arXiv:2603.01435v1 [math.PR] 2 Mar 2026

颜色 高温下 Potts 自旋玻璃的对称性

Heejune Kim *

摘要

我们证明，在含有 $\kappa \geq 3$ 种颜色的 Potts 自旋玻璃模型中，颜色对称性在高温下得以保持。我们的证明采用二阶矩方法，将其应用于经过适当中心化处理的哈密顿量所对应的平衡模型，同时结合非无序 Potts 模型 [12] 的结果。对于 $\kappa = 2$，我们利用模型的规范对称性证明，在所有温度 $\beta \in [0, \infty]$ 下，非平衡构型出现的概率都呈指数级小。

1 引言与主要结果

Potts 自旋玻璃是 Sherrington–Kirkpatrick（SK）模型的 κ色推广。对于一个含有 N 个自旋的系统，令 $\Sigma_\kappa = [\kappa]^N$ 表示构型集合。对于任意 $\sigma \in \Sigma_\kappa$，磁化向量 $d(\sigma) \in \mathcal{D}_\kappa := \{d \in [0,1]^\kappa : d_1 + \cdots + d_\kappa = 1\}$ 定义为

$$d(\sigma) = \left(N^{-1}|\{i \in [N] : \sigma_i = a\}|\right)_{a \in [\kappa]}.$$

我们将受约束构型集合定义为 $\Sigma_\kappa^d = \{\sigma \in \Sigma_\kappa : d(\sigma) = d\}$，其中 $d \in \mathcal{D}_\kappa$。特别地，若 $d(\sigma) = \kappa^{-1}\mathbb{1}$，则称一个构型为平衡构型，并令 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$表示所有这类构型的集合。我们将每个构型 $\sigma = (\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_N)$视为一个 $\kappa \times N$矩阵，其列为 $\mathbb{R}^\kappa$中的标准基向量 $(e_a)_{a \in [\kappa]}$。稍微滥用一下记号，我们将交替使用$\sigma_i = e_a$ 和 $\sigma_i = a$。Potts 自旋玻璃模型的哈密顿量定义为

$$H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j \in [N]} g_{ij} \mathbb{1}\{\sigma_i = \sigma_j\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j \in [N]} g_{ij} \sigma_i^\intercal \sigma_j \quad \text{for} \quad \sigma \in \Sigma_\kappa, \tag{1.1}$$

其中 $(g_{ij})_{i,\ j \in [N]}$ 是独立同分布的标准正态随机变量。与 (1.1) 相关的量包括基态能量 $\mathrm{GSE}_{N,\ \kappa} = N^{-1}\mathbb{E}\max_{\sigma \in \Sigma_\kappa} H_N(\sigma)$，以及逆温度为 $\beta \in [0, \infty)$ 时的自由能，

$$F_{N,\beta} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\beta}, \quad \text{where} \quad Z_{N,\beta} := \sum_{\sigma \in \Sigma_\kappa} \exp(\beta H_N(\sigma))$$

称为配分函数。相应的吉布斯测度$G_{N,\ \beta}$ 由其概率质量函数定义

$$G_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\exp(\beta H_N(\sigma))}{Z_{N,\beta}} \quad \text{for} \quad \sigma \in \Sigma_\kappa,$$

并且我们用 $G_N^{\otimes\infty}{}_{,\beta}$ 表示相对于乘积测度的平均值 $\langle\cdot\rangle_{N,\beta}$. 在零温极限下 $\beta = \infty$, $G_{N,\infty}$ 表示在使 $H_N(\sigma)$ 最大化的构型集合上的均匀分布。

*电子邮件：kim01154@umn.edu。

我们类似地定义平衡基态能量 $\mathrm{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa}$、平衡自由能 $F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta}$和平衡配分函数 $Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta}$，方法是将范围限制在平衡构型 $\Sigma^{\mathsf{bal}}_{\kappa}$，并假设$N \in \kappa\mathbb{N}$。更一般地，对于磁化向量$d \in \mathcal{D}_\kappa \cap \mathbb{Q}^\kappa$ 和满足 $N \in \mathrm{lcm}(d)\mathbb{N}$ 的条件，可以定义受 Σ^d_κ 约束的模型，其中 $\mathrm{lcm}(d)$ 是 d 约分后各分母的最小公倍数。今后，只要对模型施加约束，我们就假定 N 满足必要的整除条件。

Panchenko [21] 将极限自由能 $\lim_{N\to\infty} F_{N,\beta}$ 的 Parisi 公式建立为：对于每个 $d \in \mathcal{D}_\kappa$，该公式等于模型在 Σ^d_κ 附近受约束时的 Parisi 公式的上确界。基于这项工作，Bates–Sohn [1, 定理 1.7] 证明，这个受约束的 Parisi 公式确实与极限约束自由能 $\lim_{N\to\infty} F^d_{N,\beta}$ 一致，后者关于 $d \in \mathcal{D}_\kappa \cap \mathbb{Q}^\kappa$ 是一致连续的（见 [1, 引理 E.4]）。我们可以将这些结果概括如下

$$\lim_{N\to\infty} F_{N,\beta} = \max_{d\in\mathcal{D}_\kappa} \lim_{N\to\infty} F^d_{N,\beta}, \tag{1.2}$$

其中，我们利用一致连续性将 $\lim_{N\to\infty} F^d_{N,\beta}$ 扩展到了所有 $d \in \mathcal{D}_\kappa$。对于平衡构型这一特殊情形，Bates–Sohn [1, 定理 1.3 和 1.8]表明，极限平衡自由能 $\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta}$ 的 Parisi 公式可借助其序参量大幅简化，形式类似于 SK 模型。他们还指出，该极限平衡自由能总能在 (1.2) 中达到最大值，也就是说，颜色对称性对任意 $\beta \in [0,\infty)$ 都成立。我们将这一概念形式化如下，并纳入极限基态能量的情形。

定义 1.1（颜色对称性）。 我们称 *Potts* 自旋玻璃模型在逆温度 $\beta \in [0,\infty)$ 下保持颜色对称性，当且仅当 $\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta} = \lim_{N\to\infty} F_{N,\beta}$；在零温 $\beta = \infty$下，当且仅当 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa} = \lim_{N\to\infty} \mathrm{GSE}_{N,\kappa}$[1]。否则，该模型在 β. 处破坏颜色对称性

注 1.2。 根据高斯测度的集中性， β 处的颜色对称性破缺等价于这样的说法：在 $\mathbb{E}G_{N,\beta}$ 下，平衡构型出现的概率呈指数级小（例如，参见 [24,命题 13.4.3]）。

关于 Bates–Sohn [1]，提出的上述预测，Mourrat [18] 证明，与该预测相反，只要 $\kappa \geq 58$，颜色对称性就会在以 $2\kappa/(3\sqrt{\pi})$ 为中心、宽度为 β 的一个 $O(\sqrt{\kappa})$ 窗口内破缺。我们预期，对于所有 $\kappa \geq 3$，零温下都会发生颜色对称性破缺（参见下文开放问题的第一项）；这与物理学文献 [2, 8, 10, 11] 中的预测一致。

在本研究中，我们证明了所有 $\kappa \geq 3$. 在高温下都具有颜色对称性。为陈述主要结果，对于 $\kappa \geq 3$，我们定义颜色对称性破缺的高温阈值如下：

$$\beta_\kappa = \sqrt{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)} \cdot \min\Big\{\frac{1}{\sqrt{\kappa-2}}, \frac{\sqrt{2}}{\kappa-2}\Big\}. \tag{1.3}$$

