arXiv:2603.01394v1 [math.DG] 2 Mar 2026

扭曲乘积空间中的平行平均曲率曲面

Fernando Manfio*、Verˆonica Reis 和 Feliciano Vit´orio

摘要

本文对扭曲乘积 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中任意余维的曲面 M^2 进行了几何描述，这些曲面的法联络中的平均曲率向量场是平行的，从而推广了Alencar-do Carmo-Tribuzy [2]的一项结果。

关键词：平行平均曲率、扭曲乘积、余维约化。

1 引言

关于曲面 M^2 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$中的一个经典结果由Hopf [10], 给出，它指出任何同胚于球面且具有常平均曲率的曲面实际上等距于一个圆球面。该定理后来由Chern [6]推广到其他空间形式，并且最近由Abresch和Rosenberg [1]推广到具有四维等距群的三维齐性流形中的曲面。

Hopf型定理成立的一类自然的环境空间是乘积空间 $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{Q}_\epsilon^n$依 $\epsilon = 1$ 或 $\epsilon = -1$分别表示单位球面$\mathbb{S}^n$ 或双曲空间 $\mathbb{H}^n$。这一方向的开创性工作由Alencar-do Carmo-Tribuzy [2], 完成，他们研究了$\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$中具有平行平均曲率向量的曲面。他们证明，要么 H 是一个脐方向，要么该浸入允许余维约化到三维。

对曲面以及更一般的具有平行平均曲率向量场的子流形的研究，长期以来一直是微分几何领域关注的课题。这类子流形通过要求平均曲率向量 H 关于法联络平行，将极小曲面和常平均曲率曲面都纳入其中。例如，Chen [5], Yau[14], 和 Ali´as-Dajczer [3], 的研究表明，这一条件会对浸入施加显著的刚性和几何约束。

*第一作者获圣保罗州研究基金会（FAPESP）资助，项目编号为 2022/16097-2。第二作者曾获巴西高等教育人员提升协调会（CAPES）资助，项目编号为 88887.342501/2019-00。

本文研究高维扭曲乘积空间 $\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中具有平行平均曲率向量场的曲面。遵循 [2], 中的方法，我们的主要结果不要求曲面满足全局假设 M^2。我们证明，要么 H 是一个脐方向，要么该浸入可以约化余维。具体而言，我们建立如下结果:

定理 1.1。 设 $f\colon M^2\to \mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$, $n\geq 5$ 是一张具有非零平行平均曲率向量场的曲面。那么，以下情形之一成立:

(i) f 是切片 $\{t\}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$ 的某个脐超曲面中的极小曲面。

(ii) f 是切片 $\{t\}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$ 的某个三维脐或全测地子流形中的常平均曲率曲面。

(iii) $f(M^2)$ 包含于$\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中的全测地子流形 $\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^m$, $m\leq 4$ 内。

定理 1.1 的证明中的一个关键步骤，是针对到 $\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$ 中的等距浸入的余维约化结果（参见第 3 节），它推广了 [12] 关于乘积空间 $\mathbb{Q}_\epsilon^n\times\mathbb{R}$ 的结果。

2 预备知识

令 $\mathbb{Q}_\epsilon^n$ 表示维数为 n 的球面或双曲空间，分别对应于 $\epsilon=1$ 或 $\epsilon=-1$。我们还用 $\mathbb{E}^{n+2}$ 表示维数为 $n+2$ 的欧几里得空间或洛伦兹空间，分别对应于 $\epsilon=1$ 或 $\epsilon=-1$。若（x_1，.....，x_{n+2}）是 $\mathbb{E}^{n+2}$ 上的标准坐标，使得平坦度量写成

$$ds^2=\epsilon dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_{n+2}^2,$$

我们将 $\mathbb{E}^{n+1}$ 视为

$$\mathbb{E}^{n+1}=\{(x_1,\ldots,x_{n+2})\in\mathbb{E}^{n+2}:x_{n+2}=0\},$$

并将二次曲面 $\mathbb{Q}_\epsilon^n$ 视为

$$\mathbb{Q}_\epsilon^n=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{E}^{n+1}:\epsilon x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=\epsilon\},$$

其中，当 $\epsilon=-1$时，$x_1>0$。

给定一个开区间 $I\subset\mathbb{R}$ 和一个光滑正函数 $\rho\colon I\to\mathbb{R}$，我们考虑赋予扭曲乘积度量的扭曲乘积 $I\times_\rho\mathbb{Q}_\epsilon^n$

$$\langle,\rangle=\pi_1^*dt^2+(\rho\circ\pi_1)^2\pi_2^*\langle,\rangle_{\mathbb{Q}_\epsilon^n},$$

