arXiv:2603.01439v1 [math.AT] 2 Mar 2026

球面的有限子集空间

JACOB MOSTOVOY

Abstract. 我们求出了一个 d维球面的有限子集空间的完整有理同调。我们还确定了最高 d 次的整同调，并得到了它在余维d中的部分描述。

1. Introduction

对于拓扑空间 X，第 n个有限子集空间$\exp_n X$ 是笛卡尔积 X^n 在等价关系下的商空间

$$(x_1,\dots,x_n)\sim(y_1,\dots,y_n)\Leftrightarrow\{x_1,\dots,x_n\}=\{y_1,\dots,y_n\}.$$

我们有$\exp_1 X=X$，且$\exp_2 X$与 X的第二对称积重合。空间$\exp_n X$自然是$\exp_{n+1} X$的一个子空间。对于一个 m-连通的胞腔复形 X，空间$\exp_n X$是$(m+n-2)$连通的 [14]；它们在 $n\to\infty$时的余极限记为 $\exp X$，因此只要 X 连通[1]，该余极限就是可缩的。在应用于数学其他部分时，最为重要的正是余极限$\exp X$（见 [9]）；然而，有限 n 情形下的空间$\exp_n X$ 也已被研究，其中情形 $X=S^1$ 与 $n=3$最受关注 [1]。

$\exp_n X$ 对于 $n>2$ 的同伦型仅对一维复形 X是完全已知的。特别地，$\exp_3 S^1$ 同胚于一个三维球面（Bott, [4]），并且Tuffley [16] 证明，当 n为奇数时$\exp_n S^1$ 同伦等价于 S^n，当 n为偶数时同伦等价于 S^{n-1}。对于维数为二的 X，Tuffley [17] 对任意闭定向曲面 X计算了$\exp_3 X$ 的上同调以及最高两个同调群。当$X=S^2$时，他证明

$$H_k(\exp_n S^2)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{for } k=2n\\ 0, & \text{for } k=2n-1\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z} & \text{for } k=2n-2,\end{cases}$$

并且有理同调在所有其他维数上为零。Taamallah在 [15]中计算了$\exp_4 S^2$ 的整系数同调，并证明当 d 为偶数时$\exp_4 S^d$ 有理同伦等价于 $S^{4d}\vee S^{3d}$，当 d 为奇数时有理同伦等价于S^{2d+1}。

在本注记中，我们探讨可以从 $\mathbb{R}^d$中点的无序构形空间之上同调的已知事实中，获得关于球面的有限子集空间的何种信息。

在有理数上，我们有如下结论：

定理1. 空间 $\exp_n S^d$ 与 $S^{nd}\vee S^{(n-1)d}$ 有相同的有理同调（当 d 为偶数时），而当 $d>1$ 为奇数时，与$(d+1)-1$ 有相同的有理同调。

对于整数系数，我们将 $\exp_n S^d$ 的最高维同调与对称群的上同调联系起来：

定理2. 对每个 $r<d$，都有一个同构

$$H_{nd-r}(\exp_n S^d)=H^r(S_n,\mathbb{Z})$$

如果 d是偶数。如果 d 是奇数，

$$H_{nd-r}(\exp_n S^d)=H^r(S_n,\mathrm{sgn}),$$

[1]事实上，$\exp X$ 的可缩性比 $\exp_n X$的（$m+n-2$）-连通性更基本。

除非 $r = d-1$ 和 $n = 2,\ 3$，此时

$$H_{nd-r}(\exp_n S^d) = H^r(S_n, \mathrm{sgn}) \oplus \mathbb{Z}.$$

这里，sgn是 S_n 的符号表示。

这里出现了对称群的上同调，因为 Cartan-Leray谱序列将其与无序构型空间 $C_n(\mathbb{R}^d)$（n 个点位于 $\mathbb{R}^d$ 上）的上同调联系起来。在余维 d 的情形下，这种联系不那么直接，因此我们将 $\exp_n S^d$ 的同调与 $C_n(\mathbb{R}^d)$ 的上同调联系起来；若 d 为奇数，则系数取定向局部系统：

定理 3. 设 $n \geq 3$。当 $d > 1$ 为奇数时，

$$H_{nd-d}(\exp_n S^d) \subseteq H^d(C_n(\mathbb{R}^d), \mathbb{Z}_\pm)$$

是一个指数至多为 4 的子群。当 d 为偶数时，$H_{nd-d}(\exp_n S^d)$ 是 $H^d(C_n(\mathbb{R}^d)\ \mathbb{Z})$ 被$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$扩张所得的群。

