通过兰姆位移和超精细结构探测μ子原子中的第五种力

林晓轩 ,[1,2,*] 吴倩,[3,4,†] 寇伟 ,[2,5,6,7,‡] 和陈旭荣[2,5,6,7,§]
河北大学物理科学与技术学院，中国保定 *071002*[2]
中国科学院近代物理研究所，兰州 *730000*[3]南京大学物理学院，中国江苏省南京 *210093*[4]理化学研究所仁科加速器科学研究中心核多体理论实验室，日本和光市 *351-0198*[5]中国科学院大学核科学与技术学院，北京 *100049*[6]中国科学院近代物理研究所南方核科学理论中心（*SCNT*），广东省惠州市 *516000*[7]中国科学院近代物理研究所重离子科学与技术重点实验室，兰州 *730000*

arXiv:2603.01429v1 [physics.atom-ph] 2 Mar 2026

受 ATOMKI反常 的启发——这些反常出现在 ^{8}Be 和 ^{4}He 跃迁中——我们系统地考察了稳定原子核（质量数最高达 $Z \leq 15$）的 μ子原子中由 $X17$ 引起的兰姆位移和超精细分裂。我们采用高斯展开法，在统一的哈密顿量框架内求解 μ子-原子核束缚态问题；该哈密顿量既包含标准电磁基线，也包含矢量和赝标量-$X17$ 交换。本研究的一个核心特点是，兰姆位移区和超精细区采用不同的核耦合：自旋无关兰姆位移由相干的矢量μ子-原子核相互作用描述，而自旋相关的超精细区则依据壳模型自旋分数，逐个同位素构建。基准 μ子耦合的选取与 2025 年 Muon $g-2$ 结果一致。我们发现，不同媒介子假说之间存在明显的互补性。矢量兰姆移位信号随原子核变重而显著增强；在超精细区，矢量情景更倾向于增强奇-N 原子核，而赝标量情景则更有利于奇-Z 系统。为在统一的实验基准上比较不同系统，我们引入了信号精度比。在已有精密基准的系统中，近期最有希望用于探测矢量兰姆位移通道的是 μd、$\mu^3\mathrm{He}^+$ 和 $\mu^4\mathrm{He}^+$。对于未来的光谱学研究，预测矢量兰姆位移绝对信号最大的是 μ^{31}P；而领先的 $1S_{1/2}$ 超精细目标则是矢量情景中的 μ^{29}Si 和赝标量情景中的 μ^{31}P。主要的理论不确定性来自对核自旋含量的 Schmidt 模型处理，这表明，超越 Schmidt 模型的核结构输入将是对领先超精细目标开展定量后续研究的关键。

I. 引言

ATOMKI 合作组报告的 ^{8}Be [1] 和^{4}He [2] 激发态跃迁中的异常内部成对产生现象，引发了人们对一种质量接近 17 MeV 的轻玻色子的持续关注。如果这种粒子确实存在，它将表明标准模型之外存在一种新力，并将对轻媒介子唯象学以及基本相互作用的精密检验产生广泛影响。在各种拟议的解释中，质子厌恶矢量情景仍是讨论最广泛的可能性之一 [3], ，而赝标量和轴矢量替代方案也得到了深入研究 [4, 5]。一个关键问题是，如何构造不仅能探测此类媒介子是否存在，还能探测其耦合模式和自旋宇称结构的可观测量。

μ子原子为开展此类检验提供了特别有利的环境。由于μ子的质量约为电子的200倍，其玻尔轨道被压缩至核尺度，相较于普通原子，对短程汤川型相互作用的灵敏度大幅提升。高精度μ子光谱学在质子半径谜题研究中的成功表明，μ子系统中微小的能级位移可以极其精确地测量 [6]，而近期在氦区开展的测量则表明，亚毫电子伏灵敏度在实践中是可以实现的 [7]。对于质量为 $m_X \simeq 16.7$ MeV的媒介子，其对应的作用范围 $m_X^{-1} \approx 12$ fm与轻核和中轻核中低能级μ子波函数探测最强的区域高度重叠。因此，μ子原子是寻找短程兆电子伏尺度力的天然实验室。

此前关于μ子原子中可能存在 $X17$ 效应的讨论，大多只聚焦于少数几种轻原子核系统，尤其是μ子氢和氘 [8–10]。尽管这类系统在理论上简洁、在实验上也很重要，但仅凭它们无法揭示新型短程相互作用预期呈现的更广泛的原子核系统学。

* x-x.lin@stumail.hbu.edu.cn
† qwu@nju.edu.cn
‡ kouwei@impcas.ac.cn§ xchen @impcas.ac.cn（通讯作者）



(a) 矢量粒子 X_{17} 交换　　(b) 赝标量 X_{17} 交换

图 1. 轻玻色子 X_{17}介导的μ子-核子相互作用示意图。面板 (a) 展示矢量交换，它同时对兰姆位移和超精细结构有贡献。面板 (b) 展示赝标量交换，在领先阶下仅对超精细区有贡献。

尤其是，不同的可观测量探测强子耦合的不同组合。对于矢量媒介子，自旋无关的 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移由相干μ子-原子核相互作用所支配，因此取决于所有核子贡献的总核矢量电荷。相比之下，超精细分裂与自旋相关，探测的是各原子核的质子与中子自旋含量。因此，兰姆位移和超精细测量的最佳目标未必相同；有意义的调查必须在原子核层面区别对待这两个领域。

在本工作中，我们对稳定原子核中的μ子原子开展统一研究，考察由 $X17$引起的兰姆位移和超精细分裂，范围覆盖至 $Z \leq 15$。我们的分析有三项主要进展。首先，我们对轻核和中轻核区域逐核进行调查，而非仅关注少数基准系统。其次，我们使用不同的核输入构建这两种可观测量：矢量兰姆位移通过与 $Zh'_p + Nh'_n$成正比的相干μ子-原子核耦合描述，而超精细区则依据质子与中子自旋分数逐个同位素构建。第三，我们通过引入信号精度比，将预测信号直接与实验探测能力联系起来

$$\mathcal{R} \equiv |\Delta E_{X17}|/\delta E,$$

其中 δE 表示相关跃迁已达到或预期达到的精度。该量提供了一种简便方法，可在共同的实验基础上比较绝对能量尺度差异很大的系统。

本研究呈现出若干稳健的规律。矢量兰姆位移通道被相干增强，并随趋向较重原子核而显著增大。在超精细区，矢量粒子与赝标量假说表现出互补的目标选择性，因为它们对中子和质子自旋含量的权重不同：矢量交换优先增强奇N 原子核，而赝标量交换则偏向奇Z 系统。这种依赖于可观测量的区分使比较μ子光谱学成为一种有前景的工具，不仅可用于约束可能的第五种力，也可在观测到信号时甄别不同的媒介子假说。

我们的计算在高斯展开法框架内进行[11], ，采用统一的哈密顿量，其中包含标准电磁基线以及矢量与赝标量 $X17$ 交换。核质量、电荷半径、磁矩及相关输入取自评价数据库 [12–14], ，而核自旋结构则在独立粒子壳模型（Schmidt 模型）层面加以处理[15, 16]。在轻子方面，我们采用基准μ子耦合，其选取以更新后的μ子 $g-2$ 情形为指导。与轻μ子原子已发表结果的基准比较表明，电磁基线足以用于目标识别，而超精细区的主要理论不确定性来自对核自旋分数的施密特模型处理，而非来自原子计算本身。

本文其余部分组织如下。第II 节给出理论框架，包括哈密顿量、耦合选择、核自旋输入以及对数值实现的验证。第III 节给出两种媒介子假说下预言的兰姆位移和超精细信号，并讨论其对实验靶标选择的意义。第IV 节总结主要结论，并概述正在进行及未来μ原子光谱学计划的前景。全面的数值结果汇集于附录B–D。

II. 理论框架

A. 系统哈密顿量

我们将该问题视为一个由哈密顿量描述的μ子–原子核二体系统

$$H = H_0 + H_{\rm fs} + H_F + H^{X17}. \tag{1}$$

原子计算完全以μ子与原子核质心之间的相对坐标为基础。新物理相互作用定义在μ子–核子层级，随后根据可观测量的不同，通过两种不同的方法映射为μ子–原子核算符。对于超精细区，自旋相关的μ子–核子相互作用通过核自旋分数 $\Delta_{p,\,n}$（见第IID节）进行映射，从而得到自旋分数加权有效耦合。对于自旋无关矢量兰姆位移，则将核子层级耦合对所有 Z 质子和 N 中子进行相干求和，详见下文及第IIIB节。此两步流程确保与各可观测量相对应的核结构信息与原子物理计算清晰分离。

主导阶薛定谔哈密顿量包含具有约化质量的动能项和点库仑势，

$$H_0 \;=\; \frac{\mathbf{p}^{\,2}}{2m_r} \;-\; \frac{Z\alpha}{r}, \qquad m_r \equiv \frac{m_\mu m_N}{m_\mu + m_N}. \tag{2}$$

按照 μ子原子中采用的标准布赖特–泡利展开，相对论修正、达尔文项／有限尺寸修正以及轻子自旋–轨道贡献可整理为参考文献 [9]

$$\begin{aligned} H_{\rm fs} = &-\frac{\mathbf{p}^{\,4}}{8m_\mu^3} - \frac{\mathbf{p}^{\,4}}{8m_N^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2}\left(\frac{4\langle r_N^2\rangle}{3} + \frac{1}{m_\mu^2} + \frac{1}{m_N^2}\right)\delta^3(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{Z\alpha}{4m_\mu^2 r^3}\left(1 + \frac{2m_\mu}{m_N}\right)\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu \;+\; V_{\rm Ueh}(r), \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\langle r_N^2\rangle$ 是核电荷均方半径。

在本研究中，乌伦贝克真空极化势仅作为背景量子电动力学效应：其作用是为标准兰姆位移贡献提供正确的数量级，以便与我们比较小得多的 $X17$ 所引起的位移。由于我们的主要关注点是 $X17$ 所产生的新物理修正，而非对真空极化效应本身进行高精度重新评估，因此，对我们而言，采用简单的点核模型来描述乌伦贝克势就足够了。

乌伦贝克真空极化势最初在参考文献 [17] 中以如下形式推导得到

$$V_{\rm Ueh}(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\,\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 (1-u^2)\,du \int_1^\infty \exp\!\left[-\frac{2rz}{\lambda_0\sqrt{1-u^2}}\right]\frac{dz}{z}, \tag{4}$$

其中 $\lambda_0 = \hbar/(m_e c)$ 是电子的康普顿波长。

费米哈密顿量 H_F（见参考文献 [18] 的式（10））为

$$H_F \;=\; \frac{g_N\,\alpha}{m_\mu\,m_N}\left[\frac{\pi}{3}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\boldsymbol{\sigma}_N\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \;+\; \frac{3\,(\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_N\!\cdot\!\mathbf{r}) - r^2\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\boldsymbol{\sigma}_N}{8\,r^5} \;+\; \frac{\boldsymbol{\sigma}_N\!\cdot\!\mathbf{L}}{4\,r^3}\right]. \tag{5}$$

对于矢量粒子 $X17$，传播子的 00 分量会产生一个占主导地位、自旋无关的汤川相互作用。在 μ子—原子核层面，对所有 Z 质子和 N 中子的贡献进行相干求和，得到

$$V_X(r) \;=\; \frac{h'_\mu}{4\pi}\,(Z h'_p + N h'_n)\,\frac{e^{-m_X r}}{r}, \tag{6}$$

它决定了 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移，详见第 IIIB节。由于式（6）对整个原子核整体的矢量荷进行求和，因此它不同于超精细区（第 IID节）采用的自旋分数加权方案；后者仅保留携带自旋的价核子。诱导产生的超精细哈密顿量（矢量交换）为

$$\begin{aligned} H_{\rm HFS,V} = \frac{h'_\mu h'^{(\rm eff)}_N}{16\pi\,m_\mu m_N}\Bigg[&-\frac{8\pi}{3}\,\delta^{(3)}(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\boldsymbol{\sigma}_N - m_X^2\,\frac{\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\mathbf{r}\;\boldsymbol{\sigma}_N\!\cdot\!\mathbf{r} - r^2\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\boldsymbol{\sigma}_N}{r^3}\,e^{-m_X r} \\ &- (1+m_X r)\,\frac{3\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\mathbf{r}\;\boldsymbol{\sigma}_N\!\cdot\!\mathbf{r} - r^2\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\!\cdot\!\boldsymbol{\sigma}_N}{r^5}\,e^{-m_X r} - \left(2 + \frac{m_\mu}{m_N}\right)\frac{(1+m_X r)}{r^3}\,\boldsymbol{\sigma}_N\!\cdot\!\mathbf{L}\,e^{-m_X r}\Bigg], \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $h'^{(\rm e\,ff)}_N = h'_p\Delta_p + h'_n\Delta_n$ 是式（51）中定义的自旋分数加权有效耦合。

对于具有点状 $i\gamma_5$ 耦合的赝标量 $X17$，树级交换会诱导出纯自旋依赖势。由于其矩阵元在 nS 和 nP 能级的自旋平均质心中为零，该势

不会产生与矢量兰姆位移相当的能级质心独立位移；相反，它在每个超精细多重态内重新分配能量，从而改变可观测的超精细分裂。相应的超精细哈密顿量为

$$H_{\mathrm{HFS},A} = \frac{h_\mu\, h_N^{(\mathrm{eff})}}{16\pi\, m_\mu\, m_N}\left[\frac{4\pi}{3}\,\delta^{(3)}(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N \;-\; m_X^2\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{r})}{r^3}\,e^{-m_X r}\right.$$
$$\left. +\;(1+m_X r)\,\frac{3(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{r}) - r^2\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N}{r^5}\,e^{-m_X r}\right], \tag{8}$$

其中 $h_N^{(\mathrm{eff})} = h_p\Delta_p + h_n\Delta_n$。

对于球对称的 S态波函数，可以使用角平均

$$(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{r}) \;\longrightarrow\; \frac{1}{3}\,r^2\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N, \qquad \boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{L} \;\longrightarrow\; 0, \tag{9}$$

从而

$$H_{\mathrm{HFS,V}} \to -\,\frac{h'_\mu h'^{(\mathrm{eff})}_N}{24\pi\, m_\mu m_N}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\left[4\pi\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \;-\; \frac{m_X^2}{r}\,e^{-m_X r}\right]. \tag{10}$$

$$H_{\mathrm{HFS,A}} \to \;\frac{h_\mu h_N^{(\mathrm{eff})}}{48\pi\, m_\mu m_N}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\left[4\pi\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \;-\; \frac{m_X^2}{r}\,e^{-m_X r}\right]. \tag{11}$$

$$H_F \to \frac{g_N\,\alpha}{m_\mu m_N}\,\frac{\pi}{3}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \tag{12}$$

