{x\in\mathfrak{g}\mid[x,y]=0,\forall y\in\mathfrak{a}\}$。设

$$\mathfrak{t}:=\mathfrak{h}_e=\{a\in\mathfrak{h}\mid[a,e]=0\}.\tag{3.2}$$

回忆：子代数 $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{t}$ 称为 满子代数 （参见 [BG13, §3.1]），如果 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{r}}$ 的中心等于 $\mathfrak{r}$。

令 T 为 $\mathfrak{t}$ 的伴随群。设 $\theta\in\mathfrak{t}$ 为一个 整元，即 θ 是 T 的余特征中的一个元素。元素 $\theta\in\mathfrak{t}$ 确定了 $\mathfrak{t}$ 中的一个极小满子代数 $\mathfrak{r}$，

在此意义下， $\theta \in \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{t}$ 和 θ 在 $\mathfrak{r}$中是正则的；因此 $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\mathfrak{r}$。我们将假设

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}_\mathfrak{r} \text{ lies in } \mathfrak{g}_{\bar{0}},$$

而这必定是约化的。子代数 $0 \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{t}$ 的包含关系导出李子代数 $\mathfrak{g}_\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}_\mathfrak{r} (\subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}) \subset \mathfrak{g}$ 的包含关系。根据 (3.2) 中 $\mathfrak{t}$ 的定义可知 $e \in \mathfrak{g}_\mathfrak{t}$，因此我们有

$$e \in \mathfrak{l}. \tag{3.3}$$

我们有 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathrm{ad}\,\theta$-特征空间分解：

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\theta,k}, \\ \mathfrak{g}_{\theta,k} &:= \{x \in \mathfrak{g} \mid [\theta, x] = kx\}, \quad \text{with } \mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{\theta,0}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

设 Φ 是 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 的根系， $\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\alpha \in \Phi$ 的根空间。注意， $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_{\theta,\alpha(\theta)}$.

我们选取一个三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \tag{3.5}$$

使其与 (3.4) 在以下意义下相容：若 $\alpha(\theta) > 0$ ，则 $\alpha \in \Phi$ ，这意味着 $\alpha \in \Phi^+$。这里， Φ^+ 表示与 $\mathfrak{g}$ 的简单根系 Π 对应的正根集合，且满足 $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Phi^+}\mathfrak{g}_\alpha$。记

$$\Phi_\mathfrak{l} = \Phi \cap \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(\theta) = 0\}, \quad \Phi_\mathfrak{l}^+ = \Phi^+ \cap \Phi_\mathfrak{l}, \quad \Pi_\mathfrak{l} = \Pi \cap \Phi_\mathfrak{l}. \tag{3.6}$$

那么， $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数，其简单根系为 $\Pi_\mathfrak{l}$，并且

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi_\mathfrak{l}} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{3.7}$$

其中

$$\mathfrak{u} := \bigoplus_{\alpha(\theta)>0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{u}^- := \bigoplus_{\alpha(\theta)>0} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \tag{3.8}$$

注意， $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{u}^- \subset \mathfrak{n}^-$。

3.2. 有限 W-超代数。 我们先回顾任意基本李超代数$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$的有限 W-超代数的一般构造；例如参见 [Los10、Wan11]，然后再专门讨论 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$。

设$e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，并选取与 e相关联的 $\mathfrak{g}$ 的一个良好分次：

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(j), \tag{3.9}$$

即， $e \in \mathfrak{g}(2)$，使得对于 $i \leq -1$ ，$\mathrm{ad}e : \mathfrak{g}(i) \to \mathfrak{g}(i+2)$是单射；对于 $i \geq -1$，则是满射。元素 e 定义了一个线性映射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ，其定义为 $\chi(x) := (e|x)$。由此得到一个偶超斜对称双线性型 ω_χ : $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ，定义为 $\omega_\chi(x, y) = \chi([x, y])$。该双线性型限制为一个非退化超辛双线性型 $\omega_\chi : \mathfrak{g}(-1) \times \mathfrak{g}(-1) \to$

$\mathbb{C}$。注意，$\dim \mathfrak{g}(-1)_{\bar{0}}$ 为偶数，并且我们将假设$\dim \mathfrak{g}(-1)_{\bar{1}}$ 为偶数；对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$，这一假设始终成立。

由 (3.2) 可知，$\operatorname{ad}\mathfrak{t}$ 保持超辛形式 $\omega_\chi|_{\mathfrak{g}(-1)}$。因此，我们可以选取一个关于 ω_χ 的、 $\mathfrak{g}(-1)$ 中 $\operatorname{ad}\mathfrak{t}$-不变的拉格朗日子空间 $\mathfrak{l}_\mathfrak{s}$ ，并定义 $\mathfrak{m} := \mathfrak{l}_\mathfrak{s} \oplus \bigoplus_{j<-1} \mathfrak{g}(j)$。注意， χ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个特征，在 $\mathfrak{m}_{\bar{1}}$ 上为零。令$\mathfrak{m}_\chi := \{x - \chi(x) \mid x \in \mathfrak{m}\}$ ，并令 I_χ 为由 $\mathfrak{m}_\chi$ 生成的 $U(\mathfrak{g})$ 的左理想。此外，令 Q_χ 表示左 $U(\mathfrak{g})$- 模 $U(\mathfrak{g})/I_\chi$。与 e 相关的有限 W- 超代数定义为结合超代数

$$U(\mathfrak{g}, e) = \operatorname{End}_\mathfrak{g}(Q_\chi)^{\mathrm{opp}}.$$

因此， Q_χ是一个 $\big(U(\mathfrak{g})$ $U(\mathfrak{g},$ $e)\big)$-双模。众所周知，我们可以将其识别为

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}, e) &\equiv (U(\mathfrak{g})/I_\chi)^{\operatorname{ad}\mathfrak{m}} \\ &= \{u + I_\chi \in U(\mathfrak{g})/I_\chi \mid [x, u] \in I_\chi, \forall x \in \mathfrak{m}\}. \end{aligned}$$

