arXiv:2603.01395v1 [math.PR] 2 Mar 2026

稀疏 β模型中三角形计数的渐近正态性

Siang Zhang、Qunqiang Feng*和
Zhishui Hu中国科学技术大学管理学院统计与金融系，
合肥230026，中国

摘要

我们研究稀疏 β模型中 n个顶点上的三角形数目 T_n ，该随机图模型刻画了现实世界网络中的度异质性。利用异质性参数向量的范数，我们首先确定 T_n的渐近均值和方差。接着，通过应用Malliavin–Stein方法，我们推导了标准化 T_n与标准正态分布之间柯尔莫哥洛夫距离的非渐近上界。在关于度异质性的一个附加假设下，我们进一步证明了当 $n \to \infty$时 T_n的渐近正态性。

关键词：随机网络，稀疏性，度异质性，子图计数
Malliavin-Stein方法

*AMS 2020*年主题分类：主要分类 05C80、90B15；次要分类 60F05

1 引言

子图计数是随机图研究中的一个基本问题，几十年来一直受到广泛研究。大量研究在经典的 Erd˝os-R´enyi（ER）随机图[38, 6] 框架下探讨了这一问题（例如，参见´及其中的参考文献）。例如，随着图规模（即顶点数）趋于无穷，ER随机图模型中任意固定子图计数渐近正态性的充要条件，最早由 Ruci [37]nski 在开创性工作中确立。最近，这一结果又得到了补充，文献 [32]给出了柯尔莫哥洛夫距离的显式界；另见 [36, 13, 14]。

除了随机图理论，子图计数还是网络科学中的一种强大工具，可用于量化特定子图（例如三角形、圈、团和树），从而揭示复杂系统的结构与功能属性（例如，参见 [23]）。其应用范围涵盖识别生物网络中的子图 [2]，以及分析功能性脑网络的动态特征 [7], ，为理解现实世界网络的局部与整体组织提供洞见。然而，子图计数的计算开销很大，尤其是在大型网络中（例如，参见 [39]）。有关

*C通讯作者邮箱：fengqq@ustc.edu.c n

网络科学中的子图计数方法与高效算法的全面概述，请参见 [33]。

尽管ER随机图模型在随机图理论和网络科学的发展中发挥了关键作用，但其简单性和严格的假设限制了它对现实世界网络的建模适用性。现实世界网络呈现出复杂的拓扑特征，而这些特征无法由ER随机图模型加以刻画 [26]。其中一个特征是度异质性 [15], ，指的是网络内顶点度的变化程度。不同于顶点度集中在平均度附近的ER随机图，许多现实世界网络呈现重尾度分布，通常可用幂律行为近似（例如，参见 [3, 12]）。这表明网络中存在少数连接高度密集的枢纽节点，以及大量连接稀疏的顶点。另一个关键特征是聚类系数，它量化了节点形成紧密群组的倾向 [27]。在现实世界网络中，聚类系数通常较高，并且随着网络增长保持相对稳定；而在边密度相当的ER图中，聚类系数则明显较低（例如，参见 [25]）。换言之，现实世界网络通常较为稀疏，但包含大量三角形。例如，在社交网络中，某个个体的两个朋友彼此也是朋友的概率，显著高于ER随机图模型所预测的概率 [41]。

β-模型是一种得到广泛研究的统计网络模型，它通过引入顶点特定参数来刻画现实世界网络中的度异质性 [10]。该模型属于更广泛的指数随机图模型，这类模型用于描述观测到给定网络结构的概率（例如，参见 [17, 35]）。关于 β-模型及其变体的参数统计推断，请参见 [34, 42, 20, 11, 9]。

据我们所知，与顶点度较为规则、因而便于分析的 ER 随机图相比，关于异质网络模型中子图计数的理论结果寥寥无几。针对无标度网络的配置模型和秩1非齐次随机图模型，已有若干关于聚类系数的极限定律，而聚类系数与三角形数量密切相关（参见 [40] 中的定理 1.3–1.5）。利用广义 U-统计量，文献 [16] 也研究了基于图子的随机图中的固定规模团数量（三角形是其中的特例）；一般子图计数见 [5] 。由于这些模型具有非齐次结构，这些极限定理无法给出明确的收敛速率。本文旨在推导稀疏 β-模型中三角形计数在顶点数趋于无穷时的渐近性质。具体而言，在若干温和条件下，我们利用 Malliavin-Stein 方法 [28], ，证明三角形计数渐近正态，并给出明确的 Berry-Esseen 界。

在全文中，我们将使用以下记号。对任意正整数 n，令 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$。我们用 $C > 0$ 表示一个一般常数，它可能因上下文而异。对于有限集 S，令 $|S|$ 表示 S 的基数。对于向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，记 $\|\boldsymbol{x}\|_s = (|x_1|^s + |x_2|^s + \cdots + |x_n|^s)^{1/s}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $s > 0$ 下的 L_s-范数，并分别用 $x_{\max}$ 和 $x_{\min}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的最大和最小元素。

本文其余部分安排如下。第 2 节首先正式介绍 β-模型，然后陈述我们的主要结果，证明在温和的稀疏性和异质性条件下，三角形计数具有渐近正态性。第 3 节在稀疏性条件下推导三角形计数的渐近均值和方差。最后，

采用一种 对 Malliavin-Stein 方法的改进，我们在第 4 节证明主要结果 .

2 模型描述与主要结果

β-模型正式定义如下 [10]。设有一个顶点集为 $[n]$ 的随机图，其中 $n \geq 2$ 是一个整数。顶点 i 和 j 之间是否存在边由独立概率决定

$$p_{ij} = \frac{e^{\beta_i+\beta_j}}{1+e^{\beta_i+\beta_j}}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{1}$$

其中， $\beta_i \in \mathbb{R}$ 是顶点 i 的度异质性参数。需要注意的是， β_i 可以为负值，并且可能依赖于 n。这些参数刻画了顶点的连通倾向： β_i 越大，顶点 i 形成边的可能性就越高。值得注意的是，当所有 $i \in [n]$的 $\beta_i = \beta$ 都为常数时， β-模型就简化为边概率为 $p = \mathrm{e}^{2\beta}/(1+\mathrm{e}^{2\beta})$ 的 ER随机图模型。

令 I_{ij} 表示顶点 i 和 j之间存在一条边的指示变量。根据定义， $I_{ii} = 0$, $I_{ij} = I_{ji}$, 且集合 $\{I_{ij}, 1 \leq i < j \leq n\}$ 由成功率为 p_{ij} 的相互独立的伯努利随机变量构成。显然，邻接矩阵 $\boldsymbol{A} = (I_{ij})_{n\times n}$ 是对称的，且对角线元素为零。用 $\boldsymbol{A}$表示时， n 个顶点上的 β-模型中的三角形数量 T_n 为

$$T_n = \frac{1}{6}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^3) = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} I_{ij}I_{jk}I_{ki}, \tag{2}$$

