arXiv:2603.01428v1 [stat.AP] 2 Mar 2026

极端不确定性条件下用于地月空间目标跟踪的混合粒子高斯混合滤波方法

Ishan Paranjape[1], Tarun Hejmadi[1],Utkarsh Ranjan Mishra[2],和 Suman Chakravorty[3]

摘要—高斯轨道确定法及其变体是天文学家和工程师最常用的初始状态估计技术之一。然而，由于高斯方法基于二体问题的假设，因此不适用于三体效应占主导地位的地月空间域。本文提出一种混合粒子高斯混合滤波方法。这是一种纯递归的概率轨道确定框架，结合了基于马尔可夫链蒙特卡罗的粒子高斯混合-II（PGM-II）和粒子高斯混合-I（PGM-I）滤波器。该方法使我们能够融合概率信息与来自地面望远镜的仅角度观测，以实现短期和长期地月空间目标跟踪。我们在一个重要的地月空间轨道区域验证了该技术。

I. 引言

与外太空相关的每个概率目标跟踪问题都始于初始状态估计的生成，这也称为初始轨道确定（IOD）。时至今日，高斯轨道确定法（OD）——由IOD和对IOD估计进行非线性最小二乘优化组成——仍然是利用三个连续且时间间隔很短的角度观测生成确定性初始状态估计的最强大方法之一 [1]。高斯轨道确定法的概率对应方法，以及概率可行区域（PAR）等更为专门的初始轨道确定方法，在空间态势感知（SSA）文献中持续得到应用，尤其适用于由二体问题定义的区域 [2], [3], [20]。本文聚焦于地月空间域中的概率目标跟踪问题——该区域由以地球和月球为主天体的三体问题定义——在此环境下，高斯方法已不再有效 [5]。关于此类问题的文献较为稀少，包括基于PAR的方法、稀疏网格配点方法和运动学拟合方法[6], [7], [8], [9]。

在生成初始状态估计值之后，后续轨道确定通常需要进行滤波。卡尔曼滤波器通常用于具有高斯分布先验估计值和传感器噪声的线性系统 [10]。对于非线性系统，则使用扩展卡尔曼滤波器（EKF）、无迹卡尔曼滤波器（UKF）和集合卡尔曼滤波器（EnKF）等变体 [11], [12], [13]。在地月空间和近地区域，批量最小二乘滤波器是一种常用的轨道确定算法 [14]。由于此类系统的轨迹可能随时间呈现混沌行为，已开发出基于高斯混合模型（GMM）的滤波器，例如自适应高斯混合滤波器、集成高斯混合滤波器以及无迹卡尔曼滤波器/粒子混合滤波器 [15], [26], [16], [17]。文献 [17]尤其推动了粒子高斯混合（PGM）滤波器的发展 [18], [19]。

粒子高斯混合滤波器是一组相关技术，采用基于粒子的估计传播和基于聚类的交互式混合建模。第一个 PGM 滤波器 PGM-I 解决了滤波步骤之间高斯混合模型分量数量不灵活的问题，以及粒子滤波器更新步骤导致的粒子耗尽问题。该滤波器已成功应用于众多混沌动力系统，包括太空中的二体和三体系统 [20], [6], [9], [8], [21]。第二个 PGM 滤波器 PGM-II 旨在解决卡尔曼更新不足以应对的情况，或更新步骤中预期会出现多模态的情况。该滤波器还解决了单次滤波迭代中传播步骤和更新步骤之间高斯混合模型分量数量不灵活的问题 [19]。在更新过程中，PGM-II滤波器利用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）采样，并结合预测先验的高斯混合模型描述和测量似然函数，从后验分布中进行采样。

在地月空间环境中，文献 [8] 和 [9] 中提出的框架——下文称为运动学拟合粒子高斯分布混合（KF-PGM）框架——采用运动学拟合，并对目标状态作出少量假设，提供了一种简单的初始轨道确定技术。与 PGM-I 滤波器结合后，即使传感器长时间停机，该技术也能在地月空间环境中稳健地跟踪目标很长时间。然而，运动学拟合初始轨道确定算法需要对多个初始观测（8–10 个）进行曲线拟合，且拟合阶数相对较高。实际上，我们在一天或一周内可能只能对目标进行少量观测，因此需要像高斯方法那样，尽可能少地利用目标状态观测。

本文提出了一种纯递归方法，不同于 KF-PGM 等现有的地月空间初始轨道确定/轨道确定方法，该方法结合了两种用于地月空间目标跟踪的粒子高斯混合滤波器。该方法所需的唯一先验信息是目标属于地月空间域，且可通过地面望远镜获得仅角度观测。我们利用这些信息，在目标对观测者可见的单次过境期间对其进行精确定位。该方法结合 PGM-I 和

[1]Ishan Paranjape 和 Tarun Hejmadi 是美国得克萨斯州大学城德克萨斯农工大学航空航天工程系的研究生研究助理。 {ishan.paranjape, tarunhejmadi}@tamu.edu[2]Utkarsh Ranjan Mishra 是 Lucid Group, Inc. 的高级传感器融合工程师。 utkarshmishra@lucidmotors.com[3]Suman Chakravorty 是美国得克萨斯州大学城德克萨斯农工大学航空航天工程系的教授。 schakrav@tamu.edu

PGM-II 滤波，对与 KF-PGM 相同的测量集进行处理，使位置和速度估计值最多提升 100 倍。因此，该方法为地月空间目标跟踪问题提供了一种精确且数据高效的递归解决方案。

本文其余部分安排如下。首先，我们通过介绍地月动力学和测量模型的背景，建立地月空间目标跟踪问题。接下来，我们介绍 PGM-I 和 PGM-II 滤波器的数学与算法基础，以及我们的混合 PGM 滤波方法如何采用经过修改的 PGM-II更新步骤，并依次使用这两种滤波器。最后，我们将这一混合 PGM 滤波器应用于一条常见地月轨道的一段轨迹，并将其效果与 KF-PGM框架进行比较。