由于拉格朗日子空间$\mathfrak{l}_\mathfrak{s}$ 是 $\operatorname{ad}\mathfrak{t}$-不变的，我们有 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{t}$-不变的，从而对所有 $t \in \mathfrak{t}$ 和 $x \in \mathfrak{m}$，$\chi([t, x]) = 0$。因此，我们得出

$$\mathfrak{t} \subseteq U(\mathfrak{g}, e). \tag{3.10}$$

假设 W-代数 $U(\mathfrak{g}, e)$的良好分次是偶的，即除非$j \in 2\mathbb{Z}$，否则 $\mathfrak{g}(j) = 0$。那么，

$$\mathfrak{p} := \sum_{j \geq 0} \mathfrak{g}(j)$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个抛物子代数，其 Levi 子代数为$\mathfrak{g}(0)$。回顾 $\mathfrak{m} = \sum_{j<0} \mathfrak{g}(j)$，我们可以将 $U(\mathfrak{g})/I_\chi$与 $U(\mathfrak{p})$等同，这进而使我们能够把 $U(\mathfrak{g}, e)$视为 $U(\mathfrak{p})$的一个子代数。设同态 $U(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g}(0))$由自然投影$\mathfrak{p} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}(0)$诱导。Miura 变换

$$\mathtt{MT} : U(\mathfrak{g}, e) \longrightarrow U(\mathfrak{g}(0)) \tag{3.11}$$

是该同态到 $U(\mathfrak{g}, e)$的限制。一个 $\mathfrak{g}(0)$-模可经由 Miura 变换 $\mathtt{MT}$的拉回被视为一个$U(\mathfrak{g}, e)$-模。

现在我们将上述构造特化到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$。设 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 是一个带符号的多重金字塔。我们按照例 3.1 中 $\lambda^{(k)}$s 从上到下的列读法，对每个带符号金字塔中的方格进行标记。相应的偶幂零元为

$$e = \sum_{i,j} E_{ij},$$

其中求和遍及属于同一金字塔 $\lambda^{(k)}$ 且满足行(i) $=$ 行(j)、列(i) $=$ 列$(j) - 1$ 的所有 i, j 。相应的良好分次定义如下：

$$\deg E_{ab} = 2(\operatorname{col}(b) - \operatorname{col}(a)), \quad a, b \in I(m|n).$$

存在一个 $h \in \mathfrak{h}$，使得 $\mathrm{ad}h$ 的特征值与次数一致。例如，可以取 $h = \sum_{i=1}^{n+m}$ ($\wp + 1 - 2$列(i)$)E_{ii}$，此时 $\mathrm{ad}h(E_{ab}) = (\deg E_{ab})E_{ab}$，其中 $\wp_k$ 并且

$$\wp := \max\{\wp_k \mid 1 \le k \le r\}$$

分别是 λ 和 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$的列数。记 $^{(k)}$

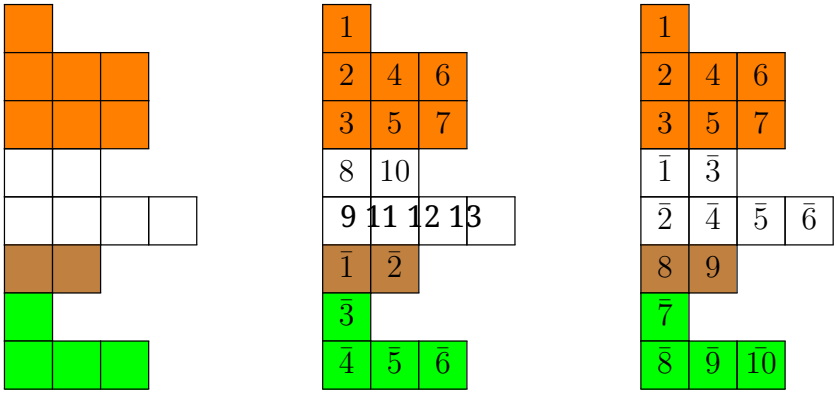
$$q_j^{(k)} = \text{length of the } j\text{th column of } \lambda^{(k)}, \quad \text{and} \quad q_j^{\epsilon} = \sum_{k:\epsilon_k=\epsilon} q_j^{(k)}, \tag{3.12}$$

对于 $\epsilon = \pm.$，则有 $\mathfrak{g}(0) = \oplus_{k=1}^{r} \oplus_{j=1}^{\wp_k} \mathfrak{gl}_{q_j^+|q_j^-}$。

3.3. 一个例子。

例 3.1. 考虑一个多重分拆为 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)})$ 的多重金字塔，其中 $\lambda^{(1)} = (3,3,1)$ $\lambda^{(2)} = (4,2)$ $\lambda^{(3)} = (2)$ $\lambda^{(4)} = (3,1)$，如 (3.13) 中最左侧的图所示。我们可以为 $\boldsymbol{\lambda}$考虑不同的符号序列。

(3.13)



(1) 考虑一个符号多重分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 位于上方，且 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, +, -, -)$。在这种情况下，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{13|6}$ 由多重金字塔确定，并带有关于 $\mathfrak{g}$ 的偶良分次。

我们考虑 (3.13) 中间部分的多重杨表，它们以按列、按颜色块的标准方式标记为 $I(13|6)$。令 e 表示矩阵 $\sum_{i,\ j} E_{ij}$ 对所有满足行(i) = 行(j) 且列(i) = 列$(j) - 1$ 的 $i, j \in I(13|6)$ 求和。则 e 是幂零的，其若尔当标准形为 $\boldsymbol{\lambda}$。抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 由 $\{E_{ij} \mid$ 列$(j) \ge$ 列$(i)\}$ 张成，其 Levi 子代数 $\mathfrak{h}$ 由 $\{E_{ij} \mid$ 列$(j) =$列$(i)\}$ 张成。

该分次是偶分次，例如，$\deg E_{4,\ 7} = \deg E_{1,\ 2} = \deg E_{6,\ 13} = 2$，$\deg E_{1,\ 3} = \deg E_{6,\ 7} = 0$，$\deg E_{10,\ 2} = \deg E_{10,\ \bar{1}} = -2$。此外，我们有 $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{gl}_{5|3} \oplus \mathfrak{gl}_{4|2} \oplus \mathfrak{gl}_{3|1} \oplus \mathfrak{gl}_1$。