其中， $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵迹。

为简化记号，对于每个 $i \in [n]$ ，我们定义 $\mu_i = \mathrm{e}^{\beta_i} > 0$ ，并令

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^\top,$$

省略下标 n。式（1）中的边概率随后变为

$$p_{ij} = \frac{\mu_i\mu_j}{1+\mu_i\mu_j}. \tag{3}$$

在一般参数 β_i 下推导 T_n 的渐近性质，由于度异质性而面临重大挑战。为解决这一问题，我们施加以下稀疏性条件：

$$\mu_{\max} \to 0 \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \to \infty. \tag{4}$$

第一个条件确保网络稀疏性，而第二个条件保证图结构非退化，并且包含大量三角形（见下文命题 1 ）。注意，对于任意 $s > t > 0$,

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_s^s \leq \mu_{\max}^{s-t}\|\boldsymbol{\mu}\|_t^t,$$

s因为每个 μ_i 都是正的。因此，根据假设 $\mu_{\max} \to 0$ 在（4）中可得 t

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_s^s = o\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_t^t\big), \quad s > t > 0. \tag{5}$$

随机变量 X 与 Y 之间的柯尔莫哥洛夫距离定义为

$$d_K(X,Y)=\sup_{z\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(X\le z)-\mathbb{P}(Y\le z)|.$$

定义归一化三角形计数 F_n 为

$$F_n=\frac{T_n-\mathbb{E}[T_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[T_n]}}. \tag{6}$$

下面的定理给出了 $d_K(F_n,\ \mathcal{N})$的上界，其中 $\mathcal{N}$表示一个标准正态随机变量。

定理1. 在稀疏性条件 (4)下，我们有

$$d_K(F_n,\mathcal{N})\le\frac{C}{\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{5}{2}}\left(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6+\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\right)}\sum_{\ell=1}^{5}A_\ell,$$

其中 $C>0$ 是一个常数，并且

$$\begin{aligned}&A_1=\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{4}},\quad A_2=\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_4^2,\\&A_3=\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_5^5,\quad A_4=\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_5^{\frac{5}{5}},\quad A_5=\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}}.\end{aligned} \tag{7}$$

定理1中的界较为复杂，这是由于 $\boldsymbol{\mu}$具有一般性。下面的例子说明，在特定情形下，该界与现有结果的表现相当。

例 1 K $\{\pi_r,1\le r\le$. 固定一个正整数和一个 $K\}$ $\sum_{r=1}^K\pi_r=1$ $\{V_r,1\le r\le K\}$ $[n]$ 满足条件的正数序列。设为的一个划分，其基数为$|V_r|=\pi_r n+o(n)$。假设对每个满足 $1\le r\le K$的 $i\in V_r$，

$$\mu_i=\theta_r\,n^{-\alpha/2},$$

其中常数 $\theta_r>0$ 和 $0<\alpha<1$。于是我们有， $\mu_{\max}$ 的阶为 $n^{-\alpha/2}$，且对任意固定的 $s>0$,

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_s^s=\sum_{r=1}^K|V_r|\,\theta_r^s n^{-\alpha s/2}=n^{1-\alpha s/2}\Big(\sum_{r=1}^K\pi_r\theta_r^s\Big)(1+o(1)).$$

特别地，当 $s=2$时，量 $\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2$ 的阶为 $n^{1-\alpha}$。

这种分块常数缩放是稀疏随机块模型及其度修正变体中的标准做法；更多背景信息参见 *[17, 19, 24, 1]* 。应用定理 *1* 并结合一些基本计算可得

$$d_K(F_n,\mathcal{N})\le C\,n^{-\eta(\alpha)},$$

其中

$$\eta(\alpha)=\begin{cases}1-\alpha, & 0<\alpha\le\frac{1}{2},\\ \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}, & \frac{1}{2}<\alpha\le\frac{2}{3},\\ \frac{5}{4}(1-\alpha), & \frac{2}{3}<\alpha<1.\end{cases}$$

在特殊情况下 $K=1$，对于所有 $i\in[n]$，均有 $\mu_i\equiv\mu=cn^{-\alpha/2}$，其中 $c>0$且 $\alpha\in(0,\,1)$。此时，我们的模型退化为边概率为

$$p=\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\sim c^2n^{-\alpha}$$

因为 $n\to\infty$。在这种情况下，阶数 $\eta(\alpha)$ 与 *[22,* 定理*11]*中所确立的阶数一致。

值得注意的是，在稀疏性条件（1 4）下，定理 1中的上界可能不会随着 $n\to\infty$ 而消失，主要是由于 $L_{3/2}$-范数在 $\boldsymbol{\mu}$项中的作用，该项增长速度可能非常快。为建立 T_n的渐近正态性，我们引入两个额外的异质性条件:

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}=O\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6\big),\tag{8}$$

and

$$\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}=O\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\big).\tag{9}$$

条件（8）直接限制了 $L_{3/2}$-范数的增长速率，其中 $\boldsymbol{\mu}$。条件（9）允许 β-模型中存在显著的度异质性，从而允许比值 $\mu_{\max}/\mu_{\min}$ 以适当的速率发散。这与ER随机图模型形成鲜明对比，在后者中，该比值始终为1。这类正则性条件在统计网络分析中被广泛采用。例如，在社区检测问题中，通常会对度异质性参数的极端取值施加若干约束，以限制估计误差（例如，参见 [18]）。

以下结果证明了在这些条件下，T_n 具有渐近正态性。

定理 2. 在稀疏性条件 (4)下，若 (8) 或 (9) 成立，则当 $n\to\infty$,

$$F_n\xrightarrow{\mathrm{D}}\mathcal{N},$$

其中 $\xrightarrow{\mathrm{D}}$ 表示依分布收敛。

3 均值与方差

本节将在稀疏性条件 (4) 下，推导 T_n 的渐近均值与方差，它是 β-模型中的三角形数量。

命题 1. 假设稀疏性条件 (4) 成立。当 $n\to\infty$时，我们有

$$\mathbb{E}[T_n]=\frac{1}{6}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6(1+o(1)),\tag{10}$$

$$\mathrm{Var}[T_n]=\frac{1}{6}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\big(3\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6+\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\big)(1+o(1)).\tag{11}$$

证明。 首先注意到，根据（3）和（4），边概率 p_{ij} 满足

$$p_{ij}=(1+o(1))\mu_i\mu_j,\quad 1\le i\ne j\le n.\tag{12}$$

对于不同的顶点 i、j、$k \in [n]$，根据 β-模型的定义，指标变量 I_{ij}、I_{jk}和 I_{ki} 是相互独立的伯努利随机变量。利用（2）和（12），T_n 的期望等于

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{1\le i<j<k\le n} p_{ij}p_{jk}p_{ki} = (1+o(1)) \sum_{1\le i<j<k\le n} \mu_i^2\mu_j^2\mu_k^2. \tag{13}$$

就 $\boldsymbol{\mu}$ 的范数而言，(13) 右侧的求和可改写为

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j<k\le n} \mu_i^2\mu_j^2\mu_k^2 &= \frac{1}{6}\sum_{1\le i,j,k\le n} \mu_i^2\mu_j^2\mu_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \mu_i^2\mu_j^4 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n \mu_i^6 \\ &= \frac{1}{6}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\|\boldsymbol{\mu}\|_4^4 + \frac{1}{3}\|\boldsymbol{\mu}\|_6^6.\end{aligned}$$