对于 P态，通过$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$将角度与半径分离较为方便:

$$(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{r}) = r^2(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\hat{\mathbf{r}}) = \frac{r^2}{3}[\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N + S_{12}], \quad S_{12} = 3(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N. \tag{13}$$

矩阵元在耦合基底 $\left|\left((L\,s_\mu)J\,S_N\right)F m_F\right\rangle$中计算。投影到固定 J的投影算符满足

$$\mathbb{P}_J\,\mathbf{L}\,\mathbb{P}_J = \alpha_J\,\mathbf{J}, \qquad \mathbb{P}_J\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\,\mathbb{P}_J = 2(1-\alpha_J)\,\mathbf{J}, \qquad \alpha_J = \frac{J(J+1)+L(L+1)-s_\mu(s_\mu+1)}{2\,J(J+1)}. \tag{14}$$

利用 $\boldsymbol{\sigma}_N \equiv 2\mathbf{S}_N$ 以及

$$\Delta \equiv F(F+1) - J(J+1) - S_N(S_N+1), \qquad \mathbf{J}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N = \Delta, \tag{15}$$

F分辨的期望值取如下普适形式（在固定的 L， s_μ， J时）：

$$\langle\mathbf{L}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = \alpha_J\,\Delta, \qquad \langle\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = 2(1-\alpha_J)\;\Delta, \qquad \langle\mathbf{L}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_\mu\rangle = J(J{+}1) \;- L(L{+}1) - s_\mu(s_\mu{+}1)。 \tag{16}$$

对于 $1S_{1/2}$，有 $L=0$、 $J=\frac{1}{2}$，因此 $\alpha_{1/2}=0$ 以及

$$\langle\mathbf{L}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_\mu\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{L}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = 2\,\Delta.$$

对于 $2P_{1/2}(L=1,\, s_\mu=\frac{1}{2},\, J=\frac{1}{2})$，可得 $\alpha_{1/2}=4/3$，从而

$$\langle\mathbf{L}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = \tfrac{4}{3}\Delta, \qquad \langle\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle = -\tfrac{2}{3}\Delta.$$

将 S_{12} 视为二阶张量的标量耦合，对于 $2P_{1/2}$可得，

$$\left\langle(\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\hat{\mathbf{r}})\right\rangle = -\frac{14}{27}\,\Delta, \qquad \langle S_{12}\rangle = -\frac{8}{9}\,\Delta. \tag{17}$$

它们满足精确恒等式

$$\frac{1}{8}\,\langle S_{12}\rangle + \frac{1}{4}\,\langle\boldsymbol{\sigma}_N{\cdot}\mathbf{L}\rangle = -\frac{1}{3}\,\langle\boldsymbol{\sigma}_\mu{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_N\rangle, \tag{18}$$

表 III. $\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$，对应 $2P_{1/2}$（泡利归一化）。

S_N	$\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$		$\langle \boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$	
	$F=S_N-\frac12$	$F=S_N+\frac12$	$F=S_N-\frac12$	$F=S_N+\frac12$
$\frac12$	-2	$+\frac{2}{3}$	$+1$	$-\frac{1}{3}$
1	$-\frac{8}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\frac32$	$-\frac{10}{3}$	$+2$	$+\frac{5}{3}$	-1
$\frac52$	$-\frac{14}{3}$	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$

表 IV. $\big\langle(\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\mathbf{r})\big\rangle$，取 2 $P_{1/2}$（泡利归一化；角度–半径分离）．我们首先计算纯角向因子 $\mathbf{r}\langle(\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\hat{\mathbf{r}})\rangle = -\frac{14}{27}\,\Delta$ 其中 $F(F+1) - J(J+1) - S_N(S_N+1)$、$J=\frac12$，然后乘以 r^2。

S_N	$\big\langle(\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\mathbf{r})\big\rangle$	
	$F=S_N-\frac12$	$F=S_N+\frac12$
$\frac12$	$\frac{7}{9}\,r^2$	$-\frac{7}{27}\,r^2$
1	$\frac{28}{27}\,r^2$	$-\frac{14}{27}\,r^2$
$\frac32$	$\frac{35}{27}\,r^2$	$-\frac{7}{9}\,r^2$
$\frac52$	$\frac{49}{27}\,r^2$	$-\frac{35}{27}\,r^2$

这是对实现非常方便的诊断方法。对于 S 波，张量化简为 $(\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\mathbf{r}) \to \frac{r^2}{3}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_N$，而自旋-轨道项消失。

T表 I。 $\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu\rangle$ 对于 $1S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$。此处， $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ 是 μ子自旋算符（泡利约定）。

态	$\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu\rangle$
$1S_{1/2}$	0
$2P_{1/2}$	-2

表 II. $\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$ 对于 $1S_{1/2}$（泡利归一化）。

S_N	$\langle \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$	$\langle \boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\rangle$	
		$F=S_N-\frac12$	$F=S_N+\frac12$
$\frac12$	0	-3	$+1$
1	0	-4	$+2$
$\frac32$	0	-5	$+3$
$\frac52$	0	-7	$+5$

B. GEM 实现

我们从平方可积二体波函数的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的瑞利-里兹原理出发。定态在单位范数约束下使能量泛函最小化，

$$\mathcal{F}[\psi,\lambda] = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle - \lambda\big(\langle\psi|\psi\rangle - 1\big), \qquad \delta\mathcal{F}=0, \tag{19}$$

由此得到欧拉-拉格朗日条件 $(\hat{H}-\lambda)|\psi\rangle = 0$，其中 $\lambda = E$。

Fo对于中心场，自然的做法是分离角度，并对每个分波求解（L，m） ，

$$\Big[-\frac{\nabla^2}{2\,\mu} + V(r)\Big]\psi_{Lm}(\mathbf{r}) = E\,\psi_{Lm}(\mathbf{r}), \qquad \mu = \frac{m_\mu m_N}{m_\mu + m_N}. \tag{20}$$

为使受约束的极小化变得显式，将 $|\psi\rangle = \sum_j c_j\,|\phi_j\rangle$ 在一个任意（通常非正交）的集合 $\{|\phi_j\rangle\} \subset \mathcal{H}$中展开。在系数空间中，该泛函成为瑞利商

$$\mathcal{F}(\mathbf{c},\lambda) = \mathbf{c}^\dagger H\,\mathbf{c} - \lambda\big(\mathbf{c}^\dagger N\,\mathbf{c} - 1\big), \qquad H_{ij} = \langle\phi_i|\hat{H}|\phi_j\rangle,\; N_{ij} = \langle\phi_i|\phi_j\rangle, \tag{21}$$

并且对$\mathbf{c}^*$ 求驻值得到广义厄米特征值问题

$$H\,\mathbf{c} = E\,N\,\mathbf{c}. \tag{22}$$

由于 N在 $\{|\phi_j\rangle\}$张成的空间上是正定的，（22）可化为标准厄米问题$B^{-1}HB^{-\dagger}\mathbf{y} = E\,\mathbf{y}$，并具有变分上界性质；随着张成空间的扩大，该问题单调收敛。

在高斯展开法（GEM）中，[11, 19, 20], 我们选择一种径向基，在保留解析可积性的同时，对短距离和长距离进行密集采样：

$$\psi_{\ell m}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} c_{n\ell}\,\phi^G_{n\ell m}(\mathbf{r}), \tag{23}$$

$$\phi^G_{n\ell m}(\mathbf{r}) = \mathcal{N}_{n\ell}\; r^\ell e^{-\nu_n r^2}\,Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), \qquad \mathcal{N}_{n\ell} = \left[\frac{2^{\ell+2}\,(2\nu_n)^{\ell+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(2\ell+1)!!}\right]^{1/2}, \tag{24}$$

$$N_{n,n'} = \left\langle \phi^G_{n\ell m}\,\middle|\,\phi^G_{n'\ell m}\right\rangle = \left(\frac{2\sqrt{\nu_n\nu_{n'}}}{\nu_n+\nu_{n'}}\right)^{\ell+\frac{3}{2}}. \tag{25}$$

各个范围采用几何级数排布，以确保在 $\log r$ 中具有近似均匀的分辨率，

$$\nu_n = \frac{1}{r_n^2}, \qquad r_n = r_{\min}\,a^{\,n-1}, \qquad a = \left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{1/(n_{\max}-1)}, \quad n = 1,\ldots,n_{\max}. \tag{26}$$

将（23）代入（20），并利用（21），对于每个 L，我们得到

$$\sum_{n'=1}^{n_{\max}}\Big[T^{(L)}_{nn'} + V^{(L)}_{nn'} - E\,N^{(L)}_{nn'}\Big]\,c_{n'L} = 0. \tag{27}$$

C. 与X17的耦合

在强子侧，我们采用两个方便的基准。首先，对于 矢量粒子媒介子，我们写作

$$h'_p = \epsilon_p\,e, \qquad h'_n = \epsilon_n\,e, \tag{28}$$

其中核子电荷由夸克电荷构成，

$$\epsilon_p = 2\epsilon_u + \epsilon_d, \qquad \epsilon_n = \epsilon_u + 2\epsilon_d. \tag{29}$$

受对 ^{8}Be 异常的拟合结果启发，我们取以下工作值

$$\epsilon_p = 8\times10^{-4}, \qquad \epsilon_n = \frac{1}{100}, \tag{30}$$

这意味着

$$h'_p = \epsilon_p\,e \simeq 2.42\times10^{-4}, \tag{31}$$

$$h'_n = \epsilon_n\,e \simeq 3.03\times10^{-3}, \tag{32}$$

其中 ϵ_n 由 $\epsilon_{u\text{控制，}}\,_d$ 如上所述[3]。

其次，对于赝标量媒介子，我们取与费米子质量成正比的耦合 s,

$$h_p = \xi_p\,\frac{m_p}{v}, \qquad h_n = \xi_n\,\frac{m_n}{v}, \qquad v = 246\ \text{GeV}, \tag{33}$$

利用标准核子矩阵元（如 [8]中所示），可得

$$h_p \simeq \frac{m_p}{v}\left(-0.40\,\xi_u - 1.71\,\xi_d\right) \approx -2.4\times10^{-3}, \tag{34}$$

$$h_n \simeq \frac{m_n}{v}\left(-0.40\,\xi_u + 0.85\,\xi_d\right) \approx 5.1\times10^{-4}. \tag{35}$$

转向轻子方面，我们考虑与 μ子耦合的矢量粒子和赝标量 $X17$ 。对于矢量假说，我们写作

$$\mathcal{L}_{X,V} = -h'_\mu\,\bar{\mu}\gamma^\nu\mu\,X_\nu \tag{36}$$

而对于赝标量假说，

$$\mathcal{L}_{X,A} = -h_\mu\,\bar{\mu}\,i\gamma_5\mu\,A\,. \tag{37}$$

在单圈近似下，这些相互作用会使 μ子反常磁矩 $a_\mu = (g-2)_\mu/2$ 发生偏移。对于质量约为 $m_X \simeq 16.7$ MeV 的媒介子，标准的单圈表达式为 [21, 22]

$$\Delta a_\mu^{(V)} = \frac{(h'_\mu)^2}{8\pi^2}\frac{m_\mu^2}{m_X^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x^2(2-x)}{(1-x)\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_X^2}\right)+\frac{m_\mu^2}{m_X^2}x} \simeq 8.64\times10^{-3}\,(h'_\mu)^2, \tag{38}$$

$$\Delta a_\mu^{(A)} = -\frac{h_\mu^2}{4\pi^2}\frac{m_\mu^2}{m_X^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x^3}{(1-x)\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_X^2}\right)+\frac{m_\mu^2}{m_X^2}x} \simeq -1.19\times10^{-3}\,h_\mu^2. \tag{39}$$

因此，矢量粒子 $X17$ 会使其增大 a_μ （正号），而赝标量 会使其减小 （负号）。采用费米实验室 Muon $g-2$ 实验最新公布的实验全球平均值 [23], 我们取

$$a_\mu^{\mathrm{exp}} = 116\,592\,070.5(14.5)\times10^{-11}. \tag{40}$$

对于标准 ard-模型预测中，我们采用μ子 $g-2$ 理论倡议 [24]于2025年发布的更新结果 ，

$$a_\mu^{\mathrm{SM}} = 116\,592\,033(62)\times10^{-11}. \tag{41}$$

这些结果意味着

$$\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{\mathrm{exp}} - a_\mu^{\mathrm{SM}} = 3.8(6.3)\times10^{-10}. \tag{42}$$

需要特别指出的是，这一差异仅代表 0.6σ 偏差，这主要是因为2025年理论倡议采用了强子真空极化（HVP）贡献的格点量子色动力学结果。这与此前的情况相比是一次重大转变：2020年理论倡议白皮书主要依赖色散评估，并报告了早先的 $\sim 4\sigma$ 张力。尽管理论状况仍在积极研究之中——目前仍在努力调和格点方法与色散方法——但当前图景表明，μ子反常磁矩可容纳的新物理贡献空间已大幅缩小。

尽管如此，就本文而言，我们采用的基准耦合仍与测得差异周围的 $\pm6\sigma$包络 σ_a 保持一致。我们将 σ_a 对于 Δa_μ的一倍标准差宽度记为，

$$\sigma_a \equiv 6.3\times10^{-10}. \tag{43}$$

鉴于μ子 $g-2$ 理论倡议于2025年进行的更新采用了LO-HVP贡献的综合格点量子色动力学平均值，目前的差异仅对应于 $\sim 0.6\sigma$ 效应，因此在当前精度下与零在统计上相容。在这种情况下，我们的目标并非为μ子反常磁矩提供最佳拟合解释，而是定义具有代表性的高尺度基准耦合，用于评估$X17$诱导的原子能级位移及其系统不确定性的潜在大小。因此，我们允许 Δa_μ 在较宽的区间$\Delta a_\mu \pm 6\sigma_a$内变化，从而避免对尚未解决的HVP处理方式施加强先验，也避免采用会不加区分地压制信号的过于严格的基准耦合。由于本文考虑的所有由 $X17$诱导的能量位移均按 h_μ^2 （或 $(h'_\mu)^2$）进行标度，因此如有需要，我们的结果可以直接重新标度到任何更窄的置信区间。T

o define benchmark 目标 ，反映了当前的情况，即实验中心值高于标准模型预测 $+0.6\sigma$，我们可以 选择

$$\Delta a_\mu^{(V)} = +0.6\,\sigma_a = +3.78\times10^{-10}, \qquad \Delta a_\mu^{(A)} = -(6.0-0.6)\,\sigma_a = -5.4\,\sigma_a = -3.402\times10^{-9}. \tag{44}$$