对于 $\kappa \geq 4$，该最小值由第二项取得，而第二项源自 [12, 中相应非无序铁磁 Potts 模型的临界温度（定理 2.1]）。我们的主要定理刻画了处于 $\beta \in [0,\beta_\kappa)$ 范围内的所有 $\kappa \geq 3$ 的高温行为。

定理 1.3。 对于任意 $\kappa \geq 3$ 和 $\beta \in [0,\beta_\kappa)$，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta} = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}F_{N,\beta} = \log\kappa + \frac{\beta^2(\kappa-1)}{2\kappa^2}.$$

特别地，在此高温区域内，颜色对称性得以保持。

[1]极限 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa}$ 和 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{GSE}_{N,\kappa}$ 的存在性可直接由相应自由能极限的存在性推出。事实上，由基本不等式 $\mathrm{GSE}_{N,\kappa} \leq \beta^{-1}F_{N,\beta} \leq \mathrm{GSE}_{N,\kappa} + \beta^{-1}\log\kappa$ 以及极限 $\lim_{N\to\infty} F_{N,\beta}$的存在性，我们可以得出 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{GSE}_{N,\kappa} = \inf_{\beta>0}(\beta^{-1}\lim_{N\to\infty} F_{N,\beta})$。平衡情形类似。

注 1.4. 右端可识别为平衡模型的副本对称解，其中序参量为常值路径 $\pi(t) = \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^{\intercal}$，对所有 $0 < t \leq 1$ 均成立（采用 [1, 定理 1.3]中的记号）。值得注意的是，这与物理学文献 [8, 17]中对无约束极限自由能高温值的预测一致。

我们用一个关于 $\kappa = 2$ 的结果补充定理 1.3：对于所有 $\beta \in [0, \infty]$，非平衡构型出现的概率都呈指数级小。记 $\mathbb{R}^2$ 上的 ℓ^∞-范数为 $\|\cdot\|_\infty$。

命题 1.5。 假设 $\kappa = 2$。那么，对于任意 $\beta \in [0, \infty]$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}G_{N,\beta}\big(\|d(\sigma) - 2^{-1}\mathbb{1}\|_\infty \geq \varepsilon\big) \leq 2e^{-\varepsilon^2 N}.$$

因此，对于所有 $\beta \in [0, \infty]$，颜色对称性均得以保持。

开放问题。 基于上述结果，我们列出一些相关问题。

1. 对于所有 $\kappa \geq 3$，颜色对称性是否会在零温下破缺？注意到，由于平凡的包含关系 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}} \subseteq \Sigma_\kappa \subseteq \Sigma_{\kappa+1}$，$\mathsf{GSE}_{N,\kappa}^{\mathsf{bal}} \leq \mathsf{GSE}_{N,\kappa} \leq \mathsf{GSE}_{N,\kappa+1}$，若能证明以下严格不等式，便可得到这一结论，

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{GSE}_{N,\kappa}^{\mathsf{bal}} > \lim_{N\to\infty} \mathsf{GSE}_{N,\kappa+1}^{\mathsf{bal}} \quad \text{for} \quad \kappa \geq 2,$$

我们猜想该结论成立。关于受限范围 $\kappa \geq 56$ 内零温下颜色对称性破缺的证明，请参见附录 C。

^ 2. 对于 $\kappa \geq 3$，是否存在颜色对称性破缺的临界温度 $\beta_\kappa \in (0, \infty]$，使得当 $\beta \leq \beta_\kappa$ 时颜色对称性得以保持，而当 $\beta > \beta_\kappa$ 时颜色对称性遭到破缺？若存在，定理 1.3 给出了一个下界 $\beta_\kappa \geq \beta_{\kappa\circ}$

3. 对于 $\kappa \geq 3$，求出 $d \in \mathcal{D}_\kappa$ 的极大化点，这些极大化点可能取决于 β，并能使 (1.2) 中的上确界取到。除颜色的置换对称性外，极大化点是否唯一？

1.1 证明概要

对于 $\kappa \geq 3$，通过二阶矩方法分析平衡自由能。哈密顿量中心化是这一方法的关键；如附录 A 所示，若不进行这种调整，二阶矩方法必然会失败。大部分工作在于控制比值 (2.7)，该比值比较中心化平衡配分函数的二阶矩与其一阶矩的平方。为此，我们将该比值分解为两个不同的部分：第一部分通过对库尔贝克–莱布勒散度进行局部展开来处理（见引理 2.5），第二部分则通过应用非无序 Potts 模型 [12] 中的大偏差结果来控制（见引理 2.6）。借助这一框架，我们得以建立命题 2.1 中的极限平衡自由能；结果表明，它与 [12], 中无约束模型的退火极限自由能一致，从而证明了定理 1.3。

对于 $\kappa = 2$，Potts 自旋玻璃模型通过简单的变量替换 $\mathbb{1}\{\tau_i = \tau_j\} = 2^{-1}(\tau_i\tau_j + 1)$ 可化为 SK 模型，其中 $\tau \in \{-1, +1\}^N$；Jagannath–Sen [16, 附录 C] 在零温下确立了颜色对称性 $\beta = \infty$。他们的方法可以推广到 $\beta < \infty$；结合 Parisi 公式的一些额外性质，这将推出命题 1.5。尽管如此，我们仍通过直接利用 SK 模型的规范对称性控制多自旋关联，给出一个不依赖 Parisi 公式的初等证明。SK 模型的规范对称性是指，在任意 $a, \tau \in \{-1, +1\}^N$ 下，哈密顿量的分布在映射 $\tau \mapsto (a_i\tau_i)_{i\in[N]}$ 下保持不变（见引理 3.1）。

相关工作。 Chen [5] 证明，当将足够强的反铁磁相互作用纳入哈密顿量时，颜色对称性仍得以保持。类似地，Chen [4] 证明，这种“自重叠修正”会将 Parisi 公式简化为与平衡的 Potts 自旋玻璃等价的形式 [1]，而 Issa [14]随后将其推广到了置换不变模型。

SK 模型与最大割问题之间的联系最初在 [9], 中得到探讨，随后 Sen [22] 将其推广，并证明 Potts 自旋玻璃的平衡基态能量是稀疏随机图上 Max κ-割问题的首阶修正项。后来，这一关系又在 [15] 中推广到了非齐次稀疏随机图。

最后，尽管规范对称性早已为物理学文献所知（参见 [19, 第 4] 章），但它最近才被重新发现是证明 Edwards–Anderson 模型 [3]及稀释自旋玻璃模型 [6]中无序混沌现象的关键要素。

致谢。作者感谢 Wei-Kuo Chen 和 Arnab Sen 提供宝贵意见。本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2246715。

2 定理 1.3 的证明

在本节中固定 $\kappa \geq 3$ 。如证明概要中所述，我们考虑中心化哈密顿量

$$H_{N,\kappa}(\sigma) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j\in[N]} g_{ij}(\sigma_i^\intercal \sigma_j - \kappa^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j\in[N]} g_{ij}\sigma_i^\intercal P_\kappa \sigma_j, \tag{2.1}$$

其中

$$P_\kappa := I_\kappa - \kappa^{-1}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal.$$

