arXiv:2603.01403v1 [eess.SY] 2 Mar 2026

基于Koopman算子的李雅普诺夫函数估计：再生核希尔伯特空间上的理论

Wentao Tang[1],Xiuzhen Ye[1]1. 北卡罗来纳州立大学化学与生物分子工程系，美国北卡罗来纳州罗利 27695。电子邮箱：wtang23@ncsu.edu；xye7@ncsu.edu

摘要： Koopman 算子为非线性系统提供了一种通用的线性描述，其基于数据的估计（通过扩展动态模态分解）已得到广泛研究。然而，Koopman 谱与平衡点稳定性之间关系的难以捉摸，使得利用 Koopman 算子进行稳定性分析面临挑战，进而阻碍了通用基于*Koopman*算子的控制理论的构建。在先前工作中，我们利用线性–径向乘积核，在再生核希尔伯特空间（RKHS）上定义了 Koopman 算子，并证明当原点是渐近稳定平衡点时，Koopman 谱被限制在复平面的单位圆盘内。基于这一基本的谱–稳定性关系，本文研究给定衰减率函数时基于 Koopman 算子的李雅普诺夫函数估计问题。衰减率函数和李雅普诺夫函数均由 RKHS 上的正算子指定，并通过算子代数李雅普诺夫方程（ALE）关联，该方程存在唯一解。基于统计学习理论，我们建立了通过核扩展动态模态分解（kEDMD）获得的此类李雅普诺夫函数估计的误差界，并通过数值研究予以验证。

关键词： 非线性系统、Koopman 算子、李雅普诺夫函数、再生核希尔伯特空间

1 引言

非线性系统在工程应用中无处不在，然而，它们往往缺乏基于第一性原理的精确模型。源于统计物理学研究的*Koopman* 算子概念，已成为非线性系统理论的标准工具 [1]。通过考察状态相关函数的演化，Koopman 算子将任意此类函数映射为其与动力系统流的复合函数。只要所考虑的函数空间在这种复合运算下保持不变，Koopman 算子就是线性的，因此在概念上为非线性系统提供了“全局线性化”。作为线性算子，Koopman 算子可以通过计算高效的凸优化形式从数据中学习 [2–4]。这为非线性系统的通用“数据驱动”控制策略带来了希望 [5]。

为了实现数据驱动的库普曼建模，恰当选择函数空间成为一个问题：该函数空间必须在 Koopman 算子的作用下保持不变，这不仅关系到理论严谨性，也关系到其在控制中的计算与应用。例如， [6], 基于 Koopman 算子将受控非线性系统转换为高维双线性系统这一思路，提出了一种线性鲁棒控制器综合方法。为保证控制性能，研究假设 Koopman 算子在由某些基函数张成的有限维空间上保持不变。我们近期关于基于库普曼算子的状态观测器的研究 [7, 8]也遵循了类似思路。事实上，如果 Koopman 算子将函数映射到其定义域之外，那么随之而来的误差分析就必须局限于瞬时（一个采样周期）的预测，从而使其长期预测失效 [9]，也就无法提供任何稳定性保证。

遗憾的是，尽管这是意料之中的，却没有任何函数空间普遍适用于 Koopman 算子的定义；相反，选择取决于非线性系统的定性行为。对于保测动力学，也就是吸引子集合上的遍历运动，可将 Koopman 算子定义为 $L^2(\mu)$ (其中 μ 表示不变测度) [10, 11]。对于趋向平衡点的渐近稳定动力学，Koopman 算子可以定义在 Segal–Bargmann空间上（该空间是解析函数集合的子空间） [12]。然而，为了便于基于数据的估计，更适合将 Koopman 算子定义在再生核希尔伯特空间（*RKHS*） [13] 上，从而无需选择基函数即可使用基于核的学习方法 [14, 15]。文献中直到最近才开始关注 Koopman 算子的再生核希尔伯特空间理论——只要动力学具有足够的光滑性，选择一种使再生核希尔伯特空间等价于 Sobolev型希尔伯特空间的核，就可以在再生核希尔伯特空间中容纳 Koopman 算子 [16–18] 参见第2 节，了解该理论的基础介绍。

虽然 Koopman 算子为非线性系统提供了线性表示，但将 Koopman 算子用于动力学分析和控制，在很大程度上仍是一门讲求实用的艺术，而非理论严谨的框架。从本质上说，算子作用于（无限维）函数空间时的性质，与矩阵作用于（有限维）欧几里得空间时的性质不同。一个典型的事实是，若 A 的谱半径小于 1，则原点渐近稳定 [19]；但当 A表示 Koopman 算子 A 时， A 的谱取决于再生核希尔伯特空间中的核函数选择，而谱与稳定性之间的基本关系可能难以捉摸。正如人们普遍指出的那样，尽管已有许多探索性尝试，基于Koopman算子的控制仍尚未形成一般理论 [20, 21]。显然，为此，再生核希尔伯特空间上的谱–稳定性关系至关重要。作者近期的一项工作（唐和叶 [22]）探讨了这一问题。通过定义一个线性–径向乘积核，我们证明，当原点渐近稳定时，A 的谱半径小于 1；而发生改变稳定性的局部分岔时，谱

本研究得到北卡罗来纳州立大学唐文涛教授的教师启动经费支持。

的 A 会逃逸出单位圆盘——更详细的理论讨论请参见第3 节。

本文旨在利用 Koopman 算子的谱与李雅普诺夫稳定性分析之间的基本关系，该关系此前已在 [22], 中确立。

- 针对寻找具有固定衰减率的李雅普诺夫函数这一问题，我们将衰减率函数和李雅普诺夫函数表示为再生核希尔伯特空间上由正算子表示的“核二次型”，从而构造出一个（离散时间）算子代数李雅普诺夫方程 （算子ALE）。
- 我们证明，当 Koopman 算子的谱半径小于1时，算子ALE存在唯一解，该解可表示为希尔伯特–施密特算子构成的收敛无穷级数。（见第4节。）
- 当必须通过核扩展动态模态分解（kEDMD）例程从数据中估计 Koopman 算子时，我们证明，所得李雅普诺夫函数估计的误差至多与 Koopman 算子的学习误差成正比，从而为基于数据计算李雅普诺夫函数的例程提供了理论依据。（见第5节。）