将这些目标代入方程（38）–（39，基准缪子侧耦合为

$$h'_\mu = 2.09 \times 10^{-4}, \tag{45}$$

$$h_\mu = -1.69 \times 10^{-3}. \tag{46}$$

这些基准选取不应被解读为统计上优选的拟合结果。相反，它们代表了与单圈贡献的符号一致、且符合本工作所采用的扩展 $\pm 6\sigma$ 范围的较大尺度耦合。

D. $Z \leq 15$ 原子核的核结构与磁响应

对于轻核（$Z \leq 15$），独立粒子壳模型能够以定量上相当成功的方式，对基态自旋和磁矩作出零阶描述 [15, 16, 25, 26]。泡利阻塞使最低能级的单粒子轨道成对填充，且每对轨道互为时间反演态，因此其自旋贡献相互抵消，净磁响应和自旋相关响应主要由开壳层中未成对的价核子决定 [13, 27]。

我们用自旋分数$\Delta_{p,\ n}$来参数化媒介子与给定原子核之间的核子侧耦合，这些分数刻画了质子/中子对核自旋的份额:

$$\Delta_{p,n} \equiv \frac{\left\langle \sum_{i\in p,n} \mathbf{S}_i \right\rangle \cdot \hat{\mathbf{I}}}{\hbar\, I}, \qquad \left\langle \sum_{i\in p,n} \mathbf{S}_i \right\rangle = \alpha_{lj}^{(S)}\, \hbar\, \hat{\mathbf{I}}\,. \tag{47}$$

ˆ这里， I 和**角动量** 分别为核自旋的大小及其单位矢量。对于轨道角动量为 l 、总角动量为 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 的单个施密特核子，自旋投影系数为

$$\alpha_{lj}^{(S)} = \frac{j(j{+}1) + s(s{+}1) - l(l{+}1)}{2(j{+}1)}, \qquad s = \tfrac{1}{2}. \tag{48}$$

对于偶偶（I=0）原子核， $\Delta_p = \Delta_n = 0$ 根据定义。

当价质子和价中子都对基态自旋有贡献时（奇奇核），它们的角动量 j_p 与 j_n 在弱耦合极限下耦合为总 I 。投影系数为

$$C_p = \frac{I(I{+}1) + j_p(j_p{+}1) - j_n(j_n{+}1)}{2\,I(I{+}1)}, \qquad C_n = \frac{I(I{+}1) + j_n(j_n{+}1) - j_p(j_p{+}1)}{2\,I(I{+}1)}, \tag{49}$$

$$\Delta_p = \frac{C_p\, \alpha_{l_p j_p}^{(S)}}{I}, \qquad \Delta_n = \frac{C_n\, \alpha_{l_n j_n}^{(S)}}{I}. \tag{50}$$

这些结果再现了核磁矩系统学中所用的标准可加性公式 [13, 15, 27]; 对于奇A原子核，这些表达式约化为单一施密特形式。

给定$\Delta_{p,\ n}$ ，进入 $X17$诱导超精细算符的有效核子侧耦合为

$$h_N'^{(\mathrm{eff})} = h'_p\, \Delta_p + h'_n\, \Delta_n \quad \text{(vector HFS)}, \qquad h_N^{(\mathrm{eff})} = h_p\, \Delta_p + h_n\, \Delta_n \quad \text{(pseudoscalar HFS)}. \tag{51}$$

这些有效耦合仅进入 $X17$诱导的超精细算符，即方程（7）–（8）。对于矢量粒子诱导的$2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移，相关的μ子–原子核耦合则是相干和 $Zh'_p + Nh'_n$ ，出现在方程（6）中，它所探测的是原子核的总自旋无关矢量荷，而非其自旋含量。每个核素的 $h_N'^{(\mathrm{eff})}$ 与 $Zh'_p + Nh'_n$ 的数值均列于附录A 2。

我们以三个具有代表性的 p壳原子核为例说明该步骤，其单粒子占据数如图 2 所示。对于 ^{13}C（Z=6、 N=7、 $I^\pi = \frac{1}{2}^-$），价中子占据 $1p_{1/2}$; 式(48)给出 $\alpha_{p_{1/2}}^{(S)} = -\frac{1}{6}$，因此$\Delta_n = -\frac{1}{3}$和 $\Delta_p = 0$。对于 ^{14}N（Z=7、 N=7、 $I^\pi = 1^+$），两个具有 $j_p = j_n = \frac{1}{2}$的价核子占据 $1p_{1/2}$; 式(49)给出 $C_p = C_n = \frac{1}{2}$，并结合 $I = 1$可得 $\Delta_p = \Delta_n^- = -\frac{1}{12}$。对于 ^{15}N（$Z$=7、 N=8、 $I^\pi = \frac{1}{2}^-$），中子 p壳层闭合，价质子占据 $1p_{1/2}$,从而得到 $\Delta_p = -\frac{1}{3}$ 和 $\Delta_n = 0$。

组态混合和芯极化会修正这些施密特模型值，其修正幅度敏感地依赖于每种同位素的核结构，且并非一律受到良好约束 [13, 16, 27]。本工作通篇采用的轨道指派和自旋投影系数仅用于为本次普查定义一致的施密特模型基线，不应被解释为对完整壳模型描述的主张。该基线

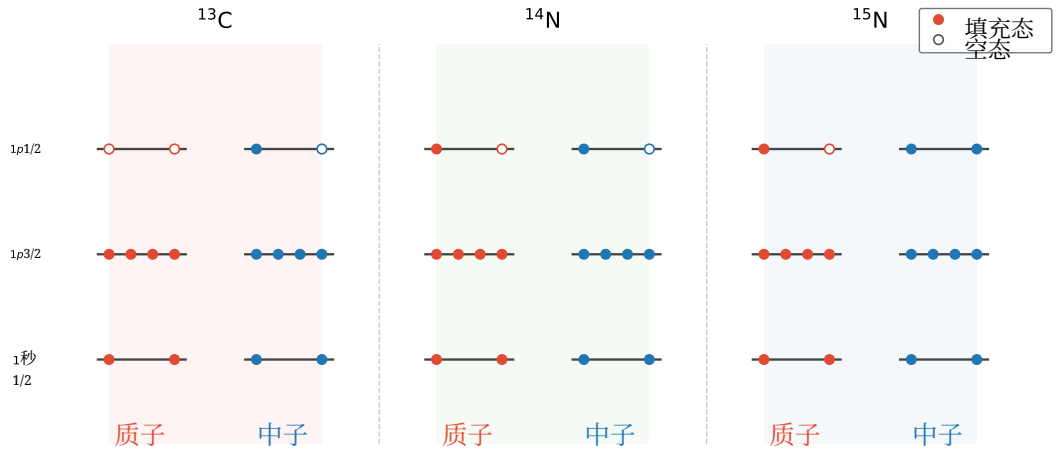


图 2. p 壳层中 ^{13}C、 ^{14}N 和 ^{15}N 的单粒子占据数。图中展示了 $1s_{1/2}$、 $1p_{3/2}$ 和 $1p_{1/2}$ 轨道；左侧（右侧）列对应质子（中子）态。实心圆表示占据态。

足以用于识别核素图上的相对 $X17$灵敏度趋势；对最高优先级目标实现定量精度，则需要超出施密特模型的计算。

除非另有说明，基态 J^π 指派和低能级能量取自评估数据库 TUNL [28] 和 ENSDF（通过 NNDC NuDat3 访问）[29]；同中子异位素链交叉核对时，我们参考 KAERI 核素图[30]。用于支持尼尔森指派的形状信息依据评估电四极矩 [31] 和玻尔–莫特尔森转动耦合形式体系 [16]。对于 N=11 同中子异位素，我们采用 ^{21}氖为长球形，且 $I^\pi = \frac{3}{2}^+$ 第一个 $5/2^+$ 能级位于 $E \simeq 351$ 千电子伏特 [29–31]。

实验核 g 因子根据评估磁矩和自旋计算，公式如下：

$$g_N^{(\mathrm{exp})} = \frac{m_{\mathrm{nuc}}}{m_p}\,\frac{\mu_{\mathrm{exp}}}{\mu_N\, I}, \tag{52}$$

其中 μ_{exp} 以核磁子表示 $\mu_N = e\hbar/(2m_pc)$，因子 m_{nuc}/m_p 用于确保符合方程（5）的约定。核质量取自 AME2020 [12]；轻核 ^{1}H、 ^{2}H、 ^{3}H、 ^{3}He 的磁矩取自粒子数据组 [32],，而质量数为 $Z \le 15$ 的稳定核素的磁矩取自 Stone 评估表 [13, 31]。

E. 验证与系统不确定性

在给出由 $X17$ 引起的位移预测之前，我们针对两个系统误差来源评估理论框架的稳健性：波函数的高阶量子电动力学修正，以及乌林势的点核近似。

a. 有限尺寸 *Uehling* 修正。 式（4）中的乌林势是针对点核推导的。对于具有有限电荷半径 R_{ch}的原子核，适当的处理方法是将点核势与核电荷分布进行卷积[33, 34]:

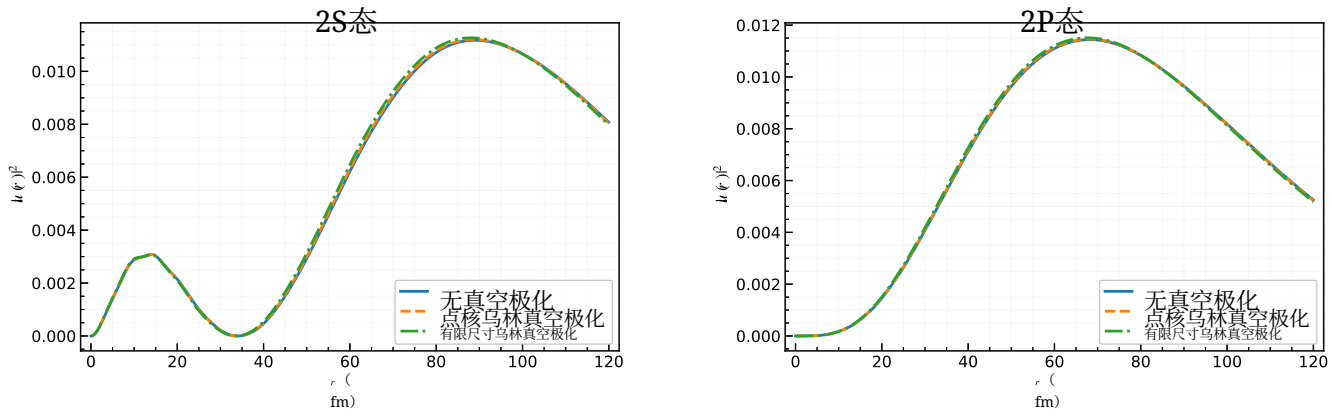
$$V_{\mathrm{Ueh}}^{(\mathrm{fs})}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_{\mathrm{ch}}(\mathbf{r}')}{Z}\, V_{\mathrm{Ueh}}^{(\mathrm{pt})}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}', \tag{53}$$

其中， V（点核）Ueh （r）由式（4）给出，并且 ρ_{ch} 满足 $\int \rho_{\mathrm{ch}} \mathrm{d}^3r' = Z$。采用半径为$R_{\mathrm{ch}}$的均匀带电球，

$$\rho_{\mathrm{ch}}(r') = \begin{cases} \dfrac{3Z}{4\pi R_{\mathrm{ch}}^3}, & r' \le R_{\mathrm{ch}}, \\ 0, & r' > R_{\mathrm{ch}}, \end{cases} \tag{54}$$

角向积分简化为 [34]

$$V_{\mathrm{Ueh}}^{(\mathrm{fs})}(r) = \frac{2\pi}{r}\int_0^\infty \frac{\rho_{\mathrm{ch}}(r')}{Z}\, r'^2\,\mathrm{d}r' \int_{|r-r'|}^{r+r'} V_{\mathrm{Ueh}}^{(\mathrm{pt})}(s)\, s\,\mathrm{d}s, \tag{55}$$



(a) $2S_{1/2}$ 态　　(b) $2P_{1/2}$ 态

图3. μ子 ^{31}P的 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 态在三种量子电动力学处理下的径向概率密度：无真空极化、点核乌林势和有限尺寸乌林势。即便对于本次验证测试中所考虑的最重系统 ^{31}P，三条曲线也几乎无法区分，表明有限尺寸 Uehling 修正并不影响本次调研的定性结论。

其在 GEM 径向网格上进行数值计算。

为量化该修正的影响，我们比较了 μ^{31}P（$Z = 15$，$R_{\rm ch} = 3.19$ fm [14]）的$2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 态的径向概率密度 $|u(r)|^2 = r^2|\psi(r)|^2$，采用三个近似层级：(i) 无真空极化；(ii) 点核 Uehling 修正；(iii) 由式(55)给出的有限尺寸 Uehling 修正。如图3所示，三条曲线在整个径向范围内数值上无法区分，包括 $X17$ 尤卡瓦势最为集中的 $r \lesssim m_X^{-1} \approx 12$ fm区域。已知有限尺寸 Uehling 修正对轻核可忽略不计，仅对 $Z \gtrsim 20$ [35]才会增大；因此处于 $Z = 15$ 的 ^{31}P代表了本次调研中要求最高的情形。我们的结论是，点核近似不太可能改变最优靶的排序，也不会改变调研范围内任一原子核的定性结论。类似地，将短程 $X17$ 尤卡瓦势与核密度分布 $\rho_{\rm ch}$ 折叠，会给最重的原子核（$Z \sim 15$）引入修正；我们将这一折叠尤卡瓦势的评估留待未来的精密研究，因为它落在当前核结构不确定性的裕度之内。

b. 高阶 *QED* 效应。除主导 Uehling 项外，μ子原子中的兰姆位移还受到 Källén–Sabry 双圈真空极化、Wichmann–Kroll 自能修正以及强子真空极化的贡献。这些效应对轻 μ子原子总兰姆位移的贡献已知约为 ∼0.01–0.1% [35, 36]。由于这些修正源于光子传播子上的圈插入，它们会改变整体能量尺度，但不会引入与 $m_X^{-1} \approx 12$ fm 相当的长度尺度。因此，就目标识别而言，它们对短程波函数振幅（该振幅决定由 $X17$ 引起的超精细位移）的影响预计仍处于次要地位，也不太可能改变最优候选对象的排序（与下文讨论的核自旋不确定性相比）。

c. 核结构不确定性。 $X17$ 引起的超精细位移，其主要理论不确定性源于采用施密特模型处理核自旋含量，而非波函数的 QED 修正。组态混合和芯极化可能使有效自旋份额 $\Delta_{p,\ n}$ 发生变化，变化幅度因原子核而异，且未能得到一致的约束 [13, 16, 27]。由于我们的首要目标是识别最敏感的实验目标，而非给出确定的定量预测，这一局限不会影响本次调查的主要结论。