II. 地月动力学与观测模型

本节介绍与地月空间目标跟踪相关的动力学和测量。地月空间域定义为完整的 4π 球面度立体角范围，在该范围内，对以地球和月球为主天体的三体动力学进行建模 [6]。随着中国嫦娥五号和印度月船计划等月球任务的兴起，人们对这一区域的关注日益增加。此外，美国已将该区域的有效空间态势感知列为国家重要事项 [24]。

地月动力学由三体问题定义。文献中最常用的动力学模型是圆型限制性三体问题（CR3BP）：其中两个较大的天体——地球和月球——绕其质心运行，而第三个天体——感兴趣的目标或在轨空间物体（RSO）——相对于两个主天体的旋转运动而运动。在这个质心或会合参考系中，$\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$的状态动力学建模如下：

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu x - \mu(1-\mu)}{r_2^3} \tag{1a}$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \tag{1b}$$

$$\ddot{z} = \frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \tag{1c}$$

物理单位按照参考文献 [25] 进行归一化。此外，μ表示两个最大天体的质量比，r_1和 r_2 分别表示目标与地球和月球之间的距离。

地月空间人造空间物体的测量值由地基光学望远镜获取，这类望远镜能够测量方位角和仰角。令$\mathbf{x}^{\mathcal{T}} = [x^{\mathcal{T}}, y^{\mathcal{T}}, z^{\mathcal{T}}, \dot{x}^{\mathcal{T}}, \dot{y}^{\mathcal{T}}, \dot{z}^{\mathcal{T}}]^T$表示观测者中心地形参考系中的状态向量$\mathbf{x}$，我们将测量模型$\mathbf{z}_k = [AZ, EL]^T$ 定义如下：

$$AZ = tan^{-1}\frac{y^{\mathcal{T}}}{x^{\mathcal{T}}} \tag{2a}$$

$$EL = \frac{\pi}{2} - cos^{-1}\frac{z^{\mathcal{T}}}{\sqrt{(x^{\mathcal{T}})^2 + (y^{\mathcal{T}})^2 + (z^{\mathcal{T}})^2}} \tag{2b}$$

为提高计算效率，我们选择仅在以美国德克萨斯州大学城为基准的观测者中心地形参考系中表示状态向量$\mathbf{x}$。CR3BP会合参考系与该地形参考系之间的转换详见文献 [8]。

III. 粒子高斯混合滤波器

由于本文重点介绍混合PGM滤波方法在地月空间环境中的应用，本节概述PGM-I和PGM-II的一般方法。

A. 贝叶斯滤波基础

对象的 n_x维状态表示为$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$。对象状态通过马尔可夫链进行传播，该马尔可夫链的转移密度在某些时间步 k 和 $k-1$处表示为概率密度函数$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$。$n_z$维观测向量$\mathbf{z}\in \mathbb{R}^{n_z}$ 通过观测函数（或测量模型）$\mathbf{h(x)}$与对象状态相关，并带有一定的测量噪声。该测量噪声建模为加性零均值高斯分布，并由条件概率密度函数 $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})$定义。令 $p(\mathbf{x}|\mathbf{Z}^{k-1}) = p_{k-1}^{+}(\mathbf{x})$表示给定截至时间步 $k-1$的观测序列$\mathbf{Z}^{k-1}$ 时$\mathbf{x}$ 的条件概率密度函数，或表示时间 $k-1$时$\mathbf{x}$ 的后验估计。利用马尔可夫转移密度函数，当前时间步$\mathbf{x}$ 的先验概率密度定义如下：

$$p_k^{-}(\mathbf{x}) = p_{k-1}^{+}(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}). \tag{3}$$

为获得时间步 k 的后验估计，我们应用贝叶斯规则：

$$p_k^{+}(\mathbf{x}) = \frac{p_k^{-}(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{p(\mathbf{z}_k)} = \frac{p_k^{-}(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{\int p_k^{-}(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})d\mathbf{x}}. \tag{4}$$

粒子高斯混合滤波器假设 $p_{1\cdots k}^{-}(\mathbf{x})$ 可表示为某个高斯混合模型 $p_k^{-}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N}\omega_j^{-}\mathcal{N}(\mathbf{x};\ \mu_j^{-},\ \mathbf{P}_j^{-})$，其中 $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示一个高斯概率密度函数，其分量均值为 μ_j^{-}，分量协方差为 $\mathbf{P}_j^{-}$，权重为 ω_j^{-}。基于这一假设，我们可以证明后验概率密度函数也可表示为高斯混合模型。

我们首先将式（4）中的分式展开如下：

$$\begin{aligned} p_k^{+}(\mathbf{x}) &= \frac{p_k^{-}(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{\int p_k^{-}(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})d\mathbf{x}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_i^{-}\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^{-},\mathbf{P}_i^{-})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{\int\sum_{j=1}^{N}\omega_j^{-}\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_j^{-},\mathbf{P}_j^{-})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_i^{-}\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^{-},\mathbf{P}_i^{-})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{N}\omega_j^{-}\int\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^{-},\mathbf{P}_i^{-})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{5}$$

此时，我们定义似然函数 $l_i(\mathbf{z}_k) = \int\mathcal{N}(\mathbf{x};\ \mu_i^{-},\mathbf{P}_i^{-})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})$。将结果代入式（5）

并将分子和分母同时乘以 $l_i(\mathbf{z}_k)$,

$$p_k^+(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i^- \mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N \omega_j^- l_i(\mathbf{z}_k)} \frac{l_i(\mathbf{z}_k)}{l_i(\mathbf{z}_k)}$$
$$= \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i^- l_i(\mathbf{z}_k)}{\sum_{j=1}^N \omega_j^- l_i(\mathbf{z}_k)} \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)} \quad (6)$$
$$= \sum_{i=1}^N \omega_i^+ p_{i,k}^+(\mathbf{x}).$$

式（6）中的展开表明，高斯混合模型的贝叶斯更新可分别拆分为离散权重更新和连续概率密度函数更新:

$$\omega_i^+ = \frac{\omega_i^- l_i(\mathbf{z_k})}{\sum_{j=1}^N \omega_j^- l_j(\mathbf{z}_k)} \quad (7a)$$

$$p_{i,k}^+(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)}. \quad (7b)$$