所提出的方法通过对一个非多项式非线性系统的数值研究加以展示（第6节），其中李雅普诺夫函数被表明可近似正确地求得。

2 预备知识

对于一个离散时间动力系统

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad f : \mathbb{X} \to \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

其*Koopman* 算子被定义为函数空间 $\mathcal{G}$上的如下线性映射：

$$A : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, g \mapsto g \circ f. \tag{2}$$

我们称 Koopman 算子是良定义的，如果对于任意状态相关函数 $g \in \mathcal{G}$，我们有 $Ag \in \mathcal{G}$。因此，Koopman 算子在函数空间中刻画了非线性系统（1），而该函数空间通常不是有限维的。

一种针对 Koopman 算子 A的直观近似方案，最初由 [2], 提出，即扩展动态模态分解（EDMD），其中 d维状态 x 通过大量（N个）字典函数 $z = (\psi_1(x) \dots \dots, \psi_N(x))$被提升，并通过回归估计一个 N维线性系统$\hat{}z_{t+1} \approx A_N z_t$。然而，字典 ψ 的选择以及它在何种意义上构成 $\mathcal{G}$ 的近似基，往往难以严格刻画。

2.1 希尔伯特空间与索博列夫–希尔伯特空间

假设 $\mathcal{G}$ 可以选为一个希尔伯特空间，即可以在其上定义内积 $\langle g_1, \ g_2 \rangle$，且诱导范数 $\|g\| = \sqrt{\langle g, \ g \rangle}$ 使 $\mathcal{G}$ 完备。如果 $\mathcal{G}$ 进一步是可分[1]，那么根据泛函分析（例如 [23]），已知存在一个可数 基 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得任意 $g \in \mathcal{G}$ 都可以展开为傅里叶级数$g = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i u_i$ 和$\|g\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} |c_i|^2$。从这个意义上说， $\mathcal{G}$ 与 ℓ^2(N)等距同构。自然地，若 Koopman 算子 A在这样的空间 $\mathcal{G}$ 上定义良好，那么在基 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 或 ϵ-网格上学习它会很方便。

一种著名的希尔伯特空间是索博列夫–希尔伯特空间 $W^{s,}$ $_2$(X)，它由满足以下条件的函数 g构成： g 具有直至 s阶的广义导数，且这些导数在 X 上均为平方可积。[2] 正如 K¨ohne 等人 [16], 所证明的，在以下温和条件下，Koopman 算子可在索博列夫–希尔伯特空间上良定义为有界线性算子 $W^{s,}$ $_2$(X)：(i) X $\subset \mathrm{R}^d$ 是紧致的，(ii) 动力学 f 在 X 上是 C^s 的，且 (iii) f 是非退化的，即 $\inf_{x\in\mathbb{X}} |\det \mathrm{D}f(x)| > 0$。

然而，一般而言，仍然难以找到$W^{s,}$$_2$(X)的基或 ϵ-网。在机器学习中，将非线性函数学习表述为（计算上可处理的）凸优化问题（仿佛函数是“线性的”）的一种标准技术是核方法 [25]。其严格的形式化描述基于再生核希尔伯特空间理论。

2.2 再生核希尔伯特空间(RKHS)

若函数 $\kappa \in C$(X $\times$ X,R)满足：对于任意 $n \in$ N和 $\{x^{(i)}\}_{i=1}^n \subset$ X，矩阵 $G_\kappa = \left[\kappa\left(x^{(i)}, x^{(j)}\right)\right]_{i,j=1}^n$ 均为对称半正定矩阵，则称该函数为核 。由X上的核 κ 所确定的再生核希尔伯特空间定义如下

$$H_\kappa(\mathbb{X}) = H_\kappa = \overline{\mathrm{span}}\{\kappa(x, \cdot) : x \in \mathbb{X}\}$$

其内积定义为 $\langle \kappa(x, \cdot) \ \kappa(x', \cdot) \rangle = \kappa(x, x')$，因此范数为： $\|\kappa(x, \cdot)\| = \kappa(x, x)^{1/2}$。在再生核希尔伯特空间中，再生性质指的是以下事实：$\forall g \in H_\kappa$, $\langle g, \kappa(x, \cdot) \rangle = g(x)$。当X $\subset$ R^d [25]时，再生核希尔伯特空间是可分的。对于任意 $x \in$ X，点x处的核函数，即 $\kappa(x, \cdot) \in H_\kappa$，可视为将 x 映射到 H_κ 中的“无限维”提升，并称为 x的典范特征。

然而，并不能总是保证 Koopman 算子在任意再生核希尔伯特空间上都有定义。尽管如此，以下来自 Wendland [26] 的引理表明，选择恰当的核可以使所得的再生核希尔伯特空间与索博列夫–希尔伯特空间重合。

引理 *1.* 假设 κ是一个径向核，即满足 $\kappa(x, x') = \rho(|x - x'|)$ 的核，其中某个 $\rho : R_+ \to R+$，且 ρ的傅里叶变换 $\hat{}\rho(\xi)$ 满足 $c_1(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \leq |\hat{}\rho(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|^2)^{-s/2}$，其中常数$c_2 \geq c_1 > 0$。[3] 此外，假设 X 是一个具有 *Lipschitz* 边界的区域。那么 $W^{s,2(X)} = H_\kappa(X)$，且二者具有等价范数。

从现在起，我们将这样的核 κ 记作“$\kappa^=$”（上标“=”的由来将在下一个脚注中解释），不再明确标注核的索引 k。

推论 1。 假设 *(i)* $\mathbb{X}$是具有 *Lipschitz* 边界的有界区域，*(ii)* $f \in C^s(\mathbb{X})$ 满足 $s = \frac{d}{2} + k$、 $k \in \mathbb{N}$，且 *(iii)* 下确界$_{x\in\mathbb{X}} |\mathrm{D}f(x)| > 0$。则 A 是一个有界线性

