拉普拉斯视角下的条件均值风险分担

Christopher Blier-Wong

统计科学系，多伦多大学，加拿大，
christopher.blierwong@utoronto.ca

2026年3月3日

arXiv:2603.01434v1 [math.ST] 2 Mar 2026

摘要

条件均值风险分摊（CMRS）规则是将聚合损失分配给各个体风险的重要工具，但在连续多元模型中实施该规则，通常需要计算复杂的多重积分。我们建立了一个框架，可根据风险向量的联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换计算 CMRS 分配。分配测度的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换 $\nu_i(B) = \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S\in B\}}]$ 可表示为联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换在对角线 $t_1 = \cdots = t_n$ 上的偏导数。当密度存在时，这便可通过一维拉普拉斯反演求得 f_S 和 ξ_i，进而在绝对连续部分上得到 $h_i(s) = \xi_i(s)/f_S(s)$），为广泛的分布类别提供闭式解或半解析解。对于无法进行解析反演的情形，我们还开发了数值反演方法。我们提出了一种指数倾斜程序，以提高低概率总量事件下数值反演的稳定性。我们通过多个示例阐释这一方法，其中包括若干现有方法难以处理的高维情形。

关键词：条件均值风险分担、拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换、风险分担、数值反演、指数倾斜、混合分布、依赖建模。

1 引言

风险汇集是保险数学的基础。经典精算模型关注总损失 $S = \sum_{i=1}^n X_i$，因为偿付能力主要取决于总损失。风险管理实践越来越需要能够将损失分配回各个参与者的分配方法：偿付能力II等监管框架要求将资本分配到特定业务线，而去中心化的点对点保险系统则要求制定公平的风险分担规则。

Denuit 和 Dhaene（2012）提出的条件均值风险分担（CMRS）规则，将非负损失向量 $(X_1, \ldots, X_n)$ 在 $S = \sum_{j=1}^n X_j$ 下分配为

$$h_i(s) = \mathbb{E}[X_i \mid S = s], \qquad i = 1, \ldots, n.$$

CMRS 规则具有坚实的理论依据：Jiao 等人（2022）证明，在所有风险分担规则中，四条公理（精算公平性、风险公平性、风险匿名性和操作匿名性）唯一刻画了 CMRS，这促使人们将其用于去中心化应用，例如点对点保险和加密货币矿池；在这些场景中，匿名性和透明度是重要的约束条件。CMRS 还具有强大的经济性质，即它能在凸序意义下普遍改善每位参与者的风险状况（Denuit 和 Dhaene，2012）。根据詹森不等式

对于条件期望，每位参与者的分摊损失都比自行承担其风险时更不易波动，因此，无论风险厌恶型主体的具体效用函数如何，他们都更倾向于接受 CMRS 分配，而非自行承担风险。这种愿意加入性质对于任何自愿风险池的实际可行性都至关重要，因为参与者无需拥有共同偏好，却都能从风险汇集中获益。此外，在 CMRS 下，扩大风险池规模会带来益处：随着参与者人数增加，个人分摊额会越来越集中于纯保费附近，从而为协作式风险分担与传统保险定价搭建起自然的桥梁（Denuit 和 Robert，2021）。

在连续情形下，一种直接方法将条件均值表示为以下比值

$$h_i(s) = \frac{\int_0^s x f_{X_i,S_{-i}}(x, s-x)\ \mathrm{d}x}{f_S(s)},$$

其中 $f_{X_i,\ S_{-i}}$ 是 $(X_i,\ S_{-i})$ 的联合密度。尽管 CMRS 在概念上很直接，但对 $s \mapsto \mathbb{E}[X_i \mid S = s]$ 进行求值在数值上颇具挑战性（Denuit 等人，2022a；Boonen 和 Chiu，2025）。在高维情形下，这需要已知 S 的边缘密度以及 $(X_i,\ S_{-i})$ 的联合密度，其中 $S_{-i} = \sum_{j\neq i} X_j$。除非损失相互独立或具有便于处理的边缘分布，否则通常无法得知这些密度（在一些特殊情形下，例如 FGM Copula 下的混合 Erlang 分布，积分存在闭式表达式；Bargès 等人，2009；Cossette 等人，2012）。数值积分会受到维数灾难的影响，而对于连续损失，蒙特卡洛模拟在以零概率事件 $\{S = s\}$ 为条件时效率低下；重尾分布还会带来额外的数值不稳定性。

大小偏倚变换会按照结果值的大小赋予相应权重（Arratia 等人，2019年）。对于满足 $\mathbb{E}[X] \in (0,\ \infty)$ 的非负随机变量 X，X 的大小偏倚分布记为 X^*，其测度定义为

$$\mathrm{d}F_{X^*}(x) = \frac{x\ \mathrm{d}F_X(x)}{\mathbb{E}[X]},\quad x \geq 0,$$

从而使较大的值获得更高的概率。在 Denuit（2019年）中，CMRS 规则用大小偏倚分布表示：

$$h_i(s) = \mathbb{E}[X_i]\frac{f_{S_i^*}(s)}{f_S(s)}$$

其中 $S_i^* = X_i^* + \sum_{j\neq i} X_j$。这种表示方式将 CMRS 分配的计算简化为卷积：当密度存在时，$f_{S_i^*}$ 可通过对 X_i 的大小偏倚分布与 S_{-i} 进行卷积得到。一些作者利用这种表示方式，在各种分布假设下推导出 CMRS 的显式公式，研究大额损失渐近分析，并构造多项式近似（Denuit 和 Robert，2020年、2022a,b）。

另一个相关研究方向考察加权分布，其中保费和分配表示为倾斜分布下的期望。在 Furman 和 Zitikis (2008a) 中，加权保费通过将 F 替换为 $\mathrm{d}F_w(x) \propto w(x)\,\mathrm{d}F(x)$ 来定义，由此得到形式为$\mathbb{E}[Xw(X)]/\mathbb{E}[w(X)]$ 的泛函，并通过不同的权重函数恢复净保费、Esscher 型和基于尾部的原则。在 Furman 和 Zitikis (2008b) 中，同一视角被扩展到通过双变量加权泛函 $\mathbb{E}[Xw(Y)]/\mathbb{E}[w(Y)]$进行资本分配；Furman 和 Zitikis (2009) 随后将加权分布作为统一精算与经济定价原则的机制，并探讨其与基于扭曲的构造之间的关系。在 Furman 等人 (2021) 中，作者明确将规模偏置纳入这一框架，并强调了与本文所用类似的单变量变换恒等式，不过他们没有考察多变量情形，也没有探讨与 CMRS 的联系。

针对离散情形下的 CMRS，已有研究提出相关计算方法。在 Blier- Wong 等人 (2025) 中，作者考察具有格点支撑分量的投资组合，并研究如何通过生成函数高效计算条件均值：他们使用期望分配 $\mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S=s\}}]$，并将普通生成函数与多变量概率生成函数联系起来。基于变换的方法的主要优势在于，在变换域中，卷积会变成乘积，无需进行多维积分，因此更便于数值计算，尤其是在高维情形下。我们在第 5.3 节考察的一些示例可扩展至多达 $n = 100\,000$ 位参与者的维度，而精确方法（可得闭式解）仅能扩展至 $n = 4$。基于变换的方法可得到易于处理的算法，包括用于提取期望分配的递归恒等式和基于快速傅里叶变换的方法。他们的框架适用于复合分布、联合变换依赖结构和重尾边缘分布，并应用于点对点风险分担和欧拉型资本分配。本文旨在建立一个基于变换的框架，用于计算连续情形下的 CMRS 分配（尽管主要结果适用于一般的非负随机变量，包括离散和混合情形），因为概率生成函数方法在此不再适用。我们研究 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换，它是混合分布中概率生成函数的对应物，并得到 $\mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S=s\}}]$的基于变换的表示，从而简化 CMRS 分配的计算。基于这一表示，我们针对若干易于处理的模型类别推导出闭式或半解析的 CMRS 分配，提出数值反演方法，并证明指数倾斜能够提高稀有事件分配的稳定性。

基于变换的方法也已用于相关条件期望的研究。例如，Fonseca 和 Wong（2026）研究了基于威沙特分布的损失模型，并推导出形式为 $\mathbb{E}[X_i^q \mid S > s^*]$ 的条件尾部泛函的傅里叶公式。这些公式以涉及矩母函数导数的一维积分表示，并通过联合变换求导，将多元条件量化简为低维变换计算。

长度偏倚表示要求均值有限，而 CMRS 本身并无此要求：即使没有矩假设，分配测度仍有良好定义。因此，尽管我们对 CMRS 的基于变换的表示与长度偏倚变换密切相关，它也适用于均值无限的情形，因为对于每个 $t > 0$，分配测度的拉普拉斯变换均有定义，无需满足矩条件。话虽如此，均值无限的模型在风险分担实践中鲜少具有现实意义：在重尾帕累托损失下，进一步多元化可能会降低一阶随机占优意义下的福利（Chen 等，2025；Chen 和 Wang，2025），因此我们在应用中聚焦于均值有限的情形。

本文其余部分安排如下。第 2 节陈述并证明 CMRS 的 LST刻画。第 3 节推导若干闭式情形的表达式，包括脆弱性依赖构造、指数离散族边缘以及矩阵指数分布。第 4 节讨论数值反演方法。第 5 节说明如何利用指数倾斜，在稀有事件下稳定条件均值的计算，并给出数值示例。第 6 节总结全文，附录 A 则包含主要结果的证明。

2 基于变换的 CMRS 表示

2.1 条件均值风险分担与分配测度

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间，且 $X_1, \ldots\ldots, X_n : \Omega \to [0, \infty)$ 是非负随机变量。令 $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$，并以 μ_S 表示其分布律。CMRS 规则将以下分配赋予分量 i

分配

$$h_i(s) := \mathbb{E}[X_i \mid S = s], \qquad s \geq 0. \tag{1}$$

向量 $\boldsymbol{h}(s)$ 满足预算平衡条件 $\sum_{i=1}^{n} h_i(s) = s$，对于 μ_S-几乎处处的 s 均成立；McNeil 等人（2015）也称之为完全分配性质。CMRS 规则等同于在固定聚合量水平下每个参与者的事后预期分摊额（Denuit 和 Dhaene，2012）。

在离散情形中，S 的支撑集中的每个点上都定义了条件均值，分配可表示为比值 $h_i(s) = \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S=s\}}]/\mathbb{P}(S = s)$。在连续情形中，条件均值定义为拉东–尼科迪姆导数，因此更适合使用分配测度

$$\nu_i(B) := \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S \in B\}}], \qquad B \in \mathcal{B}([0, \infty)), \tag{2}$$

及其总和

$$\nu(B) := \mathbb{E}[S \mathbb{1}_{\{S \in B\}}] = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(B), \tag{3}$$

其中 $\mathcal{B}([0,\infty))$ 是 $[0,\infty)$ 上的 Borel σ-代数。测度 ν_i 刻画了分量 i 在不同 S 水平下对总损失的预期贡献，而 CMRS 随后定义为 $h_i(s) = \mathrm{d}\nu_i / \mathrm{d}\mu_S(s)$，对于 μ_S-几乎所有 s 均成立；我们将在定理 1 中对此作形式化说明。

——

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 的联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换（LST）为

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n) := \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^{n} t_j X_j}\right], \qquad (t_1, \ldots, t_n) \in [0, \infty)^n, \tag{4}$$

以及 $\mathcal{L}_S(t) := \mathbb{E}[e^{-tS}]$。由于 $0 \leq X_i \leq S$，对于每个 $s \geq 0$，

$$\nu_i([0, s]) = \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{S \leq s\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[S \mathbb{1}_{\{S \leq s\}}\right] \leq s < \infty,$$

因此 ν_i 是 σ-有限的。当 S 存在密度 f_S 时，定理 1 表明 ν_i 绝对连续，其勒贝格密度为 ξ_i，即 $\nu_i(B) = \int_B \xi_i(s)\, \mathrm{d}s$。我们在测度层面使用 LST 这一术语，而将“拉普拉斯变换”专用于绝对连续的密度情形。