虽然式（7a）中的离散（即权重）更新在两种粒子高斯混合滤波器中是一致的，但似然计算$l_i(\mathbf{z}_k)$和式（7b）中的连续更新则并不相同。这些差异将在接下来的小节中详细说明。

在粒子传播和更新步骤之间，两种粒子高斯混合滤波器都需要一个以高斯混合模型表示的先验 估计。传播后的粒子可通过某种聚类算法 $\mathcal{C}$（例如*k*-均值++）进行近似或拟合，从而将粒子集划分为 N个不同的集合或集成，每个集合都具有相应的权重、均值和协方差 [22]。粒子高斯混合滤波器通过对每个高斯混合分量而非先验估计中的粒子执行贝叶斯更新，避免了粒子枯竭。PGM-I 滤波器仅执行一次此聚类步骤，而PGM-II滤波器则执行两次。此外，在将粒子集成传播至下一时间步之前，两种粒子高斯混合滤波器都会从后验估计（同样以高斯混合模型表示）中重采样若干粒子。

B. 粒子高斯混合-*I*滤波器

两种粒子高斯混合滤波器的主要区别在于贝叶斯更新过程。具体而言，对于 PGM-I 滤波器，连续更新涉及卡尔曼更新，即

$$p_{i,k}^+(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)} = \mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^+,\mathbf{P}_i^+). \quad (8)$$

虽然也可以采用基于 EKF 和 UKF 的更新，但强烈建议按照参考文献 [18] 和 [20]所述，使用基于粒子的集成（即 EnKF）更新均值和协方差。参考文献 [8] 和 [9], 展示了 PGM-I 滤波器的一次迭代，下面给出了 PGM-I 算法（摘自参考文献 [18]）。

C. 粒子高斯混合-*II*滤波器

PGM-I和PGM-II滤波器的传播与聚类步骤（即算法1的步骤1和步骤2）完全相同。然而，由于PGM-II滤波器旨在

算法1 粒子高斯混合滤波器 I

给定 $\pi_0(x) = \sum_{i=1}^{M(0)} \omega_i(0) p_g(x;\mu_i(0)\ P_i(0))$、转移密度核 $p(x'|x)$、 $n=1$。

1) 从 π_{n-1} 和转移密度核 $p_n(x'|x)$ 中采样 N_p 个粒子，如下所示:

- 从 $\pi_{n-1}(.)$• 采样 $X(i)'$ 。从 $p(.|X(i)')$ $X(i)$采样。2）使用聚类算法 $\mathcal{C}$ 将粒子集合 $X(i)$聚为 $M^-(n)$个高斯分布簇，其权重、均值和协方差由$\{\omega_i^-(n)\ \mu_i^-(n)\ P_i^-(n)\}$给出。3）利用参考文献 [18]和 [20] 中概述的卡尔曼更新，根据观测值 z_n，将混合权重、混合均值和协方差更新为 $\{\omega_i^+(n)\ \mu_i^+(n)\ P_i^+(n)\}$。4） $n=n+1$。转到步骤1。

为处理卡尔曼或卡尔曼类更新无法降低任何不确定性，或无法捕捉所得概率密度函数特性的情况，PGM-II滤波器的更新过程由三个主要部分组成：1）马尔可夫链蒙特卡洛采样；2）对马尔可夫链蒙特卡洛采样结果进行聚类；3）权重更新。

更新过程的第一步——MCMC采样——是从后验概率密度函数 $p_k^+(\mathbf{x}) \propto p_k^-(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})$ 中进行采样。PGM-II常用的一种MCMC算法是Metropolis算法 [23]。该Metropolis算法的一个重要组成部分是构建目标函数或概率密度函数。我们可以将此目标函数或采样函数$P(\mathbf{x})$（在参考文献 [19] 中称为“后验分布”）数学定义为

$$P(\mathbf{x}) = p_k^-(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}). \quad (9)$$

我们用大写字母 P 表示采样函数，因为它不是严格意义上的概率密度函数，而仅与后验分布成正比。

由于 $p_k^-(\mathbf{x})$ 是高斯混合模型，使用 $P(\mathbf{x})\sum_{i=1}^N \omega_i^- \mathcal{N}(\mathbf{x};\ \mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})$ 会导致计算量过大。因此，参考文献 [19] 建议逐分量进行MCMC采样。用数学术语表示，$P_i(\mathbf{x}) = p_{i\,k}^-(\mathbf{x})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})$。Metropolis采样步骤的下一步是选择一个对称的提议概率密度函数 $q(\mathbf{x})$，使MCMC链能够探索后验概率密度函数。为了在状态空间中进行充分且计算高效的采样，必须并行运行多条马尔可夫链，并且每条链都以不同的状态初始化。所有对目标分布 $P_i(\mathbf{x})$进行采样所产生的MCMC链共同构成一个集成 A_i。

PGM-II 更新过程的第二部分涉及对第一部分产生的样本进行聚类。MCMC 链可能会因起始位置不同而收敛到多个局部极小值。因此，必须舍弃马尔可夫链在一定预热期内的片段。此外，由于 MCMC 的随机游走特性，需要对每条链中的样本进行去相关处理。具体做法是在每条马尔可夫链中每隔 S个样本/状态才进行一次采样，其中 S 是一个较大的数，通常为数百或数千。通过进一步移除相关性

对剩余的 A_i 样本进行聚类，方法与 PGM-I 聚类步骤类似。聚类结果是对集成的函数表示 $p_i^+(\mathbf{x})$，以高斯混合模型 $p_i^+(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_i} \omega_m^* \mathcal{N}(\mathbf{x};\, \mu_m^+,\, \mathbf{P}_m^+)$ 的形式表示，其中 N_i表示簇的数量。不同的集成 A_i可能具有不同的 N_i，具体取决于所得 MCMC 链的形状。权重 ω_m^* 将与集合后验权重 ω_i^+ 相乘。