[1]也就是说，对于任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $g \in \mathcal{G}$，存在有限个$h_1, \dots, h_N \in \mathcal{G}, N$，它们依赖于 ϵ和 $g_\epsilon \in$span$\{h_i\}_{i=1}^N$，使得$\|g - g_\epsilon\| < \epsilon$。这样的 $\{h_i\}_{i=1}^N$集合称为一个 ϵ-网。

[2]当 s 不是整数时， $W^{s,}$ $_2$(X) 的扩展定义（也称为 Sobolev–Slobodeckij 空间）可参见 [24]。相应地，C^s(X) 作为最高可连续微分至第 s 阶的函数类，对于非整数 s 也可用广义方式定义。[3] 根据 [26], ，可利用下列径向函数 ρ $\frac{d}{2} + k$ $\rho = I^k \varrho_{\lfloor d/2+k+1 \rfloor}$ $\varrho_\ell(r) = \max\{1 - r, 0\}^\ell$ $s =$ 找到满足这些条件的核。对于任意 $k \in$N $\cup \{0\}$ 和 ，我们可以令 ，其中 ( ) ，算子 I 定义为 $I\phi(r) = \int_r^\infty r'\phi(r')dr'$。

算子，作用于$H_{\kappa^{=}}(\mathbb{X})$，其中 $\kappa^{=}$ 由引理 1中的条件指定。

当 $A: H_\kappa \to H_\kappa$ 有定义且有界时，其伴随算子 $A^*: H_\kappa \to H_\kappa$由定义性质 $\langle g, Ah\rangle = \langle A^* g, h\rangle$ $(\forall g, h \in H_\kappa)$ 确定，也有界。事实证明，A^* 是将“典范特征随时间向前推进”的算子。也就是说，

$$A^*\kappa(x,\cdot) = \kappa(f(x),\cdot), \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3}$$

这一性质对 Koopman 算子的学习很有用，相关内容将在第5节讨论。

3 线性–径向乘积核

径向核足以在正则性条件下保证 Koopman 算子有定义，但它“对平衡点的存在无动于衷”或“毫无察觉”，因此 Koopman 算子，尤其是其谱，无法提供有关稳定性的信息。为说明这一点，根据关系式（3），有 $(A^*)^t\kappa^{=}(x,\cdot) = \kappa^{=}(f^t(x),\cdot)$，其中$\|\kappa(x,\cdot)\| = \rho(0)^{1/2} = \|\kappa(f^t(x),\cdot)\|$，因此对所有 t，都有 $\|A^t\| \geq 1$。这意味着谱半径 $r(A) = \limsup_{t\to\infty} \|A^t\|^{1/t} \geq 1$，无论原点是稳定还是不稳定的平衡点。

为弥补这一理论空白，我们的先前工作 [22] 提出了一种乘积核 $\kappa = \kappa^{-}\kappa^{=}$，由线性核 $\kappa^{-}(x, x') = x \cdot x'$ 和 Wendland 径向核$\kappa^{=}(x, x') = \rho(|x - x'|)$组成，如引理1所规定。[4] 这两个再生核希尔伯特空间分别为 $H_{\kappa^{-}}(\mathbb{X}) = \{c^\top x : c \in \mathbb{X}\}$，当 $0 \in \mathrm{int}(\mathbb{X})$时进一步等于 $\{c^\top x : c \in \mathbb{R}^d\}$；以及 $H_{\kappa^{=}} = W^{s,2}(\mathbb{X})$，后者刻画了动力学的正则性。因此，下面的引理给出了这类新型再生核希尔伯特空间中元素的一般描述。简而言之，由线性–径向乘积核所定义的再生核希尔伯特空间包含这样的函数：在原点（平衡点）附近表现为局部线性或更高阶，并且其 s阶导数在全局范围内具有正则性。

引理 2 (Tang & Ye [22], 引理 5)。 若 $f(0) = 0, 0 \in \mathrm{int}(\mathbb{X})$，且 $f \in C^s(\mathbb{X})$ 满足 $s = \frac{d}{2} + k$ 和 $k \in \mathbb{N}$，则

$$H_\kappa = \left\{\sum_{i=1}^d e_i h_i : h_1, \ldots, h_d \in W^{s,2}(\mathbb{X})\right\}. \tag{4}$$

其中 $e_i(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, d$。此外，对任意 $g = \sum_{i=1}^d e_i h_i \in H_\kappa$，都有 $\|g\|^2_{H_\kappa} = \sum_{i=1}^d \|h_i\|^2_{H_{\kappa^{=}}}$。

3.1 再生核希尔伯特空间上的 Koopman 算子

接下来，我们给出 Koopman 算子A 在 H_κ上定义良好且有界的条件。鉴于定义良好且在 $H_{\kappa^{=}} = W^{s,2}(\mathbb{X})$ 上有界需要 $f \in C^s(\mathbb{X},\mathbb{R}^d)$，我们用一个新的类替换 C^s：

$$\Phi^s(\mathbb{X}) := \left\{\sum_{i=1}^d e_i\phi_i : \phi_1, \ldots, \phi_d \in C^s(\mathbb{X},\mathbb{R})\right\}. \tag{5}$$

非正式地说，我们称这类函数构成“在原点取值为零的 s-光滑函数空间”。

[4]为说明这些符号的由来，上标“–”表示线性核的“线性”，而“=”表示“平移不变性”，即 Wendland 核的径向性质。此外，“–”和“=”分别表示“第一个”和“第二个”核。

引理 3 ([22], 定理 6)。 若 *(i)* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧 *Lipschitz* 区域，*(ii)* $f_1, \ldots, f_d \in \Phi^s(\mathbb{X})$，且 *(iii)* f 非退化：下确界$_{x\in\mathbb{X}}|\det \mathrm{D}f(x)| > 0$。则 *Koopman* 算子 A是 H_κ上的有界线性算子。