III. 结果与实验展望

A. GEM 框架的基准验证

在介绍 $X17$诱导信号之前，我们通过两种互补方式对 GEM 框架进行基准检验。首先，将电磁基准能量与已发表的高精度量子电动力学结果进行比较。其次，将无量纲的 $X17$诱导超精细比值 E_X/E_F 与 Jentschura [8] 针对 μp 和 μd 给出的解析估算进行比较。结果汇总于表V。

表 V. GEM 结果与已发表的计算结果进行基准比较。上半部分：电磁能级与高精度量子电动力学结果的比较；参考值来自 Faustov & Martynenko [37]（μp 中的 $1S$ 超精细结构）、Faustov、Martynenko 等 [38]（μd 中的 $1S$ 超精细结构）、Martynenko [39]（μ^3He$^+$ 中的 $1S$ 超精细结构）、Borie [35]（μp 中的兰姆位移，总值采用 $R_p = 0.875$ fm）以及 Krutov & Martynenko [40]（μd 中的兰姆位移）。下半部分：无量纲的 $X17$-费米比值 E_X/E_F，用于比较 $1S_{1/2}$ 超精细结构与 Jentschura [8] [56]，$\delta = |E_{\rm GEM} - E_{\rm ref}|/|E_{\rm ref}| \times 100$ 式 ( ) 的解析估算，后者采用本文所选的耦合参数计算。电磁偏差：%。

可观测量	系统	$E_{\rm GEM}$	$E_{\rm ref}$	δ [%]	参考值
电磁基线（能量单位：毫电子伏）					
$1S_{1/2}$ 超精细结构	μp	183.235	182.638	0.33	[37]
	μd	49.644	48.584	2.18	[38]
	μ^3He$^+$	1377.59	1334.56	3.22	[39]
兰姆位移 $\lvert E(2S_{1/2}) - E(2P_{1/2})\rvert$	μp	198.677	202.05*	1.67	[35]
	μd	198.837	202.414	1.77	[40]
$X17$与费米比值 E_X/E_F					
矢量粒子 $X17$, $1S_{1/2}$	μp	5.6×10^{-7}	3.3×10^{-8}	‡	方程（56）a
	μd	3.8×10^{-6}	1.4×10^{-6}	‡	方程（56）a
赝标量 $X17$, $1S_{1/2}$	μp	4.7×10^{-6}	1.3×10^{-6}	‡	式（56）b
	μd	3.6×10^{-6}	4.5×10^{-6}	‡	式（56）b

* 根据Borie的参数化计算得到 $\Delta E_{LS} = 206.060 - 5.2794\langle r^2\rangle + 0.0546\langle r^2\rangle^{3/2}$ 毫电子伏，其中 $R_p = 0.875\,\text{fm}$（$\langle r^2\rangle = 0.7656\,\text{fm}^2$）。‡ GEM数值比值与参考值均采用本文所用的耦合参数进行计算。剩余的2–10倍差异源于解析公式中的近似（文献[8]的式(30)），该公式仅保留领头接触项极限 $\sim \delta^{(3)}(\mathbf{r})$，而GEM对完整的汤川径向分布进行积分 $e^{-m_X r}/r$。这一数量级上的一致性验证了 $X17$–核子相互作用在GEM哈密顿量中的正确实现。$E_F = E_{\rm HFS}^{\rm GEM}/4$（自旋-$\frac{1}{2}$）或 $E_{\rm HFS}^{\rm GEM}/6$（自旋-1 氘核）。

对于电磁基线，随着核复杂度增加，吻合程度逐渐降低：$1S_{1/2}$ 超精细分裂的偏差从 μp 中的 0.33% 增至 μd 中的 2.18%，以及 μ^3He$^+$ 中的 3.22%。这一趋势与高阶核结构效应日益重要的情况相符，例如 Zemach 效应、极化率和相对论反冲修正；这些效应包含在参考计算中 [37–39]，但未纳入当前哈密顿量。对于兰姆位移，μp 和 μd 均呈现约 3.4 毫电子伏的系统性偏低（$\sim 1.7\%$），这主要可归因于缺失的高阶真空极化和反冲贡献。

表V 通过将数值比值 $E_X/E_F \equiv \Delta E^{X17}/E_{\rm Fermi}$与 Jentschura 的领先阶解析估算进行比较，检验新物理扇区 [8]，

$$\frac{E_{X,V}(nS_{1/2})}{E_F(nS_{1/2})} \approx -\frac{2h'_\mu h'_N}{g_N \pi}\,\frac{Z m_r}{m_X}\,, \tag{56a}$$

$$\frac{E_{X,A}(nS_{1/2})}{E_F(nS_{1/2})} \approx \frac{h_\mu h_N}{g_N \pi}\,\frac{Z m_r}{m_X}\,. \tag{56b}$$

两者在数量级上吻合，这符合预期，因为解析表达式仅保留了领先阶接触项极限，而 GEM 计算则纳入了完整的汤川径向分布。这一比较证实，$X17$ 相互作用已在数值框架中正确实现。

总体而言，对于基准系统 μp、μd和 μ^3He$^+$，GEM在0.3–3%的水平上再现了电磁可观测量，这对于目标识别而言已经足够。对于调查中较重的系统，尚无类似的高精度基准，但预计被省略的高阶量子电动力学贡献仍然过小，不足以改变最优候选对象的排序。因此，主要的理论不确定性来自对核自旋含量的施密特模型处理，而非GEM基线本身。

B. 矢量粒子诱导的 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移

一个矢量粒子 $X17$ 媒介子通过相干核耦合诱导自旋无关的汤川势

$$V_X(r) = \frac{h'_\mu}{4\pi}\left(Zh'_p + Nh'_n\right)\frac{e^{-m_X r}}{r}. \tag{57}$$

这种相互作用会使能级质心发生位移，其中对 S 态的影响最大，因为这些态的波函数对核区的探测最为显著。与超精细区不同，后者的相关耦合由携带自旋的价核子加权，而兰姆位移取决于完全相干的组合$Zh'_p + Nh'_n$。由于厌质子基准意味着$h'_n \gg h'_p$，矢量粒子诱导的兰姆移位信号会随着中子丰度增加以及原子核变重而显著增强。

我们定义

$$\Delta E^{(V)}_{X17} \equiv E^{(V)}_{X17}(2S_{1/2}) - E^{(V)}_{X17}(2P_{1/2}) \tag{58}$$

，并将其绝对值作为实验上相关的量。所有满足 $Z \le 15$ 的稳定原子核的完整结果列于附录 B ，并显示于图 4中。

核素图中呈现出清晰的系统性规律。在最轻的体系中，信号从类氢体系到氦体系迅速增加：$|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 2.05 \times 10^{-3}$ 毫电子伏，适用于 μp； 3.20×10^{-2} 毫电子伏，适用于 μd；μ^3He 的 0.245 毫电子伏；以及 μ^4He 的 0.468 毫电子伏。这种增长既反映了不断增大的短程波函数振幅，也反映了核耦合带来的相干增强。

与超精细可观测量不同，矢量兰姆位移不受限于具有非零自旋的原子核。因此，偶偶核完全具备竞争力，且往往占据主导地位，不过在本次调查中，最强的情形是一个奇-Z 系统。在 μ^{12}C（21.2 毫电子伏）、 μ^{13}C（24.5 毫电子伏）、 μ^{16}O（50.4 毫电子伏）、 μ^{18}O（62.1 毫电子伏）、 μ^{20}Ne（94.2 毫电子伏）、 μ^{24}Mg（150 毫电子伏）、 μ^{26}Mg（174 毫电子伏）、 μ^{28}Si（174 毫电子伏）和 μ^{30}Si（197 毫电子伏）中，已可观察到较大的位移。因此，靶核优先级主要由相干电荷增强和径向重叠决定，而非核自旋结构。

p壳层原子核构成了一个中间区域，介于微弱的类氢信号与大得多的 sd 壳层位移之间。具体而言， μ^9Be、 μ^{10}B、 μ^{11}B 和 μ^{13}C 分别产生 6.92、11.84、14.06 和 24.5 毫电子伏，而 μ^6Li 和μ^7Li 则分别产生 2.06 和 2.71 毫电子伏。

在本次调查中，矢量粒子引起的兰姆位移信号最强的是 μ^{31}P，达到 $|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 264$ 毫电子伏。其次是 μ^{29}Si（237 毫电子伏），接着是 μ^{30}Si（197 毫电子伏）、 μ^{27}Al（195.5 毫电子伏）、 μ^{28}Si（174 毫电子伏）、 μ^{26}Mg（174 毫电子伏）、 μ^{25}Mg（161.7 毫电子伏）和 μ^{24}Mg（150 毫电子伏）； μ^{21}Ne 也达到 102.9 毫电子伏。尽管比值$\Delta E^{(V)}_{X17}|/|\Delta E^{(\mathrm{EM})}_L|$ 随 Z增加而降低，但由于普通兰姆位移增长得更快，在本次调查范围的大部分区间内，绝对 $X17$信号仍持续增强。

相比之下，赝标量 $X17$ 在领先阶不会使自旋平均能级质心发生位移，因为其相互作用完全是自旋相关的，因此在未极化的 $2S$ 和 $2P$ 质心中平均后为零。因此，兰姆位移是检验矢量假说的一个特别清晰的探针。

C. $1S_{1/2}$ 超精细特征

$1S_{1/2}$ 超精细分裂探测 μ子和原子核的自旋结构，因此能够检验与自旋无关兰姆位移所涉及的耦合组合不同的耦合组合。完整的数值结果列于附录C 和D中，主要趋势总结于图5。

对于 $1S$ 态，主要的 $X17$ 贡献来自短程接触项，因此随原点处的波函数密度缩放，

$$|\psi_{1S}(0)|^2 \propto Z^3 m_r^3 \tag{59}$$

信号的整体大小由有效核子侧耦合控制，而这些耦合取决于核自旋分数 Δ_p 和 Δ_n。与矢量兰姆位移不同，超精细区本质上对核自旋结构敏感，且仅适用于非偶偶核。

对于矢量媒介子，相关的有效耦合为

$$h'^{(\mathrm{eff})}_N = h'_p\Delta_p + h'_n\Delta_n.$$

由于在此采用的厌质子基准中，层级主要由中子自旋含量决定，因此奇数核受到强烈青睐。调查中最大的超精细结构信号出现在 μ^{29}Si，

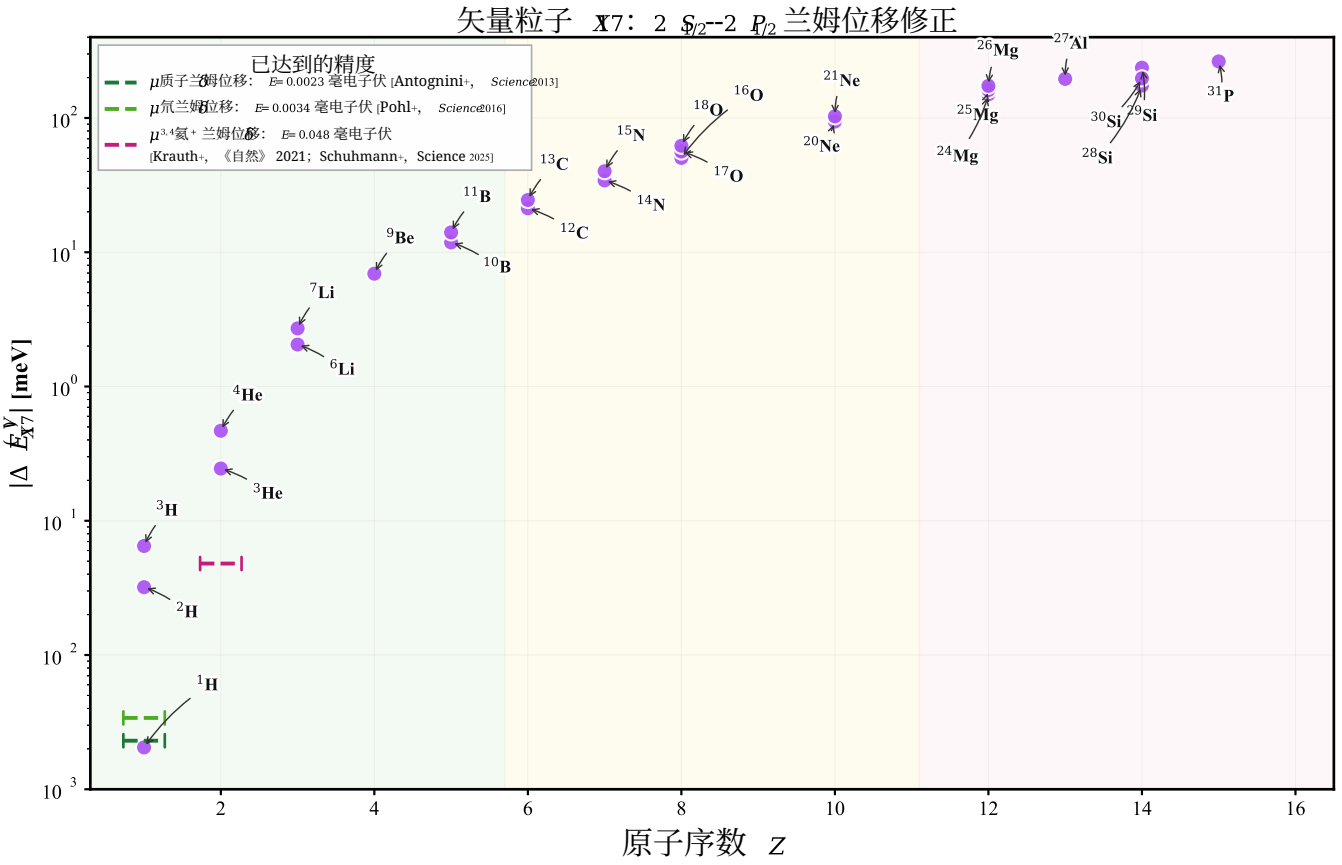


图 4. 对于具有 $Z \leq 15$ 的稳定μ子原子，矢量粒子-$X17$ 对 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移的贡献。信号随原子核质量增大而系统性增强，并在 μ^{31}P 中达到最大值（264 毫电子伏）。

其中 $|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 0.643$ 毫电子伏。该情形兼具较大的短程波函数振幅和最大的中子自旋灵敏度（$\Delta_n = 1$, $\Delta_p = 0$）。其他值得关注的矢量粒子情形包括 μ^{31}P、 μ^{27}Al、 μ^{25}镁和 μ^{17}O，不过它们的信号都远低于领先的 μ^{29}Si 信号。