其中 $\pi_1\colon I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n \to I$和 $\pi_2\colon I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n \to \mathbb{Q}_\epsilon^n$表示典范投影。我们将把扭曲乘积流形 $I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$视为 $\mathbb{E}^{n+2}$ 的旋转超曲面，其参数化为

$$i(t,x)=(\rho(t)x,h(t)), \tag{2.1}$$

其中 $h\colon I\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数，满足 $\rho'(t)^2+\epsilon h'(t)^2=1$ 且$h'(t)>0$，对所有 $t\in I$和 $x\in\mathbb{Q}_\epsilon^n$均成立。注意，扭曲乘积 $I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$具有一个特定的单位向量场

$$\partial_t=(\rho'(t)x,h'(t)),$$

该向量场与第一因子 I相切，即 ∂_t 是沿$I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$的水平向量场。若 ∇ 表示 $I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$上的列维-奇维塔联络，则有

$$\overline{\nabla}_Z\partial_t=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\left(Z-\langle Z,\partial_t\rangle\partial_t\right), \tag{2.2}$$

对每个 $Z\in T(I\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n)$均成立。

给定一个等距浸入 $f\colon M^m\to\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$，定义 M^m 上的切向量场T 以及沿 f 的法向量场 η 如下:

$$\partial_t=f_*T+\eta. \tag{2.3}$$

利用 (2.2)，对 (2.3) 求导可得

$$\nabla_X T-A^f_\eta X=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\left(X-\langle X,T\rangle T\right) \tag{2.4}$$

and

$$\alpha_f(X,T)+\nabla^\perp_X\eta=-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\langle X,T\rangle\eta, \tag{2.5}$$

对所有 $X\in TM$均成立，其中α_f和 $\nabla^\perp$分别表示 f的第二基本形式和法联络。这里， A^f_η 表示 f 沿方向 η的形算子，定义为

$$\langle A^f_\eta X,Y\rangle=\langle\alpha_f(X,Y,\eta\rangle,$$

对于所有 $X,\ Y\in TM$。

f 的高斯方程、科达齐方程和里奇方程分别为

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z\ &=\lambda(t)(X\wedge Y)Z+A^f_{\alpha_f(Y,Z)}X-A^f_{\alpha_f(X,Z)}Y\\&\quad+\mu(t)\big(\langle X,T\rangle Y\wedge T-\langle Y,T\rangle X\wedge T\big)Z,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$(\nabla^\perp_X\alpha_f)(Y,Z)-(\nabla^\perp_Y\alpha_f)(X,Z)=\mu(t)\langle(Y\wedge X)Z,T\rangle\eta \tag{2.7}$$

and

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha_f(X, A^f_\xi Y) - \alpha_f(A^f_\xi X, Y), \tag{2.8}$$

其中

$$\lambda(t) = \frac{\epsilon - \rho'(t)^2}{\rho(t)^2} \quad \text{e} \quad \mu(t) = \frac{\rho''(t)\rho(t) - \rho'(t)^2 + \epsilon}{\rho(t)^2}. \tag{2.9}$$

方程（2.7）也可以写成

$$(\nabla_X A^f)(Y,\xi) - (\nabla_Y A^f)(X,\xi) = \mu(t)\langle \eta, \xi\rangle (X \wedge Y)T, \tag{2.10}$$

其中

$$(X \wedge Y)T = \langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y.$$

尽管本文不会用到这一点，但值得一提的是，方程（2.4）–（2.8）完全确定了一个等距浸入$f\colon\ M^m \to I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon$，除了 $I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon$的等距变换之外（见 [8, 定理 5.1]）。

注 2.1。 回忆一下，在扭曲乘积 $I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon$中，当 $n \geq 2$时，沿着一个切于 $\mathbb{Q}^n_\epsilon$ 的平面的截面曲率由 $(\epsilon - \rho'(t)^2)/\rho(t)^2$给出。另一方面，由分别切于 I和 $\mathbb{Q}^n_\epsilon$的单位向量 ∂_t和 X 张成的平面的截面曲率为 $-\rho''(t)/\rho(t)$。因此，$I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon$具有等于 c 的常截面曲率，当且仅当

$$\rho'(t)^2 + c\rho(t)^2 = \epsilon.$$

注意到这意味着 $-\rho''(t)/\rho(t) = c$，或者等价地，

$$\rho''(t)\rho(t) - \rho'(t)^2 + \epsilon = 0$$

（进一步详情见 *[11, 命题 4.6]* ）。由于我们假设环境空间 $I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon$ 不具有常截面曲率，因此可以假定在式 (2.9) 中定义的函数 $\mu(t)$处处不为零。