2.2 CMRS 的拉普拉斯表示

现在我们陈述本文的主要结果，该结果根据随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合 LST 以及分配测度 ν_i 的 LST，刻画 CMRS 分配。

定理 1. 设 $X_1, \ldots\ldots, X_n$ 为非负随机变量，$S = \sum_{j=1}^{n} X_j$、μ_S 为 S 的分布律，并且 ν_i、$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}$ 如(2)–(4)中所定义。则以下结论成立：

（i）对于任意 $(t_1, \ldots, t_n) \in [0, \infty)^n$，若满足 $t_i > 0$，则偏导数 $\frac{\partial}{\partial t_i} \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ 作为双侧导数存在，并且满足

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n) = -\mathbb{E}\left[X_i e^{-\sum_{j=1}^{n} t_j X_j}\right]. \tag{5}$$

若 $t_i = 0$，则右导数存在（可能为 $-\infty$）。特别地，沿对角线 $t_1 = \cdots = t_n = t$，定义

$$\mathcal{L}_i^*(t) := -\left.\frac{\partial}{\partial t_i} \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)\right|_{t_1 = \cdots = t_n = t}, \qquad t \geq 0,$$

使得 $\mathcal{L}_i^*(0) = \mathbb{E}[X_i]$（可能为 $+\infty$），并且

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}\left[X_i e^{-tS}\right], \qquad t > 0. \tag{6}$$

(ii) 令 $m_i := \mathrm{d}\nu_i / \mathrm{d}\mu_S$ 为 ν_i 相对于 μ_S 的拉东–尼科迪姆导数。则 $m_i(S)$ 几乎必然与 $\mathbb{E}[X_i \mid S]$ 重合。此外，对于 μ_S-几乎处处的 s， $\mathbb{E}[X_i \mid S = s] = m_i(s)$ 。

(iii) 若 S 关于勒贝格测度存在密度 f_S ，且 ξ_i 表示 ν_i 的（勒贝格）密度，则对几乎处处的 $s > 0$ （关于勒贝格测度），

$$\xi_i(s) = \mathbb{E}[X_i \mid S = s] f_S(s), \tag{7}$$

而导数 $\mathcal{L}_i^*$ 在 $t_1 = \cdots = t_n$ 处的取值是 ξ_i 的拉普拉斯变换 ：

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \int_0^\infty e^{-ts} \xi_i(s) \, \mathrm{d}s, \qquad t > 0. \tag{8}$$

在独立情形下，联合变换可因式分解，且在相同自变量处的偏导数具有简便的乘积公式，如下列推论所示。

推论1. 若 X_1、…、 X_n 相互独立，则对每个 i 和 $t > 0$,

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L}_{X_i}(t) \right) \prod_{j \neq i} \mathcal{L}_{X_j}(t), \qquad \mathcal{L}_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{L}_{X_j}(t). \tag{9}$$

当边缘密度存在时，这些变换恒等式可转化为原始域中的卷积公式。

推论2. 假设 X_1、…、 X_n 相互独立，且密度 f_{X_i} 和 $f_{S_{-i}}$ 存在，其中 $S_{-i} := \sum_{j \neq i} X_j$。那么

$$f_S = f_{X_i} * f_{S_{-i}}, \qquad \xi_i = (x f_{X_i}(x)) * f_{S_{-i}}.$$

注 1. 定理 *1* 给出了 *Arratia* 等人（*2019*年）；*Denuit*（*2019*年）中大小偏倚恒等式的变换域类比。由于将密度乘以 x 等价于对其拉普拉斯变换求导，我们有

$$\mathcal{L}_{X^*}(t) = \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L}_X(t)}{\mathbb{E}[X]},$$

以及分配 n变换 $\mathcal{L}_i^*(t) = -\frac{\partial}{\partial t_i} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(t, \ldots, t)$ 是未归一化的大小偏倚变换 m.

2.3 数值反演中原子的处理

拉东–尼科迪姆表述对可能包含原子的混合分布成立（例如，具有0处的点质量的Tweedie复合泊松模型），但在存在原子时，CMRS的密度层面的表示在原子位置处失效。特别地，对于使得 $\mu_S(\{s_0\}) > 0$的 s_0 ，原子处的CMRS为

$$\mathbb{E}[X_i \mid S = s_0] = \frac{\nu_i(\{s_0\})}{\mu_S(\{s_0\})}.$$

当 μ_S 或 ν_i 含有原子时，变换 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 包含原子贡献，其拉普拉斯反演产生狄拉克质量而非密度。因此，在应用密度反演规则之前，必须将原子部分提取出来并单独处理。

假设 μ_S 具有有限个原子 $\{s_j\}_{j \in J}$。可以写成

$$\mathcal{L}_S(t) = \sum_{j \in J} \mu_S(\{s_j\}) e^{-ts_j} + \int_{(0,\infty)} e^{-ts} f_S(s) \, \mathrm{d}s, \qquad \mathcal{L}_i^*(t) = \sum_{j \in J} \nu_i(\{s_j\}) e^{-ts_j} + \int_{(0,\infty)} e^{-ts} \xi_i(s) \, \mathrm{d}s,$$

并定义原子变换分量

$$A_S(t) := \sum_{j\in J} \mu_S(\{s_j\})e^{-ts_j}, \qquad A_i(t) := \sum_{j\in J} \nu_i(\{s_j\})e^{-ts_j}.$$

接着，仅对连续余项 $t \mapsto \mathcal{L}_S(t) - A_S(t)$ 和 $t \mapsto \mathcal{L}_i^*(t) - A_i(t)$ 进行数值反演。然后，对于 $s > 0$，在满足 $f_S(s) > 0$ 的连续部分上计算 CMRS 比率 $h_i(s) = \xi_i(s)/f_S(s)$；而在每个原子处，则使用 $h_i(s_j) = \nu_i(\{s_j\})/\mu_S(\{s_j\})$。

在 μ_S 的绝对连续部分上，CMRS 为以下比率

$$\mathbb{E}[X_i \mid S = s] = \frac{\xi_i(s)}{f_S(s)},$$

其中，f_S 和 ξ_i 是通过对 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 扣除原子项和奇异项后得到的绝对连续剩余进行反演而获得的。在原子处，则使用 $\mathbb{E}[X_i \mid S = s_0] = \nu_i(\{s_0\})/\mu_S(\{s_0\})$ 作为 CMRS 分配。

对于大多数保险应用，唯一的原子位于 0 处，对应于无损失事件。在这种情况下，从 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 中提取 0 处的点质量，对连续余项进行数值反演，然后利用 0 处的点质量计算 0 处的 CMRS（显然为零，因为无损失意味着任何组成部分都没有贡献）。

进入 A_S 和 A_i 的点质量 $\mu_S(\{s_j\})$ 和 $\nu_i(\{s_j\})$可通过离散快速傅里叶变换或概率生成函数方法计算（Blier-Wong 等，2025）。在此框架下，我们假设原子的位置事先已知；在保险应用中通常如此，因为唯一的原子位于 0。因此，这种分离使基于快速傅里叶变换的方法能够处理原子部分，而拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换反演（第 4 节）则处理连续部分。

2.4 分配比例与变换层面诊断

下面的引理给出了相对于 ν和 μ_S的 ν_i 的拉东–尼科迪姆导数的链式法则。

引理 1. 对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们有 $\nu_i \ll \mu_S$、$\nu \ll \mu_S$ 和 $\nu_i \ll \nu.$。此外，对于 μ_S-几乎处处的 $s > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}\nu_i}{\mathrm{d}\nu}(s) = \frac{\mathbb{E}[X_i \mid S = s]}{s}. \tag{10}$$

引理 1 使我们能够使用 CMRS 比例

$$\pi_i(s) := \begin{cases} \mathbb{E}[X_i \mid S = s]/s, & s > 0, \\ 0, & s = 0, \end{cases}$$

可将其解释为在s水平下分配给分量 i 的总损失比例。函数 π_i 几乎处处等于 $\mathrm{d}\nu_i/\,\mathrm{d}\nu$，并满足 $\sum_{i=1}^n \pi_i(s) = 1$，对于 μ_S-几乎所有 $s > 0$均成立。在数值应用中，当低概率事件下分子和分母都容易出现数值不稳定性时，比例可能比条件均值更稳定。

CMRS 的变换层面解释引出了变换层面诊断，可将其用作数值一致性检查，以验证分配测度 ν_i 及其变换 $\mathcal{L}_i^*$ 的数值计算是否稳定且准确。我们给出两个诊断恒等式，分别来自预算平衡条件和对角恒等式。首先，由 $\sum_{i=1}^n \nu_i = \nu$ 可得 $\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\nu_i \mathrm{d}\mu_S(s) = s$，对 μ_S-几乎处处的 $s > 0$ 均成立。这就是测度层面的预算平衡条件，

该条件作为精确等式成立，可用于验证分配测度 ν_i 及其导数的数值计算。如果 S 具有密度 f_S，且每个 ν_i 都具有密度 ξ_i，那么平衡条件给出

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(s) = s f_S(s) \tag{11}$$

对于勒贝格几乎处处的 $s > 0$。在实践中，(11) 可作为数值拉普拉斯反演的有效诊断指标。不过，当 f_S 和所有 ξ_i 都使用相同的反演程序和相同的调节参数进行恢复时，所有反演中共有的系统偏差可能会在求和时相互抵消，因此 (11) 对各个变换 $\{\mathcal{L}_i^*\}$ 和 $\mathcal{L}_S$ 之间的差异较为敏感，而非整体反演精度。为此，我们结合使用 (11)、归一化和矩检验（当矩有限时，根据 $t = 0$ 处的变换进行评估）、对恢复所得密度随反演参数变化的敏感性分析，以及在可行时对两种反演方案进行比较。第二种诊断方法来自对 (6) 关于 i 求和：由于每个 $t > 0$ 都有 $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}[Se^{-tS}]$，且对于 $t > 0$，$\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\mathcal{L}_S(t) = -\mathbb{E}[Se^{-tS}]$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i^*(t) = -\mathcal{L}_S'(t), \qquad t > 0. \tag{12}$$

也可用于验证 $\mathcal{L}_i^*$ 的数值计算。

本节的分析为基于联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换计算 CMRS 分配提供了一个实用框架，现总结如下，见算法1。若联合 LST 可用闭式表示，该流程可得出闭式或半解析的 CMRS 分配。若联合 LST 无法用闭式表示，但可通过数值方法计算，该流程仍然适用，并可通过对变换 $\mathcal{L}_S$和 $\mathcal{L}_i^*$进行数值反演，得到数值 CMRS 分配。

算法 法1： 计算连续CMRS分配的变换方法

1. 计算 $\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t, \ldots, t)$。2. 计算 $\mathcal{L}_i^*(t) = -\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=t}$。3. 若 S 含有原子，则从 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$中减去相应的原子项。4. 对 $(0, \infty)$ 上的绝对连续余项进行数值反演，以恢复 f_S 和 ξ_i。5. 在绝对连续部分上，定义 $h_i(s) = \xi_i(s)/f_S(s)$，其中 $f_S(s) > 0$。6. 对每个满足 $\mu_S(\{s_j\}) > 0$ 的原子 s_j，计算 $h_i(s_j) = \nu_i(\{s_j\})/\mu_S(\{s_j\})$。7. 诊断：(a) 在连续部分上，验证 $\sum_i \xi_i(s) \approx s f_S(s)$。(b) 在原子处，验证 $\sum_i \nu_i(\{s_0\}) = s_0 \mu_S(\{s_0\})$。(c) 在变换域中，验证 $\sum_i \mathcal{L}_i^*(t) \approx -\mathcal{L}_S'(t)$。