对于赝标量媒介子，有效耦合变为

$$h_N^{(\mathrm{eff})} = h_p \Delta_p + h_n \Delta_n,$$

由于质子侧耦合占主导，层级关系反转， $|h_p| \gg |h_n|$。因此，赝标量超精细通道会选择奇数-Z 原子核。最强信号出现在 μ^{31}P 中，为 $|\Delta E^{(A)}_{X17}| = 0.710$ 毫电子伏；其次是信号低得多的 μ^{27}Al，为 0.053 毫电子伏。在 μ^{31}P 中，价质子占据 $2s_{1/2}$ 轨道，给出$\Delta_p = 1$ 和 $\Delta_n = 0$，从而使赝标量响应最大化。

因此，这两种假设的互补性在 $1S_{1/2}$ 超精细区尤为明显：在矢量粒子情形下，奇数-N原子核占主导；而在赝标量情形下，奇数-Z 原子核占主导。这为区分不同的媒介子情景提供了自然的判据。

D. $2P_{1/2}$ 超精细特征

$2P_{1/2}$超精细修正，如图 6所示，并列于附录 C 2和 D2，其定性选择性与对应的 $1S_{1/2}$ 相同，但在整个考察范围内都小得多。

这种抑制主要源于两个方面。首先， P态波函数在原点处为零，因此主导 $1S_{1/2}$ 超精细分裂的短程接触贡献大幅减弱。由于汤川相互作用主要探测$r \lesssim m_X^{-1} \approx 12$ fm区域，产生的 $2P_{1/2}$ 位移相比相应的 $1S_{1/2}$ 值要小好几个数量级。对于最轻的系统，矢量粒子引起的 $2P_{1/2}$ 修正已达 10^{-9} 毫电子伏量级。

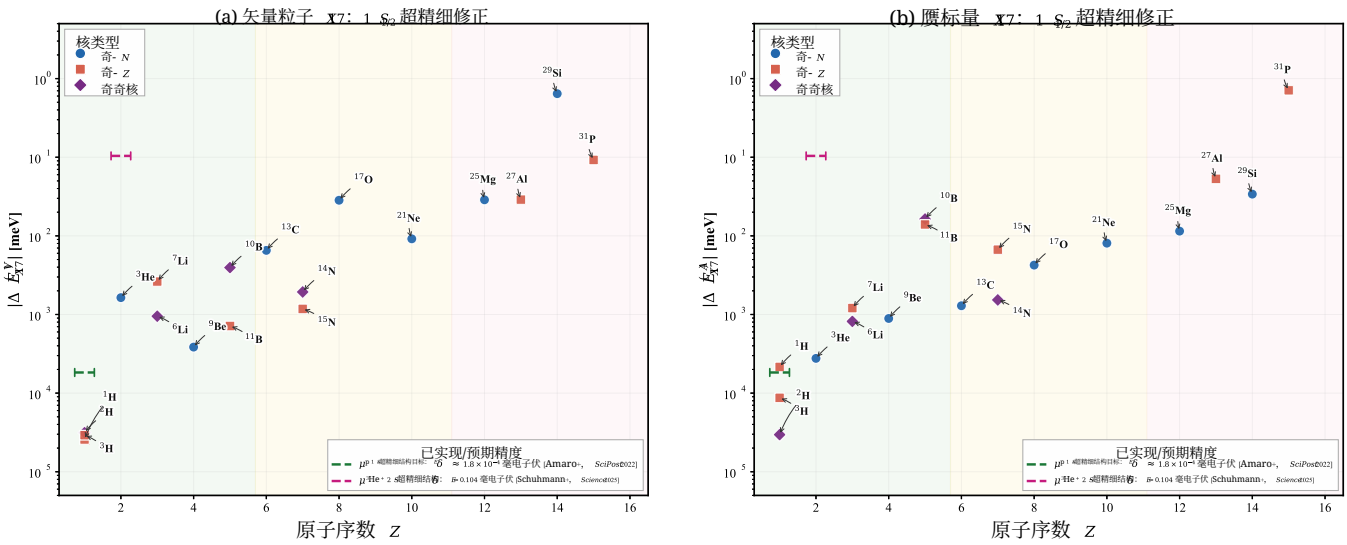


图5. $X17$引起的稳定μ子原子 $Z \leq 15$超精细修正：(a) 矢量媒介子和 (b) 赝标量媒介子。矢量情形优先增强奇数-N 原子核，而赝标量情形则更有利于奇数-Z 原子核。最大信号分别出现在 μ^{29}Si（0.643 毫电子伏）和 μ^{31}P（0.710 毫电子伏）中。

其次， $2P_{1/2}$ 超精细算符除了减弱的接触贡献外，还包含张量项和自旋-轨道项，而这些项在许多原子核中会部分抵消。一个尤为显著的例子是 ^{15}N，由于相关子能级贡献几乎完全抵消，矢量粒子引起的修正仅为 $|\Delta E^{(V)}_{X17}(2P_{1/2})| \simeq 5.9 \times 10^{-10}$ 毫电子伏。

尽管受到强烈抑制，整体层级关系仍与 $1S_{1/2}$ 超精细区一致。在矢量情形中，奇数-N 原子核仍占主导，其中 μ^{29}Si产生最大的 $2P_{1/2}$ 信号，为 $|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 8.70 \times 10^{-4}$ 毫电子伏。在赝标量情形中，奇数-Z原子核仍更受青睐，其中 μ^{31}P达到 $|\Delta E^{(A)}_{X17}| = 5.39 \times 10^{-4}$ 毫电子伏。在 $1S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 通道中均保持相同的核选择性，为耦合模式提供了内部一致性检验。

不过，从绝对量级来看，所有 $2P_{1/2}$ 超精细位移都远小于 $1S_{1/2}$ 信号。因此，我们纳入这些位移主要是为了内容完整，并供未来进行理论交叉检验；它们对于实验靶标选择的意义有限。

E. 最优实验靶标的确定

表 VI 汇总了本文讨论的三种具有实验意义的观测量–假设组合中最相关的候选系统：矢量$X17$ 兰姆位移、矢量 $X17$ $1S_{1/2}$ 超精细分裂，以及赝标量$X17$ $1S_{1/2}$ 超精细分裂。对于每个通道，我们列出了按信号大小排序的主要理论候选对象，以及已有精密基准的轻系统。未纳入 $2P_{1/2}$ 超精细通道，因为其预测信号远低于当前或可预见的实验灵敏度。

在已实现精密光谱学的系统中，矢量粒子诱导兰姆位移最有希望的近期探针是 μd, $\mu^3\mathrm{He}^+$ 和 $\mu^4\mathrm{He}^+$。它们的预测信号分别达到 $|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 3.20 \times 10^{-2}$ 毫电子伏、0.245 毫电子伏和 0.468 毫电子伏；相对于现有或已实现的精度尺度，分别为 $\mathcal{R} \simeq 9.4$、5.1 和 9.8。因此，这些系统为矢量兰姆位移通道提供了最直接的近期实验探测途径。

除轻核基准系统外，最大的绝对矢量兰姆位移信号出现在本次调查范围的高端。最强的情况是 μ^{31}P，信号为 $|\Delta E^{(V)}_{X17}| = 264$ 毫电子伏，其次是 μ^{29}Si、 μ^{30}Si、 μ^{27}Al、 μ^{28}Si、μ^{26}镁和 μ^{25}镁。尽管这些原子核目前还没有毫电子伏级光谱学基准，但其预测信号很强，因此自然成为未来专门计划的目标。介于轻核基准系统与这些最大信号之间的是一组中间对象——尤其是 μ^9Be、 μ^{10}B、 μ^{11}B 和 μ^{13}C——它们可作为未来实验发展的有益垫脚石。

对于超精细可观测量，长期以来的主要目标仍是矢量情景下的 μ^{29}Si 和赝标量情景下的 μ^{31}P。相应的 $1S_{1/2}$ 信号分别为 0.643 毫电子伏和 0.710 毫电子伏，是本次调查中发现的

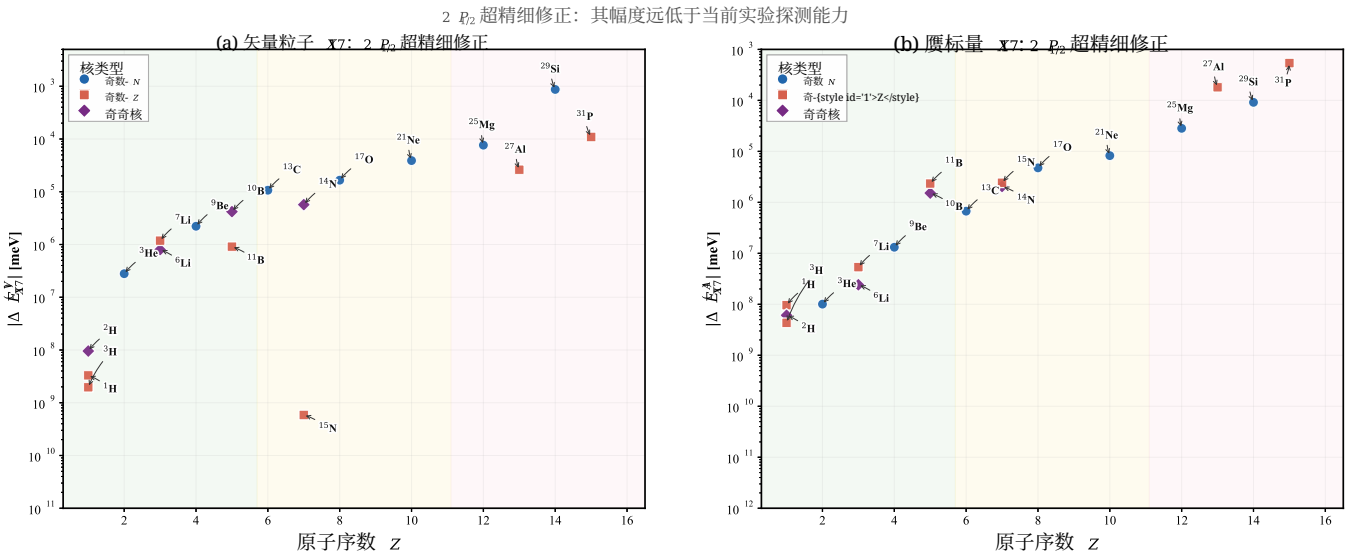


图 6. $X17$诱导的稳定μ原子 $Z \leq 15$的 $2P_{1/2}$ 超精细修正：(a) 矢量媒介子；(b) 赝标量媒介子。与相应的 $1S_{1/2}$ 通道相比，这些修正受到强烈抑制。矢量情形下，最大的信号出现在 μ^{29}Si中；赝标量情形下，最大的信号出现在 μ^{31}P中。

最大的超精细效应。更普遍地说，目标模式具有很强的互补性：矢量情景下，奇数-N原子核更受青睐；而赝标量情景下，奇数-Z原子核占主导。

μ子氢仍是重要的基准体系。在矢量兰姆位移通道中， μp中的预测信号为$|\Delta E_{X17}^{(V)}| = 2.05 \times 10^{-3}$ 毫电子伏，略低于CREMA已达到的精度，对应于 $\mathcal{R} = 0.89$。相比之下，在赝标量 $1S_{1/2}$ 超精细通道中， μp 信号达到 $|\Delta E_{X17}^{(A)}| = 2.15 \times 10^{-4}$ 毫电子伏，在正在进行的PSI和RAL项目目标精度下可实现$\mathcal{R} \simeq 1.2$ 。因此，这些轻体系仍是解读较重候选体系的重要基准。

综合来看，本次调查揭示了清晰的实验优先级。对于矢量兰姆位移通道， μd 和氦离子提供了最直接的研究机会，因为预测信号已超过已实现的精密基准。对于未来的专门计划，最大的绝对增益来自本文考察的最重体系，尤其是 μ^{31}P以及硅、铝和镁同位素。在超精细区，互补的 μ^{29}Si（矢量）和 μ^{31}P（赝标量）组合最为突出，是探测可能存在的 $X17$ 媒介子的自旋宇称结构最具信息量的组合。

表 VI. μ子原子灵敏度调查中具有代表性的实验目标和验证基准。 $X17$ 对于每种可观测量–假设组合，系统按预测信号大小从高到低排列。信号与精度之比 $\mathcal{R} \equiv |\Delta E_{X17}|/\delta E$ 表明，在本研究采用的基准耦合下，是否能够进行决定性检验。 $2P_{1/2}$ 由于超精细结构通道的预测信号远低于当前或可预见的实验灵敏度，因此未将其纳入（见第 IIID节）。

可观测量	核素 $\lvert\Delta E_{X17}\rvert$ [毫电子伏]	δE [毫电子伏]	$\mathcal{R}$	实验背景
矢量粒子 $X17$: $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移				
	μ^{31}P	264	—	—	下一代，拟议的
	μ^{29}硅	237	—	—	下一代，拟议的
	μ^{30}硅	197	—	—	下一代，拟议的
	μ^{27}铝	196	—	—	下一代，拟议的
	μ^{28}硅	174	—	—	下一代，拟议的
	μ^{26}镁	174	—	—	下一代，拟议的
	μ^{4}氦$^{+}$	0.468	0.048	9.75	[41]
	μ^{3}氦$^{+}$	0.245	0.048	5.10	[7]
	μd	3.20×10^{-2}	3.4×10^{-3}	9.42	[42]
	μp	2.05×10^{-3}	2.3×10^{-3}	0.89	[6]
矢量粒子 $X17$: $1S_{1/2}$ 超精细分裂				
	μ^{29}硅	0.643	—	—	下一代脉冲缪子 [43]
	μ^{31}P	0.092	—	—	下一代脉冲缪子 [43]
	μ^{27}铝	0.029	—	—	μ子X射线光谱学
	μ^{25}镁	0.029	—	—	μ子X射线光谱学
	μ^{17}O	0.028	—	—	μ子X射线光谱学
	μ^{3}氦$^{+}$	1.64×10^{-3}	0.104	0.016	[7]
	μp	2.57×10^{-5}	1.8×10^{-4}	0.14	[43]
赝标量 $X17$: $1S_{1/2}$ 超精细分裂				
	μ^{31}P	0.710	—	—	下一代脉冲缪子 [43]
	μ^{27}Al	0.053	—	—	μ子X射线光谱学
	μ^{10}B	0.016	—	—	拟议的，PSI
	μ^{11}B	0.014	—	—	拟议的，PSI
	μ^{15}N	0.007	—	—	μ子X射线光谱学
	μ^{3}他$^{+}$	2.77×10^{-4}	0.104	0.003	[7]
	μp	2.15×10^{-4}	1.8×10^{-4}	1.2	[43]

IV. 结论

我们建立了一个系统的μ子原子光谱学框架，用于探测短程兆电子伏特尺度的相互作用，并以此对含有 $Z \leq 15$ 的稳定体系进行了逐核调查。核心概念进展在于，在同一原子框架内，分别依据不同且符合物理实际的原子核基础处理自旋无关兰姆位移和自旋相关超精细分裂：矢量诱导的兰姆位移由相干μ子-原子核耦合 $Zh'_p + Nh'_n$支配，而超精细区则按同位素逐一建立，并采用自旋分数加权有效耦合。这种依赖可观测量的构建方式，能够以受控的方式揭示矢量和赝标量媒介子的不同原子核系统学，从而使比较μ子光谱学从一系列彼此孤立的案例研究，转变为新物理搜寻中切实可行的目标选择策略。