可以验证， $P_\kappa^2 = P_\kappa = P_\kappa^\intercal$确实是投影到由 1 生成的一维子空间的正交补上的正交投影矩阵。分别用$Z_{N,\,\beta,\,\kappa}$ 和$Z_{N}^{\mathsf{bal}}{}_{,\,\beta,\,\kappa}$表示与中心化哈密顿量 (2.1) 对应的配分函数和平衡配分函数。由于 $H_{N,\,\kappa}$ $(\sigma) - H_N(\sigma)$ 是一个均值为零且与 σ 无关的常数，因此我们可以用这些中心化哈密顿量代替原始哈密顿量 (1.1) 来计算自由能，即

$$F_{N,\beta} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\beta,\kappa} \quad \text{and} \quad F_{N,\beta}^{\mathsf{bal}} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}}. \tag{2.2}$$

本节的主要结果是，对于中心化哈密顿量 (2.1)，在高温区域内，极限平衡自由能等于其退火对应量。

命题 2.1。 设 $\kappa \geq 3$。对于 $0 \leq \beta < (\kappa-2)^{-1/2}\sqrt{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)}$，有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}} = \lim_{N\to\infty}\log \mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}} = \log\kappa + \frac{\beta^2(\kappa-1)}{2\kappa^2}.$$

在证明这一点之前，我们先说明命题 2.1 可以直接推出定理 1.3。

定理 1.3 的证明。回忆 (1.3) 中的 β_κ ，并令 $\beta < \beta_\kappa$。注意到

$$\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa} = \sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa} e^{(2N)^{-1}\beta^2\sum_{i,j\in[N]}(\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}-\kappa^{-1})^2} = e^{(2\kappa^2)^{-1}\beta^2 N}\sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa} e^{(2N)^{-1}\beta^2 a_\kappa\sum_{i,j\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}}, \tag{2.3}$$

其中我们使用了关系式，对于 $a_\kappa := 1-2\kappa^{-1}$,

$$(\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}-\kappa^{-1})^2 = a_\kappa\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\} + \kappa^{-2}.$$

(2.3) 的右侧对应于 [12] 中所研究的逆温度为 $\beta^2 a_\kappa$ 的非无序铁磁 Potts 模型。由于 β 满足

$$\beta^2 a_\kappa < \frac{2(\kappa-1)}{\kappa-2}\log(\kappa-1),\ \text{that is},\ 0 \le \beta < \frac{1}{\kappa-2}\sqrt{2\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)},$$

[12,定理 2.1] 和 (2.3) 推出

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa} = \frac{\beta^2}{2\kappa^2} + \log\kappa + \frac{\beta^2 a_\kappa}{2\kappa} = \log\kappa + \frac{\beta^2(\kappa-1)}{2\kappa^2}.$$

由詹森不等式和 (2.2)，我们有 $F_{N,\beta} \le N^{-1}\log \mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}$，结合上一个公式可得

$$\lim_{N\to\infty} F_{N,\beta} \le \log\kappa + \frac{\beta^2(\kappa-1)}{2\kappa^2}.$$

由一个平凡 的不等式 $F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta} \le F_{N,\beta}$、命题 2.1 和 (2.2) 推出所述结果

$$\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta} = \lim_{N\to\infty} F_{N,\beta} = \log\kappa + \frac{\beta^2(\kappa-1)}{2\kappa^2}.$$

□

本节余下部分将证明命题 2.1，为此我们采用二阶矩方法。定义 $\kappa\times\kappa$重叠矩阵如下:

$$R(\sigma,\tau) = \frac{1}{N}\sigma\tau^{\intercal} \quad \text{for} \quad \sigma,\tau\in\Sigma_\kappa.$$

重叠矩阵的各项定义如下:

$$NR_{ab}(\sigma,\tau) = (\sigma\tau^{\intercal})_{ab} = \sum_{i\in[N]}\sigma_{ai}\tau_{bi} = \sum_{i\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i=a,\tau_i=b\},\quad a,b\in[\kappa]. \tag{2.4}$$

令 $\mathbb{Z}_{\ge 0} := \mathbb{N}\cup\{0\}$。对于平衡构型 σ，$\tau\in\Sigma^{\mathsf{bal}}_\kappa$，由 (2.4) 可知，重叠矩阵 $R(\sigma,\tau)$ 属于可容许矩阵的集合[2]

$$\mathcal{A}^{\mathsf{bal}}_\kappa := \Big\{(r_{ab})_{a,b\in[\kappa]}\in(N^{-1}\mathbb{Z}_{\ge 0})^{\kappa\otimes\kappa} : \sum_{a\in[\kappa]} r_{ab} = \sum_{b\in[\kappa]} r_{ab} = \kappa^{-1}\Big\}.$$

将 $\mathbb{R}^N$ 的单位向量记为 $(e_i)_{i\in[N]}$。稍微滥用一下记号，我们也将 $\mathbb{R}^\kappa$ 中的单位向量记为 $(e_a)_{a\in[\kappa]}$。重叠矩阵与哈密顿量 (1.1) 的协方差密切相关。我们用 $\|\cdot\|_F$ 表示方阵的弗罗贝尼乌斯范数。

引理 2.2. 对于 $\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa$，有

$$\mathbb{E}H_N(\sigma)H_N(\tau) = N\|R(\sigma,\tau)\|_F^2.$$

证明. 协方差可计算为

$$N\mathbb{E}(H_N(\sigma)H_N(\tau)) = \sum_{i,j\in[N]} e_i^{\intercal}\sigma^{\intercal}\sigma e_j e_i^{\intercal}\tau^{\intercal}\tau e_j = \sum_{i,j\in[N]}\sum_{a,b\in[\kappa]}(e_i^{\intercal}\sigma^{\intercal}e_a)(e_a^{\intercal}\sigma e_j)(e_i^{\intercal}\tau^{\intercal}e_b)(e_b^{\intercal}\tau e_j),$$

[2] $\mathcal{A}^{\mathsf{bal}}_\kappa$ 位于一个 $(\kappa^2-2\kappa+1)$维仿射欧氏子空间，而且实际上位于比尔科夫多面体的一个伸缩之中 .

其中我们使用了单位分解 $\sum_{a\in[\kappa]} e_a e_a^\intercal = I_\kappa$. 注意标量 $e_a^\intercal \sigma e_i = e_i^\intercal \sigma^\intercal e_a$ 和 $e_b^\intercal \tau e_j = e_j^\intercal \tau^\intercal e_b$。于是我们可以将前面的式子写成

$$\sum_{a,b\in[\kappa]} \sum_{i,j\in[N]} (e_a^\intercal \sigma e_i)(e_i^\intercal \tau^\intercal e_b)(e_a^\intercal \sigma e_j)(e_j^\intercal \tau^\intercal e_b) = \sum_{a,b\in[\kappa]} e_a^\intercal \sigma\tau^\intercal e_b e_a^\intercal \sigma\tau^\intercal e_b = \sum_{a,b\in[\kappa]} e_a^\intercal \sigma\tau^\intercal e_b e_b^\intercal \tau\sigma^\intercal e_a,$$

再次利用单位分解 $\sum_{i\in[N]} e_i e_i^\intercal = I_N$。最后，注意到另一个单位分解 $\sum_{b\in[\kappa]} e_b e_b^\intercal = I_\kappa$，即可得到所述结果

$$\sum_{a\in[\kappa]} e_a^\intercal \sigma\tau^\intercal \tau\sigma^\intercal e_a = \mathrm{Tr}(\sigma\tau^\intercal\tau\sigma^\intercal) = N^2 \,\mathrm{Tr}(R(\sigma,\tau)R(\sigma,\tau)^\intercal) = N^2\|R(\sigma,\tau)\|_F^2.$$