$\mathfrak{t}$ $\mathfrak{g}$ 的子代数是 8 维的，由 8 个行幂等矩阵 $\mathcal{I}_i$ 张成，其中 $i \in I(5|3) = \{1,2,3,4,5,1,2,3\}$，例如 $\mathcal{I}_1 = E_{11}$，$\mathcal{I}_3 = E_{33} + E_{77} + E_{11,\ 11}$，$\overline{\mathcal{I}_1} = E_{\bar{1}\bar{1}} + E_{\bar{4}\bar{4}}$，等等。我们有 $U(\mathfrak{g},\ e)$ 与 $U(\mathfrak{g}_e)$ 之间的 $\mathfrak{t}$-模同构。一个整

元 $\theta \in \mathfrak{t}$ 的形式为

$$\theta = \sum_{i \in I(5|3)} \theta_i \mathcal{I}_i, \qquad \text{for } \theta_i \in \mathbb{Z}. \tag{3.14}$$

我们对 θ施加如下条件:

$$\begin{aligned} &\theta_i \geq \theta_{i'} \text{ whenever row } i \text{ is higher than row } i', \\ &\text{and } \theta_i = \theta_{i'} \text{ if and only if row } i \text{ and row } i' \text{ have the same color.} \end{aligned} \tag{3.15}$$

在我们的例子中，这意味着 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 > \theta_4 = \theta_5 > \theta_1 > \theta_2 = \theta_3$。于是 Levi $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_\theta$ 由 $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}_7 \oplus \mathfrak{gl}_6 \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{gl}_4$ 给出，其中四个直和项对应于四个色块。将其视为 $\mathfrak{g}$ 中或 $\mathfrak{l}$中的元素， e 具有若尔当标准形 $\boldsymbol{\lambda}$。

（2）我们可以考虑与上面同一个 $\boldsymbol{\lambda}$ 相关联的其他符号序列，例如 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, -, +, -)$。在这种情形下， $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{9|10}$带有由上述多重金字塔所确定的 $\mathfrak{g}$ 上的偶良分次。于是 $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{gl}_{4|4} \oplus \mathfrak{gl}_{3|3} \oplus \mathfrak{gl}_{2|2} \oplus \mathfrak{gl}_1$。由于我们对 θ施加同样的条件 (3.15)，Levi $\mathfrak{l}$ 在形式上与 (1) 中相同。

(3) 在此例中，我们忽略 (3.13) 中的颜色，并选择满足 (3.15) 的 (3.14) 中的 θ 为“主”θ，使得不同的行 i 对应不同的 θ_i。于是，相应的 Levi $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_3 \times \mathfrak{gl}_3 \times \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_4 \times \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_3$ 和 $\mathfrak{l}$ 自然是 $\mathfrak{l}$（见上文 (1) 或 (2)）的子代数。注意， e 是 $\mathfrak{l}$ 中的主幂零元。

3.4. 抛物范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\lambda})$。 通过对 [BGK08, Theorem 3.8], 作直接的超推广，我们得到一个（非唯一的） $\mathfrak{t}$-模同构： $U(\mathfrak{g}_e) \cong U(\mathfrak{g}, e)$。因此，我们有一个 $\mathrm{ad}\,\theta$-特征空间分解

$$U(\mathfrak{g}, e) = U(\mathfrak{g}, e)_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} U(\mathfrak{g}, e)_k. \tag{3.16}$$

Set

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0} &:= \sum_{k \geq 0} U(\mathfrak{g}, e)_k, \qquad U(\mathfrak{g}, e)_{>0} := \sum_{k>0} U(\mathfrak{g}, e)_k \\ U(\mathfrak{g}, e)_\# &:= U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0} \bigcap U(\mathfrak{g}, e) U(\mathfrak{g}, e)_{>0}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

那么， $U(\mathfrak{g}, e)_\#$ 是 $U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0}$ 的双边理想。根据 [Los12, Theorem 4.1]，我们有一个典范态射

$$U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0} \longrightarrow U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0} / U(\mathfrak{g}, e)_\# \cong U(\mathfrak{l}, e). \tag{3.18}$$

~将 $\mathcal{O}(\theta)$ 记为由有限生成的 $U(\mathfrak{g}, e)$-模组成的范畴 M，使得对于任意$x \in M$，都存在 $n_x \in \mathbb{Z}$，满足 $U(\mathfrak{g}, e)_k x = 0$ 对所有 $k \geq n_x$ 均成立。

现在，给定一个 $U(\mathfrak{l}, e)$-模 V，我们可以通过拉回 (3.18) 将其视为一个 $U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0}$-模，然后应用诱导构造一个 $U(\mathfrak{g}, e)$-模:

$$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}(V) = U(\mathfrak{g}, e) \otimes_{U(\mathfrak{g}, e)_{\geq 0}} V. \tag{3.19}$$

这定义了一个正合函子 $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$，其定义域为有限生成的 $U(\mathfrak{l}, e)$-模~的范畴，值域为 $\mathcal{O}(\theta)$。

另一方面，对于 $M \in \mathcal{O}(\theta)$，我们定义

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{l}}(M) = \big\{x \in M \mid ux = 0, \forall u \in U(\mathfrak{g}, e)_{>0}\big\},$$

由 (3.18)，它自然是一个 $U(\mathfrak{l}, e)$-模。函子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ 是 $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$的右伴随。

令 $\mathcal{O}(\theta)$ 为其中的对象构成的子范畴，M 满足 $\dim \mathcal{R}_{\mathfrak{l}}(M) < \infty$（也可以附加条件，要求 M 是 $\mathfrak{t}$-半单的，但这不会影响我们将要给出的不可约特征公式）。函子 $\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}$限制后给出一个从有限维 $U(\mathfrak{l}, e)$-模范畴到$\mathcal{O}(\theta)$的正合函子，其右伴随是上述函子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ 的限制：

$$U(\mathfrak{l}, e)\text{-mod} \xrightarrow{\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{O}(\theta), \qquad \mathcal{O}(\theta) \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathfrak{l}}} U(\mathfrak{l}, e)\text{-mod}.$$

现在，若 V是有限维不可约 $U(\mathfrak{l}, e)$-模，那么根据 [Los12，推论 3.6、命题 3.7] 以及 [BG13]，$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}(V)$ 有一个合成列和唯一的不可约商模 $L^{\theta}(V)$。在 e 是 $\mathfrak{l}$中的主幂零元这一特殊情形下，完整（非抛物）范畴 $\mathcal{O}$ 的构造早已在 [BGK08]中给出。