我们将通过联系 f 与 $f = i \circ f$ 的第二基本形式和˜法联络来结束本节，其中 i 是式 (2.1) 中给出的包含映射。超曲面 $i\colon\ I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon \to \mathbb{E}^{n+2}$ 存在如下单位法向量场：

$$\hat{N}_t = (h'(t)x, -\epsilon\rho'(t)).$$

因此，

$$\widetilde{\nabla}_Z \hat{N}_t = \frac{h'(t)}{\rho(t)} Z - \left(\frac{h'(t)}{\rho(t)} + \epsilon\frac{\rho''(t)}{h'(t)}\right)\langle Z, \partial_t\rangle \partial_t,$$

对于每个 $Z \in T(I \times_\rho \mathbb{Q}^n_\epsilon)$，其中 $\widetilde{\nabla}$ 是沿 $\mathbb{E}^{n+2}$ 的导数。因此， i 沿 N_t 方向的ˆ形算子为

$$A^i_{\hat{N}_t} Z = -\frac{h'(t)}{\rho(t)} Z + \left(\frac{h'(t)}{\rho(t)} + \epsilon\frac{\rho''(t)}{h'(t)}\right)\langle Z, \partial_t\rangle \partial_t. \tag{2.11}$$

$\tilde{}$ f 和 f 的法空间之间的关系为

$$TM_{\tilde{f}}^{\perp} = i_* TM_f^{\perp} \oplus span\{N_t\},$$

$\hat{}$ 其中， N_t 表示沿 f对 N_t 的限制。给定一个法向量场$\xi \in TM_f^{\perp}$，由（2.11）可得

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X i_*\xi &= i_* \overline{\nabla}_X \xi + \alpha_i(f_*X, \xi) \\ &= -\tilde{f}_* A_\xi^f X + i_* \nabla_X^{\perp} \xi + \alpha_i(f_*X, \xi) \end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，由（2.12）并利用Weingarten公式，有

$$A_{i_*\xi}^{\tilde{f}} = A_\xi^f \tag{2.13}$$

and

$$\widetilde{\nabla}_X^{\perp} i_*\xi = i_* \nabla_X^{\perp} \xi + \epsilon \left(\frac{h'(t)}{\rho(t)} + \epsilon \frac{\rho''(t)}{h'(t)} \right) \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle N_t, \tag{2.14}$$

对任意 $\xi \in TM_f^{\perp}$成立，其中 $\widetilde{\nabla}^{\perp}$是 $\tilde{f}$的法联络。

3 余维约化

为了研究扭曲乘积 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中具有平行平均曲率向量场的曲面，我们需要以下关于等距浸入 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$的余维约化结果。若等距浸入 f: $M^m \to \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$使得 f（M^m）包含于 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中的一个全测地子流形 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^{m+l-1}$内，则称其将余维约化为 l。

我们将 f 在 x处的<styles id='3'>第一法空间</styles>记为 $N_1(x)$，即由其第二基本形式张成的 $T_x M^{\perp}$ 子空间。Erbacher [9], 提出，对于空间形式中的子流形，其余维约化的一个条件是：其第一法空间构成法丛的一个平行子丛。以下结果最初是在 [12], 中的 $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ 上证明的，它是上述Erbacher关于扭曲乘积中子流形结果的一个版本。

引理 3.1. 设 f: $M^m \to \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$是一个等距浸入，并假设 $L := N_1 + span\{\eta\}$ 是 $TM_f^{\perp}$ 的一个秩为 $l < n + 1 - m$ 的子丛，且 $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$。那么 f 将余维约化为 l。

证明。 由 (2.5) 可知，对于每个 $X \in TM$，都有 $\nabla_X^{\perp} \eta \in L$。根据假设，我们有 $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$，因此 L 是 $TM_f^{\perp}$ 的平行子丛。令 $L^{\perp}$ 表示 $TM_f^{\perp}$ 中 L 的正交补。给定