PGM-II 更新过程的最后一部分涉及权重更新和集合似然的计算。如第 III-B 节所述，集合权重更新公式见式 (7a)。然而，似然计算有所不同。我们通过考虑适当的概率密度函数 $\pi(\mathbf{x})$，推导 PGM-II 的似然近似。对于每个集成 i，我们从式 (7b) 给出的连续概率密度函数更新开始。

$$p_{i,k}^+(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)}\frac{\pi(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x})}. \tag{10}$$

重新整理各项，可得

$$\frac{l_i(\mathbf{z}_k)}{\pi(\mathbf{x})} = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}{p_{i,k}^+(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}. \tag{11}$$

对等式两边取倒数，

$$\frac{\pi(\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)} = \frac{p_{i,k}^+(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}. \tag{12}$$

对等式两边关于 $d\mathbf{x}$积分，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \frac{\pi(\mathbf{x})}{l_i(\mathbf{z}_k)}d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \frac{p_{i,k}^+(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{l_i(\mathbf{z}_k)} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \frac{p_{i,k}^+(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{13}$$

注意到每个集成 A_i 的离散性质，我们可以利用以下性质计算集合似然 $l_i(\mathbf{z}_k)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_i(\mathbf{z}_k)} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \frac{p_{i,k}^+(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})}d\mathbf{x} \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{\pi(\mathbf{x})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x};\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)}\right] \\ &\approx \frac{1}{S_i}\sum_{s=1}^{S_i}\frac{\pi(\mathbf{x}_s)}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_s)\mathcal{N}(\mathbf{x}_s;\mu_i^-,\mathbf{P}_i^-)}.\end{aligned} \tag{14}$$

在此似然近似中，$\mathbf{z}_k$ 由基于马尔可夫链蒙特卡洛采样的第 i个集成解释，$\mathbf{x}_s$ 指 A_i 中的每个样本（去除预热样本和去相关样本后）。只要任意适当的概率密度函数 $\pi(\mathbf{x}_s)$成立，将$\pi(\mathbf{x}_s)$设为 $= \mathcal{N}(\mathbf{x}_s;\, \mu_i^-\,, \mathbf{P}_i^-)$即可进一步简化似然计算。计算出所有集合似然后，将所得后验集合权重 ω_i^+ 与集合聚类权重ω_m^* 相乘，以获得每个后验分量对（i, m）的后验权重。从所得高斯混合模型中抽取大量粒子并进行传播，从而进入 PGM-II 滤波器的下一次迭代。

总而言之，PGM-II 滤波器包含与 PGM-I 滤波器相同的重采样、传播和先验估计聚类步骤。然而，PGM-II 滤波器的更新过程更为复杂且计算量更大，涉及马尔可夫链蒙特卡洛采样、对所得集成进行聚类以及集合权重更新。PGM-II 算法的步骤概述见算法 2（摘自参考文献[19]）。从聚类后的先验概率密度函数开始，图 1 展示了 PGM-II 的更新过程。

算法 2 粒子高斯混合滤波器 II

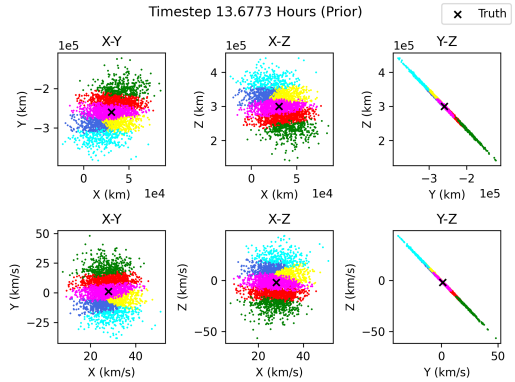
给定 $\pi_0(x) = \sum_{i=1}^{M(0)} \omega_i(0) p_g(x;\mu_i(0)\ P_i(0))$，转移密度核 $p(x'|x)$，$n = 1$。1) 按如下方式从 π_{n-1} 和转移密度核 $p_n(x'|x)$ 中采样 N_p 粒子:

• 从 $\pi_{n-1}(\cdot)$ 中采样 $X(i)'$。• 从 $p(\cdot|X(i)')$ 中采样 $X(i)$。2) 使用聚类算法 $\mathcal{C}$ 将粒子集合 $X(i)$ 聚类为 $M^-(n)$ 个高斯簇，其权重、均值和协方差由 $\{\omega_i^-(n)\ \mu_i^-(n)\ P_i^-(n)\}$给出。3) 使用 MCMC 从分量后验分布 $\pi_{i,n}(x)$ 中采样，以生成集成 A_i。4) 根据似然函数定义和式（7a），通过计算模态似然序列来计算混合权重 $w_i(n)$。5) 从加权集合集成 $\{w_i(n)\ A_{n,i}\}$中采样 N 个粒子。6) $n = n + 1$。转到步骤 1。

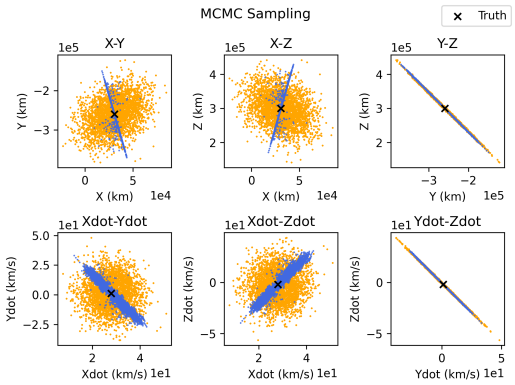
IV. 混合粒子高斯混合滤波方法

大多数状态估计的概率密度函数都可以用高斯混合模型准确建模，但无信息先验可能需要数十个、甚至数百个高斯混合分量。事实上，本文所建模的极端初始状态不确定性可能只能用（多变量）均匀概率密度函数表示。