3 从 LST 得到的 CMRS 闭式解

本节中，我们将运用 CMRS 的基于变换的表示，在若干可处理的模型类别中推导 CMRS 分配的闭式或半解析表达式，包括脆弱性依赖构造、指数离散族边缘、矩阵指数分布和复合分布。我们将首先讨论脆弱性框架，它与

阿基米德 copula 密切相关，并能方便地对联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换进行因式分解；随后，我们将重点讨论脆弱性框架下指数离散族边缘的情形，由此得到紧凑的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换表达式。请注意，本节考虑的是依赖模型，因为独立情形可作为脆弱性构造的一个特例，通过令 Θ 服从退化分布得到。

3.1 脆弱性模型与阿基米德依赖

一大类依赖模型通过脆弱性构造来定义，该构造规定在给定共同因子 $\Theta \geq 0$的条件下，各风险相互条件独立。这也与阿基米德 copula 密切相关，其中依赖关系由 Θ的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换编码，例如参见 Marshall 和 Olkin（1988）；Oakes（1989）；McNeil 和 Nešlehová（2009）。在处理拉普拉斯变换时（如本文所述），这种构造很有用，因为给定 Θ 后的条件独立性使联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换可以分解为条件拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换的乘积，而后对 Θ的分布积分即可得到无条件拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换。

假设 Θ 是一个非负随机变量，且$(X_1, \ldots\ldots, X_n)$在给定 Θ的条件下相互独立。对每个 i，令 $\mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t) := \mathbb{E}[e^{-tX_i} \mid \Theta = \theta]$ 表示条件拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换。假设$(\theta, t) \mapsto \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)$是联合可测的。那么，对于所有$(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in [0,\infty)^n$,

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} \mathcal{L}_{X_j|\Theta}(t_j)\right] = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n} \mathcal{L}_{X_j|\Theta=\theta}(t_j)\mu_\Theta(\,\mathrm{d}\theta), \tag{13}$$

其中 μ_Θ 是 Θ的分布律。特别地,

$$\mathcal{L}_S(t) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n} \mathcal{L}_{X_j|\Theta=\theta}(t)\mu_\Theta(\,\mathrm{d}\theta), \qquad t \geq 0. \tag{14}$$

在脆弱性模型下，$\mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}[X_i e^{-tS}]$ 可化为关于 μ_Θ的一维积分，其中涉及条件拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换的导数。

命题 1. 假设给定 Θ 后，X_1、……、X_n 条件独立。对于$t > 0$，有

$$L_i^*(t) = \int \left(\mathbb{E}[X_i e^{-tX_i} \mid \Theta = \theta] \prod_{j \neq i} \mathbb{E}[e^{-tX_j} \mid \Theta = \theta] \right) \mu_\Theta(\,\mathrm{d}\theta).$$

¯当 Θ作为随机尺度参数时，例如在模型 $F_{X_i|\Theta=\theta}(x) = \exp(-\theta x/\lambda_i)$中，¯无条件生存函数为 $F_{X_i}(x) = \mathcal{L}_\Theta(x/\lambda_i)$，生存 copula 是以 $\phi(u) = \mathcal{L}_\Theta(u)$为生成元的阿基米德 copula。

3.2 脆弱性下的指数离散族与 Tweedie 边际分布

当条件边缘分布属于指数离散族时，脆弱性构造尤为方便；该族包括伽马分布、逆高斯分布和 Tweedie 分布 Jørgensen（1987），这些分布广泛应用于保险应用。给定 Θ 时的条件独立以及指数离散族结构，使得联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换可以方便地分解。在$\Theta = \theta$条件下，假设每个随机变量 X_i 具有如下形式的单参数指数离散族密度

$$f_{X_i|\Theta=\theta}(x) = \exp\left\{ \frac{x\eta_i(\theta) - \kappa_i(\eta_i(\theta))}{\phi_i} \right\} b_i(x,\phi_i), \qquad x \in \mathcal{X}_i \subseteq [0,\infty), \tag{15}$$

其中， $\phi_i > 0$ 为离散参数， $\eta_i(\theta)$为典范参数， κ_i 为累积量函数。我们假设(b_i, κ_i)满足标准的指数离散族正则条件，详见 Jørgensen（1987）。在给定 $\Theta = \theta$ 的条件下， X_i 的均值和方差分别由 $\mathbb{E}[X_i \mid \Theta = \theta] = \kappa_i'(\eta_i(\theta))$和 $\mathrm{Var}(X_i \mid \Theta = \theta) = \phi_i \kappa_i''(\eta_i(\theta))$给出。

每当 $\eta_i(\theta) + \phi_i u$ 属于 κ_i 的定义域时，给定 $\Theta = \theta$ 的X_i 条件矩母函数为

$$M_{X_i|\Theta=\theta}(u) := \mathbb{E}[e^{uX_i} \mid \Theta = \theta] = \exp\left\{\frac{\kappa_i(\eta_i(\theta) + \phi_i u) - \kappa_i(\eta_i(\theta))}{\phi_i}\right\}.$$

因此，对于所有满足 $\eta_i(\theta) - \phi_i t$ 属于 κ_i 的定义域的 $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t) = \exp\left\{\frac{\kappa_i(\eta_i(\theta) - \phi_i t) - \kappa_i(\eta_i(\theta))}{\phi_i}\right\}, \tag{16}$$

$$\partial_t \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t) = -\kappa_i'(\eta_i(\theta) - \phi_i t)\mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t). \tag{17}$$

通过对 Θ 的混合分布律进行积分，我们得到聚合量变换和分配变换的半解析公式。

命题2。 在命题 *1* 的脆弱性和指数离散族设定下，对于所有满足$\eta_j(\theta) - \phi_j t$ 对所有 j 以及对 μ_Θ-几乎所有 θ 均属于 κ_j 的定义域的 $t > 0$,

$$\mathcal{L}_S(t) = \int_0^\infty \exp\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j(\eta_j(\theta) - \phi_j t) - \kappa_j(\eta_j(\theta))}{\phi_j}\right\} \mu_\Theta(\,\mathrm{d}\theta), \tag{18}$$

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \int_0^\infty \kappa_i'(\eta_i(\theta) - \phi_i t) \exp\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j(\eta_j(\theta) - \phi_j t) - \kappa_j(\eta_j(\theta))}{\phi_j}\right\} \mu_\Theta(\,\mathrm{d}\theta). \tag{19}$$

3.3 脆弱性下的混合指数分布

现在考虑混合指数边际分布这一特殊情形：假设对于固定尺度参数 $\lambda_i > 0$， $X_i \mid (\Theta = \theta)$ ∼服从 Exp(θ/λ_i)，其中 $i = 1, \ldots, n,$相互独立；并且存在某个正随机变量 Θ ，其拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为 $\mathcal{L}_\Theta$。

命题3。 假设 $\mathbb{P}(\Theta > 0) = 1$ 且 $\mathcal{L}_\Theta$ 在 $(0, \infty)$上可微。对于互不相同的λ_1、…、 λ_n，定义系数

$$A_k(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{m \neq k} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_m}.$$

(i) 如果 λ_1、…、 λ_n 互不相同，则对于 $s > 0$，聚合量随机变量 S 具有密度

$$f_S(s) = -\sum_{k=1}^n \frac{A_k(\boldsymbol{\lambda})}{\lambda_k} \mathcal{L}_\Theta'\left(\frac{s}{\lambda_k}\right).$$

相应的无条件期望分配密度为

$$\xi_i(s) = -\frac{s}{\lambda_i} A_i(\boldsymbol{\lambda}) \mathcal{L}_\Theta'\left(\frac{s}{\lambda_i}\right) + \sum_{k \neq i} A_k(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}\left(\mathcal{L}_\Theta\left(\frac{s}{\lambda_i}\right) - \mathcal{L}_\Theta\left(\frac{s}{\lambda_k}\right)\right).$$

(ii) 如果 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ 和 S 有密度，那么对于 μ_S-几乎处处的 $s > 0$,

$$\xi_i(s) = \frac{s}{n} f_S(s), \qquad \mathbb{E}[X_i \mid S = s] = \frac{s}{n}.$$

当参数 λ_i 互不相同时，密度或期望分配的条件表达式涉及指数项之和。若某些 λ_i 相同，则具有相同 λ的指标会在求和中形成一个埃尔朗块，因此聚合量随机变量的条件分布律不再是指数项的函数，而是可以表示为混合埃尔朗分布。期望分配也同样如此：给定 Θ时，期望分配也可以用埃尔朗混合表示，其中包含重复 λ 参数的组会生成阶数更高的埃尔朗分量。通过对联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换应用导数恒等式并计算所得积分，便可轻松推导出这些表达式；为简洁起见，此处略去。

例1。 假设 Θ 服从形状参数为 $\alpha > 0$ 、率参数为1的伽马分布，因此 $\mathcal{L}_\Theta(u) = (1+u)^{-\alpha}$ 对于 $u \geq 0$。可以证明，对每个 i， X_i 均具有形状参数为 α 、尺度参数为 λ_i的第二类帕累托分布（洛马克斯分布）边缘分布。由于

$$\mathcal{L}'_\Theta(u) = -\alpha(1+u)^{-\alpha-1}, \qquad u > 0, \tag{20}$$

对于互不相同的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,

$$A_k(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{m \neq k} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_m}.$$

将(20) 代入命题*3(i)*，可得，对于 $s > 0$,

$$f_S(s) = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(\boldsymbol{\lambda})}{\lambda_k} \left(1 + \frac{s}{\lambda_k}\right)^{-\alpha-1};$$

$$\xi_i(s) = \alpha A_i(\boldsymbol{\lambda}) \frac{s}{\lambda_i} \left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-\alpha-1} + \sum_{k \neq i} A_k(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k} \left[\left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{s}{\lambda_k}\right)^{-\alpha}\right].$$

例2。 设 Θ 服从莱维分布（形状参数为$1\ 2$的稳定分布），其拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换为

$$\mathcal{L}_\Theta(u) := \mathbb{E}[e^{-u\Theta}] = \exp\left(-\kappa\sqrt{u}\right), \qquad u \geq 0,$$

对于某个 $\kappa > 0$。可以证明，对于每个 i， X_i 服从形状参数为 $1/2$ 、尺度参数为λ_i/κ^2的 *Weibull* 分布，其密度为

$$f_{X_i}(x) = \frac{\kappa}{2\sqrt{\lambda_i x}} \exp\left(-\kappa\sqrt{\frac{x}{\lambda_i}}\right), \qquad x > 0.$$

由于

$$\mathcal{L}'_\Theta(u) = -\frac{\kappa}{2\sqrt{u}} \exp\left(-\kappa\sqrt{u}\right), \qquad u > 0, \tag{21}$$

将(21) 代入命题*3(i)*可得

$$f_S(s) = \frac{\kappa}{2\sqrt{s}} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(\boldsymbol{\lambda})}{\sqrt{\lambda_k}} \exp\left(-\kappa\sqrt{\frac{s}{\lambda_k}}\right);$$

$$\xi_i(s) = \frac{\kappa}{2} A_i(\boldsymbol{\lambda}) \sqrt{\frac{s}{\lambda_i}} \exp\left(-\kappa\sqrt{\frac{s}{\lambda_i}}\right) + \sum_{k \neq i} A_k(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k} \left(\exp\left(-\kappa\sqrt{\frac{s}{\lambda_i}}\right) - \exp\left(-\kappa\sqrt{\frac{s}{\lambda_k}}\right)\right).$$

3.4 矩阵指数边际分布

矩阵指数（ME）分布是具有有理拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换的非负分布（Bladt 和 Nielsen, 2017）。它们包括相位型（PH）分布、超指数混合分布以及 Erlang 分布混合，这些在保险应用中均起着重要作用；参见 Willmot 和 Lin（2011）；Cheung 等人（2022）。称非负随机变量 X 具有阶为 p的矩阵指数表示，记作 $X \sim \mathrm{ME}_p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T}\ \boldsymbol{u})$，若其在$(0,\infty)$上的密度可写为

$$f_X(x) = \boldsymbol{\alpha} e^{\mathbf{T}x}\boldsymbol{u}, \qquad x > 0,$$

其中某个行向量为 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{1\times p}$，列向量为 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$，矩阵为 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{p\times p}$，其特征值的实部均严格为负。其拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换是如下有理函数

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{-tX}\right] = \mathbb{P}(X=0) + \boldsymbol{\alpha}(t\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\boldsymbol{u}, \qquad t \geq 0, \tag{22}$$

对 (22) 关于 t 求导，得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}\left[Xe^{-tX}\right] = \boldsymbol{\alpha}(t\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-2}\boldsymbol{u}, \qquad t \geq 0.$$

更一般地，对于 $k \in \mathbb{N}$，有 $\mathbb{E}[X^k e^{-tX}] = k!\boldsymbol{\alpha}(t\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-k-1}\boldsymbol{u}$。

T以下示例展示了在一个简单的矩阵指数情形下如何进行 CMRS 计算 .