□

对中心化哈密顿量 (2.1) 也可以进行类似的计算。

引理 2.3. 对于 $\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa$，有

$$\mathbb{E}H_{N,\kappa}(\sigma)H_{N,\kappa}(\tau) = N\|P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa\|_F^2.$$

对于平衡构型 $\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$，有

$$P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa = R(\sigma,\tau) - \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal. \tag{2.5}$$

证明. 由于 $P_\kappa^2 = P_\kappa$ 是一个投影，我们可以写作 $H_{N,\kappa}(\sigma) = H_N(P_\kappa\sigma)$，其中 $\sigma\in\Sigma_\kappa$。然后，引理 2.2 蕴含 $\mathbb{E}H_{N,\kappa}(\sigma)H_{N,\kappa}(\tau) = N^{-1}\|P_\kappa\sigma\tau^\intercal P_\kappa\|_F^2 = N\|P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa\|_F^2$。接下来，注意到$\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$意味着 $R(\sigma,\tau)\mathbb{1} = \kappa^{-1}\mathbb{1}$，因此

$$P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa = R - \kappa^{-1}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal R(\sigma,\tau) - \kappa^{-1}R(\sigma,\tau)\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal + \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal R(\sigma,\tau)\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal = R(\sigma,\tau) - \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal.$$

□

引理 2.3 中，方差 $\mathbb{E}H_{N,\kappa}(\sigma)^2 = N\kappa^{-2}\|P_\kappa\|_F^2$ 在 $\sigma\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$ 中为常数，因此

$$\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}} = \sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}} e^{2^{-1}\beta^2\mathbb{E}H_{N,\kappa}(\sigma)^2} = e^{\beta^2 N\kappa^{-2}\|P_\kappa\|_F^2/2}\cdot|\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}| \quad \text{and} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{E}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2 = \sum_{\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}} e^{2^{-1}\beta^2(H_{N,\kappa}(\sigma)+H_{N,\kappa}(\tau))^2} = e^{\beta^2 N\kappa^{-2}\|P_\kappa\|_F^2} \sum_{\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}} e^{\beta^2 N\|P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa\|_F^2}.$$

前置因子相消，得到

$$\frac{\mathbb{E}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2} = \big\langle \exp\big(\beta^2 N\|P_\kappa R(\sigma,\tau)P_\kappa\|_F^2\big)\big\rangle_{\mathsf{bal}} = \big\langle \exp\big(\beta^2 N\|R(\sigma,\tau) - \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\big)\big\rangle_{\mathsf{bal}}, \tag{2.7}$$

其中 $\langle\cdot\rangle_{\mathsf{bal}}$ 表示对 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}\times\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$ 的均匀平均，最后一个等式由 (2.5) 得出。下一个引理表明，(2.7) 在 N 中有界，这是二阶矩方法的关键部分。

引理 2.4。 在命题 *2.1* 的假设下，我们有

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2} < \infty.$$

证明。考虑均匀概率测度 $\mathbb{P}_{\sigma,\,\tau}$ 在 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}\times\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$ 上。给定一个固定的 $\sigma\in\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$，并用 $\mathbb{P}_\tau$ 表示条件概率测度。矩阵 $R(\sigma,\tau)$ 随后是一个随机的 κ 行 κ 列矩阵，其行和与列和固定为 $1/\kappa$，其条件分布由下式给出

$$\mathbb{P}_\tau(R(\sigma,\tau)=(r_{ab})_{a,b\in[\kappa]})=\big(\frac{N!}{((N/\kappa)!)^\kappa}\big)^{-1}\prod_{a\in[\kappa]}\frac{(N/\kappa)!}{\prod_{b\in[\kappa]}(Nr_{ab})!}\quad\text{for}\quad(r_{ab})_{a,b\in[\kappa]}\in\mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}}.$$

根据斯特林公式，$\log n!=n\log n-n+2^{-1}\log n+O(1)$ 对于 $n\in\mathbb{N}$，我们得到

$$\log\mathbb{P}_\tau(R(\sigma,\tau)=(r_{ab})_{a,b\in[\kappa]})=-N\sum_{a,b\in[\kappa]}r_{ab}\log(\kappa^2r_{ab})-\frac{(\kappa-1)^2}{2}\log N-\frac{1}{2}\sum_{(a,b)\in I_r}\log r_{ab}+O(1),\tag{2.8}$$

其中

$$I_r:=\{(a,b)\in[\kappa]\times[\kappa]:r_{ab}\neq0\}.$$

注意，这对所有 σ. 均一致成立。我们可以将右端 (2.8) 中的第一项（不含前置因子 N）识别为相对于 $[\kappa]\times[\kappa]$ 上均匀测度的相对熵（库尔贝克–莱布勒散度），记作 $D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)$。结合 (2.7) 和 (2.8)，可得

$$\frac{\mathbb{E}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}=\sum_{r\in\mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}}}N^{-(\kappa-1)^2/2}\exp\Big(-N\big(D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)-\beta^2\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\big)-\frac{1}{2}\sum_{a,b\in I_r}\log r_{ab}+O(1)\Big)\tag{2.9}$$

下面给出库尔贝克–莱布勒散度的一个局部展开，其中参考测度的质量严格为正；其证明留待附录 B（另见 [7,定理 4.1]）。

引理 2.5。设 $n\in\mathbb{N}$。设 $p:=(p_i)^{i\in[n]}$ 和 $q:=(q_i)^{i\in[n]}$ 是定义在 $[n]$ 上的两个离散概率分布。假设 $\min_{1\le i\le n}q_i>0$ 且 $\max_{i\in[n]}|p-q|\le2^{-1}\min^{i\in[n]}q_i\cdot$。我们有

$$\Big|D(p\|q)-\frac{1}{2}\sum_{i\in[n]}\frac{(p_i-q_i)^2}{q_i}\Big|\le5\big(\min_{i\in[n]}q_i\big)^{-2}\sum_{i\in[n]}|p_i-q_i|^3.$$

固定 $\varepsilon>0$. 根据引理 2.5，存在 $\delta'>0$，使得如果 $\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2<\delta'$，

$$D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)\ge(1-\varepsilon)\frac{\kappa^2}{2}\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2.\tag{2.10}$$

此外，存在 $K=K(\kappa)<\infty$，使得对于足够小的 $\delta''=\delta''(\kappa)>0$，我们有

$$\sum_{a,b\in[\kappa]}|\log r_{ab}|\le K\quad\text{whenever}\quad\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2<\delta''.\tag{2.11}$$

取 $\delta=2^{-1}\min\{\delta',\delta''\}$。由 (2.10) 和 (2.11)，将 (2.9) 分成两部分后，我们可以对其进行估计：

$$\sum_{\substack{r\in\mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}},\\\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\le\delta}}N^{-(\kappa-1)^2/2}\exp\Big(-\frac{(1-\varepsilon)\kappa^2-2\beta^2}{2}N\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2+K+O(1)\Big)\tag{2.12}$$

$$+\sum_{\substack{r\in\mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}},\\\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\ge\delta}}N^{-(\kappa-1)^2/2}\exp\Big(-N\big(D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)-\beta^2\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\big)-\frac{1}{2}\sum_{a,b\in I_r}\log r_{ab}+O(1)\Big).\tag{2.13}$$

此外，对于 $l \in [N]$，我们有以下体积估计，

$$\Big|\Big\{(r_{ab})_{a,b\in[\kappa]} \in \mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}} : \frac{l-1}{N} \le \|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2 < \frac{l}{N}\Big\}\Big| \le C'(lN)^{(\kappa-1)^2/2} \tag{2.14}$$