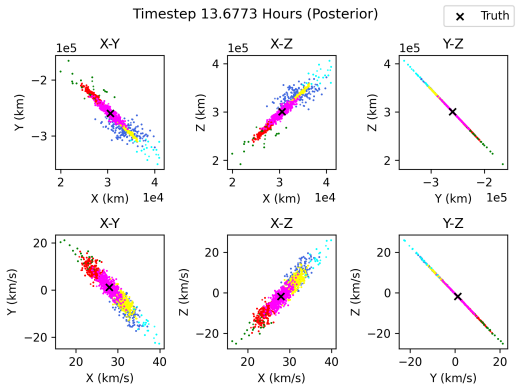
马尔可夫链蒙特卡洛采样的一个优点是，式 (9) 中目标函数的两个组成部分都不必服从高斯分布或高斯混合模型。为此，与参考文献 [8] 和 [9]，中采用 KF-PGM 将初始先验建模为高斯混合模型不同（该方法需要多次观测才能获得初始状态估计），我们可以用多元均匀概率密度函数来描述最大状态不确定性，因为我们只知道在收到第一次观测时，目标位于地月空间域的某处。换言之，我们不依赖参考文献 [8] 和 [9]，中基于运动学拟合的估计，而是将 $p_0^-\mathbf{x}$ 设为地月空间区域内的均匀概率密度函数（即信息量极少的先验估计）。尽管 $p_0^-\mathbf{x}$ 可以用任意概率密度函数表示，本文重点探讨如何使用均匀概率密度函数刻画最大状态不确定性（其不确定性甚至高于基于最小距离假设的 KF-PGM 初始轨道确定估计），以及我们的混合PGM滤波器如何在这种极端初始



(a)先验聚类估计



(b) 所有 A_i 的集体马尔可夫链蒙特卡洛链 i



(c) 权重更新集

图1：PGM-II滤波器的状态估计传播与聚类、马尔可夫链蒙特卡洛采样以及集成更新步骤。

状态不确定性下保持稳健。在轨道确定过程开始时采用如此宽广的多元均匀分布，使我们能够在关键的第一次遍历中，利用比 KF-PGM 多得多的测量值进行更新。图 2 展示了状态空间中这个极不确定的概率密度函数。后续的状态预测和更新均采用高斯混合模型建模。

PGM-II算法假设先验 状态估计服从高斯分布或基于高斯混合模型，并与测量融合，而测量噪声服从高斯概率密度函数。对于本研究，我们不再作此假设。相反，我们修改

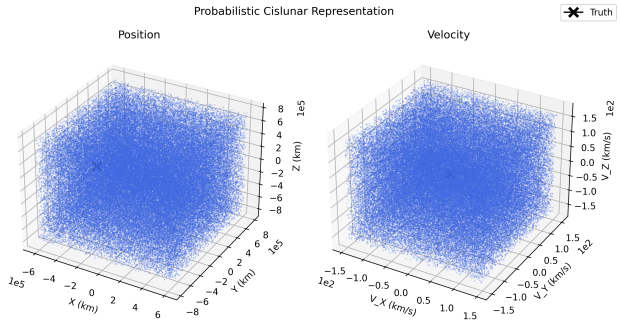


图2：一个表示第V节所有示例中 $p_0^-(\mathbf{x})$的大型多元均匀概率密度函数

PGM-II滤波器的马尔可夫链蒙特卡洛采样函数 $P(\mathbf{x})$，使得 $p_k^-(\mathbf{x})$ 可以等同于一个高度不确定的均匀概率密度函数。由此得到的基于PGM-II的更新将产生后验高斯混合模型状态估计。后续每个 $p_k^-(\mathbf{x})$ 都将建模为高斯混合模型。按照算法1和算法2中的符号表示，我们在算法3中总结了混合滤波方法。

算法3 混合粒子高斯混合滤波方法

给定均匀分布的初始概率密度函数 $p_0^-(\mathbf{x})$、转移密度核 $p(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$、 $n=1$、切换时间步 $n_k \geq 2$。1）从 π_{n-1} 和转移密度核 $p_n(x'|x)$ 中采样 N_p 粒子，如下所示:

• 从 $\pi_{n-1}(.)$ 中采样 $X_{(i)'}$。• 从 $p(.|X_{(i)'})$ 中采样 $X_{(i)}$。2）使用聚类算法 $\mathcal{C}$ 将粒子集合 $X_{(i)}$ 聚类为 $M^-(n)$ 个高斯簇，其权重、均值和协方差由$\{\omega_i^-(n)\ \mu_i^-(n)\ P_i^-(n)\}$给出。3）**如果** $n \leq n_k$ **则** 4）遵循算法 2 的步骤 3-5。5）**否则**6）遵循算法1的步骤 3。7）**结束如果**8） $n = n+1$。转到步骤 1。

尽管该 PGM-II 滤波更新过程中的马尔可夫链蒙特卡洛采样改进功能强大，但其计算量远高于整个 PGM-I 更新。因此，仅在少数几个步骤（通常为两到五步）中运行基于 PGM-II 的滤波器会有所帮助，一旦状态中的不确定性被充分降低，随后便切换到 PGM-I 滤波器以提高计算效率。这一滤波序列体现了我们滤波技术的混合特性。

V. 结果与讨论

本节展示混合PGM滤波器的一些示例结果。我们将 $p_0^-(\mathbf{x})$ 设为图 2 所示的大范围均匀概率密度函数，其上界和下界

对于每个位置和速度状态分量，分别为 ±550000 km 和 ±100 km/s。尽管大多数地月空间人造空间物体都位于距地球中心 550000 km 以内，且只要没有主动逃离太阳系，其速度就低于 42 km/s，但我们仍设置了特别宽的界限，以此展示混合PGM滤波器对高度不确定的初始状态估计的鲁棒性。与大多数地月空间目标跟踪文献相比，我们大幅放宽了状态向量分量界限，从而为鲁棒的地月空间目标跟踪建立了一个假设最少的框架。