从现在起，我们专门考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n|m}$。

给定多重分拆 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$以及相应的符号序列 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$，我们回顾 (2.13)中的组合 λ^+, λ^-。我们假设 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$是$(n|m)$型的，即 $|\lambda^+| = n$且 $|\lambda^-| = m$。令 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda}) = U(\mathfrak{g}, e_{\boldsymbol{\epsilon\lambda}})$，并选取一个整元 θ，其对应的Levi为 $\mathfrak{l} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{gl}_{|\lambda^{(i)}|}$。我们将限于 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模的范畴 $\mathcal{O}(\theta)$的整数权变体，记为 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$；这里的整数权是指所考虑的相关多重杨表的所有表项均为整数，而非任意复数。

$U(\mathfrak{l}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$中的有限维不可约模为 $L(\mathfrak{l}, \mathbf{A})$，其中$\mathbf{A} \in$标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，并且从现在起我们将在 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$中把 $L(\mathbf{A})$记为:$= L^{\theta}(L(\mathfrak{l},\mathbf{A}))$。于是 $\{L(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in$ 标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})\}$ 是 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$中的全部不可约对象（在同构意义下）。

3.5. 标准模。 设 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$ 为一个带符号多重分拆，满足 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$。我们将定义若干与多重杨表 $\mathbf{A} = (A^{(k)})_{1 \le k \le r} \in$ 标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 相关联的特殊 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模。

首先，我们将每个 $\mathbf{A}$ 解释为 Cartan 子代数的一个权。记 $a_{ij}^{(k)}$ 为 $\mathbf{A}$中位于 $A^{(k)}$ 的第 i 行、第 j 列的元素——此处行/列标签遵循第 2.1 节中的约定。对于每个 k，分别用 n_k 和 ℓ_k 表示分拆 $\lambda^{(k)}$的大小和长度。按照 (3.13) 中的示例，我们固定多重金字塔 $\boldsymbol{\lambda}$中方格的一种编号 $I(n|m)$，并令 $\kappa(i, j, k) \in I(n|m)$表示由元素 $a_{ij}^{(k)}$ 占据的方格的标签。有了这些记号，我们将 $\mathbf{A}$ 解释为一个权，它使矩阵 $E_{\kappa(i,j,k),\kappa(i,j,k)}$ 乘以标量

$$\epsilon_k a_{ij}^{(k)} + i - 1 + \sum_{t<k} \big(\epsilon_t(n_t - 1) - \ell_t\big). \tag{3.20}$$

固定 k 和 j，记 $A_j^{(k)}$ 为杨表 $A^{(k)}$的第 j 列，并将 $M(A_j^{(k)}, \epsilon_k)$ 和 $V(A_j^{(k)}, \epsilon_k)$ 分别定义为 $\mathfrak{gl}_{q_j^{(k)}}$ 上的 Verma 模和最高权如 (3.20) 所示的有限维不可约模。接着，按照 [BK08, §7.3]，我们将 $U(\mathfrak{gl}_{n_k}, \lambda^{(k)})$ 上的标准模定义为经 Miura 变换拉回的 $\mathfrak{gl}(q_j^{(k)})$-模张量积 $V(A_j^{(k)}, \epsilon_k)$: (3.11)

$$V(A^{(k)}, \epsilon_k) := V(A_1^{(k)}, \epsilon_k) \boxtimes \cdots \boxtimes V(A_{\wp_k}^{(k)}, \epsilon_k). \tag{3.21}$$

注意，$V(A^{(k)}, \epsilon_k)$是有限维的。

我们定义一个有限维的 $U(\mathfrak{l}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模

$$V(\mathfrak{l}, \mathbf{A}) := \otimes_{i=1}^{r} V(A^{(i)}, \epsilon_i) \tag{3.22}$$

然后是一个 $U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模

$$\Delta(\mathbf{A}) := \mathcal{I}^{\mathfrak{g}}\big(V(\mathfrak{l}, \mathbf{A})\big) = U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda}) \otimes_{U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})_{\geq 0}} V(\mathfrak{l}, \mathbf{A}). \tag{3.23}$$

（这里的记号$\mathbf{A}$ 隐含地记录了 $\boldsymbol{\epsilon}$，这要归功于$\mathbf{A} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。）显然，$\Delta(\mathbf{A})$属于范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$, 称为标准模。

例 3.2. 与$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\epsilon})$相关联，根据(2.14)可得到一个新的带符号多重分拆(λ, ϵ)。范畴 $\mathcal{P}(\lambda, \epsilon)$是 $\mathcal{O}$ 的全子范畴，记作 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，它对应于 W-超代数$U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$，其 Cartan 子代数为 $U(\mathfrak{l}, \epsilon\lambda)$。（在非超情形下，即$\boldsymbol{\epsilon} = (+^r)$，$\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$由 [BGK08]引入。）此外，对于 $\mathbf{A} \in \mathrm{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}) = \mathrm{Std}(\epsilon\lambda)$，标准模$\Delta(\mathrm{A})$与韦尔马模 $M(\mathrm{A})$相同，因为 Cartan 子代数$U(\mathfrak{l}, \epsilon\lambda)$是阿贝尔的，并且(3.22)中的$V(\mathfrak{l}, \mathrm{A})$是一维的。（相较之下，在一般的抛物范畴中，标准模可能不等同于抛物 Verma 模。）

引理 3.3. 我们有一个满同态 $\Delta(\mathbf{A}) \to L(\mathbf{A})$，对于$\mathbf{A} \in$ 标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$.