对于某个仅依赖于 κ 的常数 $C'>0$ 。为此，注意到 (2.14) 中任意一个可容许矩阵都由其 $\kappa-1$ 阶主子矩阵唯一确定，而该子矩阵中的每个元素至多可取 $O(1)\sqrt{lN}$ 个值。因此，(2.12) 有如下界：

$$O(1)\sum_{1\le l\le \delta N} l^{(\kappa-1)^2/2}\exp\Big(-\frac{(1-\varepsilon)\kappa^2-2\beta^2}{2}(l-1)+K\Big). \tag{2.15}$$

若 $2\beta^2<(1-\varepsilon)\kappa^2$，则 (2.15) 关于 N 一致有界，因为它被某个收敛级数 $\sum_{l\ge1} l^{(\kappa-1)^2/2}e^{-cl}<\infty$ 所控制，其中 $c>0$。

剩下的工作是估计 (2.13)。为此，注意以下对 [12], 的应用，其证明推迟到附录 B。

引理 2.6。 对于任意 $\delta>0$，存在 $\eta>0$，使得若

$$\beta^2 < \frac{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)}{\kappa-2},$$

then

$$\inf_{\substack{r\in\mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}},\\ \|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\ge\delta}} \big(D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)-\beta^2\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2\big)>\eta.$$

若 $\beta^2<\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)/(\kappa-2)$，由引理 2.6 可知存在一个 $\eta>0$，使得考虑到 (2.14), (2.13) 有如下界：

$$O(1)\sum_{\delta N<l\le N} l^{(\kappa-1)^2/2}\exp\big(-\eta N+\kappa^2\log N\big). \tag{2.16}$$

当 N 时，(2.16) 的上极限为零，因为对 l 的求和至多为 N 的多项式。结合先前的估计 (2.15) 和 (2.16)，由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们得出

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{\mathbb{E}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})^2}<\infty$$

只要

$$\beta^2<\min\Big\{\frac{\kappa^2}{2},\frac{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)}{\kappa-2}\Big\}=\frac{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)}{\kappa-2}.$$

这就完成了引理 2.4 的证明。 □

现在我们可以完成命题 2.1 的证明。

命题 2.1 的证明。固定 $N\in\mathbb{N}$。由引理 2.4 和 Paley–Zygmund 不等式可知

$$\mathbb{P}(Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}}\ge 2^{-1}\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}})>c>0$$

其中某个常数 $c>0$ 仅取决于 κ 和 β. 在这个概率为正的事件上，我们有

$$\frac{1}{N}\log Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}}\ge-\frac{\log 2}{N}+\frac{1}{N}\log\mathbb{E}Z_{N,\beta,\kappa}^{\mathsf{bal}}.$$

另一方面，由高斯测度的集中性（见定理 1.2]），可知 $N^{-1}\log Z^{\mathsf{bal}}_{N,\,\beta,\,\kappa} \to N^{-1}\mathbb{E}\log Z^{\mathsf{bal}}_{N,\,\beta,\,\kappa}$ 依概率成立，当 $N \to \infty$.因此，给定 $\varepsilon > 0$，存在一个概率为正的事件，使得对充分大的 N，

$$\frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa} \geq \frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa} \geq -\varepsilon - \frac{\log 2}{N} + \frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa}, \tag{2.17}$$

其中，第一个不等式由詹森不等式得到。注意，$\|P_\kappa\|_F^2 = \kappa^{-2}(\kappa-1)$ 以及 $\lim_{N\to\infty} N^{-1}\log\,|\Sigma^{\mathsf{bal}}_\kappa| = \log\kappa$。由 (2.6) 可进一步计算出最后一项的极限为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa} = \log\kappa + \frac{\beta^2}{2}\frac{\kappa-1}{\kappa^2}.$$

由于每个 (2.17) 中的量都是确定性的，取 $N\to\infty$，然后取 $\varepsilon\to 0$，可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta,\kappa} = \log\kappa + \frac{\beta^2}{2}\frac{\kappa-1}{\kappa^2}.$$

证明完毕。

□

3 命题 1.5 的证明

本节旨在证明具有两个颜色 $\kappa = 2$ 的 Potts 模型的颜色对称性。如证明概要中所述，我们的主要工具将是 SK 模型的规范对称性。首先，我们将 SK 模型与 $\kappa = 2$ 的 Potts 模型对应起来。对于 $\sigma \in [2]^N$，考虑变量替换

$$\tau_j = 2\mathbb{1}\{\sigma_j = 1\} - 1 \quad \text{for} \quad j \in [N].$$

注意 $\tau \in \{-1,+1\}^N$，并且容易验证 $\tau_i\tau_j = 2\mathbb{1}\{\sigma_i = \sigma_j\} - 1.$。随后通过此变量替换得到 SK 哈密顿量

$$H^{\mathrm{SK}}_N(\tau) := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j\in[N]} g_{ij}\tau_i\tau_j = 2H_N(\sigma) - \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j\in[N]} g_{ij}. \tag{3.1}$$

对于 $\beta\in[0,\infty]$，将相应的吉布斯测度记为 $G^{\mathrm{SK}}_{N,\,\beta}$，并将其吉布斯平均记为 $\langle\cdot\rangle^{\mathrm{SK}}_{N,\,\beta}$。由于 (3.1) 中的最后一项不影响吉布斯测度，我们有

$$G^{\mathrm{SK}}_{N,\beta} = G_{N,2\beta} \quad \text{and} \quad \langle\cdot\rangle^{\mathrm{SK}}_{N,\beta} = \langle\cdot\rangle_{N,2\beta}. \tag{3.2}$$

对于 $[N]$ 中的有限序列 $(i_1,\ \ldots i_m)$，将指标 l 的次数定义为 $d_l = |\{l'\in[m]:\ i_{l'} = i_l\}|$。SK 模型的规范对称性对 Potts 模型的多自旋关联的控制如下。

引理 3.1. 设 $\beta\in[0,\infty]$ 与 $N\in\mathbb{N}$。对 $[N]$ 中的任意序列 $(i_1,\ \ldots i_m)$，若存在 $l_0\in[m]$ 使得 d_{l_0} 为奇数，则 $\mathbb{E}\langle\prod_{l=1}^m \tau_{i_l}\rangle_{N,\ \beta} = 0$。

证明。这是一个标准结论：$G_{N,\ \beta} \xrightarrow{d} G_{N,\ \infty}$ 当 $\beta\to\infty$ 时。因此，只需考虑 $\beta<\infty$ 的情形。利用 (3.2)，我们可以将期望改写为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\langle\prod_{l=1}^m \tau_{i_l}\Big\rangle_{N,\beta} &= \mathbb{E}\Big\langle\prod_{l=1}^m \tau_{i_l}\Big\rangle^{\mathrm{SK}}_{N,\beta/2} \\ &= \mathbb{E}\big(\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\exp(2^{-1}\beta H^{\mathrm{SK}}_N(\tau))\big)^{-1}\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\prod_{l=1}^m\tau_{i_l}\cdot\exp(2^{-1}\beta H^{\mathrm{SK}}_N(\tau)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

考虑双射 $\tau \mapsto \hat{\tau}$，其中对所有 $j \in [N] \setminus \{i_{l_0}\}$，$\hat{\tau}_{i_{l_0}} = -\tau_{i_{l_0}}$ 且 $\hat{\tau}_j = \tau_j$。由于该映射是 $\{-1,+1\}^N$ 上的双射，前面的式子等于