3.2 谱–稳定性关系

对于由矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$表示的有限维线性系统，其谱（即特征值集合）与稳定性有着根本的联系。现在，我们仍希望在再生核希尔伯特空间上的 Koopman 算子 A 也存在这样的谱 – 稳定性关系。特别是，我们希望当原点渐近稳定时，Koopman 谱 $\sigma(A) \subset \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$。[5] 对 $\sigma(A)$ 的刻画通常需要满足某些同胚条件 [12]。这里，同胚指的是一个连续可逆映射$\psi : \mathbb{X} \to \mathbb{Z} = \psi(\mathbb{X})$。因此，$f$ 的任何性质都体现在共轭系统 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$的性质中。我们尤其关注将 $\tilde{f}$映射到 $f: z \mapsto Fz$的同胚，其中 $F = \mathrm{D}f(0)$ 是雅可比矩阵。

使该分析得以进行的关键条件是存在一个 Φ^s-同胚 ψ，即一个同胚 $\psi \in (\Phi^s(\mathbb{X}))^d$，使得 $\psi^{-1} \in (\Phi^s(\mathbb{Z}))^d$。在此条件下，$A$ 的谱是由雅可比矩阵 $F = \mathrm{D}f(0)$的特征值生成的半群。

引理 4 ([22], 定理 8)。 设引理 3 中的条件成立，且存在一个 Φ^s-同胚 ψ 使得 $f = \psi \circ f \circ \psi^{-1}: z \mapsto Fz$。则 $r(A) \leq r(F)$，即库普曼谱半径以雅可比矩阵特征值中的最大模为界。具体而言，$\sigma(A)$ 的任意元素是雅可比矩阵特征值的乘积，或此类乘积的极限。特别地，若 F稳定，则 $r(A) < 1$。

例 1. 对于连续时间下的布鲁塞尔振荡器模型：

$$\dot{x}_1 = a + x_1^2 x_2 - (b+1)x_1, \quad \dot{x}_2 = bx_1 - x_1^2 x_2,$$

当 $a > 0$ 且 $0 < b < 1 + a^2$时，存在唯一的渐近稳定平衡点 $(a, b/a)$。当 $a = 1$ 且 $b = 1$时，雅可比矩阵的特征值为 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。对于采样间隔为 Δ的离散时间动力学，雅可比矩阵的特征值为 $\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\mathrm{i}\right)$。当4 且 $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ 是任意紧不变集时，该动力学满足引理中的所有条件。因此，我们有

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{\mathrm{e}^{-(p+q)\frac{\Delta}{2} + \mathrm{i}(p-q)\frac{\sqrt{3}\Delta}{2}} : p, q \in \mathbb{N}\right\} \setminus \{1\} \tag{6}$$

and in particular $r(A) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\Delta} < 1$.

4 李雅普诺夫函数作为核二次型

作为本文的主要目标，本节讨论当原点是 $\mathbb{X}$ 上的渐近稳定平衡点，且 Koopman 算子的谱包含于 $\mathbb{D}$ 时，如何从 Koopman 算子得到李雅普诺夫函数。众所周知，对于有限维线性系统，李雅普诺夫函数可以

[5]算子的谱，$\sigma(A)$，指的是满足以下条件的复数集合：复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 中的元素使得 $\lambda I - A$ 不存在有界逆算子（I：H_κ上的恒等算子）。一般而言，谱甚至不一定是离散集合，因为算子可能具有所谓的连续谱和剩余谱。

写成二次型 $v(x) = x^\top Px$，其中 P 是一个半正定矩阵。作为对再生核希尔伯特空间（RKHS） H_κ 的推广（在该空间中，李雅普诺夫函数可以更为一般），我们提出一种“核二次型” $v(x) = \langle \kappa(x,\cdot)\ P\kappa(x,\cdot)\rangle$，它由某个正算子 P：$H_\kappa \to H_\kappa$ 指定。[6] 为便于后续讨论，我们回顾希尔伯特–施密特（HS）算子 [23]的相关概念。

定义1. 希尔伯特空间 H 上的对称算子 $Q = Q^*$ 称为希尔伯特–施密特算子，记作 $Q \in \mathrm{HS}(H)$，若对 H的任意标准正交基 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，

$$Q = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i u_i \times u_i \tag{7}$$

存在某个 $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ 使得 $\sum_{i\in\mathbb{N}} q_i^2 < \infty$. [7]

命题1. 设 H 是一个希尔伯特空间。则

1) $\mathrm{HS}(H)$ 是一个算子希尔伯特空间。具体而言，对于任意 $Q, R \in \mathrm{HS}(H)$、$\langle Q, R\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i r_i$ 以及 $\|Q\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i^2$。*2)* $Q \in \mathrm{HS}(H)$ 是正算子，当且仅当在上述表示中，对所有 $i \in \mathbb{N}$，$q_i \geq 0$成立。*3)* 有限秩算子在 *HS* 算子集合中稠密。也就是说，对于任意 $\epsilon > 0$以及任意 $Q \in \mathrm{HS}(H)$，存在一个 $N \in \mathbb{N}$ 和 Q_N，其秩不超过 N，使得 $\|Q - Q_N\|_{\mathrm{HS}} < \epsilon$。

4.1 算子代数李雅普诺夫方程

对于有限维线性系统，我们知道，P指定李雅普诺夫函数的矩阵可以通过求解代数李雅普诺夫方程（ALE）获得；当原点渐近稳定时，该方程具有唯一的正定解。对于非线性系统（1），我们考虑寻找李雅普诺夫函数 $v(\cdot)$ 的问题，使其满足

$$v(f(x)) - v(x) \leq -w(x) \tag{8}$$

对于某个衰减率函数 $w \geq 0$。

我们关注以下情形：

$$w(x) = \langle \kappa(x,\cdot),\ Q\kappa(x,\cdot)\rangle$$

对于某个正的 $Q \in \mathrm{HS}(H_\kappa)$。给定表示式（7），其中所有的 $q_i \geq 0$和 $q_i \downarrow 0$（不失一般性），我们有 $w(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_i u_i(x)^2$。此处，$\{u_i\}$ 构成了 H_κ的一组基；因此，根据引理 2，$u_i = \sum_{j=1}^d e_j h_{ij}$ 对于某个 $h_{ij} \in W^{s,2}(\mathbb{X})$。从这个意义上说，我们称 w 是“局部线性”和“全局正则”函数的“近似平方和”。例如，如果 $w(\cdot) = |\cdot|^2 = \sum_{i=1}^d e_i^2$，那么 $Q = \sum_{i=1}^d e_i \times e_i$ 就是一个秩-d 算子。