虽然这些结果不能完全确定 $H_{nd-d}(\exp_n S^d)$，但对于 $d = 2$，我们重新得到 [17] 的结果。Tuffley 的方法使用 $\exp_n S^2$ 的显式胞腔分解，这是对构形空间 $C_n(\mathbb{R}^2)$ 一点紧化的 Fox-Neuwirth胞腔分解的推广。对于 $d > 2$，也可以构造这类胞腔分解，既适用于 $C_n(\mathbb{R}^d)$ 的一点紧化，也适用于 $\exp_n S^d$。然而，即使在更基本的情形—— $C_n(\mathbb{R}^d)$ 的一点紧化——中，它们的组合结构也相当复杂；相关讨论见 [7] 。单纯形方法 [13, 14] 还为 $\exp_n S^d$ 提供了另一类胞腔分解；不过在我们的情形下，它们似乎也用途有限。

2. Three types of finite subset spaces

2.1. 带基点多面体的子集空间。设 X 是一个连通多面体，带有基点 $*$ 和$Y = X - \{*\}$。令 $\exp_n(X,\ *) \subset \exp_n X$ 为由满足 $* \in s$ 的子集 s 所组成的子空间。若记作[2]

$$\overline{\exp}_n X = \exp_n X / \exp_n(X, *),$$

存在一个余纤维化

$$\exp_n(X, *) \to \exp_n X \to \overline{\exp}_n X. \tag{2.1}$$

我们有

$$\exp_n X \subset \exp_{n+1} X,$$

$$\exp_n(X, *) \subset \exp_{n+1}(X, *)$$

and

$$\overline{\exp}_n X \subset \overline{\exp}_{n+1} X.$$

这几个滤过中第二个和第三个滤过的逐次商空间实际上相同 e:

引理 4. 对于每个 n

$$\exp_{n+1}(X, *)/\exp_n(X, *) = \overline{\exp}_n X / \overline{\exp}_{n-1} X = C_n(Y)^+,$$

n 点在 Y上的无序构型空间的一点紧化。

这些滤子产生了同调谱序列，在有理系数同调和 $X = S^d$的情形下证明颇为有用。对于整数系数而言，就我们的目的来说，考虑余纤维化便已足够

$$C_{n-1}(Y)^+ \to \overline{\exp}_n S^d / \overline{\exp}_{n-2} S^d \to C_n(Y)^+, \tag{2.2}$$

这是通过从 (2.1) 中提出少于 $n-1$ 个点的子集得到的。

[2]这一记号与 [13]的记号存在一定冲突。

2.2. **点数不受限制的有限子集空间**。 集合 $\exp X = \cup_n \exp_n X$，$\exp(X, *) = \cup_n \exp_n(X, *)$ 和 $\exp X = \cup_n \exp_n X$. 以下结论本质上是众所周知的：

引理 5. 空间 $\exp X$、$\exp(X, *)$ 和 $\exp X$ 都是可缩的。

证明。 事实上，空间 $\exp(X, *)$ 和 $\exp X$是连通的拓扑幺半群，其运算为子集的并。它们的同伦群中的加法由幺半群运算诱导，因此是幂等的。由于只有平凡群的群运算是幂等的，$\exp(X, *)$ 和 $\exp X$ 的所有同伦群都消失。由于这些空间是 CW复形（例如参见 [14]），它们是可缩的。由此可知，$\exp X$也具有相同性质。□

2.3. **的情形，维数为** d。如果 X 的维数为 d，则空间 $\exp_n X$ 和 $\exp_n X$ 的维数均为 nd，而$\exp_n(X, *)$ 的维数为 $nd - d$。由余纤维化 (2.1) 的长正合列可知，$\exp_n X$ 和 $\exp_n X$ 在维数大于 $nd - d + 1$时具有相同的同调。

当 X 是流形时（[8, 13]），还可以说得更多。商映射

$$X^{n-1} \to \exp_n(X, *)$$

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \{x_1, \ldots, x_{n-1}, *\}$$

是一个覆盖，其分支发生在余维为 d 的子空间上。该覆盖的单值化群是 S_{n-1}，它通过交换 X^{n-1}中的“坐标”来作用。若 X 可定向，这一作用在 X^{n-1} 上保留定向，当且仅当 X 的维数 d 为偶数；当 d为奇数时，只有偶置换才能保留定向。因此，空间 $\exp_n(X, *)$ 除了余维为d的子复形之外，都是流形；只要 X 可定向且 d 为偶数，它就是可定向的。由此可得，对于偶数 d，我们有

$$H_{(n-1)d}(\exp_n(X, *)) = \mathbb{Z}$$

而当 $d > 1$ 为奇数时，$H_{(n-1)d}(\exp_n(X, *))$ 消失。$\exp_n X$ 和 $\exp_n X$的最高维同调也有同样的结论，因此只要 X 可定向，我们就可以谈论这些空间的基本类。