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\exp(2^{-1}\beta H_N^{\mathrm{SK}}(\hat{\tau}))\Big)^{-1}\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\prod_{l=1}^{m}\hat{\tau}_{i_l}\cdot\exp(2^{-1}\beta H_N^{\mathrm{SK}}(\hat{\tau}))$$
$$=\mathbb{E}\Big(\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\exp(2^{-1}\beta \widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}(\tau))\Big)^{-1}\sum_{\tau\in\{\pm1\}^N}\Big((-1)^{d_{l_0}}\prod_{l=1}^{m}\tau_{i_l}\Big)\cdot\exp(2^{-1}\beta\widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}(\tau)),$$

其中 $\sqrt{N}\widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}(\tau) := -\sum_{l\in[N]\setminus\{i_{l_0}\}}(g_{i_{l_0},l}+g_{l,i_{l_0}})\tau_{i_{l_0}}\tau_l+\sum_{l,l'\in[N]\setminus\{i_{l_0}\}}g_{ll'}\tau_l\tau_{l'}+g_{i_{l_0},i_{l_0}}$。注意，高斯过程 $(\widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}(\tau))_{\tau\in\{\pm1\}^N} \overset{d}{=} (H_N^{\mathrm{SK}}(\tau))_{\tau\in\{\pm1\}^N}$ 在分布上相等，因为 $\widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}$ 是通过翻转与 i_{l_0} 相连的独立中心化高斯耦合的符号从 H_N^{SK} 得到的，而这不会改变联合分布。因此，如果用过程 H_N^{SK} 替换 $\widetilde{H}_N^{\mathrm{SK}}$，上面的最后一个公式保持不变。结合 (3.2) 以及 d_{l_0} 是奇函数这一假设，我们得出 (3.3) 等于

$$-\mathbb{E}\Big\langle\prod_{l=1}^{m}\tau_{i_l}\Big\rangle_{N,\beta},$$

这意味着它确实为零，从而完成了证明。 □

利用前述引理，我们对中心化磁化向量的矩进行估计。

引理 3.2. 设 $\beta \in [0,\infty]$。对于任意偶数 $m \geq 0$，有

$$\mathbb{E}\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i=1\}-\frac{1}{2}\Big)^m\Big\rangle_{N,\beta}\leq\frac{m!}{2^m(m/2)!}\cdot\frac{1}{N^{m/2}}.$$

当 m 为奇数时，前一个公式的左侧为零。

证明。 固定 $m \geq 1$. 我们写作

$$2^m\mathbb{E}\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i=1\}-\frac{1}{2}\Big)^m\Big\rangle_{N,\beta}=\mathbb{E}\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\in[N]}(2\mathbb{1}\{\sigma_i=1\}-1)\Big)^m\Big\rangle_{N,\beta}$$
$$=\frac{1}{N^m}\sum_{i_1,\ldots,i_m\in[N]}\mathbb{E}\Big\langle\prod_{l=1}^{m}\tau_{i_l}\Big\rangle_{N,\beta}. \tag{3.4}$$

对于奇数 m 的情形，引理 3.1 可直接推出所需结果，因为存在一个指标 l 使得 d_{i_l} 为奇数。剩下只需检验偶数 m 的情形。同样由引理 3.1 可知，求和式 (3.4) 中仅当所有 d_l 对于 $1 \leq l \leq m$ 都为偶数时，对应项才有贡献，且每一项贡献均为 1。因此，我们只需计算在 $[N]$ 中构成序列 $(i_1, \ldots, i_m)$ 且所有 d_l 都为偶数的方式数。通过初等计数可知，该数量不超过

$$\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{Z}_{\geq0},\\ \sum_{i=1}^N x_i=m/2}}\frac{m!}{\prod_{1\leq i\leq N}(2x_i)!}\leq\frac{m!}{(m/2)!}\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{Z}_{\geq0},\\ \sum_{i=1}^N x_i=m/2}}\frac{(m/2)!}{\prod_{1\leq i\leq N}x_i!}=\frac{m!}{(m/2)!}N^{m/2}.$$

这里，我们使用了 $(2x_i)! \geq x_i!$ 和多项式定理。将此结果与式 (3.4) 中的因子 N^{-m} 结合，即可得到所需结果。

□

一个直接推论是对矩母函数的控制，由此我们推导出命题 1.5 的证明。

引理 3.3. 设 $\beta \in [0,\infty]$。对于任意 $\lambda > 0$，有

$$\mathbb{E}\Big\langle \exp\Big(\lambda\big(\frac{1}{N}\sum_{i\in[N]} \mathbb{1}\{\sigma_i = 1\} - \frac{1}{2}\big)\Big)\Big\rangle_{N,\beta} \le e^{\lambda^2/(4N)}.$$

证明。 记 $X_N = N^{-1}\sum_{i\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i = 1\} - 2^{-1}$ $\lambda > 0$ $e^x =$。 $\sum_{m\ge 0} x^m/m$ 3 2 令 。由泰勒展开 !，引理 。可得

$$\mathbb{E}\langle e^{\lambda X_N}\rangle_{N,\beta} = \sum_{\text{even } m} \lambda^m \frac{\mathbb{E}\langle X_N^m\rangle_{N,\beta}}{m!} \le \sum_{\text{even } m} \frac{\lambda^m}{2^m (m/2)!}\cdot\frac{1}{N^{m/2}} = e^{\lambda^2/(4N)}.$$

□

命题 1.5 的证明。 由切尔诺夫界，引理 3.3 可得

$$\mathbb{E}G_{N,\beta}\Big(\Big|\frac{1}{N}\sum_{i\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i = 1\} - \frac{1}{2}\Big| > \varepsilon\Big) \le 2e^{-\varepsilon^2 N}. \tag{3.5}$$

接下来只需证明颜色对称性。固定 $\varepsilon > 0$ 以及满足 $\|d - d_{\mathsf{bal}}\|_\infty > \varepsilon$ 的某个 $d \in \mathcal{D}_2 \cap \mathbb{Q}^2$，这等价于 $|d_1 - 2^{-1}| > \varepsilon$。由詹森不等式和 (3.5)，证明至此完成：

$$\mathbb{E}F^d_{N,\beta} - \mathbb{E}F_{N,\beta} = \frac{1}{N}\mathbb{E}\log G_{N,\beta}(d(\sigma) = d) \le \frac{1}{N}\log \mathbb{E}G_{N,\beta}(|d_1 - 2^{-1}| > \varepsilon) \le -\varepsilon^2 + o(1).$$

□

哈密顿量中心化的必要性

本节将说明，在定理 1.3 的证明中，要使二阶矩方法有效，必须对哈密顿量进行适当的中心化。定义逆温度为 $\beta > 0$ 时的退火吉布斯测度，其概率质量函数为

$$G_{\mathrm{ann},N,\beta}(\sigma) = \frac{\mathbb{E}\exp(\beta H_N(\sigma))}{\mathbb{E}Z_{N,\beta}} = \frac{\exp\big((2N)^{-1}\beta^2\sum_{i,j\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i = \sigma_j\}\big)}{\sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa}\exp\big((2N)^{-1}\beta^2\sum_{i,j\in[N]}\mathbb{1}\{\sigma_i = \sigma_j\}\big)} \quad \text{for} \quad \sigma\in\Sigma_\kappa,$$

并将相应的退火吉布斯平均记为$\langle\cdot\rangle_{\mathrm{ann},\ N,\ \beta}$。以下结论与引理 2.4 形成鲜明对比；引理 2.4 证明了考虑中心化哈密顿量 (2.1) 的合理性。