证明。根据 [BK08 定理 7.13], $V(\mathfrak{l}, \mathbf{A})$ 是一个最高权模，其单头为 $L(\mathfrak{l}, A)$。因此，从 $\Delta(\mathbf{A})$（见 (3.23)）到$\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}\big(L(\mathfrak{l}, \mathbf{A})\big) = U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda}) \otimes_{U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})_{\geq 0}} L(\mathfrak{l}, \mathbf{A})$ 存在一个满同态，而后者以 $L(\mathbf{A})$ 为其单头。引理得证。□

3.6. 标准模的特征。 令$\mathbf{A} \in$标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$。回顾 q_j^{ϵ} 式 (3.12)。对于每一列 j，我们还可以定义相对于 Levi 子代数 $\bigoplus_{k=1}^{r} \mathfrak{gl}_{q_j^{(k)}}$ 的抛物 Verma 模 $\mathfrak{gl}_{q_j^+|q_j^-}$-模 $N(\mathbf{A}j)$，其最高权由 $E_{i+j,i+j}^{(k)}$ 给出，且其在最高权向量上的作用标量为 (3.20)。记为

$$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}_1) \boxtimes \cdots \boxtimes N(\mathbf{A}_\wp), \tag{3.24}$$

$U(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 中的 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模，它是通过 Miura 变换 (3.11) 将抛物 Verma $\mathfrak{g}(0)$-模 $N(\mathbf{A}_1)$ 拉回得到的 $\otimes \cdots \otimes N(\mathbf{A}_\wp)$。

注记 3.4. 对于带符号的分拆 $\boldsymbol{\epsilon\lambda}$，我们可以进一步将杨表$\mathbf{A}$ 的各项解释为 $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 的 ρ-移位权，其中 ρ 是 $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 的 Weyl向量，且该向量被唯一地

确定为 $(\rho,\varepsilon_1)=0$ 和 $(\rho,\alpha)=(\alpha,\alpha)/2$；对于由符号序列 ϵ确定的 $\mathfrak{gl}_{n|m}$ 的相应 Borel子代数的每个简单根，均如此。这里，$\mathfrak{gl}_{n|m}$中的矩阵按照多重金字塔 (3.13) 中的方式，以 $I(n|m)$ 标记。我们令 $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ 为具有此 ρ-移位最高权的抛物韦尔马模 $\mathfrak{gl}_{n|m}$。我们有一个自同构 $\eta: U(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{p})$，由下式给出

$$E_{ij} \xrightarrow{\overline{\eta}} E_{ij}+\epsilon_k\delta_{ij}\left(q_1^{(k)}-\sum_{r=1}^{\mathrm{col}(j)} q_r^{(k)}\right), \qquad \text{for } i,j\in I(n|m).$$

此处，每当 $i=j$时，i 作为金字塔 $\lambda^{(k)}$ 中的一项出现。注意，这是在单分拆情形下于 [BK08, (3.23)] 中所引入的 η 的带符号多重分拆推广。通过上述自同构η扭转 $U(\mathfrak{g},e)$的作用，我们可以类似于 [BK08，引理8.17] 的证明表明，“Whittaker函子”将 $\mathcal{N}(\mathbf{A})$映到 $N(\mathbf{A})$。这里，Whittaker函子应理解为与 [BK08，§8.5],中类似地定义，即先取每个 $\mathfrak{t}$-权空间的完全对偶，再应用Whittaker不变函子，然后再取一次对偶。

本节的主要结果是格罗滕迪克群$[\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$中的如下恒等式。可以将其视为用 $N(\mathbf{A})$表示 $\Delta(\mathbf{A})$的“特征公式”。

定理3.5。 以下恒等式在格罗滕迪克群 $[\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$中成立：

$$[\Delta(\mathbf{A})]=[N(\mathbf{A})], \qquad \textit{for } \mathbf{A}\in \mathit{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}).$$

我们暂且考虑例 3.2 中的全子范畴 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ $(=\mathcal{P}(\lambda,\ \epsilon))$。在这一特殊情形下，定理3.5 中的特征恒等式由 [LP26], 建立，是对 [BK08，定理6.2、推论6.3] 的一个高度非平凡的超推广；注意，非超情形对应于 $\boldsymbol{\epsilon}=(+^r)$。 [BK08，定理6.2] 通过杨代数的一个极大交换子代数描述了 $\Delta(\mathbf{A})$ 的 Gelfand-Tsetlin 特征。给定 $B\in$行$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，我们将其各列从左到右记为 $B_1,\ \ldots,\ B_{\wp}$。 Peng [Pen21] 对 Brundan-Kleshchev 的研究作出了超推广，将移位超 Yangian 与有限型 A 的 W-超代数联系起来。我们在此记录 Lu-Peng 的恒等式。

定理 3.6. [LP26] 以下恒等式在格罗滕迪克群 $[\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$中成立：

$$[M(B)]=\left[M(B_1)\boxtimes\ldots\boxtimes M(B_{\wp})\right], \quad \textit{for } B\in \mathit{Row}(\boldsymbol{\epsilon\lambda}).$$

定理3.5是这一结果在 [LP26] 中的抛物型推广，我们下面的证明依赖于它。

定理*3.5*的证明。 给定一个列标准杨表 A （与视为左对齐金字塔的分拆相关联），我们用 C_A 表示其列稳定子群，它是对称群的乘积。给定与多重分拆 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ \ldots\ldots,\ \lambda^{(r)})$相关联的多杨表$\mathbf{A}=(A^{(1)},\ \ldots\ldots,\ A^{(r)})\in$标准$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，我们记为 $C_{\mathbf{A}}=C_{A^{(1)}}\times\ldots\times C_{A^{(r)}}$。特别地，列稳定子群 $C_{A_j^{(i)}}$ 对 $A^{(i)}$的第 j列 $A_j^{(i)}$ 是有意义的，并且$C_{\mathbf{A}_j}=C_{A_j^{(1)}}\times\ldots\times C_{A_j^{(r)}}$。

证明中下面的恒等式被理解为在格罗滕迪克群$[\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]$中成立。此外，对于某个多杨表 B，Verma 模 $[M(B)]$或 $[M(\mathfrak{l},\ B)],$的类始终被理解为 $[M(B')]$或 $[M(\mathfrak{l},\ B')],$，其中对应于唯一的 $B'\in$行$(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，它可由 B 通过对行内元素进行置换而得到。