本研究的第二个重要特点是，基准缪子侧耦合是依照最新的μ子 $g-2$ 图景选取的。我们并未采用由2025年前图景所驱动的基准尺度，而是采用参照费米实验室最终测量结果以及2025年理论

倡议更新所定义的基准耦合；对此，实验–理论差异已大幅减小。因此，所得基准不应被视为对持续反常的优选拟合，而应被视为保守且具有唯象动机的参考尺度，用以评估精密μ子光谱学的发现潜力。

在这一框架下，可以得出若干稳健结论。在自旋无关道中，矢量粒子诱导的$2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 兰姆位移信号表现出显著的相干增强，并且随着原子核质量增加而迅速增强。在已有精密基准的系统中， μd氦$^{+}$和 μ^{4}氦$^{+}$ 已脱颖而出，成为最有希望的近期探针，其信号–精度比分别为 $\mathcal{R} \simeq 9.4$、5.1和9.8。对于未来的专门计划，预测最大的绝对兰姆位移信号将出现在 μ^{31}磷中，其次是磷-硅-铝-镁区内的若干原子核，这表明中等质量μ子原子是开展短程矢量力搜寻的特别有利平台。

在超精细区，调查揭示了不同媒介子假说之间清晰且具有实验价值的互补性。由于厌质子矢量基准主要由中子耦合主导，矢量情景优先选择奇数-N 原子核，其中 μ^{29}硅成为首选的 $1S_{1/2}$ 超精细目标。相比之下，赝标量情景主要由质子自旋含量驱动，因此更偏好奇数-Z 系统；在本次调查中， μ^{31}磷产生了预测值最大的 $1S_{1/2}$ 超精细结构信号。这种奇数-N 与奇数-Z 之间的选择性是本研究最重要的成果之一，因为它表明，对不同原子核开展比较光谱学研究不仅能够检验信号是否存在，还能帮助诊断底层媒介子的耦合模式和自旋宇称结构。

本研究的更广泛意义超越了对 ATOMKI反常的特定 $X17$ 解释。从更一般的层面看，我们构建的是一种用于研究 μ子原子中一般短程汤川型相互作用的光谱学策略。由于 μ子波函数发生了强烈的空间压缩，这些系统对作用程为数飞米至数十飞米的新力异常敏感；而本文引入的、依赖于可观测量的框架，可以直接推广至更广泛的矢量、赝标量或其他轻媒介子情景。从这个意义上说，本研究拓展了 μ子原子光谱学的作用，使其从检验特定反常驱动模型的工具，发展为一个更通用的精密平台，用于原子、核与粒子物理交叉领域的新物理搜寻。

本研究的主要理论局限在于，超精细区对核自旋含量采用了施密特模型处理。尽管这种描述足以确定目标对象的总体优先级，但组态混合和芯极化可能会改变单个原子的有效自旋份额，在中等质量区尤其如此。因此，下一步最重要的理论工作，是将本文的原子框架与针对主要超精细候选核的改进核结构计算相结合。在实验方面，结果指向一个自然的两阶段计划：近期在 μd 和氦区开展测试，这些区域已有精密基准；随后长期专门研究本文调查中最有利的较重原子核，尤其是 μ^{31}P 和 μ^{29}Si。

总体而言，本综述表明，精密 μ子原子光谱学不仅能以具有竞争力的灵敏度探测短程第五种力效应，还能真正诊断其耦合结构。这使 μ子原子成为探索标准模型之外轻质量新相互作用的独特而宝贵的实验室。

致谢

本研究获得中国科学院近代物理研究所重离子科学与技术重点实验室研究计划（项目编号：HIST2025CS08）和中国国家重点研发计划（项目编号：2024YFE0109800 和 2024YFE0109802）的资助。

---

[1] A. J. Krasznahorkay 等，Phys. Rev. Lett. 116, 042501 (2016)，arXiv:1504.01527。[2] A. J. Krasznahorkay 等，arXiv 预印本（2019）， ^{4}He 跃迁中的反常 $e^{+}e^{-}$ 对，arXiv:1910.10459。[3] J. L. Feng、B. Fornal、I. Galon、S. Gardner、J. Smolinsky、T. M. P. Tait 和 P. Tanedo，Phys. Rev. Lett. 117, 071803 (2016)，arXiv:1604.07411。[4] U. Ellwanger 和 S. Moretti，Journal of High Energy Physics 2016, 1 (2016)。[5] J. Kozaczuk、D. E. Morrissey 和 S. Stroberg，Physical Review D 95, 115024 (2017)。[6] A. Antognini、F. Nez、K. Schuhmann、F. D. Amaro、F. Biraben、J. M. Cardoso、D. S. Covita、A. Dax、S. Dhawan、M. Diepold 等，Science 339, 417 (2013)。[7] K. Schuhmann、L. M. Fernandes、F. Nez、M. Abdou Ahmed、F. D. Amaro、P. Amaro、F. Biraben、T.-L. Chen、D. S. Covita、A. J. Dax 等，Science 388, 854 (2025)。[8] U. D. Jentschura，Phys. Rev. A 101, 062510 (2020)，arXiv:2003.07207。[9] A. P. Martynenko，Phys. At. Nucl. 71, 125 (2008)。

[10] A. A. Krutov and A. P. Martynenko, Eur. Phys. J. D 62, 163 (2011). [11] E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, Progress in 粒子与核物理 51, 223 (2003). [12] M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, Chin. Phys. C 45, 030003 (2021). [13] N. J. Stone, Atomic Data and Nuclear Data Tables 90, 75 (2005). [14] I. Angeli and K. P. Marinova, Atomic Data and Nuclear Data Tables 99, 69 (2013). [15] K. S. Krane, Introductory 核物理 (Wiley, New York, 1987). [16] A. Bohr and B. R. Mottelson, 核结构, Vols. I & II (World Scientific, 1998) reprint edition. [17] E. A. Uehling, Physical Review 48, 55 (1935). [18] U. D. Jentschura and V. A. Yerokhin, Physical Review A 73, 062503 (2006). [19] M. Kamimura, Physical Review A 38, 621 (1988). [20] Y. Suzuki and K. Varga, Stochastic Variational Approach to Quantu m-Mechanical Few-Body Problems, Lecture Notes in Physics Monographs, Vol. 54 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1998). [21] J. P. Leveille, Nucl. Phys. B 137, 63 (1978). [22] M. Lindner, M. Platscher, and F. S. Queiroz, Phys. Rept. 731, 1 (2018), arXiv:1610.06587. [23] M. g 2 Collaboration et al., Physical Review Letters 135, 101802 (2025). [24] R. Aliberti, T. Aoyama, E. Balzani, A. Bashir, G. Benton, J. Bijnens, V. Biloshytskyi, T. Blum, D. Boito, M. Bruno, et al., arXiv preprint arXiv:2505.21476 (2025). [25] M. G. Mayer, Physical Review (1949). [26] J. H. D. Jensen, Reviews of Modern Physics (1955). [27] R. Neugart and G. Neyens, Journal of Physics G: Nuclear and 粒子物理 (2017). [28] J. H. Kelley and T. collaborators, Tunl 核数据评估 (ensdf/tunl), https://nucldata.tunl.duke.edu/. [29] National Nuclear Data Center (NNDC), Nudat 3.0 database, https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/. [30] Korea Atomic Energy Research Institute (KAERI), 核素图表, https://atom.kaeri.re.kr/ton/. [31] N. J. Stone, 原子核电四极矩表, Tech. Rep. INDC(NDS)-0650 (IAEA Nuclear Data Section, 2016). [32] S. Navas et al. (Particle Data Group), Physical Review D 110, 030001 (2024). [33] L. W. Fullerton and G. Rinker Jr, Physical Review A 13, 1283 (1976). [34] E. Borie and G. Rinker, Reviews of Modern Physics 54, 67 (1982). [35] E. Borie, Ann. Phys. 327, 733 (2012). [36] M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, Theory of Light Hydrogenlike Atoms, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 222 (2007). [37] R. N. Faustov and A. P. Martynenko, J. Exp. Theor. Phys. 98, 39 (2004). [38] R. N. Faustov, A. P. Martynenko, G. A. Martynenko, and V. V. Sorokin, Phys. Rev. A 90, 012520 (2014). [39] A. P. Martynenko, J. Exp. Theor. Phys. 106, 690 (2008). [40] A. A. Krutov and A. P. Martynenko, Phys. Rev. A 84, 052514 (2011). [41] J. J. Krauth, K. Schuhmann, M. A. Ahmed, F. D. Amaro, P. Amaro, F. Biraben, T.-L. Chen, D. S. Covita, A. J. Dax, M. Diepold, et al., 《自然》589, 527 (2021). [42] R. Pohl, F. Nez, L. M. Fernandes, F. D. Amaro, F. Biraben, J. M. Cardoso, D. S. Covita, A. Dax, S. Dhawan, M. Diepold, et al., Science 353, 669 (2016). [43] J. Nuber, A. Adamczak, M. Abdou Ahmed, L. Affolter, F. Amaro, P. Amaro, A. Antognini, P. Carvalho, Y.-H. Chang, T.-L. Chen, et al., SciPost Physics Core 6, 057 (2022). [44] J. J. Krauth, M. Diepold, B. Franke, and others (CREMA Collaboration), Science 358, 79 (2017).

附录 A：核输入和自旋结构

1. 数据来源和约定

表 A1：基态 J^π，核质量 m_{nuc} [u], 均方根电荷半径 r_{ch} [fm；第三列], 以及稳定原子核的单粒子自旋求和投影（中子/质子），其中 $Z \le 15$。 r_{ch} 的 ^{1}H、 ^{2}H和 ^{3}He 数据采用粒子数据组/主要测定结果 [7, 44]；其他所有半径均取自 Angeli 和 Marinova [14]。对于满足 $I = 0$的偶偶核，价轨道指派标为闭壳层；自旋投影项则用长破折号标记，因为在当前框架中不会产生自旋相关超精细贡献。

核素	m_{nuc} [u]	$\sqrt{\langle r^2\rangle}$ (fm)	$(Z,\ N)$	Type	基态 J^π	价轨道	$\sum_i \mathbf{S}_n^i$	$\sum_i \mathbf{S}_p^i$
^{1}H	1.00727647	0.8409	(1,0)	奇数质子数	$\frac{1}{2}^+$	p:$1s_{1/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{2}H	2.01355321	2.12799	(1,1)	奇-奇	1^+	p:$1s_{1/2}$;n:$1s_{1/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{3}H	3.01550071	1.759	(1,2)	奇数质子数	$\frac{1}{2}^+$	p:$1s_{1/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{3}He	3.01493224	1.97007	(2,1)	奇数中子数	$\frac{1}{2}^+$	n:$1s_{1/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	0
^{4}He	4.00150618	1.681	(2,2)	偶偶核	0^+	闭壳层	—	—

^{6}Li	6.01347736	2.589	(3,3)	奇-奇	1^{+}	p:$1p_{3/2}$;n:$1p_{3/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{7}Li	7.01435791	2.444	(3,4)	奇数质子数	$\frac{3}{2}^{-}$	p:$1p_{3/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{9}Be	9.00998917	2.519	(4,5)	奇数中子数	$\frac{3}{2}^{-}$	n:$1p_{3/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	0
^{10}B	10.01019478	2.427	(5,5)	奇-奇	3^{+}	质子：$1p_{3/2}$；中子：$1p_{3/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{11}B	11.00656319	2.406	(5,6)	奇数质子数	$\frac{3}{2}^{-}$	p:$1p_{3/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{12}C	11.99670964	2.470	(6,6)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{13}C	13.00006448	2.461	(6,7)	奇数中子数	$\frac{1}{2}^{-}$	n:$1p_{1/2}$	$\frac{1}{6}\hbar$ 角动量	0
^{14}N	13.99923557	2.558	(7,7)	奇-奇	1^{+}	质子：$1p_{1/2}$；中子：$1p_{1/2}$	$\frac{1}{6}\hbar$ 角动量	$\frac{1}{6}\hbar$ 角动量
^{15}N	14.99627046	2.612	(7,8)	奇数质子数	$\frac{1}{2}^{-}$	p:$1p_{1/2}$	0	$\frac{1}{6}\hbar$ 角动量
^{16}O	15.99052821	2.699	(8,8)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{17}O	16.99474535	2.73	(8,9)	奇数中子数	$\frac{5}{2}^{+}$	n:$1d_{5/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	0
^{18}O	17.99477321	2.775	(8,10)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{20}Ne	19.98695818	3.006	(10,10)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{21}Ne	20.98836469	3.00	(10,11)	奇数中子数	$\frac{3}{2}^{+}$	n:$1d_{3/2}$	$\frac{3}{10}\hbar$ 角动量	0
^{24}Mg	23.97846462	3.057	(12,12)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{25}Mg	24.97925990	3.06	(12,13)	奇数中子数	$\frac{5}{2}^{+}$	n:$1d_{5/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	0
^{26}Mg	25.97601589	3.034	(12,14)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{27}Al	26.97441412	3.061	(13,14)	奇数质子数	$\frac{5}{2}^{+}$	p:$1d_{5/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量
^{28}Si	27.96925492	3.122	(14,14)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{29}Si	28.96882305	3.13	(14,15)	奇数中子数	$\frac{1}{2}^{+}$	n:$2s_{1/2}$	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量	0
^{30}Si	29.96609852	3.134	(14,16)	偶偶核	0^{+}	闭壳层	—	—
^{31}P	30.96554333	3.190	(15,16)	奇数质子数	$\frac{1}{2}^{+}$	p:$2s_{1/2}$	0	$+\frac{1}{2}\hbar$ 角动量

2. 自旋含量和有效耦合

表A2：自旋含量权重及核子耦合，适用于 $X17$。各列列出核素、中子/质子自旋权重 Δ_n Δ_p $h_N^{\prime(\mathrm{eff})} = h'_p\Delta_p + h'_n\Delta_n$ $h_N^{(\mathrm{eff})} =$、、超精细扇区（矢量超精细结构）和（赝标量超精细结构）的自旋分数加权有效耦合、通过方程（）进入兰姆位移的相干耦合，以及实验核 g因子。对于 $I = 0$的偶偶核，超精细结构相关量不适用，并以“—”标记。μ_{exp} 数值取自粒子数据组（轻核数据）和 Stone 评估表（稳定核素数据）。 $h_p\Delta_p + h_n\Delta_n$ $Zh'_p + Nh'_n$ 6