引理 A.1。对于任意 $\beta \in (0,\ \infty)$，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{E}Z^2_{N,\beta}}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta})^2} = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{E}(Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta})^2}{(\mathbb{E}Z^{\mathsf{bal}}_{N,\beta})^2} = \infty.$$

证明。 由恒等式

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa} e^{\beta H_N(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa}\prod_{i,j\in[N]} e^{\beta g_{ij}\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}/\sqrt{N}},$$

我们得到

$$(\mathbb{E}Z_{N,\beta})^2 = \sum_{\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa}\prod_{i,j\in[N]} e^{\beta^2(\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}+\mathbb{1}\{\tau_i=\tau_j\})/(2N)} \quad \text{and}$$
$$\mathbb{E}Z_{N,\beta}^2 = \sum_{\sigma,\tau\in\Sigma_\kappa}\prod_{i,j\in[N]} e^{\beta^2(\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j\}+\mathbb{1}\{\tau_i=\tau_j\})^2/(2N)}. \tag{A.1}$$

根据詹森不等式以及格点之间的对称性,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}Z_{N,\beta}^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta})^2} = \langle e^{\beta^2\sum_{i,j}\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j,\tau_i=\tau_j\}/N}\rangle_{\mathrm{ann},N,\beta} &\geq \exp\big(\beta^2(N-1)G_{\mathrm{ann},N,\beta}(\sigma_1=\sigma_2)^2\big)\\ &\geq \exp\big(\beta^2(N-1)\kappa^{-2}\big),\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由非无序波茨吉布斯测度与随机簇测度之间的耦合得到；参见 [13,定理 1.16]。令 $N\to\infty$ 趋于.....，即可推出无约束模型所需的发散性。另一方面，若将范围限制为 (A.1) 中的平衡构型 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$，则有类似的不等式

$$\frac{\mathbb{E}(Z_{N,\beta}^{\mathsf{bal}})^2}{(\mathbb{E}Z_{N,\beta}^{\mathsf{bal}})^2} = \langle e^{\beta^2\sum_{i,j}\mathbb{1}\{\sigma_i=\sigma_j,\tau_i=\tau_j\}/N}\rangle_{\mathsf{bal}} \geq \exp\big(\beta^2(N-1)\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}(\sigma_1=\sigma_2)^2\big),$$

其中，$\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}$ 和 $\langle\cdot\rangle_{\mathsf{bal}}$ 分别表示 $\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$ 上的均匀概率测度和$\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}\times\Sigma_\kappa^{\mathsf{bal}}$上的均匀平均。由于对任意 $a\in[\kappa]$，$\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}(\sigma_2=a\mid\sigma_1=a)=(N-1)^{-1}(\kappa^{-1}N-1)$，我们有

$$\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}(\sigma_1=\sigma_2)=\sum_{a\in[\kappa]}\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}(\sigma_1=a)\mathbb{P}_{\mathrm{unif}}^{\mathsf{bal}}(\sigma_2=a\mid\sigma_1=a)=\frac{N-\kappa}{(N-1)\kappa}.$$

结合最后两个公式，可得平衡模型中该比值的一个趋于无穷的下界。证明至此完成。

□

B 延后的证明

我们汇集了第 2 节中延后的证明。

引理 2.6 的证明。利用 $\sum_{a,\ b}r_{ab}=1$，可以验证

$$\|r-\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2=\|r\|_F^2-\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2. \tag{B.1}$$

因此，我们的目标函数等价于

$$D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal)-\beta^2\|r\|_F^2=\frac{1}{\kappa}\sum_{a\in[\kappa]}\Big(\sum_{b\in[\kappa]}v_{ab}\log(\kappa v_{ab})-\frac{\beta^2}{\kappa}\sum_{b\in[\kappa]}v_{ab}^2\Big), \tag{B.2}$$

其中我们使用了变量替换 $v_{ab}:=\kappa r_{ab}$。

固定 $a\in[\kappa]$，并将每个行和记为

$$S_a(v_{a,\square}):=\sum_{b\in[\kappa]}v_{ab}\log(\kappa v_{ab})-\kappa^{-1}\beta^2\sum_{b\in[\kappa]}v_{ab}^2,$$

其中 $v_{a,\square}:=(v_{ab})_{b\in[\kappa]}$。注意 $\sum_{b\in[\kappa]}v_{ab}=1$，因此我们可以精确地将 S_a 等同于 [12, 公式 (2.5)]的负值。由 [12, 定理 2.1-(b)], ，若

$$\beta^2<\frac{\kappa(\kappa-1)\log(\kappa-1)}{\kappa-2},$$

则均匀分布$v_{a,\square} = \kappa^{-1}\mathbb{1}$ 是 S_a的唯一极小化元。注意到 $S_a(\kappa^{-1}\mathbb{1}) = -\kappa^{-2}\beta^2$，我们推出：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$ 使得

$$\inf_{v_{a,\square} \in \mathcal{C}_\varepsilon} S_a(v_{a,\square}) \geq -\frac{\beta^2}{\kappa^2} + \eta, \tag{B.3}$$

其中

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \Big\{ x \in [0,1]^\kappa : \sum_{b \in [\kappa]} x_b = 1,\ \|x - \kappa^{-1}\mathbb{1}\|_2^2 \geq \varepsilon \Big\}.$$

（我们将 $\eta = 0$ 理解为 $\varepsilon = 0$。）事实上，这可由 $\mathcal{C}_\varepsilon$ 的紧致性以及 S_a.的极小化元的唯一性推出

现在，令 $\delta > 0$，并假设对某个 $r \in \mathcal{A}_\kappa^{\mathsf{bal}}$有 $\|r - \kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2 \geq \delta$。由抽屉原理可知，存在 $\hat{a} \in [\kappa]$ 使得 $\sum_{b \in [\kappa]} (r_{\hat{a}b} - \kappa^{-2})^2 \geq \kappa^{-1}\delta$，即，

$$\sum_{b \in [\kappa]} (v_{\hat{a}b} - \kappa^{-1})^2 \geq \kappa\delta,$$

结合 (B.3)，这保证了存在某个 $\eta > 0$，使得

$$S_{\hat{a}}(v_{\hat{a},\square}) \geq -\frac{\beta^2}{\kappa^2} + \eta.$$

另一方面，由于在 $\varepsilon = 0$ 且 $\eta = 0$的情况下 (B.3) 仍然成立，我们有，对任意 $a \neq \hat{a}$，

$$S_a(v_{a,\square}) \geq -\frac{\beta^2}{\kappa^2}.$$

将上面最后两个公式与 (B.2) 结合，得到

$$D(r\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal) - \beta^2\|r\|_F^2 = \frac{1}{\kappa}\Big(S_{\hat{a}}(v_{\hat{a},\square}) + \sum_{a \neq \hat{a}} S_a(v_{a,\square})\Big) \geq -\frac{\beta^2}{\kappa^2} + \frac{\eta}{\kappa} = -\beta^2\|\kappa^{-2}\mathbb{1}\mathbb{1}^\intercal\|_F^2 + \frac{\eta}{\kappa},$$

这与 (B.1) 一起得出所需结果。 □

注 B.1. 无需借助行分解 (B.2)，也可以直接通过将矩阵“展平”为一个 κ^2 维向量来应用 [12, Theorem 2.1] r。然而，这将给出 β 的一个上界，且其对 κ 的依赖性更差。