显然，对于（8）的任意解，$\kappa(0,\cdot) = 0, w(0) = 0$，因此 $v(0) = 0$。接着，对（8）进行望远镜求和，并令其趋于无限时间极限，由于对所有 $x \in X$都有 $\lim_{t\to\infty} f^t(x) \to 0$，我们得到 $v(x) = \sum_{t=0}^\infty w(f^t(x)) = \sum_{t=0}^\infty \langle A^{*t}\kappa(x,\cdot)\ QA^{*t}\kappa(x,\cdot)\rangle$. 也就是说，

$$v(x) = \langle \kappa(x,\cdot),\ P\kappa(x,\cdot)\rangle,\quad P = \sum_{t=0}^\infty A^t Q A^{*t}. \tag{9}$$

[6]正算子 P指的是具有以下性质：$\langle g,\ Pg\rangle \geq 0\,(\forall g \in H_\kappa)$。我们用 $Q \geq 0$表示 Q是一个正算子，用 $Q \geq R$表示 $Q - R \geq 0$。[7]这里，$g \times h$ 指由 $(g \times h)$ 定义的秩一算子$k = \langle h,\ k\rangle g$ 对于任意 $g,\ h,\ k \in H$。显然，$u_i \times u_i \geq 0$，因为对于任意 $g \in H$，
$\langle g\quad u_i \times u_i\ g\rangle = |\langle u_i\ g\rangle|^2 \geq 0$ ，(), 。标准正交基的选择不会产生影响。

算子 P 在此满足以下算子代数 *Lyapunov* 方程（算子 *ALE*）：

$$APA^* - P = -Q. \tag{10}$$

4.2 解的存在性与唯一性

现在，我们介绍本文的主要理论贡献，它以再生核希尔伯特空间上的 Koopman 算子语言表述了逆李雅普诺夫定理。

定理1。设 H 是一个希尔伯特空间，$Q \in \mathrm{HS}(H)$ 是一个正算子，且 $A: H \to H$ 是一个有界线性算子，满足 $r(A) < 1$，即 $\sigma(A) \subset \mathbb{D}$。那么，式(9) 中的级数确定了一个 $P \in \mathrm{HS}(H)$，它是算子*ALE*(10)的解，而且事实上是唯一解。

证明。设 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 H 的标准正交基，且 Q 表示为（7）。那么对于 $t \in \mathbb{N}$，有

$$\|A^t Q A^{*t}\|_{\mathrm{HS}}^2 = \|\sum_{i\in\mathbb{N}} q_i A^t u_i \times A^t u_i\|_{\mathrm{HS}}^2$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} q_i q_j |\langle A^t u_i,\ A^t u_j\rangle|^2 \leq \|Q\|_{\mathrm{HS}}^2 \|A^t\|^4.$$

因此 $\|A^t Q A^{*t}\|_{\mathrm{HS}} \leq \|Q\|_{\mathrm{HS}}\|A^t\|^2$。给定任意 $\epsilon \in (0, (1 - r(A))/2)$，存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得 $\|A^t\| \leq (r(A) + \epsilon)^t$ 对所有 $t \geq t$均成立，因此 $\sum_{t=t}^\infty A^t Q A^{*t}$是一个希尔伯特–施密特算子，其希尔伯特–施密特范数有界于 $\|Q\|_{\mathrm{HS}} \sum_{t=t}^\infty (r(A) + \epsilon)^{2t} \leq (r(A) + \epsilon)^{-2t}$。显然，$\sum_{t=0}^{t-1} A^t Q A^{*t}$ 是希尔伯特–施密特算子。因此，级数 P是希尔伯特–施密特算子。为证明唯一性，假设 P和P'是式（10）的两个解，那么 $\tilde{P} = P - P'$满足$A\tilde{P}A^* = \tilde{P}$。由此可得，对于所有 $t \in \mathbb{N}$，均有 $\tilde{P} = A^t \tilde{P} A^{*t}$。因此我们有，

$$\|\tilde{P}\|_{\mathrm{HS}} \leq \lim_{t\to\infty} \|A^t \tilde{P} A^{*t}\|_{\mathrm{HS}} \leq \limsup_{t\to\infty} \|A^t\| = 0. \quad \tilde{P} = 0$$

$\|\tilde{P}\|_{\mathrm{HS}}$ lim sup 这意味着。因此，式（10）的解必定唯一。 □

推论 *2*。假设引理 *4* 的条件成立。则对任意 $w: X \to R+$，若对某些 $Q \geq 0$、$Q \in HS(H_\kappa)$ 有 $w(x) = \langle \kappa(x,\cdot)\ Q\kappa(x,\cdot)\rangle$，则存在由 $v(x) = \langle \kappa(x,\cdot)\ P\kappa(x,\cdot)\rangle$ 所确定的唯一 v（其中 $P \geq 0$、$P \in HS(H_\kappa)$），使得 *(8)* 成立。

5 基于数据的估计及其误差

Koopman 算子可以通过将参数化表示拟合到核函数的演化关系（3）而从数据中学习得到。该学习过程称为核扩展动态模态分解 [14]。假设我们有一个独立同分布样本$\{(x_j,\ y_j)\}_{j=1}^n$。核扩展动态模态分解求得一个近似

$$\hat{A}^* = \sum_{i,j=1}^n \theta_{ij} \kappa(y_i,\cdot) \times \kappa(x_j,\cdot) \tag{11}$$

其中系数矩阵 $\Theta = [\theta_{ij}]$ 求解再生核希尔伯特空间上的最小二乘问题：

$$\min\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \|\hat{A}^*\kappa(x_j,\cdot) - \kappa(y_j,\cdot)\|_H^2. \tag{12}$$

它存在一个显式解 $\Theta = G_{xx}^{-1}$，其中矩阵 G_{xx} 在第 $(i,\ j)$ 个位置的元素由$\kappa(x_i,\ x_j)$ 指定。为便于后续分析，我们给出以下关于核扩展动态模态分解误差的结论。