对于每个 $1\le i\le r$，回顾 (3.21) 中 $V(A^{(i)})$ 的定义，并应用 A 型李代数上有限维不可约模的 Weyl 特征标公式，可得

$$\begin{aligned}[V(A^{(i)})] &= \sum_{\sigma^i=(\sigma_1,\dots,\sigma_l)\in C_{A_1^{(i)}}\times\dots\times C_{A_{\wp i}^{(i)}}} (-1)^{\ell(\sigma_1)+\dots+\ell(\sigma_{\wp i})}\Big[M(\sigma_1 A_1^{(i)})\boxtimes\dots\boxtimes M(\sigma_l A_{\wp i}^{(i)})\Big]\\ &= \sum_{\sigma^i\in C_{A^{(i)}}} (-1)^{\ell(\sigma^i)}\big[M(\sigma^i A^{(i)})\big],\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是应用定理 3.6 和 $C_{A^{(i)}}=C_{A_1^{(i)}}\times\dots\times C_{A_{\wp i}^{(i)}}$ 得出的。根据定义 (3.22)，这就给出

$$\begin{aligned}[V(\mathfrak{l},\mathbf{A})]=\big[\otimes_{i=1}^r V(A^{(i)})\big] &= \sum_{\sigma=(\sigma^1,\dots,\sigma^r)\in C_{A^{(1)}}\times\dots\times C_{A^{(r)}}} (-1)^{\ell(\sigma^1)+\dots+\ell(\sigma^r)}\big[\otimes_{i=1}^r M(\sigma^i A^{(i)})\big]\\ &= \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)}\big[M(\mathfrak{l},\sigma\mathbf{A})\big].\end{aligned}$$

因此，由上述恒等式及 $\Delta(\mathbf{A})$ 的定义 (3.23)，可得

$$\begin{aligned}[\Delta(\mathbf{A})]=\big[\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}\big(V(\mathfrak{l},\mathbf{A})\big)\big] &= \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)}\big[\mathcal{I}^{\mathfrak{g}}\big(M(\mathfrak{l},\sigma\mathbf{A})\big)\big]\\ &= \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)}\big[\big(M(\sigma\mathbf{A})\big)\big],\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中，最后一个等式利用了诱导函子的传递性；参见 [BG13，引理 3.5]。另一方面，对于每个 $1\le j\le \wp$，Weyl 特征标公式将抛物 Verma 模的特征表示为 Verma 模的形式:

$$\big[N(\mathbf{A}_j)\big]=\sum_{\sigma_j\in C_{\mathbf{A}_j}} (-1)^{\ell(\sigma_j)}\big[M(\sigma_j\mathbf{A}_j)\big].$$

利用此公式并回顾 (3.24) 中的 $N(\mathbf{A})=N(\mathbf{A}_1)\boxtimes\cdots\boxtimes N(\mathbf{A}_\wp)$，可得

$$\begin{aligned}[N(\mathbf{A})] &= \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_l)\in C_{\mathbf{A}_1}\times\dots\times C_{\mathbf{A}_\wp}} (-1)^{\ell(\sigma_1)+\dots+\ell(\sigma_\wp)}\Big[M(\sigma_1\mathbf{A}_1)\boxtimes\dots\boxtimes M(\sigma_l\mathbf{A}_\wp)\Big]\\ &= \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)}\big[M(\sigma\mathbf{A})\big],\end{aligned}\tag{3.26}$$

其中 t 最后一个等式是应用定理 3.6 中的 Lu-Peng 恒等式得出的 .

现在，通过比较恒等式 (3.25) 与 (3.26)，该定理随之成立。 □

3.7. **简单特征公式于** $\mathcal{P}(\epsilon\lambda)$。 用 $[\mathcal{P}(\epsilon\lambda)]^\wedge$ 表示 Grothendieck 群相对于偏序 $\prec_{T,\ \epsilon}$ 下标准模基的向下完备化。

引理 3.7. 完备格罗滕迪克群 $[\mathcal{P}(\epsilon\lambda)]^\wedge$ 有一组由标准模 $\{[\Delta(\mathbf{A})] \mid \mathbf{A} \in$ 标准$(\epsilon\lambda)\}$构成的基。

本文的主要结果是以下针对 W-超代数 $U(\mathfrak{g}, \epsilon\lambda)$ 的模的抛物范畴的 Kazhdan-Lusztig 型特征公式。记

$$\widehat{P}^{\epsilon\lambda}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \widehat{P}^{\epsilon\lambda}(\mathbb{V}_{\mathcal{Z}}),$$

其中， $\mathbb{Q}(q)$ 通过 $q \mapsto 1$作用于 $\mathbb{Z}$ ，后文也采用类似记法。

定理 3.8。

(1) 存在一个 $\mathbb{Z}$-线性同构 $\Psi:\ [\mathcal{P}(\epsilon\lambda)]^\wedge \to \widehat{P}^{\epsilon\lambda}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$，它将标准模 $[\Delta(\mathbf{A})]$ 的类映射到标准基 $\Delta_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A} \in$ 属于标准$(\epsilon\lambda)$。*(2)* 映射 Ψ将单模的类映射到对偶典范基，即 $\Psi([L(\mathbf{A})]) = L_{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A} \in$ 属于标准$(\epsilon\lambda)$。

回顾式 (2.14)，与 (λ, ϵ) 相关联的新带符号多重分拆为 (λ, ϵ)。回顾例 3.2， $\mathcal{O}(\epsilon\lambda)$ 表示由 $U(\mathfrak{g}, \epsilon\lambda)$-模构成的全子范畴 $\mathcal{O}$。 $\mathcal{O}(\epsilon\lambda)$ 中的 Verma（标准）模 $\Delta(\mathbf{A})$ 有一个单头，记作 $L(\mathbf{A})$，其中$\mathbf{A} \in$属于行 Row$(\epsilon\lambda)$。我们首先证明定理 3.8 的以下特殊情形。

定理 3.9。设 $\epsilon\lambda$是类型为 $(n|m)$的带符号多重分拆。则 $\mathbb{Z}$-线性同构 $\Psi:\ [\mathcal{O}(\epsilon\lambda)]^\wedge \to \widehat{S}^{\epsilon\lambda}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}})$，定义为对所有 A 将 $[M(A)] \mapsto \Delta_A$ 映至相应元素，将 $[L(A)]$ 映至 L_A ，对所有 $A \in$ 均成立行$(\epsilon\lambda)$。

证明。 该定理由结合来自 [CCM23] 和 [CW25] 的两个主要结果的 ϵ-变体得出；这两篇论文研究了相对于与标准符号序列 $\epsilon_{\mathbf{st}}$相关联的标准根系的模范畴。假设与幂零特征 ζ 相关联的 Levi 子代数 $\mathfrak{l}_\zeta$ 是相对于 ϵ- 单根系的偶 Levi 子代数，则可完全类似地证明 ϵ-变体，记号沿用原文。本文的情形满足这一假设。