因此，将其与 (5) 和 (13) 结合可得 (10)。

现在我们转而讨论 T_n 的方差。为此，我们定义

$$X_{ij} = I_{ij} - p_{ij}, \quad 1 \le i \ne j \le n.$$

那么，对于任意 $1 \le i \ne j \le n$，有 $\mathbb{E}[X_{ij}] = 0$，并由 (12)，

$$\mathrm{Var}[X_{ij}] = \mathbb{E}[X_{ij}^2] = p_{ij}(1-p_{ij}) = (1+o(1))\mu_i\mu_j. \tag{14}$$

由 (13)，我们现在可以将 (2) 重新表述为

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{1\le i<j<k\le n} (X_{ij}+p_{ij})(X_{jk}+p_{jk})(X_{ki}+p_{ki}) \\ &= \mathbb{E}[T_n] + \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}X_{ij} + \sum_{\substack{1\le i<j\le n \\ k\ne i,j}} p_{ij}X_{jk}X_{ki} + \sum_{1\le i<j<k\le n} X_{ij}X_{jk}X_{ki},\end{aligned} \tag{15}$$

其中，由 (12)，

$$c_{ij} = \sum_{k\ne i,j} p_{jk}p_{ki} = (1+o(1))\mu_i\mu_j \sum_{k\ne i,j} \mu_k^2 = (1+o(1))\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\mu_i\mu_j.$$

等式右侧的$1+\binom{n}{2}+(n-2)\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$ 项两两不相关。根据（15）以及（12）和（14），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[T_n] &= \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}^2\mathbb{E}[X_{ij}^2] + \sum_{\substack{1\le i<j\le n \\ k\ne i,j}} p_{ij}^2\mathbb{E}[X_{jk}^2]\mathbb{E}[X_{ki}^2] + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{E}[X_{ij}^2]\mathbb{E}[X_{jk}^2]\mathbb{E}[X_{ki}^2] \\ &= (1+o(1))\left(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \sum_{1\le i<j\le n} \mu_i^3\mu_j^3 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \sum_{1\le i<j\le n} \mu_i^3\mu_j^3 + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mu_i^2\mu_j^2\mu_k^2\right).\end{aligned}$$

由于 $\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4)$ 且

$$\sum_{1\le i<j\le n} \mu_i^3\mu_j^3 = \frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 - \|\boldsymbol{\mu}\|_6^6\big),$$

由（10）和（13），我们可以继续进行

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[T_n] &= \Big(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 - \|\boldsymbol{\mu}\|_6^6\big) + \frac{1}{6}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6\Big)(1+o(1)) \\ &= \frac{1}{6}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\big(3\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 - 3\|\boldsymbol{\mu}\|_6^6 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\big)(1+o(1)),\end{aligned}$$

结合（5），即完成了（11）的证明。 □

命题1 可直接推出以下结论。

命题2。 在稀疏性条件 （4）下，当 $n \to \infty$,

$$\frac{T_n}{\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{1}{6},$$

其中，$\xrightarrow{\mathrm{P}}$ 表示依概率收敛。

证明。A 应用命题 1 和切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon > 0$，由（5）可得 e

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{T_n}{\mathbb{E}[T_n]} - 1\Big| > \varepsilon\Big) \le \frac{\mathrm{Var}[T_n]}{(\varepsilon\mathbb{E}[T_n])^2} = \frac{6\big(3\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\big)}{\varepsilon^2\|\boldsymbol{\mu}\|_2^8}(1+o(1)) \to 0,$$

这意味着 $T_n/\mathbb{E}[T_n]$ 依概率收敛于 1。因此，结合斯卢茨基定理和（10），即可得到所需结果。 □

4 证明

本节旨在证明第2节陈述的主要结果。我们首先介绍几条对我们的方法至关重要的辅助引理。

为证明β-模型中三角形计数的渐近正态性，我们主要采用 Malliavin-Stein 方法 [28], ，这是 Malliavin 演算[30] 与 Stein 方法的有力结合（例如，参见 [4]）。该方法特别适用于分析基于独立拉德马赫或伯努利随机变量 [29, 21]的正态近似。尤其是，利用该方法，研究者已建立了 ER 随机图中三角形计数的 Berry-Esseen 界 [22], ，并进一步在 [8]中推导出任意固定子图计数的非一致 Berry-Esseen 界。关于 Malliavin–Stein 框架的更多背景和相关界，参见例如 [14] 及其中的参考文献。

为了陈述我们的方法所用的正态近似界（见下文引理 1 ），我们参照 [14], 引入独立伯努利随机变量泛函的离散梯度算子。就本文而言，只需要一阶和二阶离散梯度。

设 $m \ge 3$ 为整数，且 $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$为独立伯努利随机变量构成的随机向量，具有

$$\mathbb{P}(X_a = 1) = p_a \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(X_a = 0) = q_a, \quad a \in [m],$$

其中 $0 < p_a < 1$ 与 $q_a = 1 - p_a$。对于可测函数 $f\colon \{0,1\}^m \to \mathbb{R}$ 与$F = f(\boldsymbol{X})$，定义 F 关于 X_a 的离散梯度为

$$D_a F = \sqrt{p_a q_a}\,\big(f(\boldsymbol{X}_a^+) - f(\boldsymbol{X}_a^-)\big), \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_a^+ = (X_1, \ldots, X_{a-1}, 1, X_{a+1}, \ldots, X_m), \qquad \boldsymbol{X}_a^- = (X_1, \ldots, X_{a-1}, 0, X_{a+1}, \ldots, X_m).$$

利用（16），可以进一步定义二阶离散梯度 $D_b D_a F := D_b(D_a F)$。注意，对于任意 $a, b \in [m]$,

$$D_b D_a F = D_a D_b F.$$

以下引理在定理1的证明中起着重要作用。

引理1。设 $F = f(\boldsymbol{X})$ 是一个随机变量，满足 $\mathbb{E}[F] = 0$ 且 $\mathrm{Var}[F] = 1$。则，

$$d_K(F, \mathcal{N}) \le C \sum_{k=1}^{5} \sqrt{B_k},$$

其中 $\mathcal{N}$ 是一个标准正态随机变量，并且

$$B_1 = \sum_{a,b,c \in [m]} \sqrt{\mathbb{E}\big[D_a^2 D_b^2\big]\mathbb{E}\big[D_{ca}^2 D_{cb}^2\big]},$$

$$B_2 = \sum_{a,b,c \in [m]} \frac{1}{p_c q_c}\mathbb{E}\big[D_{ca}^2 D_{cb}^2\big], \qquad B_3 = \sum_{a=1}^{m} \frac{1}{p_a q_a}\mathbb{E}\big[D_a^4\big],$$

$$B_4 = \sum_{a,b \in [m]} \frac{1}{p_a q_a}\sqrt{\mathbb{E}\big[D_a^4\big]\mathbb{E}\big[D_{ab}^4\big]}, \qquad B_5 = \sum_{a,b \in [m]} \frac{1}{p_a q_a p_b q_b}\mathbb{E}\big[D_{ab}^4\big],$$