事实上，要求 X 是流形这一条件过于严格。为了得出当 d 为偶数时，$\exp_n(X, *)$ 有基本类；当 d 为奇数时，其顶维同调消失，只需假设 X 是伪流形；也就是说，X 的奇点余维大于一。除流形外，伪流形还包括例如流形的悬挂。拓扑空间中的任意同调类，都是某个映入该空间的伪流形的基本类的像。

现在，余纤维化 (2.1) 的正合序列表明，当 X 是维数为 d 的连通伪流形时，如果 d 是奇数，或者如果 $H_{nd-d+1}(\exp_n X)$ 有限，那么空间 $\exp_n X$ 和 $\exp_n X$ 在维数 $nd - d + 1$ 上具有相同的同调。

进而，这些维数上 $\exp_n X$ 的同调可以通过引理 4 用 $C_n^+(Y)$ 的同调来表示。我们得到如下结果：

命题 6。 设 X 是一个维数为 d的连通伪流形。

$$H_{nd-r}(\exp_n X) = H_{nd-r}(C_n^+(Y))$$

当 $r < d - 1$时成立。当 d 为奇数时，对于 $r = d - 1$ 也成立。

除 $r = d - 1$ 为 d 偶数的情形外，定理2是此结论以及关于 $\mathbb{R}^d$ 中构形空间拓扑的事实（下一节中的定理 9 和 10）的推论。

2.4. **余维为** d **的挠类**。 当 X 是维数为 d 的偶数维定向伪流形时，$H_{nd-d}(\exp_n X)$中有两个特殊的类。它们分别是 $\exp_{n-1} X$ 和 $\exp_n(X, *)$的基本类的像；分别记为 α 和 β。

命题 7。 若 X 是一个奇数维伪流形的悬挂，

$$(n - 1)(\alpha - 2\beta) = 0$$

于 $H_{nd-d}(\exp_n X)$。

对于 $X = S^2$，这一事实已在 [17] 中得到证明。

证明。设

$$Q_{n-1}(X) \subset X \times \exp_{n-1} X$$

是由满足 $x \in s$ 的有序对 $(x,\ s)$ 构成的子空间。换言之，$Q_{n-1}(X)$ 是 X 中基数不超过 $n-1$ 的有限子集所构成的空间，其中一个元素带有标记。

空间 $Q_{n-1}(X)$ 是一个维数为 $(n-1)d$ 的伪流形。投影

$$\pi : Q_{n-1}(X) \to \exp_{n-1} X$$

保持定向，且在一般位置下是 $n-1$ 对一。由此可知，该投影所诱导的基本类映射是乘以 $n-1$，因此，$Q_{n-1}(X)$ 的基本类在 $H_{nd-d}(\exp_n X)$ 中的像为 $(n-1)\alpha$。

同理，将 $R_{n-1}(X) \subset X \times \exp_n(X,\ *)$ 定义为满足 $x \in s$ 且 $x \neq *$ 的有序对 $(x,\ s)$ 所成子空间的闭包。同样，$R_{n-1}(X)$ 是一个维数为 $(n-1)d$ 的伪流形；$R_{n-1}(X)$ 中满足 $x = s$ 的点集维数为 $(n-2)d$。映射

$$R_{n-1}(X) \to \exp_n(X, *)$$

忘掉标记点的映射一般是（$n-1$）对一；同样，$R_{n-1}(X)$ 的基本类在 $H_{nd-d}(\exp_n X)$ 中的像是（$n-1$）β。

现在假设 $X = \Sigma A$，因此在 X 中沿着悬挂坐标存在一个“竖直”方向。定义

$$P_n(X) \subset \exp_2(A \times [0,1]) \times \exp_n(A \times [0,1])$$

为满足以下条件的有序对（$z,\ s$）构成的子空间：$z \subseteq s$；并且当 z 由两个点而非一个点组成时，它们一个位于另一个“上方”。

空间 $P_n(X)$ 可被视为一种“带边伪流形”，因为 $P_n(X)$ 的奇点不仅位于余维 >1，还以余维 >1 与边界点集相交。$P_n(X)$ 的边界由三类有序对组成：

(1) $\exp_n(A \times [0,1])$ 中的一个元素属于 $A \times \{0\}$；(2) $\exp_n(A \times [0,1])$ 中的一个元素属于 $A \times \{1\}$；(3) 两个标记元素重合；也就是说，$z \in \exp_2(A \times [0,1])$ 是一个单点集。