例 3. 设 $X_1 \sim \mathrm{Erlang}(2,\lambda)$ 和 $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ 相互独立，并令 $S = X_1 + X_2$。X_1 的矩阵指数表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0), \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

使得 $\mathcal{L}_{X_1}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^2$。由 $\mathcal{L}_{X_2}(t) = \frac{\mu}{\mu+t}$，可得

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{X_1}(t)\mathcal{L}_{X_2}(t) = \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda+t)^2(\mu+t)}.$$

假设 $\mu \neq \lambda$，通过拉普拉斯反演可得

$$f_S(s) = \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda-\mu)^2}\left(e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}\left(1 + (\lambda-\mu)s\right)\right), \qquad s > 0.$$

对于 X_1的无条件期望分配密度，由定理 *1* 和独立性可得

$$\mathcal{L}_1^*(t) = \mathbb{E}[X_1 e^{-tS}] = \mathbb{E}[X_1 e^{-tX_1}]\mathbb{E}[e^{-tX_2}] = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_{X_1}(t)\right)\mathcal{L}_{X_2}(t) = \frac{2\lambda^2\mu}{(\lambda+t)^3(\mu+t)}.$$

通过拉普拉斯反演，对于 $s > 0$，可得

$$\xi_1(s) = \frac{2\lambda^2\mu}{(\lambda-\mu)^3}\left(e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}\left(1 + (\lambda-\mu)s + \tfrac{(\lambda-\mu)^2}{2}s^2\right)\right).$$

令 $\delta := \lambda - \mu$，*CMRS* 分配 $h_1(s) = \xi_1(s)/f_S(s)$ 可简化为

$$\mathbb{E}[X_1 \mid S = s] = \frac{2}{\delta}\frac{e^{\delta s} - 1 - \delta s - \frac{1}{2}(\delta s)^2}{e^{\delta s} - 1 - \delta s}, \qquad s > 0.$$

更一般地，对于独立 ME 边际分布，$\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 是有理函数，可以通过部分分式分解或矩阵指数表示解析地进行拉普拉斯反演。

3.5 独立复合 Katz 分布

复合分布常用于保险风险模型，其中 M_i 表示保单持有人 i 的索赔次数，而 $B_{i,\ k}$ 表示第 k 次索赔的赔付额。保单持有人 i的总损失以及投资组合的组合损失分别为

$$X_i := \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

我们假设 M_i 与独立同分布的严重度（$B_{i,\ k}$）$_{k\geq 1}$相互独立，并且集体风险模型（M_i, （$B_{i,\ k}$）$_{k\geq 1}$）在 $i = 1$、.....、n 之间相互独立。定义严重度分布的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换及其负导数如下

$$\phi_i(t) := \mathbb{E}[e^{-tB_{i,1}}], \qquad \phi_i^{(1)}(t) := -\phi_i'(t) = \mathbb{E}[B_{i,1}e^{-tB_{i,1}}], \qquad t > 0.$$

若计数分布 M属于 Katz（a, b, 0）族，则其概率生成函数P_M（z）：$= \mathbb{E}[z^M]$ 满足

$$P_M'(z) = \frac{a+b}{1-az} P_M(z), \qquad |z| < 1, \tag{23}$$

或者等价地，其概率质量函数满足递推关系

$$\mathbb{P}(M = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(M = k-1),$$

当 $k \geq 1$时。该族包括泊松（$a = 0$）、二项（$a < 0$）和负二项（$a > 0$）分布。在这种情况下，复合分布的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换具有方便的闭式表达式，且期望分配变换 $\mathcal{L}_i^*$ 可用 $\mathcal{L}_S$表示。

命题 4。 假设集体风险模型 （M_i,（$B_{i,\ k}$）$_{k\geq 1}$）在 i =1、.....、n 之间相互独立，并且每个频数分布 M_i 都服从 *Katz* （a_i, b_i, 0）分布。那么，对每个 $t > 0$,

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \frac{a_i + b_i}{1 - a_i\phi_i(t)} \phi_i^{(1)}(t) \mathcal{L}_S(t). \tag{24}$$

注 2. 用普通生成函数替换拉普拉斯变换，即可恢复 *Blier-Wong* 等（*2025*）的复合 *Katz* 期望分配恒等式。当 $a_i = 0$ （复合泊松）与损失额服从同一分布时，（24）给出 $\mathcal{L}_i^*$（t）$\propto \mathcal{L}_S'$（t），因此 h_i（s）=（$\lambda_i / \sum_j \lambda_j$）$s$，这与 *Denuit* 和 *Robert*（*2020*）一致。

下面的例子说明了命题 4 在共同冲击复合泊松模型中的应用。注意，该模型的各分量并不独立，但在给定共同冲击时的条件独立使联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换能够方便地分解；随后通过数值反演，可得到聚合量密度与期望分配的闭式密度。

例*4*。考虑一个具有 $n \geq 2$ 条业务线的共同冲击复合泊松模型。令 $N_0 \sim$ *Pois(*λ_0*)* 和 $N_i \sim$ *Pois(*λ_i*)*（$i = 1, \ldots, n$）为相互独立的索赔次数。取权重 $p_i \geq 0$，使得 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$。令 *(*Z_k*)*$_{k\geq 1}$ 为独立同分布的共同冲击严重度，服从 $Z_1 \sim$ *Exp(*β_0*)*；对于每个 i，令 *(*$Y_{i,m}$*)*$_{m\geq 1}$ 为独立同分布的特异性严重度，服从$Y_{i,1} \sim$ *Exp(*β_i*)*，其中 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n >$*0* 不一定相等。所有严重度序列彼此独立，且与 *(*$N_0, N_1, \ldots, N_n$*)* 独立。业务线 i 的损失以及各业务线的聚合量为

$$X_i := \sum_{k=1}^{N_0} p_i Z_k + \sum_{m=1}^{N_i} Y_{i,m}, \qquad S := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，聚合量简化为

$$S = \sum_{k=1}^{N_0} Z_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{N_i} Y_{i,m},$$

因此， S的分布律不依赖于权重向量$(p_1, \ldots, p_n)$。利用 $\mathcal{L}_Z(u)$、 $= \beta_0/(\beta_0 + u)$和$\mathcal{L}_{Y_i}(u) = \beta_i/(\beta_i + u)$， $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换为

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left(\lambda_0 \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j t_j} - 1\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t_i} - 1\right)\right),$$

对于$(t_1, \ldots, t_n) \in [0, \infty)^n$。在对角线上求值可得

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t, \ldots, t) = \exp\left(\lambda_0 \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 + t} - 1\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t} - 1\right)\right), \qquad t \geq 0,$$

并且 S在0 处有一个大小为 $\mathbb{P}(S = 0)$ $=$指数分布$(-\lambda_S)$的单个原子，其中 λ_S $:= \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$。对$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}$ 关于 t_i 求导，并在对角线上求值，可得分配变换

$$\mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}[X_i e^{-tS}] = \mathcal{L}_S(t) \left(\lambda_0 p_i \frac{\beta_0}{(\beta_0 + t)^2} + \lambda_i \frac{\beta_i}{(\beta_i + t)^2}\right), \qquad t > 0,$$

和 ν_i（$\{0\}$） $= \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S=0\}}] = 0$。

为得到闭式密度，定义有理函数：对于 $k = (k_0, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$

$$R_k(t) := \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\beta_j}{\beta_j + t}\right)^{k_j}, \qquad t \geq 0,$$

并令 r_k 表示其逆拉普拉斯变换，它是若干独立随机变量之和在（$0, \infty$）上的密度，其中对于每个满足 $k_j \geq 1$ 的 $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$，第 j 个加项服从形状参数为 k_j、率参数为 β_j 的伽马分布。展开复合泊松概率可得，对于 $s > 0$,

$$f_S(s) = e^{-\lambda_S} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^{n+1} \\ k_0 + \cdots + k_n \geq 1}} \left(\prod_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!}\right) r_k(s),$$

ν_i 在（$0, \infty$）上的密度 ξ_i 为

$$\xi_i(s) = e^{-\lambda_S} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^{n+1}} \left(\prod_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!}\right) \left[\frac{\lambda_0 p_i}{\beta_0} r_{k+2e_0}(s) + \frac{\lambda_i}{\beta_i} r_{k+2e_i}(s)\right], \qquad s > 0,$$

其中， $e_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是（$n+1$）维单位向量。如果 β_0、β_1、…、β_n 两两不同，则每个r_k 都可表示为部分分式形式

$$r_k(s) = \sum_{\substack{j \in \{0,1,\ldots,n\}: \\ k_j \geq 1}} \sum_{r=1}^{k_j} c_{j,r}(k) \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\beta_j s}, \qquad s > 0,$$

其系数为

$$c_{j,r}(k) = \frac{1}{(k_j - r)!} \frac{\mathrm{d}^{k_j - r}}{\mathrm{d}t^{k_j - r}} \Big[(t + \beta_j)^{k_j} R_k(t) \Big] \Big|_{t = -\beta_j}.$$

如果某些率参数相同，则相同的表示仍然成立，只是由重极点产生更高阶的 *Erlang*项。在绝对连续部分上，*CMRS* 分配随后为

$$h_i(s) = \frac{\xi_i(s)}{f_S(s)}, \qquad s > 0, \qquad and \qquad h_i(0) = 0.$$

4 CMRS 的数值拉普拉斯反演

当解析反演不可行，或反演过程过于复杂而不具备实际操作性时，必须根据 CMRS 分配密度的拉普拉斯变换进行数值恢复。本节将介绍一种实用的计算框架，该框架基于 CMRS 的变换层面表示。

回顾一下，如果 S 含有原子或奇异分量，则必须先将其从拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换中移除，再单独处理；参见第 2.3 节。本节所述方法适用于 CMRS 分配的绝对连续部分。

4.1 Gaver–Stehfest 数值反演公式

令 $f:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 在局部可积且为指数阶，其拉普拉斯变换为

$$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\ \mathrm{d}s, \qquad t > 0.$$

Gaver–Stehfest 方法（Gaver，1966；Stehfest，1970）通过在正实轴上对 f 进行有限次求值，得到固定点 $s > 0$ 处 $f(s)$ 的近似值。在 Abate 和 Whitt（2006）的记号下， M 阶近似为

$$f(s) \approx f_M^{\mathrm{GS}}(s) := \frac{\log(2)}{s} \sum_{k=1}^{2M} \zeta_k \hat{f}\left(\frac{k \log(2)}{s} \right), \tag{25}$$

其中权重 ζ_k 仅取决于 M，其定义为

$$\zeta_k = (-1)^{M+k} \sum_{j=\lfloor (k+1)/2 \rfloor}^{\min\{k, M\}} \frac{j^{M+1}}{M!} \binom{M}{j} \binom{2j}{j} \binom{j}{k-j}, \qquad k = 1, \ldots, 2M. \tag{26}$$

在 CMRS 计算中，对于固定的 s，所有反演均可使用相同的节点集 $\{k \log(2)/s : 1 \le k \le 2M\}$，从而可以只计算一次 $\mathcal{L}_S$ 及所有 $\mathcal{L}_i^*$，然后将其组合。

4.2 复平面欧拉反演

在聚合分布的尾部，Gaver–Stehfest 方法可能因权重 ζ_k 快速增长且交替变号，以及变换值 $f(k \log(2)/s)$ 相对平坦而不稳定。计算 CMRS 比率时，这一问题会进一步加剧，因为分子和分母都会受到类似的消去效应影响，从而导致数值不稳定性。欧拉方法是一种替代性的傅里叶级数方法，它在复平面的一条垂直直线上取复数点对变换进行求值，从而缓解消去问题，提升分布尾部的数值稳定性。以下引理证明了 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 在复数参数处的解析延拓是成立的，而这是使用欧拉方法所必需的。

引理 2. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的非负随机变量。对于满足 $\Re z > 0$ 的 $z \in \mathbb{C}$，定义

$$\mathcal{L}_S(z) := \mathbb{E}\big[e^{-zS}\big], \qquad \mathcal{L}_i^*(z) := \mathbb{E}\big[X_i e^{-zS}\big], \qquad i = 1, \ldots, n.$$

则有以下结论。

(i) 函数 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$ 在 $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \Re z > 0\}$上定义良好且全纯 .