A. 混合滤波方法

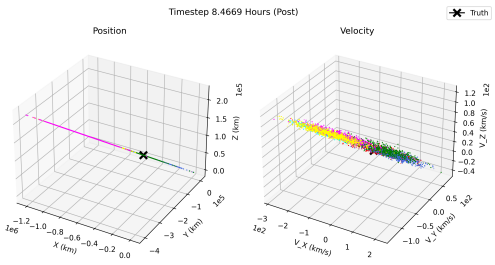
为展示我们基于混合PGM的滤波方法，我们至少在前两个时间步采用基于 PGM-II 的滤波方法，以便在速度空间中实现充分定位，因为单组 $[AZ, EL]^T$ 测量值无法提供有关目标速度的任何信息。之后，我们切换到 PGM-I 滤波器。继续假设$\mathbf{z}_k$ 的测量噪声服从零均值高斯分布，我们在第一个时间步之后的每个时间步，将高斯混合模型先验状态估计与一个高斯分布测量进行融合。对于第一个时间步，我们将 $p_0^-(\mathbf{x})$与第一次测量进行融合。由于马尔可夫链蒙特卡洛采样需要大量计算资源，基于 PGM-II 的更新仅对前两组测量值执行，以便在速度空间中获得一定的定位信息。

本节中的所有仿真均展示了一个沿上述 9:2 共振近直线晕轨道运动的目标。选择该轨道是因为其围绕月球稳定地作椭圆运动，并且对 NASA 的月球门户和未来阿耳忒弥斯任务具有重要意义。将地月空间 RSO 视为新的关注目标后，位于大学城的观测者负责大约每隔 40 分钟测量一次目标，直到目标从传感器视场中消失，此时仿真结束。此测量计划与参考文献 [8] 和 [9]中若干示例的第一次遍历相同。从图 2 所示的初始状态估计出发，我们在图 3 中展示第二个时间步结束时（此时我们从基于 PGM-II 的更新切换到 PGM-I 更新）以及第一次遍历结束时的后验估计 $p_k^+(\mathbf{x})$。

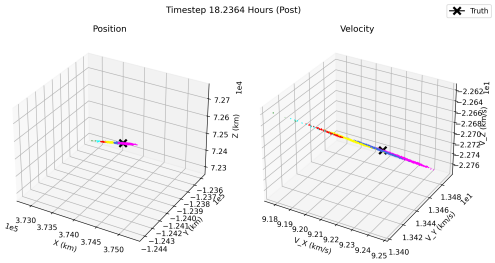
B。与基于 *PGM-I* 的滤波技术比较

术

本节余下部分将重点比较我们提出的混合滤波技术与 KF-PGM。KF-PGM框架通过融合若干连续的 $[AZ, EL]^T$ 测量值以及一个范围较大、定义较宽松的距离概率密度函数，生成概率初始状态估计；由此得到的初始位置估计可严格表示为时间的函数，并用多项式或样条函数拟合。对位置进行的这一运动学拟合关于时间求导后，可得到初始速度估计。这些拟合共同给出多项式所拟合的最后一次观测时刻的初始状态估计。通过在测量值中加入测量噪声并抽取若干独立同分布样本，这一过程会重复数千次



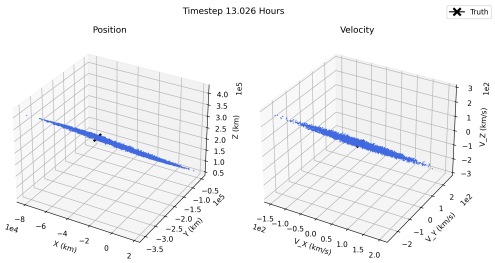
(a) PGM-经过两次迭代后的后验估计
II 基于测量更新



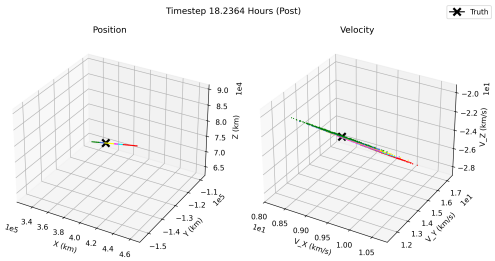
(b) 第一次遍历结束时的状态估计

图3：使用我们的混合 PGM- 滤波器，在两次测量后以及仿真/第一次遍历结束时的后验状态估计。

并在每个观测时间步抽取距离信息。结果是以粒子云形式表示的 IOD估计，如图 4a 所示。随后，我们使用 PGM-I 滤波器，得到第一次遍历结束时的局部状态估计，如图4b 所示。我们选择.....的另一个原因是



(a) KF-PGM初始状态估计

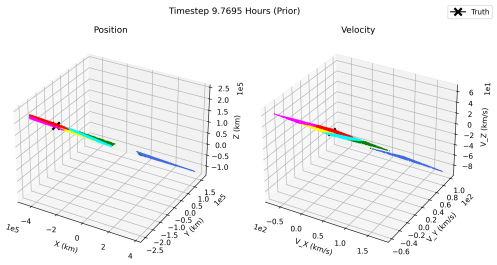


(b) 单次过境结束时的状态估计，采用 unerquicklich KF-PGM框架

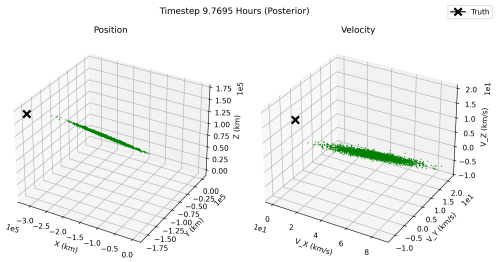
图4：9:2 NRHO 轨道内目标的单次过境滤波结果

对前两个测量采用基于 PGM-II 的更新

集是为了展示这种混合 PGM 滤波技术相对于KF-PGM框架的优越程度。理论上，KF-PGM 的运动学拟合框架对其最低阶运动学拟合（一条直线）至少需要两个测量值。如果通过这前两个点进行运动学拟合以获得初始状态估计，则该 IOD估计将与目标真实状态一致。然而，如 图 5 所示，PGM-I 滤波器将在随后时间步的更新步骤中失效。因此，我们提出的混合滤波方法说明了实际所需的观测要少得多。