我们分别用 U_1、U_2 和 U_3 表示边界的相应部分。映射

$$P_n(X) \to \exp_n(X)$$

由映射 $A \times [0,1] \to X$ 诱导而来，并遗忘标记点的映射，将 U_1 和 U_2 都映到类 $(n-1)\beta$，而 U_3 则映到 $-(n-1)\alpha$；因此，$(n-1)(2\beta - \alpha)$ 是一个边界。□

3. The cohomology of the configuration spaces $C_n(\mathbb{R}^d)$

我们用 $\exp_n X$ 的同调来表示 $\exp_n(X,\ *)$ 和 $\exp_n X$ 的同调；反过来，这两个空间的同调可通过 $Y = X - \{*\}$ 中无序点的构形空间计算。当 X 是球面时，我们需要一些关于欧几里得空间中点的构形空间的结果。

对于空间 Y，记 $C_n(Y)$ 为 Y 上 n 个互异无序点的构形空间，记 $F_n(Y)$ 为 Y 上 n 个互异有序点的构形空间。对称群 S_n 在 $F_n(Y)$ 上自由作用，其商为 $C_n(Y)$。当 Y 是奇数维流形时，$C_n(Y)$ 不可定向。令 $\mathbb{Z}_\pm$ 为 $C_n(Y)$ 上的定向局部系统。下文中，我们将 $F_n(\mathbb{R}^d)$ 简记为 F_n，将 $C_n(\mathbb{R}^d)$ 简记为 C_n。

欧几里得空间中构形空间的上同调已有充分研究，参见 [12] 及其中的参考文献。我们将需要以下结果：

定理 8。当 d 为偶数时，

$$H^i(C_n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

对于 $i = 0$、$d-1$，否则为 0。当 d 为奇数时，

$$H^i(C_n, \mathbb{Q}_\pm) = \mathbb{Q}$$

当 $i = [n/2](d-1)$ 时，其他情况下为 0。这里，$\mathbb{Q}_\pm = \mathbb{Z}_\pm \otimes \mathbb{Q}$。

这些上同调群可计算为作用于构形空间 F_n 的上同调上的 S_n 的不变量空间（当 d 为偶数时）或交错不变量（当 d 为奇数时）。环$H^*(F_n,\mathbb{Z})$ 由 $n(n-1)/2$ 个次数为 $d-1$ 的类 α_{ij} 生成；每个 α_{ij} 都是映射 $F_n \to F_2$ 下 $F_2 = S^{d-1}$ 的生成元的拉回，该映射会抹去除指标为 i 和 j 的点之外的所有点。S_n 在 $H^*(F_n,\mathbb{Z})$ 上作用的不变量仅出现在次数 0 和 $d-1$，其中 d 为偶数；相应空间均为 1 维。至于 d 为奇数时 C_n 的扭曲上同调，$H^*(F_n,\mathbb{Z})$ 中相应的交错不变量空间见 [2, 命题 9]。

整系数上同调要复杂得多；不过，在一定范围内，它与对称群 S_n 的上同调相同。

定理 9. 设 $n>1$ 和 $d>2$。若 d 为偶数，

$$H^r(C_n,\mathbb{Z}) = \begin{cases} H^r(S_n,\mathbb{Z}) & for\ r < d-1 \\ H^{d-1}(S_n,\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} & for\ r = d-1. \end{cases}$$

若 d 为奇数，

$$H^r(C_n,\mathbb{Z}_\pm) = \begin{cases} H^r(S_n,\mathrm{sgn}) & for\ r < d-1\ or\ for\ r = d-1\ and\ n>3, \\ H^{d-1}(S_n,\mathrm{sgn}) \oplus \mathbb{Z} & for\ r = d-1\ and\ n = 2,3. \end{cases}$$

其中 $\mathbb{Z}_\pm$ 是定向局部系统，而 sgn 是 S_n 在 $\mathbb{Z}$ 上的符号表示 .