核素	Δ_n	Δ_p	$h_N^{\prime(\mathrm{eff})}$	$h_N^{(\mathrm{eff})}$	$Zh'_p + Nh'_n$	$g_N^{(\text{实验值})}$
^{1}H	0	1	2.423×10^{-4}	-2.4×10^{-3}	2.423×10^{-4}	5.5856947
^{2}H	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	8.176×10^{-4}	-4.725×10^{-4}	3.270×10^{-3}	1.7140255
^{3}H	0	1	2.423×10^{-4}	-2.4×10^{-3}	6.298×10^{-3}	17.836344
^{3}He	1	0	3.028×10^{-3}	5.1×10^{-4}	3.513×10^{-3}	-12.736573
^{4}He	—	—	—	—	6.541×10^{-3}	—
^{6}Li	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	8.176×10^{-4}	-4.725×10^{-4}	9.811×10^{-3}	4.907652
^{7}Li	0	$\frac{1}{3}$	8.075×10^{-5}	-8.0×10^{-4}	1.284×10^{-2}	15.117825
^{9}Be	$\frac{1}{3}$	0	1.009×10^{-3}	1.7×10^{-4}	1.611×10^{-2}	-7.021342
^{10}B	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	2.725×10^{-4}	-1.575×10^{-4}	1.635×10^{-2}	5.964865
^{11}B	0	$\frac{1}{3}$	8.075×10^{-5}	-8.0×10^{-4}	1.938×10^{-2}	19.586006
^{12}C	—	—	—	—	1.962×10^{-2}	—
^{13}C	$-\frac{1}{3}$	0	-1.009×10^{-3}	-1.7×10^{-4}	2.265×10^{-2}	18.130871
^{14}N	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	-2.725×10^{-4}	1.575×10^{-4}	2.290×10^{-2}	5.611513
^{15}N	0	$-\frac{1}{3}$	-8.075×10^{-5}	8.0×10^{-4}	2.592×10^{-2}	-8.432196
^{16}O	—	—	—	—	2.616×10^{-2}	—
^{17}O	$\frac{1}{5}$	0	6.056×10^{-4}	1.02×10^{-4}	2.919×10^{-2}	-12.780792
^{18}O	—	—	—	—	3.222×10^{-2}	—
^{20}Ne	—	—	—	—	3.270×10^{-2}	—
^{21}Ne	$-\frac{1}{5}$	0	-6.056×10^{-4}	-1.02×10^{-4}	3.573×10^{-2}	-9.193117
^{24}Mg	—	—	—	—	3.924×10^{-2}	—
^{25}Mg	$\frac{1}{5}$	0	6.056×10^{-4}	1.02×10^{-4}	4.227×10^{-2}	-8.485658

^{26}Mg	—	—	—	—	4.530×10^{-2}	—
^{27}Al	0	$\frac{1}{5}$	4.846×10^{-5}	-4.8×10^{-4}	4.554×10^{-2}	39.020000
^{28}Si	—	—	—	—	4.578×10^{-2}	—
^{29}Si	1	0	3.028×10^{-3}	5.1×10^{-4}	4.881×10^{-2}	−31.928000
^{30}Si	—	—	—	—	5.184×10^{-2}	—
^{31}P	0	1	2.423×10^{-4}	-2.4×10^{-3}	5.208×10^{-2}	69.605000

附录 B：矢量粒子-$X17$诱导的 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ μ子原子兰姆位移

表B1：矢量粒子-$X17$ 对 μ子原子中 $2S_{1/2}$–$2P_{1/2}$ 区间的贡献，由相干势 $V_X = \frac{h'_\mu}{4\pi}(Zh'_p + Nh'_n)\frac{e^{-m_X r}}{r}$（方程（6））计算得到。所示差值为 $\Delta E^{(V)}_{X17} = E^{(V)}_{X17}(2S_{1/2}) - E^{(V)}_{X17}(2P_{1/2})$ 和 $\Delta E^{(\mathrm{EM})}_L = E^{(\mathrm{EM})}_L(2S_{1/2}) - E^{(\mathrm{EM})}_L(2P_{1/2})$。

核素	$E^{(V)}_{X17}$ [毫电子伏]		$E^{(\mathrm{EM})}_L$ [电子伏特]		$\Delta E^{(V)}_{X17}$ [毫电子伏]	$\Delta E^{(\mathrm{EM})}_L$ [电子伏特]	比值 $\Delta E^{(V)}_{X17}/\Delta E^{(\mathrm{EM})}_L$
	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$			
^{1}H	2.05125×10^{-3}	1.76275×10^{-6}	-2.21681×10^{-1}	-2.30039×10^{-2}	2.04949×10^{-3}	-1.98677×10^{-1}	-1.03157×10^{-5}
^{2}H	3.20481×10^{-2}	3.05810×10^{-5}	-2.26034×10^{-1}	-2.71978×10^{-2}	3.20175×10^{-2}	-1.98837×10^{-1}	-1.61024×10^{-4}
^{3}H	6.49607×10^{-2}	6.42143×10^{-5}	-2.43984×10^{-1}	-2.88209×10^{-2}	6.48965×10^{-2}	-2.15163×10^{-1}	-3.01615×10^{-4}
^{3}He	2.45829×10^{-1}	9.72451×10^{-4}	-3.64950×10^{0}	-5.69311×10^{-1}	2.44856×10^{-1}	-3.08019×10^{0}	-7.94940×10^{-5}
^{4}He	4.69856×10^{-1}	1.88829×10^{-3}	-1.97317×10^{0}	-5.84337×10^{-1}	4.67968×10^{-1}	-1.38883×10^{0}	-3.36951×10^{-4}
^{6}Li	2.07425×10^{0}	1.91350×10^{-2}	-4.54573×10^{0}	-2.99490×10^{0}	2.05511×10^{0}	-1.55083×10^{0}	-1.32517×10^{-3}
^{7}Li	2.73512×10^{0}	2.53443×10^{-2}	-4.72410×10^{0}	-3.01603×10^{0}	2.70977×10^{0}	-1.70807×10^{0}	-1.58645×10^{-3}
^{9}Be	7.04029×10^{0}	1.16646×10^{-1}	-2.21206×10^{1}	-9.01208×10^{0}	6.92365×10^{0}	-1.31086×10^{1}	-5.28177×10^{-4}
^{10}B	1.21548×10^{1}	3.13017×10^{-1}	-2.15338×10^{1}	-2.04440×10^{1}	1.18417×10^{1}	-1.08981×10^{0}	-1.08658×10^{-2}
^{11}B	1.44337×10^{1}	3.72639×10^{-1}	-1.48651×10^{1}	-2.04965×10^{1}	1.40610×10^{1}	5.63135×10^{0}	2.49692×10^{-3}
^{12}C	2.20654×10^{1}	8.16132×10^{-1}	-3.22973×10^{1}	-3.95110×10^{1}	2.12493×10^{1}	7.21377×10^{0}	2.94566×10^{-3}
^{13}C	2.54461×10^{1}	9.44980×10^{-1}	-1.56057×10^{2}	-3.96263×10^{1}	2.45011×10^{1}	-1.16430×10^{2}	-2.10436×10^{-4}
^{14}N	3.60886×10^{1}	1.80258×10^{0}	-4.85038×10^{2}	-6.85058×10^{1}	3.42860×10^{1}	-4.16532×10^{2}	-8.23130×10^{-5}
^{15}N	4.08473×10^{1}	6.90205×10^{-1}	-4.96745×10^{2}	-2.04109×10^{1}	4.01571×10^{1}	-4.76334×10^{2}	-8.43044×10^{-5}
^{16}O	5.39722×10^{1}	3.52607×10^{0}	-1.97357×10^{2}	-1.11191×10^{2}	5.04461×10^{1}	-8.61668×10^{1}	-5.85448×10^{-4}
^{17}O	6.02308×10^{1}	3.94096×10^{0}	-2.19007×10^{2}	-1.11192×10^{2}	5.62898×10^{1}	-1.07815×10^{2}	-5.22094×10^{-4}
^{18}O	6.64632×10^{1}	4.35638×10^{0}	-2.48024×10^{2}	-1.11202×10^{2}	6.21069×10^{1}	-1.36822×10^{2}	-4.53925×10^{-4}
^{20}Ne	1.04646×10^{2}	1.04895×10^{1}	-4.98728×10^{3}	-2.42051×10^{2}	9.41570×10^{1}	-4.74523×10^{3}	-1.98424×10^{-5}
^{21}Ne	1.14390×10^{2}	1.14731×10^{1}	-4.63871×10^{3}	-2.42193×10^{2}	1.02917×10^{2}	-4.39652×10^{3}	-2.34088×10^{-5}
^{24}Mg	1.74876×10^{2}	2.47678×10^{1}	-7.29154×10^{3}	-4.62356×10^{2}	1.50109×10^{2}	-6.82919×10^{3}	-2.19805×10^{-5}
^{25}Mg	1.88388×10^{2}	2.66985×10^{1}	-7.12773×10^{3}	-4.62545×10^{2}	1.61689×10^{2}	-6.66518×10^{3}	-2.42588×10^{-5}
^{26}Mg	2.02208×10^{2}	2.86302×10^{1}	-6.50594×10^{3}	-4.62719×10^{2}	1.73578×10^{2}	-6.04322×10^{3}	-2.87227×10^{-5}
^{27}Al	2.33870×10^{2}	3.83667×10^{1}	-1.73382×10^{4}	-6.32364×10^{2}	1.95503×10^{2}	-1.67058×10^{4}	-1.17027×10^{-5}
^{28}Si	2.03453×10^{2}	2.89659×10^{1}	-7.67313×10^{3}	-4.63034×10^{2}	1.74487×10^{2}	-7.21009×10^{3}	-2.42004×10^{-5}
^{29}Si	2.90383×10^{2}	5.33832×10^{1}	-8.84039×10^{4}	-8.07264×10^{2}	2.37000×10^{2}	-8.75966×10^{4}	-2.70558×10^{-6}
^{30}Si	2.30301×10^{2}	3.28321×10^{1}	-7.57372×10^{3}	-4.63304×10^{2}	1.97469×10^{2}	-7.11042×10^{3}	-2.77718×10^{-5}
^{31}P	3.36263×10^{2}	7.22637×10^{1}	-3.74113×10^{3}	-1.20281×10^{3}	2.63999×10^{2}	-2.53832×10^{3}	-1.04005×10^{-4}

附录 C：矢量粒子-$X17$-诱导的 μ子原子超精细结构

1. $1S_{1/2}$ 超精细结构

表 C1：矢量粒子 $X17$ 在 $1S_{1/2}$中 ： 非偶偶核的能级。子列为 $F = S_N - J$ 和 $F = S_N + J$（对于 $1S_{1/2}$、$J = \frac{1}{2}$）。差值显示为 ΔE_{X17} 和 ΔE_{EM}。

核素	$E^{(V)}_{X17}$ [毫电子伏]		$E^{(\mathrm{EM})}_{\text{超精细结构}}$ [电子伏特]		$\Delta E^{(V)}_{X17}$ [毫电子伏]	$\Delta E^{(\mathrm{EM})}_{\text{超精细结构}}$ [电子伏特]	比值 $\Delta E^{(V)}_{X17}/\Delta E^{(\mathrm{EM})}_{\text{超精细结构}}$
	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$			
^{1}H	1.64795×10^{-2}	1.64538×10^{-2}	-1.37650×10^{-1}	4.55845×10^{-2}	-2.56779×10^{-5}	1.83235×10^{-1}	-1.40136×10^{-7}
^{2}H	6.43445×10^{-2}	6.43132×10^{-2}	-3.29861×10^{-2}	1.66585×10^{-2}	-3.13625×10^{-5}	4.96446×10^{-2}	-6.31741×10^{-7}

^{3}H	2.00836×10^{-2}	2.00545×10^{-2}	-1.79037×10^{-1}	5.98639×10^{-2}	-2.91580×10^{-5}	2.38901×10^{-1}	-1.22051×10^{-7}
^{3}He	1.71420×10^{0}	1.71584×10^{0}	1.03392×10^{0}	-3.43674×10^{-1}	1.63759×10^{-3}	-1.37759×10^{0}	-1.18873×10^{-6}
^{6}Li	1.41133×10^{0}	1.41038×10^{0}	-8.91509×10^{-1}	4.44334×10^{-1}	-9.51181×10^{-4}	1.33584×10^{0}	-7.12046×10^{-7}
^{7}Li	1.40571×10^{0}	1.40308×10^{0}	-2.99664×10^{0}	1.76060×10^{0}	-2.62341×10^{-3}	4.75724×10^{0}	-5.51411×10^{-7}
^{9}Be	3.64731×10^{0}	3.64770×10^{0}	2.88950×10^{0}	-1.71041×10^{0}	3.84843×10^{-4}	-4.59991×10^{0}	-8.36672×10^{-8}
^{10}B	1.70084×10^{0}	1.69689×10^{0}	-9.20307×10^{0}	6.92823×10^{0}	-3.94983×10^{-3}	1.61313×10^{1}	-2.44823×10^{-7}
^{11}B	5.05247×10^{-1}	5.04533×10^{-1}	-1.67214×10^{1}	1.08051×10^{1}	-7.13596×10^{-4}	2.75264×10^{1}	-2.59215×10^{-8}
^{13}C	-9.61119×10^{0}	-9.60465×10^{0}	-9.51785×10^{0}	3.22829×10^{0}	6.53708×10^{-3}	1.27461×10^{1}	5.12922×10^{-7}
^{14}N	-3.65623×10^{0}	-3.65430×10^{0}	-5.37053×10^{0}	2.70519×10^{0}	1.93417×10^{-3}	8.07572×10^{0}	2.39494×10^{-7}
^{15}N	-1.08190×10^{0}	-1.08308×10^{0}	5.03209×10^{0}	-1.90055×10^{0}	-1.17717×10^{-3}	-6.93264×10^{0}	1.69774×10^{-7}
^{17}O	1.10691×10^{1}	1.10975×10^{1}	1.05051×10^{2}	-7.49520×10^{1}	2.83746×10^{-2}	-1.79903×10^{2}	-1.57696×10^{-7}
^{21}Ne	-1.69286×10^{1}	-1.69378×10^{1}	1.86558×10^{1}	-1.02988×10^{1}	-9.16707×10^{-3}	-2.89545×10^{1}	3.16603×10^{-7}
^{25}Mg	2.38868×10^{1}	2.38581×10^{1}	4.25753×10^{1}	-3.55384×10^{1}	-2.87315×10^{-2}	-7.81136×10^{1}	3.67827×10^{-7}
^{27}Al	2.22602×10^{0}	2.25491×10^{0}	-1.47751×10^{2}	7.62922×10^{2}	2.88963×10^{-2}	9.10674×10^{2}	3.17235×10^{-8}
^{29}Si	1.57020×10^{2}	1.56377×10^{2}	7.44958×10^{1}	-3.22391×10^{1}	-6.43146×10^{-1}	-1.06735×10^{2}	6.02570×10^{-6}
^{31}P	1.37586×10^{1}	1.38510×10^{1}	-6.07764×10^{2}	1.29332×10^{2}	9.23910×10^{-2}	7.37096×10^{2}	1.25331×10^{-7}