引理 5 (K¨ohne 等人 [16], 定理 5.2)。假设ˆ引理 *3* 中的条件成立，并令 A 如

(12)，其中 $\mathbb{X}$ 上的样本填充距离为 h_{fill} =上确界$_{x\in\mathbb{X}}$ 最小值$_{j=1,\ldots,}${v18}。因此，对于某个常数 c_0,

$$\|\hat{A} - A\| \le c_0 h_{\text{fill}}^{k+1/2},$$

其中 k 是径向核中的索引（见脚注 3）。

5.1 衰减率函数的核岭回归

除了利用数据逼近 Koopman 算子 A 之外，指定衰减率函数w 的算子 Q也应由数据估计。为此，假设 w 是 H_κ上函数的平方和： $w(x)$ =$\sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i(x)|^2$，因此 $w(x)$ = $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle\kappa(x,\cdot)\ \omega_i\rangle|^2$给出 $Q=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\times\omega_i$。记 $\epsilon_N^Q = \|\sum_{i=N+1}^{\infty}\omega_i\times\omega_i\|_{\text{HS}}$ 为截断误差（若 w 恰好是 N 项的平方和，则该误差等于 0），并考虑用 $\hat{}Q_N=\hat{}\omega_i\times\hat{}\omega_i$对 $Q_N=\sum_{i=1}^{N}\omega_i\times\omega_i$ 的任意逼近。我们有

$$\|Q-\hat{Q}\|_{\text{HS}} \le \sum_{i=1}^{N}\left(2\|\omega_i\|\cdot\|\hat{\omega}_i-\omega_i\|+\|\hat{\omega}_i-\omega_i\|^2\right)+\epsilon_N^Q.$$

根据数据用 $\hat{}\omega_i$ 近似 ω_i，可通过一种著名的方法实现，即核岭回归 （KRR）。我们令 $\hat{}\omega_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\kappa(x_j,\cdot)$, 并通过求解正则化最小二乘问题来优化系数：

$$\min_{\{\alpha_{ij}\}_j}\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{\omega}_i(x_k)-\omega_i(x_k)\right)^2+\lambda_i\|\hat{\omega}_i\|_H^2. \quad (13)$$

通过该方法，我们得到 Q 的近似为

$$\hat{Q}=\sum_{i,j=1}^{N}\eta_{ij}\kappa(x_i,\cdot)\times\kappa(x_j,\cdot)\ \text{with}\ \eta_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\alpha_{ki}\alpha_{kj}. \quad (14)$$

由于实际应用中可以通过验证对正则化常数 λ_i 进行微调，我们隐含地假设这些常数可以调至接近最优的量级。文献中已给出了 KRR 的误差界，具体表述如下引理。

引理6 (Smale与Zhou [27], 推论 2)。 假设$\mathbb{X}\subset\mathbb{R}^d$ 是紧致的，且 $\omega_i\in H=H_\kappa$。那么，对于任意 $\delta\in(0,1)$，存在常数 $c>0$，使得 $\|\hat{}\omega_i-\omega_i\|_H\le c\|\omega_i\|_H n^{-1/6}\log(2/\delta)$ 以至少 $1-\delta$ 的概率成立。

推论3。 在引理 6的条件下，对于任意 $\delta\in(0,1)$，有

$$\|Q-\hat{Q}\|_{\text{HS}}\le c_{n,\delta}^Q\sum_{i=1}^{N}\|\omega_i\|_H^2+\epsilon_N^Q,$$

其中 $c_{n,\delta}^Q=2cn^{-1/6}\log(2/\delta)+c^2n^{-1/3}\log^2(2/\delta)$。

5.2 李雅普诺夫函数的估计

$\hat{}$采用式（ A 11）中的核扩展动态模态分解估计以及式（$\hat{}Q$ 14）中的KRR估计，我们得到李雅普诺夫算子的数据驱动近似$\hat{}$ P，并要求其满足$\hat{}\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{}$算子 ALE： $APA^*-P=-Q$。由于 值域 A =$\hat{}$ 张成$\{\kappa(x_j,\cdot)\}_{j=1}^n$，显然 P可以用系数矩阵表示 $\Pi=[\pi_{ij}]$:

$$\hat{P}=\sum_{i,j=1}^{n}\pi_{ij}\kappa(x_i,\cdot)\times\kappa(x_j,\cdot). \quad (15)$$

式（15）中的系数最终满足以下矩阵代数李雅普诺夫方程，该方程可通过初等线性代数运算推导得出：

$$\Theta^\top\Gamma^\top\Pi\Gamma\Theta-\Pi=-\mathrm{H}, \quad (16)$$

其中 $\Gamma\in\mathbb{R}^{n\times n}$的第 (i,j) 项为 $\kappa(x_i,y_j)$ 且 $\mathrm{H}\in\mathbb{R}^{n\times n}$的第 (i,j) 项等于 η_{ij}，由 (14) 计算得到。

5.3 李雅普诺夫函数估计的误差界

最后，我们将 A 上的算子范数误差与 Q 上的希尔伯特–施密特范数误差相结合，从而给出 P上有保证的希尔伯特–施密特范数误差。鉴于 $P=\sum_{t=0}^{\infty}A^tQA^{*t}$ 与$\hat{}P=\sum_{t=0}^{\infty}\hat{}A^t\hat{}Q\hat{}A^{*t}$，该误差界由无穷级数各项的误差导出。

定理 2. 假设引理5 和 6$\hat{}$的条件成立，此外， $r(A)<1$。那么存在常数$c_1,c_2>0$ 使得以概率 $1-\delta$，有

$$\|\hat{P}-P\|_{\text{HS}}\le c_1\epsilon_{n,N,\delta}+c_2\epsilon_{n,N,\delta}^2.$$

where $\epsilon_{n,N,\delta}=\max\left\{c_0h_{\text{fill}}^{k+1/2},c_{n,\delta}^Q\sum_{i=1}^{N}\|\omega_i\|_H^2+\epsilon_N^Q\right\}$.