在 [CCM23，定理 44]中建立了一个范畴等价，介于范畴 $\mathcal{O}(\epsilon\lambda)$（由 $U(\mathfrak{g}, \epsilon\lambda)$-模构成）与适当的 Whittaker $\mathfrak{g}$-模范畴 $\mathcal{W}h(\epsilon\lambda)$ 之间，其中 $\Delta(\mathbf{A})$（分别地， $L(\mathbf{A})$）对应于标准 Whittaker 模（分别地，不可约商模）。

现在，定理可由 $\mathcal{O}(\epsilon\lambda)$ 的 $U(\mathfrak{g},\ \epsilon\lambda)$-模与 $\mathcal{W}h(\epsilon\lambda)$ 之间的范畴等价推出，该等价将标准模与不可约模对应起来。在约化李代数的情形下，这种等价由 Losev [Los12] 给出；而 [CW25，定理 6.11] 中所给出的所需超推广，则关键依赖于 [SX20] 的工作，该工作给出了 Losev 分解定理的超推广。□

定理 *3.8* 的证明。 第 (1) 部分由引理 3.7 得出。

我们考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]^{\wedge} & \xrightarrow{\jmath_o} & [\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})]^{\wedge} \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_o} \\ \widehat{P}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\jmath} & \widehat{S}^{\boldsymbol{\epsilon\lambda}}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) \end{array} \tag{3.27}$$

这里，$\jmath_o$ 是格罗滕迪克群层面上的自然包含映射，因为 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 是 $\mathcal{O}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 的子范畴。水平映射 $\jmath_o$，$\jmath$ 是 $\mathbb{Z}$-模的嵌入，而垂直映射是 $\mathbb{Z}$-线性同构（所有这些映射都可以取为 $\mathbf{U}_{\mathbb{Z}}$-模同态，但这里不需要这一事实）。我们在 Ψ_o 上添加下标，以将其与其他 Ψ区分开来。

我们证明图式 (3.27) 是交换的。回顾定理3.5的证明中出现的 (3.25)，有

$$\jmath_o([\Delta(\mathbf{A})]) = \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)} \big[\big(M(\sigma\mathbf{A})\big)\big].$$

由定理 3.9，$\Psi_o([M(\sigma\mathbf{A})]) = M_{\sigma\mathbf{A}}$，因此

$$\Psi_o \circ \jmath_o([\Delta(\mathbf{A})]) = \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)} M_{\sigma\mathbf{A}}. \tag{3.28}$$

回顾 $\mathbf{A} = (A^{(1)}, \ldots\ldots, A^{(r)})$。根据定义 (2.20)、(2.21)、(2.22) 和 (2.24)，在 $q = 1$ 极限下，我们有

$$\jmath(\Delta_{\mathbf{A}}) = \otimes_{i=1}^{r} \xi(\mathcal{K}_{A^{(i)}}) = \otimes_{i=1}^{r} \Big(\sum_{\sigma^i \in C_{A^{(i)}}} (-1)^{\ell(\sigma^i)} M_{\sigma^i A^{(i)}} \Big) = \sum_{\sigma\in C_{\mathbf{A}}} (-1)^{\ell(\sigma)} M_{\sigma\mathbf{A}}. \tag{3.29}$$

在最后一个等式中，我们将 $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$、$\sigma\mathbf{A} = (\sigma^1 A^{(1)}, \ldots, \sigma^r A^{(r)})$ 和 $M_{\sigma\mathbf{A}} = M_{\sigma^1 A^{(1)}} \otimes \ldots \otimes M_{\sigma^r A^{(r)}}$视为相同。

比较 (3.28)–(3.29)，并回想定义 $\Psi([\Delta(\mathbf{A})]) = \Delta_{\mathbf{A}}$，我们得出结论：对于所有 $\mathbf{A} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$，都有 $\Psi_o \circ \jmath_o([\Delta(\mathbf{A})]) = \jmath \circ \Psi([\Delta(\mathbf{A})])$，即图 (3.27) 是交换图。

另一方面，由命题 2.8 可得 $\jmath(L_{\mathbf{A}}) = L_{\mathbf{A}}$。根据定义，有$\jmath_o([L(\mathbf{A})]) = [L(\mathbf{A})]$。因此，由交换图 (3.27) 以及定理 3.9 得到的 $\Psi_o([L(\mathbf{A})]) = L_{\mathbf{A}}$，我们得出结论：$\Psi([L(\mathbf{A})]) = L_{\mathbf{A}}$。定理得证。□

3.8. **有限维单特征标公式**。在 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \mu)$ 且$\boldsymbol{\epsilon} = (+, -)$ 的情况下，我们将此（极大）抛物范畴 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 记为 $\mathcal{F}(\lambda|\mu)$。

定理 **3.10.** 设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \mu)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (+, -)$分别对应 n 和 m 的分拆 λ 和 μ .

(1) 范畴 $\mathcal{F}(\lambda|\mu)$ 由所有具有整数权的有限维 $U(\mathfrak{gl}_{n|m}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模组成。$\mathcal{F}(\lambda|\mu)$ 中单模的完整列表由 $L(A^{(1)}, A^{(2)})$ 组成，其中 $(A^{(1)}, A^{(2)}) \in$ 标准$(\lambda, +) \times$ 标准$(\mu, -)$。*(2)* $\mathbb{Z}$-模同构 $\Psi: [\mathcal{F}(\lambda|\mu)]^{\wedge} \to P^{\lambda}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}) \,\widehat{\otimes}\, P^{\mu}(\mathbb{V}_{\mathbb{Z}}^{-})$，由映射 $\Delta(A^{(1)}, A^{(2)}) \mapsto \Delta_{(A^{(1)}, A^{(2)})}$ 定义，将 $[L(A^{(1)}, A^{(2)})]$ 送到 $L_{(A^{(1)}, A^{(2)})}$。

证明。 我们证明 (1)。在该定理的假设下，Levi $\mathfrak{l}$ 与偶子代数 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_m$重合。因此，根据 [ZS15 中定理 0.1]，给出的关于 $U(\mathfrak{g}, e)$ 的 PBW 定理，可知所有标准模 $\Delta(A^{(1)}, A^{(2)})$ 均为有限维，从而单模 $L(A^{(1)}, A^{(2)})$ 亦为有限维，其中 $(A^{(1)}, A^{(2)}) \in$ 标准$(\lambda, +) \times$ 标准$(\mu, -)$。