其中 $D_a := D_a F$ 且 $D_{ab} := D_a D_b F$。

证明。将 [14] 中的定理4.1(i)应用于相互独立的拉德马赫随机变量 $\{Y_a = 2X_a - 1,\ a \in [m]\}$ 即可直接得到此引理。我们只需验证 [14] 中的条件 (3.3)，并证明 $u\colon\ a \mapsto (p_a q_a)^{-1/2} D_a F \,\big|D_a L^{-1} F\big|$ 属于 Dom(δ)，其中 Dom(δ) 和算子 L 的定义与 [14]第 2 节中的定义相同。

注意，u 仅依赖于有限多个相互独立的Rademacher随机变量$\{Y_a, a \in [m]\}$。根据同一参考文献的注记3.2 (ii)，[14] 中的条件 (3.3) 得以满足。此外，根据 Wiener–Itˆo–Walsh 分解，u的混沌展开仅包含有限项（例如，参见 [31], 第 444 页）。因此，[22] 中的条件 (2.14) 得以满足，这意味着 $u \in$ Dom(δ)。 □

为了应用引理1，我们将 β模型在 n 个顶点上所有可能边的集合记为 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，其中 $m = \binom{n}{2}$。对于每条边 e_a（满足 $a \in [m]$），令 $1 \le i_a < j_a \le n$ 表示其端点。注意，边指示变量$\{I_{i_a j_a}, a \in [m]\}$ 是独立的伯努利随机变量，且

$$\mathbb{P}(I_{i_a j_a} = 1) = p_{i_a j_a}, \quad \mathbb{P}(I_{i_a j_a} = 0) = 1 - p_{i_a j_a}.$$

因此，归一化三角形计数 F_n 在式（6）中是这些变量的可测函数，因而可借助引理1进行分析。

根据（16），我们有

$$D_a := D_a F_n = \frac{\sqrt{h_a}}{\sqrt{\mathrm{Var}[T_n]}} V_a, \quad a \in [m], \tag{17}$$

其中

$$h_a = p_{i_a j_a}(1 - p_{i_a j_a}), \tag{18}$$

and

$$V_a = \sum_{k \neq i_a, j_a} I_{i_a k} I_{j_a k}. \tag{19}$$

换言之， V_a 统计端点为i_a 和 j_a的楔（即长度为二的路径）的数量。从图论角度看，梯度 $D_a F_n$ 衡量了翻转 e_a状态对三角形计数的影响。

对于二阶梯度，考虑任意给定的两条边 $e_a = \{i_a, j_a\}$ 和 $e_b = \{i_b, j_b\}$。根据定义，可以直接得到 $D_{ab} = 0$ ，当且仅当 e_a 和 e_b 是相同边或彼此不相交（即，交集 $\{i_a, j_a\} \cap \{i_b, j_b\}$ 为空集 $\varnothing$）。若 $|\{i_a, j_a\} \cap \{i_b, j_b\}| = 1$，则由（16）可得

$$D_b V_a = \sqrt{h_b}\, I_{\ell_1 \ell_2}, \tag{20}$$

其中

$$\{\ell_1, \ell_2\} = (\{i_a, j_a\} \cup \{i_b, j_b\}) \setminus (\{i_a, j_a\} \cap \{i_b, j_b\}),$$

即， ℓ_1 和 ℓ_2 分别是 e_a 和 e_b 除公共顶点以外的端点。因此，由（17）和（20）可知，对于任意 a， $b \in [m]$,

$$D_{ab} := D_a D_b F_n = D_b D_a F_n = \frac{\sqrt{h_a h_b}}{\sqrt{\mathrm{Var}[T_n]}} \Delta_{ab}, \tag{21}$$

with

$$\Delta_{ab} = \begin{cases} 0, & \text{if } \{i_a, j_a\} = \{i_b, j_b\} \text{ or } \{i_a, j_a\} \cap \{i_b, j_b\} = \varnothing; \\ I_{\ell_1 \ell_2}, & \text{if } |\{i_a, j_a\} \cap \{i_b, j_b\}| = 1. \end{cases} \tag{22}$$

除引理1外，我们还需要以下辅助引理。

引理2. 对于任意 $s \geq 2$，有

$$\mathbb{E}[V_a^s] \leq C\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \mu_{i_a} \mu_{j_a} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{2s} \mu_{i_a}^s \mu_{j_a}^s\big),$$

其中 $C = C(s) > 0$ 是一个仅依赖于 s 的常数。

证明。我们从不等式开始

$$\mathbb{E}[|X + Y|^s] \leq 2^{s-1} \mathbb{E}[|X|^s + |Y|^s],$$

该不等式对任意随机变量 X 和 Y均成立。将其应用于 V_a 式（19）中给出的

$$\mathbb{E}[V_a^s] \le C\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{k\neq i_a,j_a}(I_{i_ak}I_{j_ak}-p_{i_ak}p_{j_ak})\Big|^s+\Big(\sum_{k\neq i_a,j_a}p_{i_ak}p_{j_ak}\Big)^s\Big]. \tag{23}$$

为了界定23右侧的第一项，注意到 $I_{i_ak}I_{j_ak}$ 是成功率为 $p_{i_ak}p_{j_ak}$ 的相互独立的伯努利变量，其中 $k\neq i_a$， j_a。由 Rosenthal不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|\sum_{k\neq i_a,j_a}(I_{i_ak}I_{j_ak}-p_{i_ak}p_{j_ak})\Big|^s &\le C\Big[\sum_{k\neq i_a,j_a}\mathbb{E}|I_{i_ak}I_{j_ak}-p_{i_ak}p_{j_ak}|^s\\ &\quad+\Big(\sum_{k\neq i_a,j_a}\mathrm{Var}[I_{i_ak}I_{j_ak}]\Big)^{s/2}\Big]\\ &\le C\Big[\sum_{k\neq i_a,j_a}p_{i_ak}p_{j_ak}+\Big(\sum_{k\neq i_a,j_a}p_{i_ak}p_{j_ak}\Big)^{s/2}\Big].\end{aligned}$$

将其代入23，并对 $x^{s/2}\le x+x^s$ 和 $x>0$ 使用不等式 $s\ge 2$，由12可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_a^s] &\le C\Big[\sum_{k\neq i_a,j_a}p_{i_ak}p_{j_ak}+\Big(\sum_{k\neq i_a,j_a}p_{i_ak}p_{j_ak}\Big)^s\Big]\\ &\le C\Big[\mu_{i_a}\mu_{j_a}\sum_{k\neq i_a,j_a}\mu_k^2+\Big(\mu_{i_a}\mu_{j_a}\sum_{k\neq i_a,j_a}\mu_k^2\Big)^s\Big]\\ &\le C\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\mu_{i_a}\mu_{j_a}+\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{2s}\mu_{i_a}^s\mu_{j_a}^s\big),\end{aligned}$$

至此，引理 2得证。 □

在我们的分析中会反复用到以下不等式。

引理 3。 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 为一个正向量（即，对所有 $i\in[n]$， $x_i>0$）。对于任意 s, $t>0$，有