(ii) 对每个整数 $m \geq 0$ 和每个 $\gamma > 0$，导数满足

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathcal{L}_S(z) = \mathbb{E}\big[(-S)^m e^{-zS}\big], \qquad \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathcal{L}_i^*(z) = \mathbb{E}\big[(-S)^m X_i e^{-zS}\big],$$

对所有满足 $\Re z \geq \gamma$的 z 均成立，且右端在 $\{\Re z \geq \gamma\}$的紧子集上一致有限并局部有界。

(iii) 若联合拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ 全纯延拓至 $\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n\colon$ $\Re t_j > 0\ \forall j\}$，则对每个满足 $\Re z > 0$的 z，

$$\mathcal{L}_i^*(z) = -\left.\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n)\right|_{t_1 = \cdots = t_n = z}.$$

一种常见的拉普拉斯反演策略是在复平面内沿 Bromwich线进行反演。设 f为指数阶函数，其拉普拉斯变换 $\hat{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zs} f(s)\, \mathrm{d}s$ 在 $\Re z > \sigma_0$上有定义。Bromwich反演公式为

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{zs}\hat{f}(z)\, \mathrm{d}z, \qquad \gamma > \sigma_0.$$

傅里叶级数方法通过在垂直线 $\Re z = \gamma$ 上的复数点处计算 f 来近似该积分。在 Abate 和 Whitt（2006）的欧拉方法中，选择 $A > 0$，设定 $\gamma = A/(2s)$，并在以下位置计算

$$z_k(s) = \frac{A + 2\pi i k}{2s}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

定义保留 N 个复数项的交错部分和为

$$S_N(s) := \frac{e^{A/2}}{s}\left(\tfrac{1}{2}\Re\{\hat{f}(z_0(s))\} + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \Re\{\hat{f}(z_k(s))\}\right),$$

应用欧拉 加速方法，阶数为 m，对序列 $(S_N(s))_{N \geq 0}$ 进行加速，得到近似值

$$f_{N,m}^{\mathrm{Eul}}(s) := \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r} 2^{-m} S_{N+r}(s),$$

其中， N 控制截断， m 控制二项式平滑；详情请参阅 Abate 和 Whitt (2006)。计算 CMRS 时，对于固定的 s，所有数值反演均可使用相同的复节点集 $\{z_k(s)\colon\ k = 0, \ldots, N + m\}$，这样 $\mathcal{L}_S$ 和所有 $\mathcal{L}_i^*$ 都只需计算一次。

4.3 调整数值反演

这两种方法都需要在截断误差和舍入误差之间进行权衡，而预算平衡恒等式 (11) 提供了一种诊断方法，它不依赖于真实的目标函数，可用于调整反演参数。应逐步增大反演参数，直至这些恒等式满足所需的容差。

对于 Gaver–Stehfest 方法，针对平滑目标，提高阶数 M 可提升精度，但权重 (26) 会迅速增大且正负交替，因此当 M较大时，舍入误差会成为主要误差来源。根据 Abate 和 Valkó（2004），要达到 j 位有效数字，需要使用 $M \approx 1.1j$ 项，并以约 $2M$ 位精度进行计算。双精度将 M 限制在约 8–10；若要获得更高精度，则需要采用扩展精度算术（因此计算时间也会更长）。由于ζ_k 涉及较大的组合因子，应使用精确算术或高精度算术计算二项式系数，以避免溢出。权重仅取决于 M，与模型无关，因此可以预先计算并保存，以便在不同模型和 s网格中重复使用。

对于欧拉方法，应逐步增大参数 A、 N和 m，直至诊断恒等式在整个 s网格上趋于稳定（Abate 和 Whitt，2006）。

5 稀有事件 CMRS 的倾斜变换

5.1 Esscher 倾斜变换与平移恒等式

当 s 取较大值时，总损失的密度 $f_S(s)$ 和期望分配测度 ν_i 的分配密度 $\xi_i(s)$ 可能会低于双精度算术的可表示范围。此时，数值反演会发生下溢或产生较大的相对误差，而比值 $h_i(s) = \xi_i(s)/f_S(s)$ 也可能变得不稳定。相关示例与讨论见 (Blier-Wong 等，2025, 第 4 节)。指数倾斜变换（Esscher，1932）是处理变换域上的尾概率和尾部期望计算的标准方法；其在风险聚合和风险分担中的应用，见 Grübel 和 Hermesmeier (1999)；Embrechts 等人 (1993)；Denuit 等人 (2022b)；Denuit 和 Robert (2022a)。

倾斜变换在数值反演之前用一个共同因子同时乘以密度和分配；该倾斜变换会重新缩放目标函数，以减轻数值误差。随后，共同因子在比值中抵消，因此倾斜变换不会改变目标 CMRS 分配 $h_i(s)$，但能使其计算更准确。向上倾斜 ($\theta > 0$) 会向上重新缩放尾部，以减轻下溢；向下倾斜 ($\theta < 0$) 会向下重新缩放尾部，以减轻溢出。实际应用中，下溢是尾部 CMRS 计算的主要问题，因此本节余下内容将重点讨论 $\theta > 0$。

5.2 CMRS 设置中的倾斜变换

现在，我们应用倾斜变换来减少 CMRS 比率中的尾部下溢。对于 $\theta > 0$，定义倾斜后的密度

$$\xi_i^{(\theta)}(s) := e^{\theta s}\xi_i(s), \qquad f_S^{(\theta)}(s) := e^{\theta s} f_S(s).$$

对于 $\Re t > \theta$,

$$\mathcal{L}\{\xi_i^{(\theta)}\}(t) = \mathcal{L}_i^*(t-\theta), \qquad \mathcal{L}\{f_S^{(\theta)}\}(t) = \mathcal{L}_S(t-\theta).$$

CMRS 比率具有倾斜不变性，因为对于 $s \geq 0$,

$$h_i(s) = \frac{\xi_i^{(\theta)}(s)}{f_S^{(\theta)}(s)} = \frac{\xi_i(s)}{f_S(s)}. \tag{27}$$

向上倾斜会将 $\mathcal{L}_S(t)$ 和 $\mathcal{L}_i^*(t)$ 替换为 $\mathcal{L}_S(t-\theta)$ 和 $\mathcal{L}_i^*(t-\theta)$，其中 $\theta > 0$。Gaver–Stehfest 在一组实数节点 $t_k > 0$ 处计算变换；采用向上倾斜后，这些节点移至 $t_k - \theta$，当 $t_k < \theta$ 时可能为负数。因此，使用正向倾斜的 Gaver–Stehfest 方法要求变换在 $(-\theta,\ \infty)$ 上有定义且收敛。对于此处讨论的拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换，其收敛域为 $(0,\ \infty)$，因此不满足这一条件：除非变换可以解析延拓至 $(-\theta,\ 0]$，否则 Gaver–Stehfest 无法与正向倾斜结合使用，而一般情况下并非如此。复平面反演可以避免这一困难。通过选择位于 $\Re z = \gamma > \theta$ 的布ром维奇轮廓，所有移位后的求值点 $z - \theta$ 都处于右半平面 $\{\Re z > 0\}$，变换在该区域内解析。因此，倾斜变换只能通过欧拉方法等复平面方法轻松实现，接下来的数值示例中我们将对欧拉方法应用倾斜变换。

5.3 数值实现

我们在一个条件均值具有精确表达式的情形下演示数值反演方法，以便将数值近似与闭式解进行比较。

5.3.1 共同冲击复合泊松过程的延续与缩放

我们继续例4，考虑一个包含 $n = 3$ 条业务线的共同冲击复合泊松投资组合池。参数集为 $\lambda_0 = 1.5$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8, 1.1, 0.6)$, $\beta_0 = 0.9$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1.4, 0.7, 1.9)$, 以及 $(p_1, p_2, p_3) = (0.2, 0.3, 0.5)$，并在步长为0.1的网格 $s \in [0.1, 75]$ 上进行评估。我们采用 GS 反演（$M = 10$）和欧拉反演（$N = 25, m = 15$），分别使用和不使用向上倾斜（$\theta = 0.2$）。

图 1 展示了三种方法的分配曲线和分配总和诊断。GS 方法在 s 较小时表现良好，但在尾部会失效，此时分配总和明显偏离 s。欧拉方法在尾部也会出现下溢，未进行倾斜变换的版本比进行倾斜变换的版本更早失效。

此 $n = 3$ 设定下的基准运行时间比较见表 1。精确方法虽然最准确，但速度也明显最慢，因为它需要针对每个 s计算一个无穷和（截断为大量项）。为了捕捉尾部行为，需要使用较大的截断点；这对于在较大 s下准确计算 CMRS 分配至关重要。由于项数会随 n呈指数增长，因此计算量关于 n 呈指数增长，这使得精确方法无法用于规模更大的投资组合。GS 方法和欧拉方法快得多，在此示例中，GS 方法略快一些。倾斜变换会给欧拉方法带来少量额外开销。

方法	运行时间（秒）
闭式级数	27.643
GS 反演	0.0440
欧拉反演（$\theta = 0$）	0.0880
欧拉反演（$\theta = 0.2$）	0.1050

Ta表 1：共同冲击复合泊松（ $n = 3$）的运行时间摘要 .