$\xi \in L^{\perp} = N_1^{\perp} \cap \{\eta\}^{\perp}$，由 (2.14) 以及 L 是 $TM_f^{\perp}$ 的平行子丛这一事实，我们得到

$$\widetilde{\nabla}^{\perp}_X i_* \xi = i_* \nabla^{\perp}_X \xi \in i_* L^{\perp},$$

其中，$\widetilde{\nabla}$ 表示 $\mathbb{E}^{n+2}$的导数。这表明 $i_* L^{\perp}$ 是 $TM_{\tilde{f}}^{\perp}$的一个平行子丛。另一方面，由（2.13）可得

$$i_* L^{\perp} \subset \widetilde{N}_1^{\perp},$$

~ ~其中，N_1（x）是 f 在 $x \in M^m$处的第一法空间。由~的Weingarten公式，对 f 可得

$$\widetilde{\nabla}_X i_* \xi = -\tilde{f}_* A^{\tilde{f}}_{i_*\xi} X + \widetilde{\nabla}^{\perp}_X i_* \xi = \widetilde{\nabla}^{\perp}_X i_* \xi \in i_* L^{\perp},$$

这意味着 $i_* L^{\perp}$ 是 $\mathbb{E}^{n+2}$的一个常子空间，且与 ∂_t正交。记 K 为 $\mathbb{E}^{n+2}$中 $i_* L^{\perp}$ 的正交补。对于任意固定点 $x_0 \in M^m$，有

$$\tilde{f}(M) \subset \tilde{f}(x_0) + K.$$

~由于 K 包含 ∂_t 和 N_t（x_0），因此也包含位置向量 f（x_0）。~因此，我们有 f（x_0）$+ K = K$。由此可得

$$\tilde{f}(M) \subset (\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\epsilon}^n) \cap K = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\epsilon}^{m+l-1},$$

至此，证明完毕。 □

Dajczer [7],得到了关于空间形式中子流形的第一法丛平行性的一个充要条件，该条件以其法曲率张量 $R^{\perp}$ 和平均曲率向量场 H 表示；其证明可加以改编，从而得到以下适用于$\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\epsilon}^n$中子流形的结果。关于 $\mathbb{Q}_{\epsilon}^n \times \mathbb{R}$ 中子流形的相应结果见 [12, 定理1.7]。

定理 3.2. 设 $f\colon M^m \to \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\epsilon}^n$ 是等距浸入，并假设 $L := N_1 + span\{\eta\}$ 是 $TM_f^{\perp}$ 的一个秩为 $l < n+1-m$ 的子丛。那么 $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$ 当且仅当以下两个条件成立：

(i) $\nabla^{\perp} R^{\perp}|_{L^{\perp}} = 0$,

(ii) $\nabla^{\perp} H \in L$.

证明。 假设 $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$，条件 (*ii*) 显然成立，因为$H \in N_1$。为证明 (*i*)，首先注意到，对于 $\xi \in N_1^{\perp}$，里奇方程给出

$$R^{\perp}(X, Y)\xi = \alpha_f(X, A^f_{\xi} Y) - \alpha_f(A^f_{\xi} X, Y) = 0.$$

给定 $\xi \in L^{\perp}$，我们有 $\xi \in N_1^{\perp}$。此外，根据我们的假设，对所有 $Z \in TM$，都有$\nabla_Z^{\perp}\xi \in N_1^{\perp}$。因此，

$$\begin{aligned}(\nabla_Z R^{\perp})(X,Y,\xi) &= \nabla_Z R^{\perp}(X,Y)\xi - R^{\perp}(\nabla_Z X,Y)\xi - R^{\perp}(X,\nabla_Z Y)\xi \\ &\quad -R^{\perp}(X,Y)\nabla_Z^{\perp}\xi = 0,\end{aligned}$$

对所有 X，$Y \in TM$。反之，设 $\xi \in L^{\perp}$。由于对于所有X，$Y \in TM$，都有 $R^{\perp}(X, Y)\xi = 0$，由（i）可得

$$R^{\perp}(X,Y)\nabla_Z^{\perp}\xi = 0,$$

对每个 X，Y，$Z \in TM$。再次利用里奇方程，可得

$$\left[A_{\nabla_Z^{\perp}\xi}, A_{\nabla_W^{\perp}\xi}\right] = 0,$$

对每个 Z，$W \in TM$。因此，在任意点 $x \in M$，都存在一个正交规范基 $\{Z_1, ..., Z_n\}$，使得 T_xM 的所有形算子 $A_{\nabla_Z^{\perp}\xi}$ 同时对角化，其中 $Z \in TM$。我们断言