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\frac{s+t}{2}}^{s+t}\le\|\boldsymbol{x}\|_s^s\|\boldsymbol{x}\|_t^t.$$

证明。 该不等式可直接由柯西-施瓦茨不等式推出。 □

完成上述准备后，我们接下来证明下面的定理1 。

定理 *1* 的证明。回顾式（ D_{ab} 21）中给出的二阶离散梯度，对所有a、 $b\in[m]$，其中 $m=\binom{n}{2}$ 表示 β-模型中所有可能的边数，该模型具有n 个顶点。注意，对于所有 $\Delta_{ab}^s=\Delta_{ab}=\Delta_{ba}$， $s>0$，并且 Δ_{ca} 与 Δ_{cb} 在不同的边上相互独立 e_a， e_b， e_c。结合引理1 与式（17）和式（21），可得:

$$d_K(F_n,\mathcal{N})\le\frac{C}{\mathrm{Var}[T_n]}\sum_{k=1}^5\sqrt{\widetilde{B}_k}, \tag{24}$$

其中

$$\widetilde{B}_1 := \sum_{a,b,c\in[m]} h_a h_b h_c \sqrt{\mathbb{E}\big[V_a^2 V_b^2\big]\mathbb{E}[\Delta_{ca}\Delta_{cb}]},$$

$$\widetilde{B}_2 := \sum_{a,b,c\in[m]} h_a h_b h_c \mathbb{E}[\Delta_{ca}\Delta_{cb}], \qquad \widetilde{B}_3 := \sum_{a=1}^{m} h_a \mathbb{E}\big[V_a^4\big],$$

$$\widetilde{B}_4 := \sum_{a,b\in[m]} h_a h_b \sqrt{\mathbb{E}\big[V_a^4\big]\mathbb{E}[\Delta_{ab}]}, \qquad \widetilde{B}_5 := \sum_{a,b\in[m]} h_a h_b \mathbb{E}[\Delta_{ab}].$$

为证明定理 1，由（11）和（24）可知，只需证明

$$\sum_{k=1}^{5} \sqrt{\widetilde{B}_k} \le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}} \sum_{\ell=1}^{5} A_\ell,$$

其中 $A_\ell > 0$（$\ell = 1$、2、……、5）在（7）中定义。应用柯西–施瓦茨不等式，要使其成立，一个充分条件是

$$\sum_{k=1}^{5} \widetilde{B}_k \le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 \sum_{\ell=1}^{5} A_\ell^2. \tag{25}$$

因此，证明的剩余部分将用于验证（25）。

现在我们来分析这些项 $\widetilde{B}_k$，从 $\widetilde{B}_3$ 开始逐项分析。由（12）和（18），我们可以推出

$$h_a = (1+o(1))\mu_{i_a}\mu_{j_a}, \quad a \in [m].$$

应用引理 2，取 $s = 4$ 可得

$$\widetilde{B}_3 \le C\sum_{a=1}^{m} \big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \mu_{i_a}^2 \mu_{j_a}^2 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^8 \mu_{i_a}^5 \mu_{j_a}^5\big).$$

由于对于任意的 $t > 0$,

$$\sum_{a=1}^{m} \mu_{i_a}^t \mu_{j_a}^t = \sum_{1\le i<j\le n} \mu_i^t \mu_j^t = \frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i^t\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{2t}\Big] \le \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}\|_t^{2t},$$

我们有

$$\widetilde{B}_3 \le C\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^6 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^8 \|\boldsymbol{\mu}\|_5^{10}\big) = C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 + A_3^2). \tag{26}$$

接下来，考虑 $\widetilde{B}_5$，它涉及成对的边 $e_a = (i_a, j_a)$ 和 $e_b = (i_a, j_b)$，它们共享一个公共顶点 i_a。由（12）和（22），我们有

$$\widetilde{B}_5 = \sum_{i_a=1}^{n} \sum_{j_a\ne i_a} \sum_{j_b\ne i_a, j_a} p_{i_a j_b}(1-p_{i_a j_a}) p_{i_a j_b}(1-p_{i_a j_b}) p_{j_a j_b}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} p_{ij}(1-p_{ij})p_{ik}(1-p_{ik})p_{jk} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} p_{ij}p_{ik}p_{jk} \\
&\leq \sum_{i,j,k\in[n]} \mu_i^2\mu_j^2\mu_k^2 = \|\boldsymbol{\mu}\|_2^6, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

其中，在第二个等式中，为简便起见，我们将指标 i_a， j_a， j_b 重新标记为 i， j， k，并在最后一个不等式中应用了界 $p_{ij} \leq \mu_i\mu_j$。

应用引理3，结合 $s = \frac{5}{2}$ 和 $t = \frac{3}{2}$，可得

$$
\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \leq \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} = A_1^2.
$$

将其与（26）和（27）结合，并注意到在我们的假设下 $\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4)$，可得

$$
\widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_5 \leq C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3(A_1^2 + A_3^2). \qquad (28)
$$

对于 B_4，引理2 结合 $s = 4$ 给出

$$
\sqrt{\mathbb{E}[V_a^4]} \leq C\left(\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \mu_{i_a}^{\frac{1}{2}} \mu_{j_a}^{\frac{1}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \mu_{i_a}^2 \mu_{j_a}^2\right). \qquad (29)
$$

沿用处理 B_5的方法，由（29）可将 B_4 界定为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}_4 &\leq C \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} p_{ij}p_{ik} \left(\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \mu_i^{\frac{1}{2}} \mu_j^{\frac{1}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \mu_i^2 \mu_j^2\right) p_{jk}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sum_{i,j,k\in[n]} \left(\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \mu_i^{\frac{5}{2}} \mu_j^2 \mu_k^{\frac{3}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \mu_i^4 \mu_j^{\frac{7}{2}} \mu_k^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3(A_1^2 + A_2^2), \qquad (30)
\end{aligned}
$$

结合（28），可推出

$$
\widetilde{B}_3 + \widetilde{B}_4 + \widetilde{B}_5 \leq C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2). \qquad (31)
$$

现在转而讨论 B_2。通过区分 e_a 中的边与 e_b 中的边相同或不同的情形，我们将这一项分解为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}_2 &= \sum_{a,c\in[m]} h_a^2 h_c \mathbb{E}[\Delta_{ca}] + \sum_{\{a,b,c\}\subset[m]} h_a h_b h_c \mathbb{E}[\Delta_{ca}]\mathbb{E}[\Delta_{cb}] \\
&=: \widetilde{B}_{21} + \widetilde{B}_{22}, \qquad (32)
\end{aligned}
$$

其中使用了显而易见的事实 $\mathbb{E}[\Delta_{ca}^2] = \mathbb{E}[\Delta_{ca}]$。

对于 B_{21}，类似于对 B_5 和 B_4的分析，我们得到

$$
\widetilde{B}_{21} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i,j} p_{ij}^2(1-p_{ij})^2 p_{ik}(1-p_{ik})p_{jk}
$$