(a) 由线性运动学拟合构建的初始轨道确定估计传播并聚类得到的先验 估计

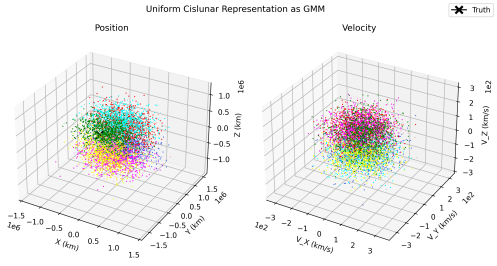


(b) 不一致的后验估计

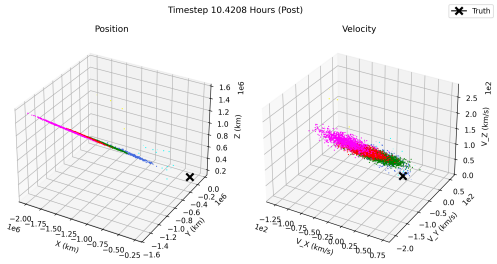
图 5：在前两次测量值之间采用线性拟合时使用 KF-PGM 的局限性

为证明仅使用 PGM-I 滤波器不足以在该 9:2 共振近直线晕轨道目标的第一次遍历中完成轨道确定，我们将图 2 中多元均匀概率密度函数内的全部蓝色粒子聚类为六个簇，从而构建图 6 所示基于高斯混合模型的先验 估计。尽管从该聚类后的概率密度函数出发，PGM-I 滤波器在前三个更新周期后可得到一致估计，但所得熵往往远高于基于 PGM-II 的更新所得到的估计。更重要的是，在第四个更新步骤之后，PGM-I 更新失去了对目标的持续跟踪，而图 3 中的混合 PGM 滤波技术在第一次遍历及仿真结束前始终保持一致。

为了比较我们提出的混合PGM滤波器与文献 [8], 中第一个 9:2 近直线晕轨道目标跟踪示例所用的 PGM-I 滤波器的滤波器性能和精度，我们采用一种基于粒子的熵度量，其定义为 $H(k)\ \mathbb{E}[-\quad p_k \quad _i\ ] \approx -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \quad p_k \quad _i \qquad _i$ $\log(\mathbf{x})\log(\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x}$表示后验状态估计中的第 i个粒子。为便于直接、直观地比较，我们给出了初始



(a) 初始状态估计 $p_0^-(\mathbf{x})$，源于聚类-
将图 2 中的均匀概率密度函数转换为高斯混合模型



(b) 经过四次更新迭代后不一致的后验估计
迭代次数

图 6：第一次遍历期间仅采用 PGM-I 滤波方法的局限性

状态估计，以及使用 KF-PGM 框架在第一次遍历结束时得到的后验估计图，如图 4 所示。

快速对比图 4 和图 3b 可见，我们的混合PGM滤波器能够更准确地定位状态估计

在第一次 9:2 NRHO 飞越结束时，对每个状态向量分量而言达到 10 到 100 倍！其中一部分或许可以这样解释：我们的混合 PGM 滤波方法在生成初始状态估计时无需使用任何观测。此外，PGM-II滤波器强大的 MCMC 采样步骤使我们能够充分采样与观测相一致的高概率密度区域。我们通过图 7 中 KF-PGM 与我们基于混合 PGM 的滤波器之间的熵比较，以及表 I 中的标准差降低量，将这些发现加以形式化。

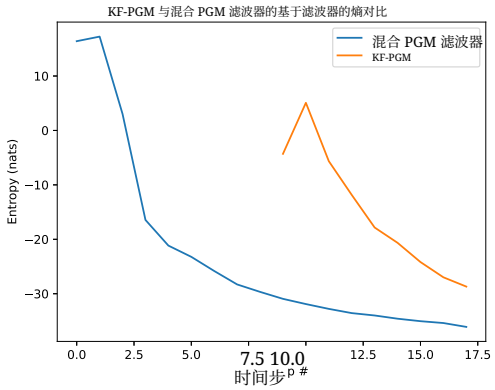


图 7：地月空间 RSO 在 9:2 NRHO 轨道上第一次遍历期间的熵对比

表 I：从初始状态估计到第一次遍历结束，KF-PGM 与我们的混合技术之间的状态估计标准差比较

分量	KF-PGM 起始	KF-PGM End	混合 开始	混合 End
x (千米)	15,370	29,869	359,028	406.47
y (千米)	82,919	9,902.4	444,363	135.18
z (千米)	95,764	5,791.4	449,691	77.709
$\dot{x}$ (千米/秒)	54.047	0.32216	85.836	0.010630
$\dot{y}$ (千米/秒)	78.993	1.2984	88.528	0.014715
$\dot{z}$ (千米/秒)	88.644	1.9414	97.135	0.025009

值得注意的是，在 KF-PGM 以及我们的混合 PGM 滤波器的前 1-2 步中，熵均出现轻微上扬。这是由于在缺乏多次测量值的情况下，速度空间中存在高度不确定性并出现爆炸式增长。这一观察进一步强调，在切换到 PGM-I 滤波器之前，至少需要使用 PGM-II滤波器两次。

VI. 结论与未来工作

在本文中，我们开发并验证了一种基于混合粒子高斯混合滤波器的轨道确定框架，该框架略微放宽了PGM-II滤波器MCMC 采样步骤中的一项假设。尽管该滤波器对地月空间 RSO的状态仅掌握极少信息，但在短期内、针对同一组观测，其定位精度最高可比KF-PGM框架高出100倍。我们还展示了KF-PGM技术在观测有限或较少情况下的一些不足，以及为何在切换到基于PGM-I的更新步骤之前，先采用基于PGM-II的更新步骤十分重要。这项工作表明，地月空间目标跟踪可以完全以递归滤波的方式完成，而无需专门的地月空间初始轨道确定方法——由于高斯方法所依赖的二体假设不再成立，这类方法本身就很困难——并且仍能在一次过境内获得高度局部化的目标估计值。