$$\left\langle \nabla_{Z_k}^{\perp}\xi, \alpha_f(Z_i, Z_j \right\rangle = 0,$$

对所有 $1 \le i$，j，$k \le n$，这意味着对于所有 $Z \in TM$，都有 $\nabla_Z^{\perp}\xi \in N_1^{\perp}$。根据基 $\{Z_1, ..., Z_n\}$ 的选取，可得

$$\left\langle \alpha(Z_i, Z_j), \nabla_{Z_k}^{\perp}\xi \right\rangle = \left\langle A_{\nabla_{Z_k}^{\perp}\xi} Z_i, Z_j \right\rangle = \lambda_{ki}\delta_{ij},$$

其中 λ_{k_i} 是与 Z_i 对应的 $A_{\nabla_{Z_k}^{\perp}\xi}$ 的特征值。由 Codazzi 方程（2.10）以及 $\xi \in L^{\perp} \subset \{\eta\}^{\perp}$ 这一事实，可得

$$A^f_{\nabla_{Z_i}^{\perp}\xi} Z_k = A^f_{\nabla_{Z_k}^{\perp}\xi} Z_i.$$

这意味着，除非满足 $k = i$，否则与 Z_i 对应的 $A^f_{\nabla_{Z_k}^{\perp}\xi}$ 的特征值 λ_{ki} 为零。因此，

$$\left\langle \alpha_f(Z_i, Z_i), \nabla_{Z_k}^{\perp}\xi \right\rangle = \left\langle A^f_{\nabla_{Z_k}^{\perp}\xi} Z_i, Z_i \right\rangle = \left\langle A^f_{\nabla_{Z_i}^{\perp}\xi} Z_k, Z_i \right\rangle = 0, \text{ if } i \neq k.$$

最后，假设 $\nabla^{\perp}H \in L$ 和 $\xi \in L^{\perp}$ 意味着 $\langle \nabla_{Z_i}^{\perp}H, \xi\rangle = 0$。因此，

$$\left\langle \alpha_f(Z_i, Z_i), \nabla_{Z_i}^{\perp}\xi, \right\rangle = n\left\langle H, \nabla_{Z_i}^{\perp}\xi \right\rangle = -n\langle \nabla_{Z_i}^{\perp}H, \xi\rangle = 0,$$

至此，证明完毕。 □

4 主要结果的证明

定理 1.1 的证明用到了第 1.3 节中的余维数约化定理，以及下文将讨论的一个关于解析函数的重要事实。

注 4.1。 沿用空间形式中子流形的处理方法，我们称浸入扭曲乘积中的曲面 M^2 为实解析的，若将其视为局部坐标中的图形时，其高度函数是实解析的。等价地说，局部定义该浸入的两个实变量函数都是实解析函数。解析性与椭圆型偏微分方程有关。更具体地说，等距浸入 $f\colon\ M^2 \to \mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$ 具有平行平均曲率向量场 H这一几何假设，结合高斯方程、*Codazzi* 方程和里奇方程，构成了一个涉及浸入各分量的封闭微分方程组。由于曲面 M^2 和环境空间 $\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$都是解析流形，由子流形理论基本方程导出的偏微分方程组是一个解析系统（参见 *[13]*；另见 *[4]*）。解析非线性椭圆方程组的解是实解析的，这一正则性性质源于解析延拓原理。

定理 *1.1* 的证明。 由于平均曲率向量 H 平行且非零，函数

$$\mu := \|H\|^2$$

在 M^2 上是一个非零常数。首先假设 $A_H = \mu I$ 在 M^2上处处成立。我们断言向量场 T 恒为零。反设不然，则存在一个开子集 U，其中 $T \neq 0$。选取一个单位向量场 X，使其在 U 上与 T正交。于是

$$\langle \alpha_f(X,T), H\rangle = \langle A_H X, T\rangle = \mu\langle X, T\rangle = 0. \tag{4.1}$$

由 Codazzi 方程（2.7），我们有

$$\Big\langle (\nabla^\perp_T \alpha)(X,X) - (\nabla^\perp_X \alpha)(T,X), H\Big\rangle = -\epsilon\mu(t)\|T\|^2\langle \eta, H\rangle. \tag{4.2}$$