证明。 对于任意有界算子 A 和希尔伯特–施密特算子 B，有 $\|AB\|_{\text{HS}}\le\|A\|\cdot\|B\|_{\text{HS}}$。因此我们验证

$$\|\hat{P}-P\|_{\text{HS}}\le\sum_{t=0}^{\infty}\|A^t\|^2\|\hat{Q}-Q\|_{\text{HS}}+\sum_{t=0}^{\infty}2\|\hat{A}^t-A^t\|\cdot(\|\hat{A}^t\|\vee\|A^t\|)(\|\hat{Q}\|_{\text{HS}}\vee\|Q\|_{\text{HS}})$$

由于 $r(A)<1$，对于任意足够小的 $\epsilon>0$，经过某个 t 后， $\|A^t\|\le(r(A)+\epsilon)^t$，因此第一个级数可由$\epsilon_{n,N,\delta}$的某个常数倍所界。在第二个级数中，$\|\hat{}Q\|_{\text{HS}}\vee\|Q\|_{\text{HS}}\le$常数$\cdot+\epsilon_{n,N,\delta}$，并且对于足够大的 t，$\|\hat{}A^t\|\vee\|A^t\|\le(r(A)\vee r(\hat{}A)+\epsilon)^t$。此外，对于所有 $t\ge1$，

$$\|\hat{A}^t-A^t\|\le\|\hat{A}-A\|\sum_{s=0}^{t-1}\|\hat{A}^s\|\cdot\|A^{t-1-s}\|.$$

当 t 足够大时，该和始终有界于$t(r(A)\vee r(\hat{}A)+\epsilon)^t$，并且对 t 可求和。由于 $\|\hat{}A-A\|\le\epsilon_{n,N,\delta}$，证明完成。□

6 数值示例

为展示上述用于估计李雅普诺夫函数的方法 $v(\cdot)$，如（8）所示，我们以李$\hat{}$纳尔方程作为数值示例：

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-\frac{x_1}{1+x_1^2}-x_2.$$

为将连续时间系统转换为离散时间系统，我们使用 $\Delta=0.2$ 作为采样时间。衰减率函数指定为 $w(x)=|x|^2$。尽管与该衰减率对应的真实李雅普诺夫函数 v 没有解析表达式，但可以通过仿真进行数值计算。通过使用雅可比矩阵 $[0,1$ 对局部线性化动力学进行近似；$-1,\ -1]$，我们得到一个二次型： $v_{\text{lin}}(x)=8x_1^2+5x_1x_2+5.533x_2^2$。

为在没有模型先验知识的情况下，对非线性系统的李雅普诺夫函数进行数据驱动估计，我们采样了50 条轨迹，每条轨迹的时间跨度为 5 个时间单位，初始状态取自均匀分布于$[-2,2]\times[-2,2]$中的随机状态。采样得到的轨迹绘于图1左侧子图中，展示了数据的丰富性。$\hat{}$通过核扩展动态模态分解， A 以（11）的形式得到学习。图1右侧子图绘出了学习得到的算子所预测的轨迹与真实轨道。预测结果确实趋于准确。图2绘出了估计得到的 Koopman 算子的特征值；这些特征值与矩阵

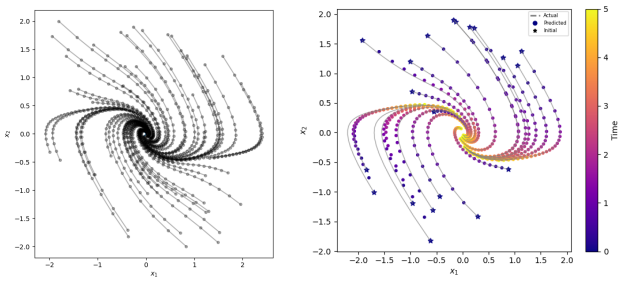


图1：（左）用于 Koopman 算子学习的 kEDMD 采样轨迹；（右）使用学习得到的 Koopman 算子预测的轨迹。

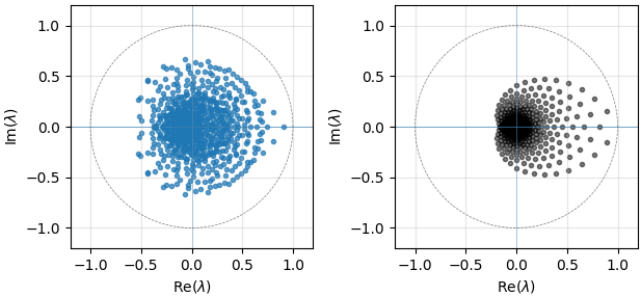


图2：（左）估计得到的 Koopman 算子的特征值；（右）实际 Koopman 算子的谱。

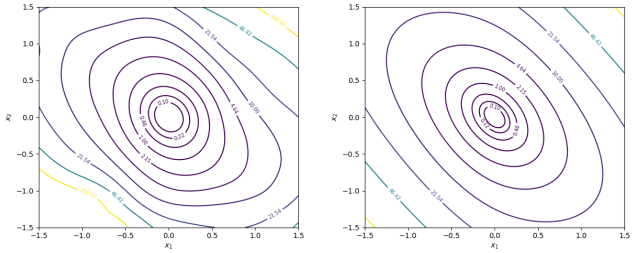


图3：（左）估计的李雅普诺夫函数；（右）真实的李雅普诺夫函数。

ΓΘ的特征值，并将其与实际的 Koopman 谱进行比较；在本例中，实际的 Koopman 谱与（6）相同。可以看到，该谱位于单位圆盘内，因此估计李雅普诺夫函数是有意义的。

利用 $w = \omega_1^2 + \omega_2^2$ with$\omega_1 = e_1$ 和 $\omega_2 = e_2$ 的平方和分解，并使用该数据集，我们得到核岭回归估计 $\hat{}\omega_1$、$\hat{}\omega_2$，进而得到近似算子 $\hat{} Q$，它根据式（14）表示衰减率函数 w。随后，由式（16）求解表示李雅普诺夫函数 $\hat{}v(\cdot)$ 的系数 P。图 3 以等高线图的形式展示了 x 方形区域内 $\hat{}v(x)$ 的取值，并与通过仿真得到的真实 $v(\cdot)$ 进行比较。正如预期，基于 Koopman 的估计总体上捕捉到了真实李雅普诺夫函数的等高线形状，但远离原点的状态处误差更为显著，这是因为李雅普诺夫函数是衰减率的累积。尽管李雅普诺夫函数看起来像线性系统那样呈“椭球形”，但 $v(1,1) \approx \hat{}v(1,1) \approx 40$ 与 $v_{\text{lin}}(1,1) \approx 19$ 之间的数值差异很大，足以证实其非线性。