我们希望从以下三个方面拓展这项工作。首先，我们希望将地月空间 RSO 的距离、轨道类型、能量和雅可比常数等特征抽象为概率密度函数，并将这些特征加以融合。其次，我们希望拓展混合PGM滤波器，使其能够在存在非高斯测量噪声的情况下稳健地估计地月空间人造空间物体。最后，我们希望将这种混合滤波方法拓展到地月空间环境中的多目标跟踪场景，在这些场景中，可用的目标状态先验知识很少。

参考文献

[1] L. Taff, 《论高斯轨道确定方法》，技术报告，麻省理工学院林肯实验室，1979年6月。[2] K. J. DeMars与M. K. Jah, 《基于高斯混合模型的概率初始轨道确定》，《制导、控制与动力学杂志》，第36卷，第5期，2013年，第1324–1335页，10.2514/1.59844。[3] M. P. W. Islam I. Hussein、Christopher W.T. Roscoe与J. Paul W. Schumacher, 《仅角度初始轨道的概率可容许性》，第24届国际空间飞行动力学研讨会论文集，马里兰州劳雷尔，2014年。

[4] U. R. Mishra、S. Chakravorty、W. R. Faber、I. I. Hussein、S. G. Hesar与B. Sunderland, 《概率可容许区域的几何解法》（PAR），《宇航科学杂志》，2024年。[5] M.J. Holzinger、C.C. Chow与P. Garretson。《地月空间入门》。华盛顿哥伦比亚特区：空军研究实验室，第1版，2021年。[6] D. H. B. R. S. Mark Bolden、Dr. Islam Hussein与D. E. Griggs, 《利用光学传感器进行地月空间概率初始轨道确定与目标跟踪》，先进毛伊光学与空间监视技术会议论文集，夏威夷州威雷亚，[7] 2022 Heidrich, C.、Holzinger, M.。《利用稀疏网格配置法进行通用仅角度地月空间初始轨道确定》。《宇航科学杂志》72，16（2025年）。https://doi.org/10.1007/s40295-025-00491-w [8] Paranjape, I.、Hejmadi, T.与Chakravorty, S.。《地月空间初始轨道确定与轨道确定的概率方法》。（2026年）。待投稿至《宇航科学杂志》。https://arxiv.org/abs/2602.18058。[9] Paranjape, I.与Chakravorty, S.。《利用运动学拟合与粒子高斯混合滤波进行地月空间初始轨道确定与目标跟踪》。（2025年）。即将发表于2025年AAS/AIAA轨道动力学专家会议论文集，夏威夷州考艾岛。[10] Kalman, R. E.与Bucy, R. S.（1961年3月1日）。《线性滤波与预测理论的新成果》。美国机械工程师学会。《基础工程杂志》，3月 1961 83 1 95 108 10 1115 1 3658902 ； （）： –。[11] https://doi.org/./. J. L. Crassidis与J. L. Junkins, 《动态系统的最优估计》，第二版（Chapman & Hall/CRC应用数学与非线性科学丛书）。Chapman & Hall/CRC，第2版，2011年。[12] E. Wan与R. Van Der Merwe, 《用于非线性估计的无迹卡尔曼滤波器》，2000年IEEE信号处理、通信与控制自适应系统研讨会论文集（目录号00EX373），2000年，第153–158页，10.1109/ASSPCC.2000.882463。[13] G. Evensen, 《集合卡尔曼滤波器：理论表述与实际实现》，《海洋动力学》，第53卷，2003年11月，第 343 367, 10 1007 10236 003 0036 9 –页。/s - - - Tapley, B. D.、[14] Schutz, B. E.与Born, G. H.（2004年）。统计轨道确定。爱思唯尔学术出版社。[15] A. A. Popov与R. Zanetti, 《具有粒子定位协方差的集合高斯混合滤波》，2023年第26届国际信息融合会议（FUSION），2023年，第1–7页，10.23919/FU- SION52260.2023.10224227。[16] J. L. Iannamorelli与K. A. LeGrand, 《用于多传感器机动地月空间目标跟踪的自适应高斯混合滤波》，2025, 《宇航科学杂志》，[17] D. R. A.V.与S. Chakravorty, 《用于空间目标跟踪的无迹卡尔曼-粒子混合滤波器》，《宇航科学杂志》，第65卷，2017年，第111–134页，https://doi.org/10.1007/s40295-017-0114- 8。[18] D. Raihan与S. Chakravorty, 《粒子高斯混合滤波器-I》，《自动化》，第98卷，2018年，第331–340页，https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.07.023。[19] D. Raihan与S. Chakravorty, 《粒子高斯混合滤波器-II》，《自动化》，第98卷，2018年，第341–349页，https://doi.org/ 10 1016 2018 07 024 . /j.automatica. . . U. R. [20] Mishra、S. Chakravorty、W. R. Faber、I. I. Hussein、S. G. Hesar与B. Sunderland, 《概率可容许区域的几何解法》（PAR），《宇航科学杂志》，2024年。[21] Givens, M., 《地月空间监视维护与跟踪的新算法》，载于¡i¿先进毛伊光学与空间监视（AMOS）技术会议¡/i¿，2025年，文章编号90。[22] S. Lloyd, 《PCM中的最小二乘量化》，《IEEE信息论汇刊》，第28卷，137，10 2，1982年，129 1109 1982 1056489，第，第–页。/TIT. . .[23] W. K. Hastings, 《使用马尔可夫链的蒙特卡罗采样方法及其应用》，《生物统计学》，第57卷，第1期，1970年4月，第 97 109, 10 1093 57 1 97 –页。[24] https://doi.org/./biomet/. .《国家地月空间科学与技术战略》。华盛顿哥伦比亚特区：国家科学技术委员会，第1版，2022年。[25] H. Schaub与J. L. Junkins, 《空间系统分析力学》。弗吉尼亚州雷斯顿：AIAA教育丛书，2003年10月，10 2514 4 861550 . / . .[26] Durant、Dalton、Popov, Andrey与Zanetti, Renato。（2023年）。《用于稀疏数据轨道确定的MCMC集合高斯混合滤波》，2023年轨道动力学专家会议论文集，得克萨斯州奥斯汀。