由（4.1）以及 μ 在 M^2 上为常数这一事实可知，（4.2）左端为零。因此，函数 $\langle \eta, H\rangle$ 在 U上恒为零，因此

$$0 = T\langle \eta, H\rangle = \langle \nabla^\perp_T \eta, H\rangle = \big\langle -\alpha(T,T) - \rho'/\rho\langle T,T\rangle\eta, H\big\rangle = -\mu||T||^2.$$

由于 μ 是一个非零常数，因此 T 在 U上消失。这与假设矛盾，从而证明了该断言。因此，若 $A_H = \mu I$ 在M^2上处处成立，则 $f(M^2)$包含于 $\mathbb{R}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$的一个切片 $\{t_0\}\times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$中，并且根据 [14, 定理 4]，可能性（$i$）或（$ii$）成立。现在假设 $A_H \neq \mu I$

在 M^2的一个开子集 V上。由于 H 在f的法联络下平行，根据里奇方程可知，对任意点 $x \in M^2$和任意法向量$\zeta \in T_xM_f^\perp$，都有 $[A_H, A_\zeta] = 0$。于是，由于 A_H 在 V上具有互异特征值， A_H 的特征向量对于任意$\zeta \in T_xM_f^\perp$（其中 $x \in V$）也是 A_ζ的特征向量。因此，在任意 $x \in V$处，所有形算子都可同时对角化；由里奇方程 (2.8) 可知，这意味着 f 在 V 上具有平坦法丛。特别地，在任意点 $x \in V$处， f 的第一法空间 N_1 的维数至多为二。设 $W \subset V$是一个开子集，在该子集上$\{\eta\}$ 具有常数维数 $l \leq 3$。由引理 3.1 和定理 3.2 可知， $f(W)$包含于 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^n$的一个全测地子流形 $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^{2+l-1}$中。根据 f的解析性（见注 4.1），我们得出结论： $f(M^2) \subset \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\epsilon^{l+1}$。 □

参考文献

[1] *U. Abresch*，*H. Rosenberg*，《$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$中常平均曲率曲面的 *Hopf* 微分》。《数学学报》*193 (2004)*，第 *2* 期，*141–174* 页。[2] *H. Alencar*，*M. P. do Carmo*，*R. Tribuzy*，《维数高于三的环境空间中的 *Hopf* 定理》。《微分几何杂志》*84 (2010)*，第 *1* 期，*1–17* 页。[3] *L. J. Alıas*，*M. Dajczer*，《在夹层中适当浸入的常平均曲率曲面的唯一性》。《瑞士数学评论》*81 (2006)*，第 *3* 期，*653–663* 页。[4] *S. Blatt*，《非线性椭圆偏微分方程解的解析性》。参见 *arXiv:2009.08762*。[5] *B.-Y. Chen*，《关于具有平行平均曲率向量的曲面》。《印第安纳大学数学杂志》*22 (1972/73)*，*655–666* 页。[6]*S.S. Chern*，《常曲率三维空间中的常平均曲率曲面》。《数学讲义》*1007*，施普林格出版社，柏林，*1983*。[7] *M. Dajczer*，《正则等距浸入的余维数约化》。《数学杂志》*179 (1982)*，第 *2* 期，*263–286* 页。[8] *C. do Rei Filho*，*F. Vit´ório*，《浸入旋转超曲面的子流形的 *Bonnet* 定理》。《数学研究成果》*71 (2017)*，第 *1–2* 期，*283–294* 页。[9] *J. Erbacher*，《等距浸入的余维数约化》。《微分几何杂志》*5 (1971)*，*333–340* 页。

[10] H. Hopf，大范围微分几何。《数学讲义》1000，施普林格出版社，柏林，1983。[11] F. Manfio，R. Tojeiro，具有常截面曲率的超曲面（见 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$，《伊利诺伊数学杂志》，**55** (2011)，第 1 期，397–415 页。[12] B. Mendonca，R. Tojeiro， $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$的脐子流形。《加拿大数学杂志》**66** (2014)，第 2 期，400–428 页。[13] C. B. Jr. Morrey，关于解析非线性椭圆偏微分方程组解的解析性。*I.* 内部解析性。《美国数学杂志》**80**(1958)，198–218 页。[14] S. T. Yau，具有常平均曲率的子流形。I.《美国数学杂志》**96** (1974)，346–366 页。

巴西圣保罗大学˜电子邮箱地址： manfio@icmc.usp.br,
reissantanaveronica@gmail.com巴西阿拉戈斯联邦大学电子邮箱地址:
feliciano@pos.mat.ufal.br