图1：边 e_c 与另外两条边 e_a 和 e_b共享一个公共顶点。

$$\leq \sum_{i,j,k\in[n]} p_{ij}^2 p_{ik} p_{jk}$$
$$\leq \sum_{i,j,k\in[n]} \mu_i^3 \mu_j^3 \mu_k^2 = \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \|\boldsymbol{\mu}\|_3^6. \tag{33}$$

~为了给 B_{22}定界，我们只需考虑由三条边组成的三元组（e_a、e_b、e_c），其中 e_c 与 e_a 和 e_b均共享一个公共顶点。存在两种构型：要么 e_c 通过不同的公共顶点连接到 e_a 和 e_b（图 1(a)），要么三条边共享唯一一个公共顶点（图 1(b)）。由此可得

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_{22} &= \sum_{1\leq i\neq j\leq n} \sum_{k\neq i,j} \sum_{\ell\neq i,j,k} \big(p_{ij}(1-p_{ij})p_{ik}(1-p_{ik})p_{j\ell}(1-p_{j\ell})p_{i\ell}p_{jk} \\ &\quad + p_{ij}(1-p_{ij})p_{ik}(1-p_{ik})p_{i\ell}(1-p_{i\ell})p_{jk}p_{j\ell}\big) \\ &\leq 2 \sum_{i,j,k,\ell\in[n]} p_{ij}p_{ik}p_{j\ell}p_{i\ell}p_{jk} \\ &\leq 2 \sum_{i,j,k,\ell\in[n]} \mu_i^3\mu_j^3\mu_k^2\mu_\ell^2 = 2\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6. \end{aligned} \tag{34}$$

将（33）和（34）代入（32），并应用稀疏性条件（4），可得

$$\widetilde{B}_2 \leq C\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6\big) \leq C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6. \tag{35}$$

利用引理 3，结合 $s=2$ 和 $t=4$，可得

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 \leq \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\|\boldsymbol{\mu}\|_4^4.$$

利用以下渐近关系

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_2 = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2), \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_4^4 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}}\Big), \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{4}}\Big),$$

我们有

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_2\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 \leq \|\boldsymbol{\mu}\|_2^3\|\boldsymbol{\mu}\|_4^4 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}}\Big) = o\big(A_5^2\big).$$

因此，由（35）可得

$$\widetilde{B}_2 = o\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 A_5^2\big). \tag{36}$$

~考虑 B_1。采用与（32）类似的分解，我们可以重写

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_1 &= \sum_{a,c\in[m]} h_a^2 h_c \sqrt{\mathbb{E}[V_a^4]\mathbb{E}[\Delta_{ca}]} + \sum_{\{a,b,c\}\subset[m]} h_a h_b h_c \sqrt{\mathbb{E}[V_a^2 V_b^2]\mathbb{E}[\Delta_{ca}]\mathbb{E}[\Delta_{cb}]} \\ &=: \widetilde{B}_{11} + \widetilde{B}_{12}. \end{aligned} \tag{37}$$

~ ~将 B_{11} 与 B_4的表达式进行比较，由（30）可得

$$\widetilde{B}_{11} = o(\widetilde{B}_4) = o\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 (A_1^2 + A_2^2)\big). \tag{38}$$

~对于 B_{12}，利用柯西-施瓦茨不等式和（29）可得

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_{12} &\le \sum_{\{a,b,c\}\subset[m]} h_a h_b h_c (\mathbb{E}[V_a^4])^{\frac{1}{4}} (\mathbb{E}[V_b^4])^{\frac{1}{4}} \sqrt{\mathbb{E}[\Delta_{ca}]\mathbb{E}[\Delta_{cb}]} \\ &\le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \sum_{\{a,b,c\}\subset[m]} h_a h_b h_c \left(\mu_{i_a}^{\frac{1}{4}} \mu_{j_a}^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}} \mu_{i_a}\mu_{j_a}\right)\left(\mu_{i_b}^{\frac{1}{4}} \mu_{j_b}^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}} \mu_{i_b}\mu_{j_b}\right) \\ &\quad \times \sqrt{\mathbb{E}[\Delta_{ca}]\mathbb{E}[\Delta_{cb}]}.\end{aligned}$$

然后，类似于（34），我们可以进行如下推导

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_{12} &\le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \sum_{1\le i\ne j\le n} \sum_{k\ne i,j} \sum_{\ell\ne i,j,k} \Big[p_{ij}p_{ik}p_{j\ell}\Big(\mu_i^{\frac{1}{4}}\mu_k^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_i\mu_k\Big)\Big(\mu_j^{\frac{1}{4}}\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_j\mu_\ell\Big)p_{i\ell}^{\frac{1}{2}}p_{jk}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + p_{ij}p_{ik}p_{i\ell}\Big(\mu_i^{\frac{1}{4}}\mu_k^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_i\mu_k\Big)\Big(\mu_i^{\frac{1}{4}}\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_i\mu_\ell\Big)p_{jk}^{\frac{1}{2}}p_{j\ell}^{\frac{1}{2}}\Big] \\ &\le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \sum_{i,j,k,\ell\in[n]} \Big[\mu_i^{\frac{5}{2}}\mu_j^{\frac{5}{2}}\mu_k^{\frac{3}{2}}\mu_\ell^{\frac{3}{2}}\Big(\mu_i^{\frac{1}{4}}\mu_j^{\frac{1}{4}}\mu_k^{\frac{1}{4}}\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_i\mu_j^{\frac{1}{4}}\mu_k\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^3\mu_i\mu_j\mu_k\mu_\ell\Big) \\ &\quad + \mu_i^3\mu_j^2\mu_k^{\frac{3}{2}}\mu_\ell^{\frac{3}{2}}\Big(\mu_i^{\frac{1}{2}}\mu_k^{\frac{1}{4}}\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\mu_i^{\frac{5}{4}}\mu_k\mu_\ell^{\frac{1}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^3\mu_i^2\mu_k\mu_\ell\Big)\Big] \\ &= C\|\boldsymbol{\mu}\|_2\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{11}{4}}^{\frac{11}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{11}{4}}^{\frac{11}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^3\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} \\ &\quad + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{7}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{17}{4}}^{\frac{17}{4}} + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^5\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_5^5\Big),\end{aligned} \tag{39}$$

其中，第二个不等式由 $p_{ij} \le \mu_i\mu_j$ 对所有 $i,\ j \in [n]$成立，再结合对称性可得。我们依次将上面括号中的六项记为 $\widetilde{B}_{12}^{(1)}$，$\widetilde{B}_{12}^{(2)}$，…，$\widetilde{B}_{12}^{(6)}$。显然，由关系式 $(\widetilde{B}_{12}^{(2)})^2 = \widetilde{B}_{12}^{(1)}\widetilde{B}_{12}^{(3)}$ 可得

$$\widetilde{B}_{12}^{(2)} \le \frac{1}{2}\big(\widetilde{B}_{12}^{(1)} + \widetilde{B}_{12}^{(3)}\big). \tag{40}$$

令$s = \frac{7}{2}$ 和 $t = 5$ 代入引理3 可得

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{17}{4}}^{\frac{17}{2}} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_5^5 \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}},$$