第(2)部分是定理 3.8(2)在这一特殊情形下的重新表述。 □

注记 3.11. 有限维不可约 $U(\mathfrak{gl}_{n|m}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$-模（不施加整数权条件）可通过修改定理3.10的证明加以分类。事实上，再次选取Levi子代数 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，可见每个有限维不可约 $U(\mathfrak{gl}_{n|m}, e)$-模都是由有限维 $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, e)$-模诱导的抛物 Verma 模的顶。现在，再次利用 $U(\mathfrak{gl}_{n|m}, \boldsymbol{\epsilon\lambda})$ 的PBW定理，可知有限维不可约模由与有限维不可约 $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, e)$-模相同的参数集参数化。后者，即 A 型有限W-代数的参数集，是已知的；参见 [BK08]。

References

[BB81] Alexandre Beilinson 与 Joseph Bernstein. g-模的局部化. C. R. Acad. Sci. Paris S ´er. I Math., 292(1):15–18, 1981.[BG13] Jonathan Brown 与 Simon Goodwin. 与经典李代数中偶重数幂零轨道相关联的有限W-代数的有限维不可约表示. Math. Z., 273(1-2):123–160, 2013.[BGK08] Jonathan Brundan、Simon Goodwin 与 Alexander Kleshchev. 有限W-代数的最高权理论. Int. Math. Res. Not. IMRN, (15):Art. ID rnn051, 53, 2008.[BK81] J.-L. Brylinski 与 M. Kashiwara. Kazhdan-Lusztig 猜想与完整系. Invent. Math., 64(3):387–410, 1981.[BK08] Jonathan Brundan 与 Alexander Kleshchev. 移位 Yangian 与有限W-代数的表示. Mem. Amer. Math. Soc., 196(918):viii +107, 2008.[BLW17] Jonathan Brundan、Ivan Losev 与 Ben Webster. 张量积范畴化与超 Kazhdan-Lusztig 猜想. Int. Math. Res. Not. IMRN, (20):6329–6410, 2017.[Bru03] Jonathan Brundan. 李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$的 Kazhdan-Lusztig 多项式与特征公式. J. Amer. Math. Soc., 16(1):185–231, 2003.[Bru06] Jonathan Brundan. 对偶典范基与 Kazhdan-Lusztig 多项式. J. Algebra, 306(1):17–46, 2006.[CCM23] Chih-Whi Chen、Shun-Jen Cheng 与 Volodymyr Mazorchuk. 李超代数的 Whittaker 范畴、适当分层范畴与 Fock 空间范畴化. Comm. Math. Phys., 401(1):717–768, 2023.[CLW15] Shun-Jen Cheng、Ngau Lam 与 Weiqiang Wang. 一般线性李超代数的 Brundan-Kazhdan-Lusztig 猜想. Duke Math. J., 164(4):617–695, 2015.[CW12] Shun-Jen Cheng 与 Weiqiang Wang. 李超代数的对偶与表示，《数学研究生丛书》第144卷. 美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2012.[CW25] Shun-Jen Cheng 与 Weiqiang Wang. Whittaker 模与有限 W-代数的超对偶. Ann. Represent. Theory, 2(4):505–535, 2025.[Deo87] Vinay V. Deodhar. 关于 Bruhat 序的若干几何方面. II. Kazhdan-Lusztig 多项式的抛物类比. J. Algebra, 111(2):483–506, 1987.

[dVvD95] K. de Vos 与 P. van Driel. 有限 W-代数的 Kazhdan-Lusztig 猜想. Lett. Math. Phys., 35(4):333–344, 1995. arXiv:hep-th/9312016.[FKK98] I. B. Frenkel、M. G. Khovanov 与 A. A. Kirillov, Jr. Kazhdan-Lusztig 多项式与典范基. Transform. Groups, 3(4):321–336, 1998.[Jim86] 神保道夫. $u(\mathfrak{gl}(n+1))$ 的 q-类似、Hecke 代数与 Yang-Baxter 方程. Lett. Math. Phys., 11(3):247–252, 1986.[KL79] David Kazhdan 与 George Lusztig. Coxeter 群表示与 Hecke 代数. Invent. Math., 53(2):165–184, 1979.[Los10] Ivan Losev. 有限 W-代数. 载于《国际数学家大会论文集》第三卷，第 1281–1307页. Hindustan Book Agency，新德里，2010.[Los12] Ivan Losev. 关于 $\mathcal{W}$-代数的范畴 $\mathcal{O}$ 的结构 . 载于《表示论中的几何方法》 II，S ´emin. Congr. 第 24 卷，第 353–370 页 . 法国数学会，巴黎，2012.[LP26] Kang Lu 与 Yung-Ning Peng. A 型移位超 Yangian 与有限 W-超代数的表示. 预印本, 2026. arXiv:.[Lus92] G. Lusztig. 张量积中的典范基. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 89(17):8177–8179, 1992.[Lus10] George Lusztig. 量子群导论. Modern Birkh¨auser Classics. Birkh¨auser/Springer, 纽约，2010. 1994年版重印.[LW15] Ivan Losev 与 Ben Webster. 关于不可约范畴化之张量积的唯一性. Selecta Math. (N.S.), 21(2):345–377, 2015.[MS97] Dragan Mili˘ci´c 与 Wolfgang Soergel. 由 Whittaker 模诱导的模的合成列. Comment. Math. Helv., 72(4):503–520, 1997.[Pen21] Yung-Ning Peng. 经由超 Yangian 的有限 W-超代数. Adv. Math., 377:Paper No. 107459, 60, 2021.[SX20] Bin Shu 与 Husileng Xiao. 超形式 Darboux-Weinstein 定理与有限 W-超代数. J. Algebra, 550:242–265, 2020.[Wan11] Weiqiang Wang. 幂零轨道与有限 W-代数. 载于《几何表示论与扩张仿射李代数》, Fields Inst. Commun. 第59卷，第71–105页. Amer. Math. Soc.，罗德岛州普罗维登斯，2011.[Web17] Benjamin Webster. 结不变量与高阶表示论. Mem. Amer. Math. Soc., 250(1191):v+141, 2017.[ZS15] Yang Zeng 与 Bin Shu. 基本李超代数的有限 W-超代数. J. Algebra, 438:188–234, 2015.

Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan 10617电子邮箱：chengsj@math.sinica.edu.tw

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903, USA电子邮箱：ww9c@virginia.edu