图 2 比较了 GS 方法与欧拉方法的运行时间随参与者数量n 增加时的缩放情况。运行时间在 s 取值网格上测量，并将 100 次重复试验的运行时间均值相对于 n绘制在双对数尺度上。GS 方法的缩放优于欧拉方法一个较小的常数因子，但两种方法在 n 增加时表现出相似的缩放行为。

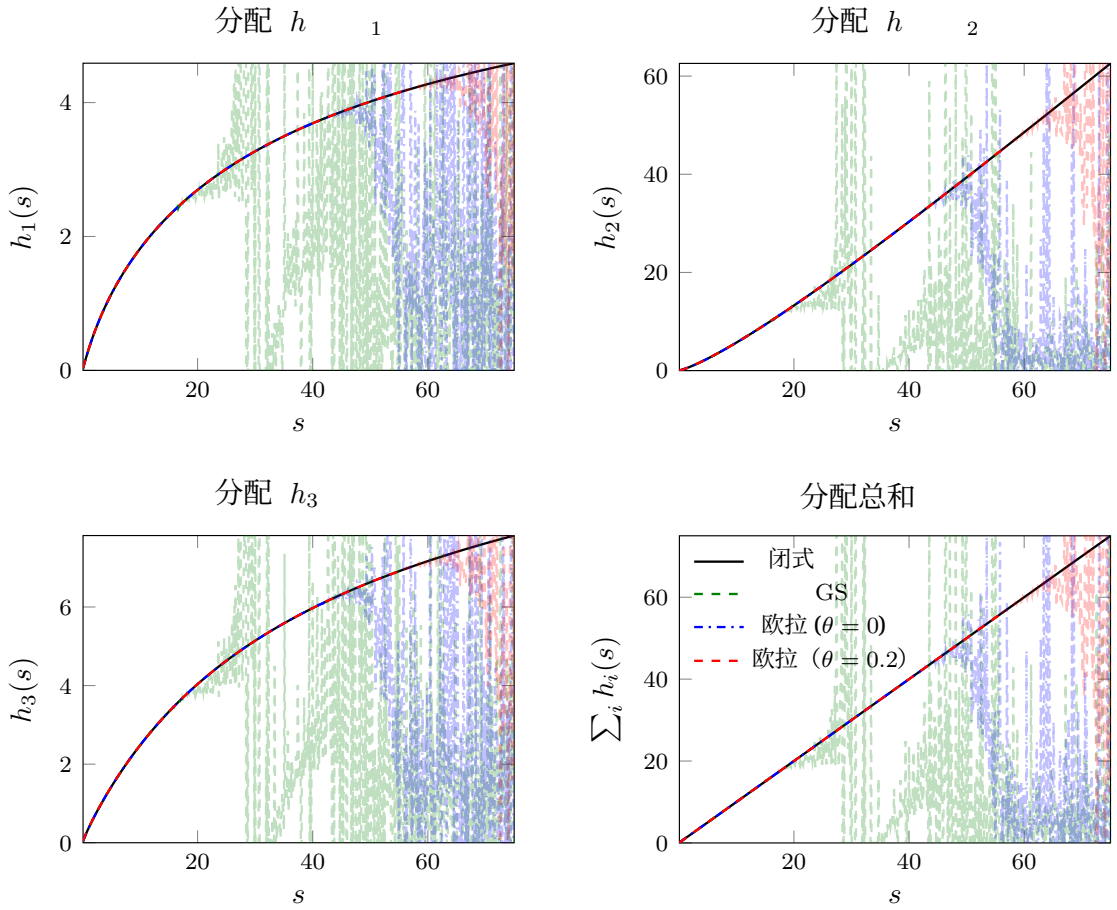


图 1：共同冲击复合泊松：闭式基准、GS 和欧拉数值反演，取$\theta = 0.2$ 和 $\theta = 0$。请注意，当分配总和诊断失效时，我们会将曲线显示为淡色；不同方法在不同的 s 值处出现这种情况。

倾斜参数 $\theta = 0.2$ 与未做倾斜变换的版本相比，并未显著影响运行时间，表明在此设定下倾斜变换的额外开销可以忽略不计。请注意，我们未将闭式方法纳入这一缩放比较，因为它具有指数级运行时间，在较大的 n下变得不可行（即使对于 $n = 5$ 亦然）。尽管在较小的 n之外无法获得闭式基准，预算平衡诊断 (11) 在任意维度下仍可计算，并提供一种无模型精度检验。在我们的实验中，按照第 4.3 节所述充分调节反演参数后，恒等式 $\sum_i \xi_i(s) \approx s f_S(s)$ 在 S 的分布主体中、在所测试的全部 n 范围内仍以高精度成立，表明随着 n 增加，数值近似仍然准确。

5.3.2 独立对数正态实现

考虑 $n = 3$ 个相互独立的对数正态风险 $X_i \sim \mathrm{LN}(\mu_i,\ \sigma_i^2)$，参数设定为边际均值 (1，2，2)，方差为 (5，2，5)，总损失为 $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$。对于 $t > 0$，设

$$\mathcal{L}_S(t) = \prod_{j=1}^{3} \mathbb{E}[e^{-tX_j}], \qquad \mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}[X_i e^{-tX_i}] \prod_{j \neq i} \mathbb{E}[e^{-tX_j}].$$

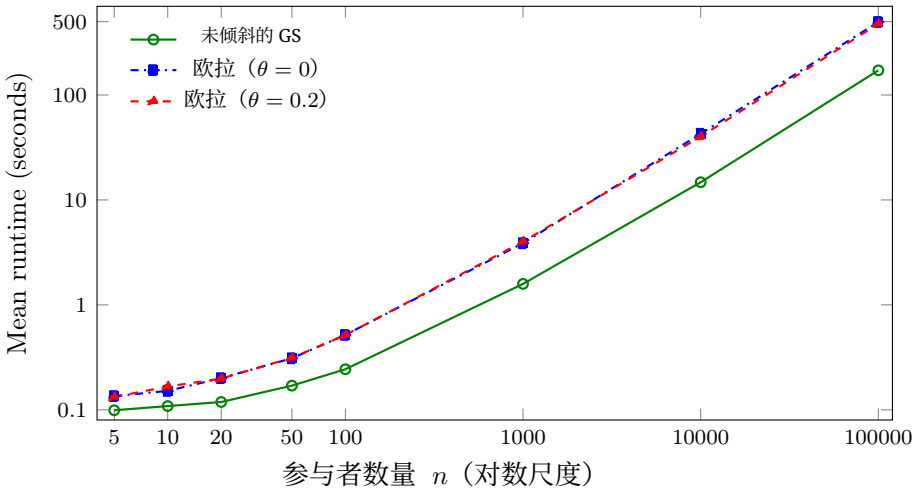


图 2：全网格均值运行时间（秒）的缩放，其运行时间基准与表格相同 1.

与例4不同，例4中存在精确的闭式基准，而这里不存在闭式基准；我们按照 Furman等，2020 中的方法，使用高斯–埃尔米特求积和拉普拉斯反演数值计算 CMRS。

图 3 比较了 GS（未倾斜）、欧拉（未倾斜）和采用向上倾斜的欧拉方法。在分布主体部分，三种方法的结果高度一致。在尾部，GS 方法仍保持平滑，但各项分摊之和偏离预算平衡恒等式，表明存在数值不稳定性。未倾斜和倾斜的欧拉方法在尾部均有所退化；在本例中，倾斜变换略微提高了稳定性，但其效果不如指数情形明显。

6 结论

本文提出了一个通用框架，用于计算总损失模型中的条件均值风险分担（CMRS）分摊。核心思路是，CMRS 分摊 $h_i(s) = \mathbb{E}[X_i \mid S = s]$ 可以表示为拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_S(t) = \mathbb{E}[e^{-tS}]$ 和 $\mathcal{L}_i^*(t) = \mathbb{E}[X_i e^{-tS}]$ 的函数。

主要恒等式 $\mathcal{L}_i^*(t) = -\partial_{t_i}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(t, \ldots\ldots, t)$ 将 CMRS 计算化简为求值 $\mathcal{L}_S$ 和 $\mathcal{L}_i^*$，并进行一维拉普拉斯反演。分配测度表述 $\nu_i(B) = \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S \in B\}}]$ 为 CMRS 定义提供了严谨的基础，将条件均值刻画为拉东–尼科迪姆导数，并给出诊断恒等式 $\sum_i \xi_i(s) = s f_S(s)$，可作为数值实现中与模型无关的检验。

对于具有有理拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换的分布族，包括混合指数分布和矩阵指数边际分布，可以得到 CMRS 的闭式表达式。对于一般情形，该方法是在适当的 t 值网格上计算 $\mathcal{L}_S$和 $\mathcal{L}_i^*$，通过倾斜变换提高数值稳定性，然后使用 Gaver–Stehfest 或欧拉方法进行数值反演。只要能够计算 $\mathcal{L}_S$和 $\mathcal{L}_i^*$，该方法便适用，包括对数正态投资组合（通过求积法，Furman 等人（2020））以及可采用鞍点近似或帕德近似的模型（Ramsay，2008；Asmussen等，2016）。

我们承认，定理 1 从根本上说是积分号下求导和拉东–尼科迪姆定理的直接推论；无论是恒等式 $L_i^*(t) = -\partial_{t_i} L_{\mathbf{X}}(t, \ldots\ldots, t)$，还是 CMRS 的测度论表述，都不需要深奥的概率论工具。本文的主要贡献在于由此实现的计算框架。通过将 CMRS 的计算归约为对 L_S 和 L_i^*的一维拉普拉斯反演，该方法消除了多维

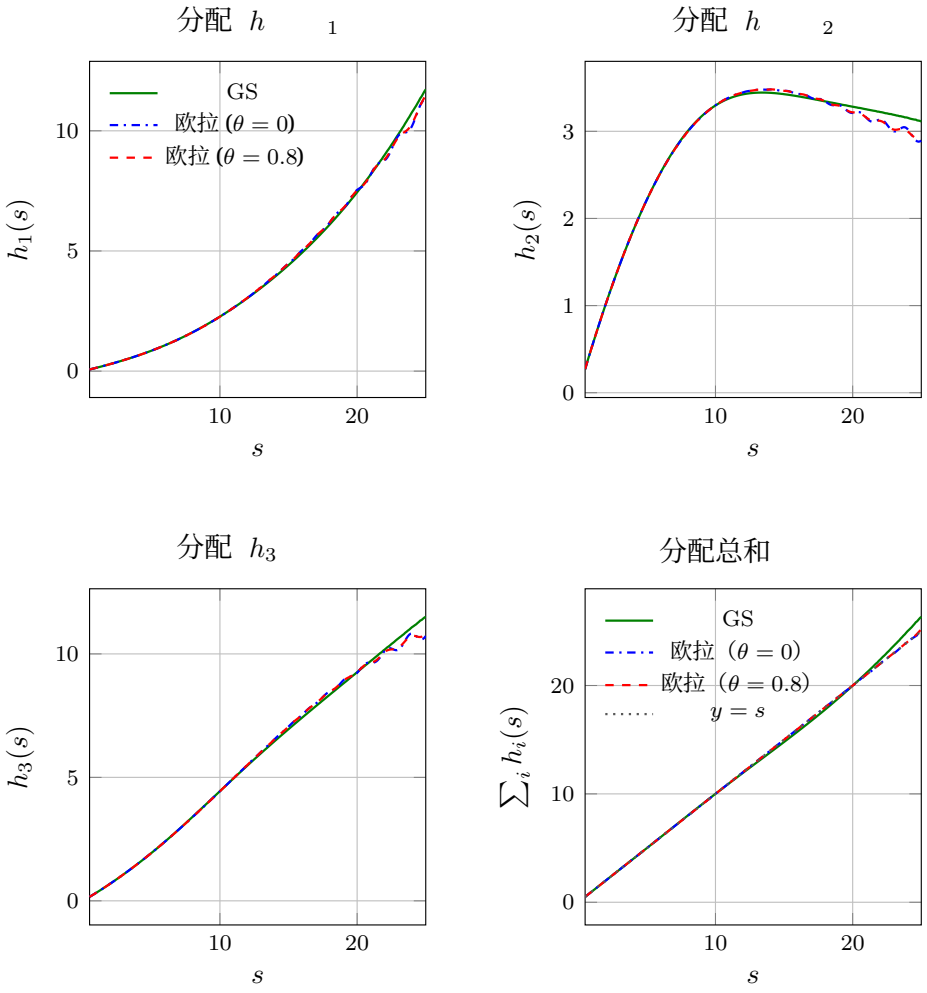


图 3：独立对数正态变量，$s \in [0.5, 25]$：GS（未倾斜）与欧拉反演的比较，其中 $\theta = 0.8$和 $\theta = 0$。各面板展示三个分量分配 h_i（s）以及分配总和诊断$\sum_i h_i$（s）与恒等关系 $y = s$ 的对比。

积分，而这种积分使得直接进行基于密度的计算在超出小规模 n后变得不可行。这种从密度层面计算转向变换层面计算的转变，使其能够扩展到大型投资组合：第 5.3 节中的示例表明，可以常规处理包含 $n = 100\,000$ 名参与者的投资组合；相比之下，即使能够为 CMRS 分配提供显式公式，闭式级数展开对于 $n = 5$而言也已经不切实际。