这意味着 $(\widetilde{B}_{12}^{(5)})^2 \le \widetilde{B}_{12}^{(4)}\widetilde{B}_{12}^{(6)}$。因此，我们还有

$$\widetilde{B}_{12}^{(5)} \le \frac{1}{2}\big(\widetilde{B}_{12}^{(4)} + \widetilde{B}_{12}^{(6)}\big) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2(A_5^2 + A_4^2). \tag{41}$$

此外，令 $(s,t) = (2,7/2)$ and $(2,5)$ in Lemma 3 yields

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{11}{4}}^{\frac{11}{2}} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \|\boldsymbol{\mu}\|_5^5,$$

由此可得

$$\widetilde{B}_{12}^{(1)} \le \widetilde{B}_{12}^{(4)}, \quad \widetilde{B}_{12}^{(3)} \le \widetilde{B}_{12}^{(6)}. \tag{42}$$

将（40）-（42）与（39）相结合，我们由此得到

$$\widetilde{B}_{12} \le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2 \big(\widetilde{B}_{12}^{(4)} + \widetilde{B}_{12}^{(6)}\big) = C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 (A_4^2 + A_5^2). \tag{43}$$

因此，由（36）-（38）和（43），我们得到

$$\widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2 \le C\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_5^2).$$

这一点与（31）一起证明了（25），从而完成了定理 1 的证明。 □

为证明定理 2，我们引入如下辅助引理，该引理给出了正向量的反向柯西-施瓦茨不等式。

引理 4. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ 为正向量（即所有分量均为正）。对任意实数 s、$t > 0$，我们有

$$\|\boldsymbol{x}\|_s^s \, \|\boldsymbol{y}\|_t^t \le \frac{x_{\max}^{s/2} \, y_{\max}^{t/2}}{x_{\min}^{s/2} \, y_{\min}^{t/2}} \Big(\sum_{i=1}^n x_i^{s/2} y_i^{t/2} \Big)^2.$$

证明。 由于所有项均为正数，我们有

$$\begin{aligned} x_{\min}^{s/2} y_{\min}^{t/2} \|\boldsymbol{x}\|_s^s \|\boldsymbol{y}\|_t^t &= x_{\min}^{s/2} y_{\min}^{t/2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^s y_j^t \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_{\min}^{s/2} x_i^{s/2} x_i^{s/2} \cdot y_{\min}^{t/2} y_j^{t/2} y_j^{t/2} \\ &\le \sum_{1 \le i,j \le n} x_j^{s/2} x_i^{s/2} x_{\max}^{s/2} \cdot y_i^{t/2} y_j^{t/2} y_{\max}^{t/2} \\ &= x_{\max}^{s/2} y_{\max}^{t/2} \Big(\sum_{i=1}^n x_i^{s/2} y_i^{t/2} \Big)^2, \end{aligned}$$

这就证明了所需的不等式。 □

将引理 4 应用于 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu}$ 可得，对于任意 s，$t > 0$，

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_s^s \, \|\boldsymbol{\mu}\|_t^t \le \Big(\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \Big)^{\frac{s+t}{2}} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{s+t}{2}}^{\frac{s+t}{2}}. \tag{44}$$

定理2的证明。由于柯尔莫哥洛夫距离上的收敛蕴含分布收敛，定理1 将我们的任务简化为证明：在定理2的条件下，

$$A_\ell = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \|\boldsymbol{\mu}\|_3^6 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}} \Big), \quad \ell = 1, 2, \ldots, 5. \tag{45}$$

上述关系仅在 A_3 和 A_4 满足稀疏性条件（4）时成立。事实上，由（5）可得

$$A_3 = \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_5^5 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big), \qquad A_4 = \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_5^{\frac{5}{2}} = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big),$$

因此，(45) 对 $\ell = 3$ 和 4 成立。

接下来，我们在 (45) 中验证 A_1、A_2 和 A_5 在 (8) 或 (9) 条件下成立。我们首先假设 (4) 和 (8)。

考虑 A_1。注意到 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{3/2}^{3/4} = O\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3\big)$ 在 (8) 条件下，以及 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{5/2}^{5/4} = o\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2\big)$ 在 (4) 条件下，我们得到

$$A_1 = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{4}} = o\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\big) = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big),$$

因此，(45) 对 $\ell = 1$成立。

类似地，利用事实 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{7/2}^{7/4} = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^{3/2})$ 和 $\|\boldsymbol{\mu}\|_4^2 = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^{3/2})$，对于 A_2 我们有

$$A_2 = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_4^2 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{7}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_3^3\Big) = o\Big(\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

于是由基本不等式 $\sqrt{xy} \le (x+y)/2$ 对 $x, \overline{y} > 0$ 可知（45）对 $\ell = 2$成立。

对 A_5，引理 3 结合 $s = 3/2$ 与 $t = 2$ 可得

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{2}} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2,$$

从而可得

$$A_5 = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{4}}^{\frac{7}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_2\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}}. \tag{46}$$

因此，由（8）及事实 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{7/2}^{7/4} = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^{3/2})$，我们有

$$A_5 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4\|\boldsymbol{\mu}\|_3^{\frac{3}{2}}\Big) = o\Big(\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{5}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_3^6\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big)^{\frac{3}{4}}\Big). \tag{47}$$

于是由不等式 $(xy^3)^{1/4} \le (x+3y)/4$ 对 $x,\ y > 0$ 可知（45）对$\ell = 5$成立。

最后，在（4）和（9）下，我们利用（44）得到

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_s^{\frac{s}{2}}\|\boldsymbol{\mu}\|_t^{\frac{t}{2}} = O\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{3(s+t)}{8}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{s+t}{2}}^{\frac{s+t}{2}}\Big). \tag{48}$$

我们也依次考虑 A_1，A_2 和 A_5。

对于 $s = \frac{3}{2}$ 和 $t = \frac{5}{2}$，关系式（48）给出

$$A_1 = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{4}} = O\big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{7}{2}}\big) = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{9}{2}}\Big), \tag{49}$$

因此，45式对 $\ell = 1$成立。

对于 A_2, 根据（49）中的第二个等式以及简单事实 $\|\boldsymbol{\mu}\|_4^2 = o(\|\boldsymbol{\mu}\|_3^{3/2})$，我们有

$$A_2 = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}} \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{7}{4}} \|\boldsymbol{\mu}\|_4^2 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{4}} \|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{4}} \|\boldsymbol{\mu}\|_4^2 \Big) = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \|\boldsymbol{\mu}\|_3^{\frac{3}{2}} \Big),$$

这与 (47) 相符，因此 (45) 对 $\ell = 2$ 成立。

考虑 A_5。注意，在 (46) 和条件 (4) 下，结论成立。引理 3 结合 $s = 2$ 和 $t = 3$ 得出 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{5/2}^{5/2} \le \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \|\boldsymbol{\mu}\|_3^{3/2}$。将 (48) 与 $s = \frac{3}{2}$ 和 $t = \frac{7}{2}$ 应用于(46)，因此得到

$$A_5 = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^{\frac{23}{8}} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \Big) = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^3 \|\boldsymbol{\mu}\|_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \Big) = o\Big(\|\boldsymbol{\mu}\|_2^4 \|\boldsymbol{\mu}\|_3^{\frac{3}{2}} \Big),$$