2. $2P_{1/2}$ 超精细结构

表 C2： $2P_{1/2}$中的矢量粒子 $X17$： 非偶偶核的能级。

核素	$E_{X17}^{(V)}$ [毫电子伏]		$E_{\text{构}}^{(\text{EM})}$ 超精细结 [电子伏特]		$\Delta E_{X17}^{(V)}$ [毫电子伏]	$\Delta E_{\text{构}}^{(\text{EM})}$ 超精细结 [电子伏特]	比值 $\frac{\Delta E^{(V)}{}_{X17}}{\text{细结构}} / \Delta E^{(\text{EM})}{}_{\text{超精}}$
	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$			
^{1}H	1.76523×10^{-6}	1.76193×10^{-6}	-1.40533×10^{-3}	4.68424×10^{-4}	-3.30573×10^{-9}	1.87376×10^{-3}	-1.76422×10^{-9}
^{2}H	7.65256×10^{-6}	7.64300×10^{-6}	-3.47656×10^{-4}	1.73826×10^{-4}	-9.55542×10^{-9}	5.21482×10^{-4}	-1.83229×10^{-8}
^{3}H	2.47196×10^{-6}	2.47000×10^{-6}	-1.93300×10^{-3}	6.44301×10^{-4}	-1.96472×10^{-9}	2.57730×10^{-3}	-7.62442×10^{-10}
^{3}He	8.38409×10^{-4}	8.38129×10^{-4}	1.39667×10^{-2}	-4.65586×10^{-3}	-2.79382×10^{-7}	-1.86226×10^{-2}	1.50034×10^{-8}
^{6}Li	1.59510×10^{-3}	1.59430×10^{-3}	-1.31292×10^{-2}	6.56444×10^{-3}	-7.99141×10^{-7}	1.96936×10^{-2}	-4.05871×10^{-8}
^{7}Li	1.59460×10^{-3}	1.59342×10^{-3}	-4.36932×10^{-2}	2.62136×10^{-2}	-1.18290×10^{-6}	6.99068×10^{-2}	-1.69200×10^{-8}
^{9}Be	7.30729×10^{-3}	7.30507×10^{-3}	3.79765×10^{-2}	-2.27869×10^{-2}	-2.21743×10^{-6}	-6.07634×10^{-2}	3.64978×10^{-8}
^{10}B	5.21933×10^{-3}	5.21513×10^{-3}	-9.12873×10^{-2}	6.84604×10^{-2}	-4.19645×10^{-6}	1.59748×10^{-1}	-2.62663×10^{-8}
^{11}B	1.55321×10^{-3}	1.55230×10^{-3}	-1.70912×10^{-1}	1.02534×10^{-1}	-9.09914×10^{-7}	2.73446×10^{-1}	-3.32723×10^{-9}
^{13}C	-4.21071×10^{-2}	-4.20964×10^{-2}	-1.39917×10^{-1}	4.66361×10^{-2}	1.06944×10^{-5}	1.86553×10^{-1}	5.73169×10^{-8}
^{14}N	-2.14525×10^{-2}	-2.14468×10^{-2}	-8.54219×10^{-2}	4.27106×10^{-2}	5.69459×10^{-6}	1.28133×10^{-1}	4.44482×10^{-8}
^{15}N	-6.37011×10^{-3}	-6.36952×10^{-3}	9.00132×10^{-2}	-3.00064×10^{-2}	5.85995×10^{-10}	-1.20020×10^{-1}	-4.88209×10^{-12}
^{17}O	8.17780×10^{-2}	8.17614×10^{-2}	4.21766×10^{-1}	-3.01299×10^{-1}	-1.65817×10^{-5}	-7.23065×10^{-1}	2.29327×10^{-8}
^{21}Ne	-1.94430×10^{-1}	-1.94391×10^{-1}	3.45176×10^{-1}	-2.06942×10^{-1}	3.89972×10^{-5}	-5.52118×10^{-1}	-7.06301×10^{-8}
^{25}Mg	3.82583×10^{-1}	3.82507×10^{-1}	6.57331×10^{-1}	-4.69650×10^{-1}	-7.64737×10^{-5}	-1.12698×10^{0}	6.78643×10^{-8}
^{27}Al	4.08235×10^{-2}	4.07973×10^{-2}	-3.56816×10^{0}	2.55029×10^{0}	-2.61560×10^{-5}	6.11845×10^{0}	-4.27545×10^{-9}
^{29}Si	3.31316×10^{0}	3.31403×10^{0}	1.47523×10^{0}	-4.93339×10^{-1}	8.70304×10^{-4}	-1.96857×10^{0}	-4.42102×10^{-7}
^{31}P	3.36530×10^{-1}	3.36420×10^{-1}	-3.69986×10^{0}	1.23304×10^{0}	-1.09336×10^{-4}	4.93291×10^{0}	-2.21644×10^{-8}

附录D：赝标量-$X17$诱导的μ子原子超精细结构

1. $1S_{1/2}$ 超精细结构

表D1：赝标量 $X17$：非偶偶核的能级。子列为 $F = S_N - J$和 $F = S_N + J$（对于$1S_{1/2}$, $J = \frac{1}{2}$）。

核素	$E_{X17}^{(A)}$ [毫电子伏]		$E_{\text{构}}^{(\text{EM})}$ 超精细结 [电子伏特]		ΔE_{X17} [毫电子伏]	ΔE_{EM} [电子伏特]	比值
	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$	$F = S_N - J$	$F = S_N + J$			
^{1}H	-1.62898×10^{-4}	5.23107×10^{-5}	-1.37796×10^{-1}	4.56325×10^{-2}	2.15208×10^{-4}	1.83428×10^{-1}	1.17326×10^{-6}
^{2}H	-1.92273×10^{-5}	1.04034×10^{-5}	-3.15703×10^{-2}	1.59376×10^{-2}	2.96307×10^{-5}	4.75079×10^{-2}	6.23710×10^{-7}
^{3}H	-6.48738×10^{-5}	2.22504×10^{-5}	-1.78672×10^{-1}	5.97417×10^{-2}	8.71242×10^{-5}	2.38414×10^{-1}	3.65452×10^{-7}
^{3}He	2.08131×10^{-4}	-6.84764×10^{-5}	1.02733×10^{0}	-3.41520×10^{-1}	-2.76607×10^{-4}	-1.36885×10^{0}	2.02053×10^{-7}

^{6}Li	-5.46531×10^{-4}	2.70768×10^{-4}	-8.91760×10^{-1}	4.44348×10^{-1}	8.17298×10^{-4}	1.33611×10^{0}	6.11567×10^{-7}
^{7}Li	-8.03830×10^{-4}	4.02161×10^{-4}	-2.75675×10^{0}	1.56991×10^{0}	1.20699×10^{-3}	4.32666×10^{0}	2.78923×10^{-7}
^{9}Be	5.56011×10^{-4}	-3.33877×10^{-4}	2.69550×10^{0}	-1.61844×10^{0}	-8.89888×10^{-4}	-4.31393×10^{0}	2.06329×10^{-7}
^{10}B	1.28740×10^{-2}	-3.49457×10^{-3}	-1.84258×10^{1}	6.45649×10^{0}	-1.63685×10^{-2}	2.48823×10^{1}	6.57740×10^{-7}
^{11}B	-8.87346×10^{-3}	5.07868×10^{-3}	-1.75574×10^{1}	1.02008×10^{1}	1.39521×10^{-2}	2.77582×10^{1}	5.02488×10^{-7}
^{13}C	-9.66528×10^{-4}	3.25034×10^{-4}	-9.72284×10^{0}	3.25666×10^{0}	1.29156×10^{-3}	1.29795×10^{1}	9.95052×10^{-8}
^{14}N	7.86014×10^{-4}	-7.46216×10^{-4}	-3.74528×10^{0}	2.55625×10^{0}	-1.53223×10^{-3}	6.30153×10^{0}	2.43208×10^{-7}
^{15}N	-5.27350×10^{-3}	1.40266×10^{-3}	5.35887×10^{0}	-1.58260×10^{0}	6.67616×10^{-3}	-6.94147×10^{0}	9.61906×10^{-7}
^{17}O	6.76740×10^{-4}	-3.56875×10^{-3}	1.43279×10^{1}	-3.12414×10^{1}	-4.24549×10^{-3}	-4.55692×10^{1}	9.31548×10^{-8}
^{21}Ne	-5.18206×10^{-3}	2.89136×10^{-3}	1.90020×10^{1}	-1.03316×10^{1}	8.07342×10^{-3}	-2.93336×10^{1}	2.75187×10^{-7}
^{25}Mg	4.43419×10^{-3}	-7.05199×10^{-3}	2.97668×10^{1}	-3.87654×10^{1}	-1.14862×10^{-2}	-6.85322×10^{1}	1.67594×10^{-7}
^{27}Al	-2.85227×10^{-2}	2.45572×10^{-2}	-1.73896×10^{2}	1.42511×10^{2}	5.30799×10^{-2}	3.16407×10^{2}	1.67780×10^{-7}
^{29}Si	2.36601×10^{-2}	-1.02860×10^{-2}	9.80510×10^{1}	-4.08207×10^{1}	-3.39461×10^{-2}	-1.38872×10^{2}	2.44485×10^{-7}
^{31}P	-7.07436×10^{-1}	2.17207×10^{-3}	-1.15398×10^{3}	2.16058×10^{0}	7.09608×10^{-1}	1.15614×10^{3}	6.13708×10^{-7}

2. $2P_{1/2}$ 超精细结构

表 D2： $2P_{1/2}$中的赝标量 $X17$： 非偶偶核的能级。子列为 $F=S_N-J$和 $F=S_N+J$（针对 $2P_{1/2}$、 $J=\frac{1}{2}$）。所示差值为 ΔE_{X17}和 ΔE_{EM}。

核素	$E^{(A)}_{X17}$ [μ电子伏特]		$E^{(\mathrm{EM})}_{\text{构}}$ 超精细结 [电子伏特]		ΔE_{X17} [μ电子伏特]	$\Delta E^{(\mathrm{EM})}_{\text{构}}$ 超精细结 [电子伏特]	$\Delta E^{(A)}_{X17}/\Delta E^{(\mathrm{EM})}_{\text{超精细结构}}$比值
	$F=S_N-J$	$F=S_N+J$	$F=S_N-J$	$F=S_N+J$			
^{1}H	-7.20457×10^{-6}	2.40640×10^{-6}	-1.40533×10^{-3}	4.68424×10^{-4}	9.61097×10^{-6}	1.87376×10^{-3}	5.12925×10^{-9}
^{2}H	-4.67867×10^{-3}	-4.67258×10^{-3}	-3.51268×10^{-4}	1.75632×10^{-4}	6.09541×10^{-6}	5.26900×10^{-4}	1.15679×10^{-8}
^{3}H	-3.24857×10^{-6}	1.08512×10^{-6}	-1.93300×10^{-3}	6.44301×10^{-4}	4.33369×10^{-6}	2.57730×10^{-3}	1.68159×10^{-9}
^{3}He	7.56931×10^{-6}	-2.51092×10^{-6}	1.39667×10^{-2}	-4.65586×10^{-3}	-1.00802×10^{-5}	-1.86226×10^{-2}	5.41320×10^{-10}
^{6}Li	1.61007×10^{-5}	-8.05892×10^{-6}	-1.31292×10^{-2}	6.56443×10^{-3}	-2.41596×10^{-5}	1.96936×10^{-2}	1.22676×10^{-9}
^{7}Li	3.35391×10^{-5}	-2.00607×10^{-5}	-4.36932×10^{-2}	2.62136×10^{-2}	-5.35998×10^{-5}	6.99068×10^{-2}	7.66794×10^{-10}
^{9}Be	-8.22068×10^{-5}	4.93810×10^{-5}	3.79765×10^{-2}	-2.27869×10^{-2}	1.31588×10^{-4}	-6.07634×10^{-2}	-2.16578×10^{-9}
^{10}B	-8.69145×10^{-4}	6.51198×10^{-4}	-9.12873×10^{-2}	6.84604×10^{-2}	1.52034×10^{-3}	1.59748×10^{-1}	9.51807×10^{-9}
^{11}B	1.46153×10^{-3}	-8.75433×10^{-4}	-1.70912×10^{-1}	1.02534×10^{-1}	-2.33697×10^{-3}	2.73446×10^{-1}	8.54500×10^{-9}
^{13}C	5.03453×10^{-4}	-1.67676×10^{-4}	-1.39918×10^{-1}	4.66361×10^{-2}	-6.71129×10^{-4}	1.86554×10^{-1}	-3.59774×10^{-9}
^{14}N	-1.36603×10^{-3}	6.81908×10^{-4}	-8.54247×10^{-2}	4.27093×10^{-2}	2.04794×10^{-3}	1.28134×10^{-1}	1.59790×10^{-8}
^{15}N	1.81513×10^{-3}	-6.04287×10^{-4}	2.66533×10^{-2}	-8.88422×10^{-3}	-2.41942×10^{-3}	-3.55375×10^{-2}	6.80751×10^{-8}
^{17}O	-2.76768×10^{-3}	1.97815×10^{-3}	4.21767×10^{-1}	-3.01300×10^{-1}	4.74582×10^{-3}	-7.23067×10^{-1}	-6.56434×10^{-9}
^{21}Ne	5.12853×10^{-3}	-3.11381×10^{-3}	3.45073×10^{-1}	-2.07226×10^{-1}	-8.24233×10^{-3}	-5.52298×10^{-1}	1.49225×10^{-8}
^{25}Mg	-1.65151×10^{-2}	1.17959×10^{-2}	6.57311×10^{-1}	-4.69533×10^{-1}	2.83109×10^{-2}	-1.12684×10^{0}	-2.51234×10^{-8}
^{27}Al	1.05364×10^{-1}	-7.52779×10^{-2}	-3.56918×10^{0}	2.54884×10^{0}	-1.80642×10^{-1}	6.11802×10^{0}	-2.95252×10^{-8}
^{29}Si	-6.88009×10^{-2}	2.26938×10^{-2}	1.47701×10^{0}	-4.91593×10^{-1}	9.14947×10^{-2}	-1.96861×10^{0}	-4.64815×10^{-8}
^{31}P	4.04528×10^{-1}	-1.34221×10^{-1}	-3.70087×10^{0}	1.23251×10^{0}	-5.38749×10^{-1}	4.93338×10^{0}	-1.09198×10^{-7}