本次数值实验的仿真代码可在此超链接的GitHub仓库获取。

7 结论

在本文中，我们提出了一种数据驱动方法，用于估计对应于给定衰的李雅普诺夫函数减率函数，该方法基于再生核希尔伯特空间上的 Koopman 算子概念。具体而言，采用线性径向核时，若原点是渐近稳定平衡点，则 Koopman 谱半径小于 1，从而使李雅普诺夫函数成为算子代数李雅普诺夫方程的唯一解。在对 Koopman 算子进行基于数据的近似时，所得李雅普诺夫函数估计的误差在大数据极限下消失。

在原点并非于整个X上全局渐近稳定的情形下，对其吸引域的估计，或对多个吸引子的全部吸引域的估计，自然成为我们研究的下一步。更重要的是，“希尔伯特空间上的Koopman 算子”这一形式体系中基本的谱–稳定性关系，为非线性控制与观测理论中富有前景的进展奠定了基础，我们认为这是一个值得关注的方向。

参考文献

[1] A. Mauroy, Y. Susuki, I. Mezi´c, 系统与控制中的Koopman 算子. Springer, 2020. [2] M. O. Williams, I. G. Kevrekidis, C. W. Rowley, 数据驱动的Koopman 算子逼近：扩展动态模态分解. 《非线性科学杂志》, 25(6): 1307–1346, 2015. [3] S. Klus, I. Schuster, K. Muandet, 再生核希尔伯特空间中传递算子的特征分解. 《非线性科学杂志》, 30(1): 283–315, 2020. [4] V. Kostic, P. Novelli, A. Maurer, C. Ciliberto, L. Rosasco, M. Pontil, 通过再生核希尔伯特空间中的Koopman算子回归学习动力系统. 《神经信息处理系统进展》, 35: 4017–4031, 2022. [5] W. Tang, P. Daoutidis, 数据驱动控制：综述与展望. 美国控制会议, 1048–1064, 2022. [6] R. Str¨asser, M. Schaller, K. Worthmann, J. Berberich, F. Allg¨ower, 基于Koopman的反馈设计及其稳定性保证. 《IEEE自动控制汇刊》, 70(1): 355–370, 2024. [7] X. Ye, W. Tang, 基于EDMD的非线性系统鲁棒观测器综合. arXiv:2509.09812, 2025. [8] A. Ni, W. Tang, 通过估计Koopman特征函数实现自治极限环系统的数据驱动观测器综合. 美国控制会议, 审稿中, 2025. [9] F. M. Philipp, M. Schaller, K. Worthmann, S. Peitz, F. N¨uske, Koopman框架下用于预测与控制的核扩展动态模态分解的误差分析. 《非线性科学杂志》, 35(5): 92, 2025. [10] M. Korda, I. Mezi´c, 论扩展动态模态分解向Koopman 算子的收敛. 《非线性科学杂志》, 28(2): 687–710, 2018. [11] M. J. Colbrook, A. Townsend, 动力系统Koopman算子谱性质的严格数据驱动计算. 《纯粹与应用数学通讯》, 77(1): 221–283, 2024. [12] I. Mezi´c, Koopman算子的谱、函数空间中的谱展开与状态空间几何. 《非线性科学杂志》, 30(5): 2091–2145, 2020. [13] V. I. Paulsen, M. Raghupathi. 再生核希尔伯特空间理论导论. 剑桥大学出版社, 2016. [14] M. O. Williams, C. W. Rowley, I. G. Kevrekidis, 用于数据驱动Koopman谱分析的基于核的方法. 《计算动力学杂志》, 2(2): 247–265, 2015. [15] Y. Kawahara, 用于Koopman谱分析的再生核动态模态分解. 神经信息处理系统大会, 29, 2016. [16] F. K¨ohne, F. M. Philipp, M. Schaller, A. Schiela, K. Worthmann, 核扩展动态模态分解逼近Koopman算子的 L^∞-误差界. 《SIAM应用动力系统杂志》, 24(1): 501–529, 2025. [17] W. Tang, Koopman–Nemytskii算子：非线性受控系统的线性表示. 《IEEE自动控制汇刊》, 审稿中, arXiv:2503.18269v2, 2025. [18] W. Tang, 保测系统的数据驱动状态观测器综合. 《IEEE自动控制汇刊》, 审稿中, arXiv:2509.20596, 2025. [19] P. J. Antsaklis, A. N. Michel, 线性系统. Birkh¨auser, 2006. [20] R. Str¨asser, K. Worthmann, I. Mezi´c, J. Berberich, M. Schaller, F. Allg¨ower, 基于Koopman算子的控制综述：从误差界到闭环保证. arXiv:2509.02839, 2025. [21] M. Haseli, I. Mezi´c, J. Cort´es, 通向用于控制的Koopman算子理论的两条路径：无限输入序列与算子族. arXiv:2510.15166, 2025. [22] W. Tang, X. Ye, 用于稳定性分析的Koopman 算子：带线性–径向乘积再生核的理论. 第8届动力学与控制学习年会 (L4DC), 审稿中, 2025, arXiv:2511.06063. [23] G. Zhang, Y. Lin, 泛函分析讲义（中文，第2版）. 北京大学出版社, 2021. [24] P. Zhang, R. Shao, 广义函数与函数空间导论（中文）. 科学出版社, 2025. [25] I. Steinwart, A. Christmann, 支持向量机. Springer, 2008. [26] H. Wendland, 散乱数据逼近. 剑桥大学出版社, 2004. [27] S. Smale, D. X. Zhou, 通过积分算子及其逼近得到的学习理论估计. 《构造逼近》, 26(2), 153-172.