条件均值 $s \mapsto h_i$（s） $= \mathbb{E}[X_i \mid S = s]$ 也与资本分配直接相关。基于欧拉的分配原则是一种广泛使用的资本分配方法。对于正齐次风险度量 ρ（S）和分解 $S = \sum_i X_i$，第 i 条业务线的贡献为方向导数

$$C_i^{\rho} := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \rho\left(S + \varepsilon X_i\right)\Big|_{\varepsilon=0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} C_i^{\rho} = \rho(S),$$

只要导数存在即可。对于基于分位数的资本 $\rho(S) = \mathrm{VaR}_q(S)$，在连续情形下，欧拉贡献可简化为资本阈值处的条件均值：

$$C_i^{\mathrm{VaR}_q} = \mathbb{E}\left[X_i \mid S = \mathrm{VaR}_q(S)\right] = h_i\left(\mathrm{VaR}_q(S)\right),$$

我们已经可以使用本文提出的基于变换的方法来计算该值。对于尾部风险价值等基于尾部的资本指标，例如尾部风险价值 TVaR$_q$，欧拉贡献就是尾部条件均值

$$C_i^{\mathrm{TVaR}_q} = \mathbb{E}\left[X_i \mid S \geq \mathrm{VaR}_q(S)\right] = \frac{1}{\mathbb{P}\left(S \geq \mathrm{VaR}_q(S)\right)} \int_{\mathrm{VaR}_q(S)}^{\infty} h_i(s) f_S(s)\, \mathrm{d}s,$$

当 S 具有密度 f_S时。被积函数恰好是分配测度密度 $\xi_i(s) = h_i(s) f_S(s)$。

致谢

作者感谢加拿大自然科学与工程研究委员会提供的经费支持（RGPIN-2025-06879）。

A 省略的证明

定理 *1* 的证明。 对于 (i) 部分，固定 $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,\infty)^n$。若 $t_i > 0$，取一个 h 使得 $|h| < t_i/2$，则 $t_i + h > 0$。由此可得

$$\frac{\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_i + h, \ldots, t_n) - \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n)}{h} = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n t_j X_j} \frac{e^{-hX_i} - 1}{h}\right].$$

我们还得出 $\frac{e^{-hx}-1}{h} = -x \int_0^1 e^{-hux}\, \mathrm{d}u$，由此得到界

$$\left| e^{-t_i x} \frac{e^{-hx} - 1}{h} \right| \leq x e^{-(t_i - |h|)x} \leq x e^{-(t_i/2)x} \leq \frac{2}{e t_i}.$$

根据控制收敛定理（Feller，1957，第13章），(5)中的导数成立且双侧存在。若 $t_i = 0$，取 $h > 0$，并注意到对每个 $x \geq 0$，当 $h \downarrow 0$时$(1 - e^{-hx})/h \uparrow x$。根据单调收敛定理，右导数存在（可能为 $-\infty$），且等于(5)中取 $t_i = 0$时的右端。在$(t_1, \ldots, t_n) = (0, \ldots, 0)$处，导数有限当且仅当 $\mathbb{E}[X_i] < \infty$。在对角线 $t_1 = \cdots = t_n = t$ 上求值得到(6)；在 $t = 0$ 处，这导致 $\mathcal{L}_i^*(0) = \mathbb{E}[X_i]$，其可能为无穷。对于 $t > 0$，我们有 $X_i e^{-tS} \leq S e^{-tS}$ 以及$\sup_{x \geq 0} x e^{-tx} < \infty$，因此对每个$t > 0$有 $\mathcal{L}_i^*(t) < \infty$。

对于第 (ii) 部分，首先注意到测度 ν_i 是 σ-有限的，并且相对于 μ_S绝对连续。为证明这一点，考虑 $\mu_S(B) = 0$ 的情形，此时 $\mathbb{1}_{\{S \in B\}} = 0$ 几乎必然成立，因此 $\nu_i(B) = \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S \in B\}}] = 0$，从而 $\nu_i \ll \mu_S$。根据拉东–尼科迪姆定理（Billingsley，1995，第 32 节），存在一个可测函数 $m_i \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$\nu_i(B) = \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{\{s \in B\}} m_i(s) \mu_S(\mathrm{d}s), \qquad B \in \mathcal{B}([0,\infty)). \tag{28}$$

对于任意有界非负可测函数 φ，

$$\mathbb{E}[\varphi(S) X_i] = \int_{[0,\infty)} \varphi(s) \nu_i(\mathrm{d}s) = \int_{[0,\infty)} \varphi(s) m_i(s) \mu_S(\mathrm{d}s) = \mathbb{E}[\varphi(S) m_i(S)].$$

这刻画了 $\mathbb{E}[X_i \mid \sigma(S)]$对 $X_i \geq 0$的情形。若进一步有 $X_i \in L^1$，则对于有界带符号可测函数 φ，同一恒等式仍然成立。特别地，由于 $0 \leq X_i \leq S$，我们有 $0 \leq m_i(s) \leq s$ 对μ_S-几乎处处的 s成立；因此，即使在 $\mathbb{E}[X_i] = \infty$ 的情况下，条件均值在每一点上仍是有限的。

对于第（iii）部分，若 $\mu_S(\mathrm{d}s) = f_S(s)\, \mathrm{d}s$，则（28）变为 $\nu_i(B) = \int_B m_i(s) f_S(s)\, \mathrm{d}s$，因此对于勒贝格几乎处处的 s，有 $\xi_i(s) = m_i(s) f_S(s)$，这对应于（7）。接着，（8）由（6）和 ν_i的定义得出。

□

推论*2*的证明。根据独立性以及密度的存在性，(X_i, S_{-i}) 在 $(0,\infty)^2$ 上具有联合密度$f_{X_i}(x)f_{S_{-i}}(y)$。对于 $s>0$，我们有

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x = (f_{X_i} * f_{S_{-i}})(s).$$

由于 $\nu_i(B) = \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{S\in B\}}]$ 具有密度 ξ_i，我们有

$$\nu_i(B) = \iint_{(0,\infty)^2} x\mathbb{1}_{\{x+y\in B\}} f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B \left(\int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s.$$

因此 $\nu_i(\mathrm{d}s) = \xi_i(s)\,\mathrm{d}s$，其中

$$\xi_i(s) = \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x = (x f_{X_i}(x)) * f_{S_{-i}}(s),$$

如所断言。 □

引理 *1* 的证明。关系式 $\nu_i \ll \mu_S$ 与 $\nu \ll \mu_S$ 的得出方式同定理 1(ii)。对于 $\nu_i \ll \nu$，注意若 $\nu(B)=0$，则 $S\mathbb{1}_{\{S\in B\}}=0$ 几乎必然，又由于 $0\le X_i\le S$，我们亦有 $X_i\mathbb{1}_{\{S\in B\}}=0$几乎必然，从而 $\nu_i(B)=0$。对于链式法则，我们有 $\nu=\sum_{j=1}^n \nu_j$，并且由定理 1 $\frac{\nu_j}{\mu_S}\,s = \mathbb{E}[X_j \mid S=s]$ μ_S $s>0$ $\nu_i\ll\nu\ll\mu_S$ $\frac{\nu}{\mu_S}\,s = \sum_j \mathbb{E}[X_j \mid S=s] = \mathbb{E}[S \mid S=s]$ μ_S (ii)，dd( ) 对 -几乎每一个 。因此 dd( ) 对 -几乎每一个 。由于 ，拉东–尼科迪姆链式法则（例如，参见 Billingsley (1995) 第 32 节）给出 (10)。 □

命题 *1* 的证明。我们首先验证第 3.1 节中陈述的联合可测性假设。对于每个固定的 $t\ge 0$，只要条件分布来自给定 Θ 时 $(X_1,\dots,X_n)$ 的正则条件分布，映射 $\theta\mapsto \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)$ 就是博雷尔可测的。由于对每个 θ，根据控制收敛（利用 $e^{-tX_i}\le 1$），$t\mapsto \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)$ 都是连续的，因此映射 $(\theta,t)\mapsto \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)$ 是联合可测的。此外，一致界 $|\mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)|\le 1$ 给出了一个关于 μ_Θ 可积的控制函数，因此有限个条件拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换的乘积可以与外层期望 $\mathbb{E}_\Theta[\cdot]$ 通过控制收敛交换次序。

注意，$0\le X_i e^{-tS}\le 1/(et)$ 确保对每个 $t>0$，$\mathbb{E}[X_i e^{-tS}]<\infty$。根据塔性质，我们有 $L_i^*(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_i e^{-tS}\mid\Theta]\right]$.。关于 Θ 的条件独立性给出

$$\mathbb{E}[X_i e^{-tS}\mid\Theta] = \mathbb{E}[X_i e^{-tX_i}\mid\Theta]\prod_{j\ne i}\mathbb{E}[e^{-tX_j}\mid\Theta],$$

再取外层期望即可证明该结论。 □

命题*2*的证明。恒等式 (18) 由将 (16) 代入 (14) 得到。对于 (19)，从命题 1 出发，并用 (16) 替换每个条件拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换。利用 (17)，我们有 $\mathbb{E}[X_i e^{-tX_i}\mid\Theta=\theta] = -\partial_t \mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t) = \kappa_i'(\eta_i(\theta) - \phi_i t)\mathcal{L}_{X_i|\Theta=\theta}(t)$，由此得到 (19)。 □

命题*3*的证明。令 $r_i/(r_i+t) = \mathcal{L}_{S|\Theta=\theta}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{r_j}{r_j+t}$. r_j = : = θ/λ_i。给定 $\Theta=\theta>0$，我们有 $\mathcal{L}_{\overline{X_i|\Theta=\theta}}(t)$ ( ) 和 ( )。若它们互不相同，利用部分分式可得

$$\mathcal{L}_{S|\Theta=\theta}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k(\boldsymbol{r}) r_k}{r_k+t}, \qquad A_k(\boldsymbol{r}) := \prod_{m\ne k}\frac{r_m}{r_m-r_k},$$

因此条件密度为

$$f_{S|\Theta=\theta}(s)=\sum_{k=1}^{n}A_k(\boldsymbol{r})r_k e^{-r_k s},\qquad s>0.$$

根据 在 $t_1=\cdots=t_n$ 处求值并在条件分布下应用的导数恒等式 ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*_{i|\Theta=\theta}(t):=\mathbb{E}[X_i e^{-tS}\mid\Theta=\theta]&=-\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}|\Theta=\theta}(t_1,\dots,t_n)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=t}\\&=\frac{r_i}{(r_i+t)^2}\prod_{j\neq i}\frac{r_j}{r_j+t}=\frac{\mathcal{L}_{S|\Theta=\theta}(t)}{r_i+t}.\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{L}^*_{i|\Theta=\theta}(t)=\mathcal{L}\{\xi_{i|\Theta=\theta}\}(t)$，其中

$$\xi_{i|\Theta=\theta}(s)=\int_0^s f_{S|\Theta=\theta}(u)e^{-r_i(s-u)}\,\mathrm{d}u.$$

代入 $f_{S|\Theta=\theta}$ 的混合表示并计算初等积分，可得

$$\xi_{i|\Theta=\theta}(s)=A_i(\boldsymbol{r})r_i s e^{-r_i s}+\sum_{k\neq i}A_k(\boldsymbol{r})r_k e^{-r_i s}\frac{1-e^{-(r_k-r_i)s}}{r_k-r_i}.$$

接下来我们推导无条件形式。由于 $r_j=\Theta/\lambda_j$，我们有 $A_k(\boldsymbol{r})=A_k(\boldsymbol{\lambda})$以及$r_k/(r_k-r_i)=\lambda_i/(\lambda_i-\lambda_k)$。由于系数 $A_k(\boldsymbol{\lambda})$可能具有交替符号，我们应用控制收敛定理来证明可将期望与有限符号和对换：对每个固定的 $s>0$,

$$\big|\xi_{i|\Theta}(s)\big|\le s\sum_{k=1}^{n}|A_k(\boldsymbol{\lambda})|\frac{\Theta}{\lambda_k}e^{-(s/\lambda_k)\Theta},$$