引理的证明 **2 5** $x = p - q$ $_{i\in[n]}\,|p-q| \leq$ **..** 为方便起见，2^{-1}定义。根据假设 max min$^{i\in[n]}\,q_i$,

$$\max_{i \in [n]} |q_i^{-1} x_i| \leq 2^{-1}. \tag{B.4}$$

于是，对 $|a| \leq 2^{-1}$， |log(1 + a) 的泰勒展开 $-a + 2^{-1}a^2| \leq 3|a|^3$ 给出

$$\begin{aligned} D(p\|q) &= \sum_{i \in [n]} (q_i + x_i)\log(1 + q_i^{-1}x_i) = \sum_{i \in [n]} (q_i + x_i)(q_i^{-1}x_i - 2^{-1}q_i^{-2}x_i^2 + r_i) \\ &= 2^{-1}\sum_{i \in [n]} q_i^{-1}x_i^2 - 2^{-1}\sum_{i \in [n]} q_i^{-2}x_i^3 + \sum_{i \in [n]} (q_i + x_i)r_i \end{aligned}$$

其中某个 $|r_i| \le 3q_i^{-3}|x_i|^3$。在最后一个等式中，我们使用了 $\sum_{i\in[n]} x_i = 0$。接下来通过对误差项的如下控制，证明便告完成，

$$\Big|-2^{-1}\sum_{i\in[n]} q_i^{-2}x_i^3 + \sum_{i\in[n]}(q_i+x_i)r_i\Big| \le \frac{7}{2}\sum_{i\in[n]} q_i^{-2}|x_i|^3 + 3\sum_{i\in[n]} q_i^{-3}|x_i|^4 \le 5(\min_{i\in[n]} q_i)^{-2}\sum_{i\in[n]}|x_i|^3,$$

最后一个不等式中我们使用了 (B.4)。

□

C 零温下的颜色对称性破缺

本节中，我们通过改进 Mourrat 在 [18] 中的方法，验证 $\kappa \ge 56$ 的零温颜色对称性破缺。由不等式 $\mathsf{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa} \le \beta^{-1}F_{\mathsf{bal}N,\beta} \le \mathsf{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa} + \beta^{-1}\log\kappa$，可得

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa} = \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta}.$$

由于定理 1.3 的右端是 $\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta}$ 的上界，对任意 $\beta > 0$，根据 Parisi 公式 [1]，前面的公式推出

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{GSE}^{\mathsf{bal}}_{N,\kappa} = \inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\lim_{N\to\infty} F^{\mathsf{bal}}_{N,\beta} \le \inf_{\beta>0}\Big(\frac{\log\kappa}{\beta} + \frac{\beta(\kappa-1)}{2\kappa^2}\Big) = \Big(\frac{2(\kappa-1)\log\kappa}{\kappa^2}\Big)^{1/2}. \tag{C.1}$$

我们指出，无需使用 Parisi 公式，也可以得到这个上界：将已知的高斯过程最大值上界（见 [23, Proposition 1.1.3] ）应用于中心化哈密顿量 (2.1) 即可。现在，回顾一下极限无约束基态能量的下界 [18, Inequality (0.6)],

$$\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \le \lim_{N\to\infty} \mathsf{GSE}_{N,\kappa}.$$

结合最后一个　　两个表达式，我们得到零温下的颜色对称性破缺，只要　　r

$$\Big(\frac{2(\kappa-1)\log\kappa}{\kappa^2}\Big)^{1/2} < \frac{2}{3\sqrt{\pi}}.$$

可以通过数值检验得出，$\kappa \ge 56$ 保证了最后一个不等式成立，从而导致零温下的颜色对称性破缺。

参考文献

[1] Bates, E., and Sohn, Y. 平衡 Potts 自旋玻璃的 Parisi 公式。 *Comm. Math. Phys. 405*, 10 (2024), 第 228 号论文，68。[2] Caltagirone,

F. Parisi G. and Rizzo T. *Phys.* , , , , *Rev. E 85* 2012 051504

平均场 Potts 玻璃的动力学临界指数。(May), . [3] Chatterjee, S. Edwards-Anderson 模型在零温下的自旋玻璃相，2023。[4] Chen, H.-B. 关于 Potts自旋玻璃的 Parisi测度及其修正。 *Electron. Commun. Probab. 29* (2024), 第 35 号论文，13。[5] Chen, H.-B. Potts 自旋玻璃中的颜色对称性与铁磁性。 *J. Stat. Phys. 192*, 8 (2025), 第 115 号论文，14。[6] Chen, W.-K., Kim, H., and Sen, A. 短程、稀释和 L´évy 自旋玻璃中的无序混沌，2024。[7] Csiszár, I., and Shields, P. *Information Theory and Statistics: A Tutorial*。《通信与信息论基础与趋势》。Now Publishers，2004。

[8] De Santis, E., Parisi, G., and Ritort, F. 平均场 Potts 玻璃的静态转变与动力学转变。 *J. Phys. A 28*, 11 (1995), 3025–3041。[9] Dembo, A., Montanari, A., and Sen, S. 稀疏随机图的极值割。 *Ann. Probab. 45*, 2 (2017), 1190–1217。[10] Elderfield, D., and Sherrington *Journal of Physics C: Solid* , D. Potts 自旋玻璃的奇特案例。 , (may), L 。[11] Elderfield, D., and Sherrington, D. 无序 Potts 模型中的自旋玻璃相、铁磁相与混合相。 *Journal of Physics C: Solid State Physics 16*, 27 (sep 1983), L971。[12] Ellis, R. S., and Wang *Stochastic* , K. Curie-Weiss-Potts 模型经验向量的极限定理。 , ( ), – 。[13] Grimmett, G. *The random-cluster model*, 第 333 卷，出自 。 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* Springer-Verlag，柏林，。[14] Issa, V. Parisi 公式置换不变优化器的存在性与唯一性，2024。[15] Jagannath, A. Ko J. and Sen S. *Ann. Appl. Probab.* , , , , 最大割与非均匀 Potts 自旋玻璃。 , ( ), – 。[16] Jagannath, A., and Sen, S. 关于非平衡割问题与广义 Sherrington-Kirkpatrick 模型。 *Ann. Inst. Henri Poincaré D 8*, 1 (2021), 35–88。[17] Lage, E. J. S., and da Silva *Journal of Physics C: Solid* , J. M. N. Potts 自旋玻璃的平均场理论。 , (aug), L 。[18] Mourrat, J.-C. Potts 自旋玻璃中的颜色对称性破缺。 *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 22*, 1 2025 651 655 ( ), – 。[19] Nishimori, H. *Statistical physics of spin glasses and information processing*, 第 111 卷，出自 。牛津大学出版社，纽约，。导论，译自日文原著。[20] Panchenko, D. *The Sherrington-Kirkpatrick Model*。Springer 数学专著丛书。Springer New York，2013。[21] Panchenko, D. Potts 自旋玻璃中的自由能。 *Ann. Probab. 46*, 2 (2018), 829–864。[22] Sen, S. 稀疏随机超图与自旋玻璃上的优化。 *Random Structures Algorithms 53*, 3 (2018), 504–536。[23] Talagrand, M. *Spin glasses: a challenge for mathematicians*, 第 46 卷，出自 。 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]* Springer-Verlag，柏林，。腔方法与平均场模型。[24] Talagrand, M. *Mean Field Models for Spin Glasses: Volume II: Advanced Replica-Symmetry and Low Temperature* 。现代数学综述丛书。Springer Berlin Heidelberg，。