这也与 (47) 相符。这证明 (45) 对 $\ell = 5$ 成立，并完成了定理 2 的证明。

□

致谢

我们谨感谢两位匿名审稿人提出建设性意见，这些意见有助于提高本文的质量。

参考文献

[1] E. Abbe. 社区检测与随机块模型：近期进展。机器学习研究杂志，18(177):1–86，2018年。[2] U. Alon. 网络基元：理论与实验方法。自然遗传学评论，8:450–461，2007年。[3] A. L. Barab´asi 和 R. Albert. 随机网络中标度的涌现。科学，286:509–512，1999。[4] A. D. Barbour 和 L. H. Y. Chen. *Stein*方法导论。世界科学出版社，新加坡，2005年。[5] B. B. Bhattacharya、A. Chatterjee 和 S. Janson. 基于图子的随机图中子图计数的波动。组合学、概率与计算，32(3):428–464，2023年。[6] B. Bollob´as. 随机图，第*2*版。剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[7] E. Bullmore 和 O. Sporns. 复杂脑网络：结构与功能系统的图论分析。自然神经科学评论，10:186–198，2009年。[8] M. Butzek 和 P. Eichelsbacher. 高斯、泊松和拉德马赫过程的非一致Berry-Esseen界。*arXiv*预印本，arXiv:2409.09439v1，2024年。[9] J. Chang、Q. Hu、E. D. Kolaczyk、Q. Yao 和 F. Yi. 通过抖动和矩方法对 β-模型进行边差分隐私估计。《统计年刊》，52(2):508–528，2024年。

[10] S. Chatterjee、P. Diaconis 和 A. Sly. 具有给定度序列的随机图。《应用概率年刊》，21(4):1400–1435，2011年。[11] M. Chen、K. Kato 和 C. Leng. 通过稀疏 β-模型分析网络。《英国皇家统计学会杂志B辑》，83(5):887–910，2021年。[12] A. Clauset、C. R. Shalizi 和 M. E. J. Newman. 经验数据中的幂律分布。《SIAM评论》，51(4):661–703，2009年。[13] P. Eichelsbacher 和 B. Rednoß. 可分解随机变量的Kolmogorov界，以及通过Stein-Tikhomirov方法进行的子图计数。《伯努利》，29(3):1821–1848，2023年。[14] P. Eichelsbacher、B. Rednoß、C. Th¨ale 和 G. Zheng. 离散情形下简化的二阶高斯Poincar´e不等式及其应用。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，59(1):271–302，2023年。[15] E. Estrada. 量化网络异质性。《物理评论E》，82:066102，2010年。[16] J. Hladk´y、C. Pelekis 和 M. ˇSileikis. 非齐次随机图中小团的极限定理。《图论杂志》，97(4):578–599，2021年。[17] P. W. Holland 和 S. Leinhardt. 有向图概率分布的一个指数族。《美国统计学会杂志》，76:33–50，1981。[18] J. Jin. 通过SCORE快速检测社区。《统计年刊》，43(1):57–89，2015年。[19] B. Karrer 和 M. E. J. Newman. 网络中的随机块模型与社区结构。《物理评论E》，83(1):016107，2011年。[20] V. Karwa 和 A. Slavkovi´c. 使用噪声度进行推断——差分隐私 β-模型与合成图。《统计年刊》，44:87–112，2016年。[21] K. Krokowski、A. Reichenbachs 和 C. Th¨ale. 拉德马赫序列泛函的Berry-Esseen界与多元极限定理。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，52(2):763–803，2016年。[22] K. Krokowski、A. Reichenbachs 和 C. Th¨ale. 离散Malliavin–Stein方法：随机图与渗流的Berry-Esseen界。《概率年刊》，45(2):1071–1109，2017年。[23] R. Milo、S. Shen-Orr、S. Itzkovitz、N. Kashtan、D. Chklovskii 和 U. Alon. 网络基元：复杂网络的简单构件。《科学》，298:824–827，2002年。[24] E. Mossel、J. Neeman 和 A. Sly. 植入划分模型中的重构与估计。《概率论及相关领域》，162(3–4):431–461，2015年。[25] M. E. J. Newman. 具有聚类的随机图。《物理评论快报》，103:058701，2009年。[26] M. E. J. Newman. 网络，第2版。牛津大学出版社，牛津，2018年。

[27] M. E. J. Newman、S. H. Strogatz 和 D. J. Watts。具有任意度分布的随机图及其应用。《物理评论E》，64:026118，2001年。[28] I. Nourdin 和 G. Peccati。《运用 Malliavin 演算进行正态近似：从 Stein 方法到普适性》。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[29] I. Nourdin、G. Peccati 和 G. Reinert。Stein方法与 Rademacher泛函的随机分析。《电子概率杂志》，15:1703–1742，2010。[30] D. Nualart。《Malliavin演算及相关主题》。施普林格，柏林，2006年。[31] N. Privault。伯努利过程的随机分析。《概率调查》，5:435–483，2008年。[32] N. Privault 和 G. Serafin。加权 U统计量之和的正态近似——应用于随机子图计数的 Kolmogorov界。《伯努利》，26(1):587–615，2020。[33] P. Ribeiro、P. Paredes、M. E. P. Silva、D. Aparicio 和 F. Silva。子图计数综述：概念、算法及其在网络基元和小图中的应用。《ACM计算调查》，54(2):文章28，2021。[34] A. Rinaldo、S. Petrovi´c 和 S. E. Fienberg。β 模型中的极大似然估计。《统计年刊》，41(3):1085–1110，2013年。[35] G. Robins、P. Pattison、Y. Kalish 和 D. Lusher。社交网络指数随机图模型简介。《社会网络》，29:173–191，2007年。[36] A. R¨ollin。Erd˝os-R´enyi 随机图中三角形数量正态近似的 Kolmogorov界。《概率、工程与信息科学》，36:747–773，2022年。[37] A. Ruci´nski。随机图的小型子图何时服从正态分布？《概率论及相关领域》，78:1–10，1988年。[38] J. Svante、T. ·Luczak 和 A. Ruci´nski。《随机图》。约翰·威立父子出版公司，纽约，2000年。[39] C. H. C. Teixeira、A. J. Fonseca、M. Serafini、G. Siganos、M. J. Zaki 和 A. Aboul-naga。Arabesque：一种分布式图挖掘系统。载于《第25届操作系统原理研讨会论文集》，SOSP '15，第425–440页，纽约，2015。[40] R. van der Hofstad、P. van der Hoorn、N. Litvak 和 C. Stegehuis。无标度网络零模型中同配性和聚类的极限定理。《应用概率进展》，52(4):1035–1084，2020。[41] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz。“小世界”网络的集体动力学。《自然》，393:440–442，1998年。[42] T. Yan 和 J. Xu。具有发散顶点数的无向随机图 β模型中的中心极限定理。《生物统计学》，100(2):519–524，2013年。