并且由于 $\Theta e^{-(s/\lambda_k)\Theta}\le\lambda_k/(es)$确定地成立，右端具有有限期望。因此，期望可以与有限符号和对换。取期望并利用恒等式 $\mathbb{E}[e^{-(s/\lambda)\Theta}]=\mathcal{L}_\Theta(s/\lambda)$与 $\mathbb{E}[\Theta e^{-(s/\lambda)\Theta}]=-\mathcal{L}'_\Theta(s/\lambda)$, 我们得到 f_S 与 ξ_i的所述公式。注意，由于 $\nu_i(B)=\mathbb{E}[X_i\mathbb{1}_{\{S\in B\}}]=\int_B\xi_i(s)\,\mathrm{d}s$ 以及 $\mu_S(\,\mathrm{d}s)=f_S(s)\,\mathrm{d}s$，拉东–尼科迪姆导数给出：对满足$f_S(s)>0$的 μ_S-几乎每一个 $s>0$，有 $\mathbb{E}[X_i\mid S=s]=\xi_i(s)/f_S(s)$。

对于齐次情形，令 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$。给定 $\Theta=\theta>0$ 后，变量$X_1,\dots,X_n$是可交换的，因此对于所有 i,j, 都有 $\mathbb{E}[X_i\mid S,\Theta=\theta]=\mathbb{E}[X_j\mid S,\Theta=\theta]$。对$i$ 求和，得到 $S=\mathbb{E}[S\mid S,\Theta=\theta]=n\mathbb{E}[X_i\mid S,\Theta=\theta]$，故 $\mathbb{E}[X_i\mid S,\Theta=\theta]=S/n$ 几乎必然成立。因此 $\mathbb{E}[X_i\mid S]=S/n$ 几乎必然成立，也就是说，对于 μ_S-几乎所有 $s>0$, 都有 $\mathbb{E}[X_i\mid S=s]=s/n$ 。如果S 具有密度 f_S，那么对于勒贝格几乎处处的 $s>0$，有 $\xi_i(s)=(s/n)f_S(s)$。 □

命题 *4* 的证明。对 M_i 取条件，得到 $\mathcal{L}_{X_i}(t)=P_{M_i}(\phi_i(t))$；由独立性可得$\mathcal{L}_S(t)=\prod_{j=1}^n P_{M_j}(\phi_j(t))$。根据独立性和恒等式

$$\mathbb{E}[X_i e^{-tX_i}]=-\frac{d}{dt}P_{M_i}(\phi_i(t))=P'_{M_i}(\phi_i(t))\,\phi_i^{(1)}(t),$$

我们得到 $\mathcal{L}^*_i(t)=\phi_i^{(1)}(t)\;P'_{M_i}(\phi_i(t))\;\prod_{j\neq i}P_{M_j}(\phi_j(t))$。将 $z=\phi_i(t)$ 代入 (23)，得到 (24)。 □

引理 *2* 的证明。固定 $\gamma > 0$ 并令 $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq \gamma\}$ 为紧集。对所有 $z \in K$，$|e^{-zS}| = e^{-(\Re z)S} \leq e^{-\gamma S} \leq 1$，因此 $\mathcal{L}_S(z)$ 有良好定义，并且对每个 $\omega \in \Omega$，映射 $z \mapsto e^{-zS(\omega)}$ 是整函数。

为说明可在 $\mathbb{E}[\cdot]$ 下求导，注意对任意整数 $m \geq 0$ 和 $z \in K$ ，

$$\left|S^m e^{-zS}\right| \leq S^m e^{-\gamma S} \leq C_{m,\gamma}, \qquad C_{m,\gamma} := \sup_{x \geq 0} x^m e^{-\gamma x} < \infty,$$

其中 $C_{m,\,\gamma} = (m/(e\gamma))^m$ 对 $m \geq 1$ 和 $C_{0,\,\gamma} = 1$ 成立。该界是确定性的，且不依赖于 $z \in K$。因此，对复差商应用控制收敛定理可得，$\mathcal{L}_S$ 在 $\{\Re z > 0\}$ 上全纯，且

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathcal{L}_S(z) = \mathbb{E}\big[(-S)^m e^{-zS}\big], \qquad \Re z \geq \gamma.$$

对于 $\mathcal{L}_i^*$，界 $0 \leq X_i \leq S$ 给出 $|X_i S^m e^{-zS}| \leq S^{m+1} e^{-\gamma S} \leq C_{m+1,\,\gamma} < \infty$ 对 $z \in K$ 成立，因此同样的论证可得其全纯性，并且

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathcal{L}_i^*(z) = \mathbb{E}\big[(-S)^m X_i e^{-zS}\big], \qquad \Re z \geq \gamma.$$

对于第（iii）部分，固定一个紧集 $K' \subset \{(t_1,\ \ldots,\ t_n) :\ \Re t_j \geq \gamma\ \forall j\}$。对于 $t \in K'$，

$$\left| X_i \exp\Big(-\sum_{j=1}^n t_j X_j\Big)\right| \leq X_i e^{-(\Re t_i) X_i} \leq \sup_{x \geq 0} x e^{-\gamma x} = \frac{1}{e\gamma},$$

因此控制收敛定理给出

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(t_1, \ldots, t_n) = -\mathbb{E}\left[X_i \exp\Big(-\sum_{j=1}^n t_j X_j\Big)\right].$$

在 $t_1 = \cdots = t_n = z$ 处取值得到 $-\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{L}_{\underline{\boldsymbol{X}}}(t_1,\ \ldots,\ t_n)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=z} = \mathbb{E}\big[X_i e^{-zS}\big] = \mathcal{L}_i^*(z)$。 □

参考文献

Abate, J. 与 Valkó, P. P.（2004）。多精度拉普拉斯变换反演。《国际工程数值方法杂志》，60(5):979–993。

Abate, J. 与 Whitt, W.（2006）。数值反演拉普拉斯变换的统一框架。《*INFORMS*计算杂志》，18(4):408–421。

Arratia, R.、Goldstein, L. 与 Kochman, F.（2019年）。适用于所有人的大小偏差。《概率调查》，16:1–61。

Asmussen, S.、Jensen, J. L. 与 Rojas-Nandayapa, L.（2016）。关于对数正态分布的拉普拉斯变换。《应用概率的方法与计算》，18(2):441–458。

Bargès, M.、Cossette, H. 与 Marceau, É.（2009）。使用Copula的基于TVaR的资本分配。《保险：数学与经济学》，45(3):348–361。

Billingsley, P. (1995). 《概率与测度》. 约翰·威立父子公司，第3版 .

Bladt, M. and Nielsen, B. F. (2017). 应用概率中的矩阵指数分布，概率论与随机建模第81卷。施普林格美国公司，马萨诸塞州波士顿。Blier-Wong, C., Cossette, H., and Marceau, E. (2025). 高效计算风险分摊。《保险：数学与经济学》，122:119–136。Boonen, T. J. and Chiu, K. L. (2025). 串行风险分担。*10.2139/ssrn.5373316*。Chen, Y., Hu, T., Wang, R., and Zou, Z. (2025). 无风险厌恶的无限均值帕累托模型的多元化。《欧洲运筹学杂志》，323(1):341–350。Chen, Y. and Wang, R. (2025). 风险管理中的无限均值模型：讨论与最新进展。《风险科学》，1:100003。Cheung, E. C., Peralta, O., and Woo, J.-K. (2022). 多元矩阵指数仿射混合分布及其在风险理论中的应用。《保险：数学与经济学》，106:364–389。Cossette, H., Mailhot, M., and Marceau, É. (2012). 正连续索赔金额的多元复合分布的基于TVaR的资本分配。《保险：数学与经济学》，50(2):247–256。Denuit, M. (2019). 长度偏倚变换与条件均值风险分担及其在点对点保险和年金池中的应用。《*ASTIN*公报：国际精算协会期刊》，49(3):591–617。Denuit, M. and Dhaene, J. (2012). 凸序与共单调条件均值风险分担。《保险：数学与经济学》，51(2):265–270。Denuit, M., Dhaene, J., and Robert, C. Y. (2022a). 风险分担规则及其性质，以及在点对点保险中的应用。《风险与保险杂志》，89(3):615–667。Denuit, M., Hieber, P., and Robert, C. Y. (2022b). 大型生存者基金中的死亡率抵免。《*ASTIN*公报》，52(3):813–834。Denuit, M. and Robert, C. Y. (2020). 条件均值风险分担的大额损失行为。《*ASTIN*公报》，50(3):1093–1122。Denuit, M. and Robert, C. Y. (2021). 从风险分担到大量异质损失的纯保费。《保险：数学与经济学》，96:116–126。Denuit, M. and Robert, C. Y. (2022a). 相关损失和条件独立损失的条件尾部期望分解与条件均值风险分担。《应用概率的方法与计算》，24:1953–1985。Denuit, M. and Robert, C. Y. (2022b). 保险损失条件均值风险分担的多项式级数展开与矩近似。《应用概率的方法与计算》，24(2):693–711。Embrechts, P., Grübel, R., and Pitts, S. M. (1993). 快速傅里叶变换算法在保险数学中的若干应用。《荷兰统计学》，47(1):59–75。Esscher, F. (1932). 集体风险理论中的概率函数。《斯堪的纳维亚精算学杂志》，15:175–195。

Feller, W. (1957). 概率论及其应用导论. Wiley, 纽约, 第2版。Fonseca, J. D. and Wong, P. (2026). Wishart条件尾部风险度量：一种解析方法。*arXiv:2602.06401*. Furman, E., Hackmann, D., and Kuznetsov, A. (2020). 关于对数正态卷积：一种用于经济资本确定的解析数值方法。《保险：数学与经济学》, 90:120–134. Furman, E., Kye, Y., and Su, J. (2021). 对Michel Denuit于2020年1月发表的《复合和的尺寸偏倚风险度量》的讨论。《北美精算学报》, 25(4):631–636. Furman, E. and Zitikis, R. (2008a). 加权保费计算原则。《保险：数学与经济学》, 42(1):459–465. Furman, E. and Zitikis, R. (2008b). 加权风险资本分配。《保险：数学与经济学》, 43(2):263–269. Furman, E. and Zitikis, R. (2009). 加权定价泛函及其在保险中的应用。《北美精算学报》, 13(4):483–496. Gaver, D. P. (1966). 观察随机过程与近似变换反演。运筹学, 14(3):444–459. Grübel, R. and Hermesmeier, R. (1999). 复合分布计算I：混叠误差与指数倾斜。《*ASTIN*公报》：国际精算协会期刊, 29(2):197–214. Jiao, Z., Kou, S., Liu, Y., and Wang, R. (2022). 匿名化风险分担的公理化理论。*arXiv:2208.07533*. Jørgensen, B. (1987). 指数离散模型。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》, 49(2):127–145. Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988). 多元分布族。《美国统计学会杂志》, 83(403):834–841. McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). 《定量风险管理：概念、技术与工具》. 普林斯顿金融丛书。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，第2版。McNeil, A. J. and Nešlehová, J. (2009). 多元阿基米德copula、d-单调函数与 ℓ1-范数对称分布。《统计年鉴》, 37(5B). Oakes, D. (1989). 由脆弱性因子诱导的双变量生存模型。《美国统计学会杂志》, 84(406):487–493. Ramsay, C. M. (2008). 具有任意形状参数的独立同分布帕累托随机变量之和的分布。《统计通讯：理论与方法》, 37(14):2177–2184. Stehfest, H. (1970). 算法368：拉普拉斯变换的数值反演。《*ACM*通讯》, 13(1):47–49. Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2011). 使用混合埃尔朗分布进行风险建模。《商业与工业中的应用随机模型》, 27(1):2–16.