该结论可由 S_n 在 F_n 上的作用所对应的上同调 Cartan–Leray 谱序列推出（参见 [10, 第 VII 章、定理 7.9]，或 ([5, §9、定理 9.2]，其中讨论了 d 为奇数的情形）。该谱序列的 E_2 项具有如下形式

$$E_2^{p,q} = H^p(S_n, H^q(F_n,M))$$

其中 当 d 为偶数时，$M=\mathbb{Z}$ 被视为平凡的 S_n-模；当 d 为奇数时，则视为 $M=$sgn .
可以观察到， F_n 是 $d-2$-连通的，并且

$$E_2^{0,d-1} = H^{d-1}(F_n,\mathbb{Z})^{S_n} = \mathbb{Z}$$

当 d 为偶数时。由于 S_n 的上同调是挠的， $E^{0,\ d-1}_{\infty}$在 $E^{0,\ d-1}_{2}$ 中的指数有限，因此是无限循环的。 $H^{d-1}(C_n,\ \mathbb{Z})$ 是 $E^{0,\ d-1}_{\infty} = \mathbb{Z}$ 被 $E^{d-1,\ 0}_{\infty} = H^{d-1}(S_n,\ \mathbb{Z})$ 扩张而成；任何此类扩张都分裂，这就证明了 d 为偶数时的结论。

如果 d 为奇数，

$$H^q(F_n,M) = H^q(F_n,\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{sgn}.$$

特别地，我们有

$$E_2^{0,d-1} = H^0(S_n, H^{d-1}(F_n,\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{sgn}) = \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathrm{sgn}, H^{d-1}(F_n,\mathbb{Z})).$$

此外，对于所有 p， $E^{p,\ 0}_{2} = H^p(S_n,\ \mathrm{sgn})$ 都是有限群。

根据 [2, 命题 9]，我们知道，只有当 $H^{d-1}(F_n,\ \mathbb{Z})$满足条件时，才包含 S_n 的符号表示；在此情形下，重数为 1。因此，当 $n>3$ 且 $\mathbb{Z}$ 时， $E^{0,\ d-1}_{2}$ （从而 $E^{0,\ d-1}_{\infty}$）为零，条件为 $n=2,\ 3$。由此可知，$H^{d-1}(C_n,\ \mathbb{Z}_\pm)$是 $E^{0,\ d-1}_{\infty}$被有限群$E^{d-1,\ 0}_{\infty} = H^{d-1}(S_n,\ \mathrm{sgn})$扩张所得，而该扩张只能分裂为直和。

构形空间 F_n 和 C_n 的上同调，通过对偶性与它们的一点紧化 F_n^+和 C_n^+的同调相关联。

定理 10。 对于所有 d，我们有

$$H_r(F_n^+) = H^{nd-r}(F_n,\mathbb{Z}).$$

此外，对于 d为偶数的情形

$$H_r(C_n^+) = H^{nd-r}(C_n,\mathbb{Z}),$$

且对于 d奇数

$$H_r(C_n^+) = H^{nd-r}(C_n,\mathbb{Z}_\pm).$$

事实上， F_n 是紧致定向流形 $S^{nd} = ((\mathbb{R}^d)^n)^+$ 中闭集 V^+ 的补集，因此

$$H_r(F_n^+) = H_r(S^{nd}/V^+) = H_r(S^{nd}, V^+, \mathbb{Z}) = H^{nd-r}(S^{nd} - V^+, \mathbb{Z}) = H^{nd-r}(F_n, \mathbb{Z}).$$

事实上，当 $d = 2q$, F_n 可以视为 $\mathbb{C}^{qn} \subset (\mathbb{C}P^q)^n$ 的一个子集，且 S_n 通过置换作用于其上时。可以通过爆破消解商空间的奇点，从而得到一个紧致可定向流形，对偶性仍像之前一样适用。对于奇数的 d，有 $F_n \subset (\mathbb{R}P^d)^n$。同样，对 $(\mathbb{R}P^d)^n$ 上 S_n 的作用取商后，可以消解其奇点，所得流形不可定向；此时需使用带扭系数的对偶性。

最后，我们来考察偶数 d 时，有序与无序构形空间的整上同调自由部分之间的关系。

商映射 $q : F_n \to C_n$ 可延拓为一点紧化之间的映射

$$q^+ : F_n^+ \to C_n^+$$

并诱导出一个推前映射

$$H^i(F_n, \mathbb{Z}) = H_{nd-i}(F_n^+) \to H_{nd-i}(C_n^+) = H^i(C_n, \mathbb{Z}).$$

对于 $i = 0$，两边都是无限循环群，且该映射是乘以 $n!$，因为除无穷远基点外，商映射是一个 $n!$ 重覆盖。

这里另一个值得关注的次数是 $i = d - 1$。群 $H^{d-1}(F_n, \mathbb{Z})$ 的生成元 α_{ij} 有如下解释：若在 $\mathbb{R}^d$ 中选定一个“竖直”方向，则类 α_{ij} 是 F_n 中与子流形 $Y_{ij} \subset F_n$ 的交数；该子流形由所有满足第 i 个点“正好位于”第 j 个点上方的构形组成。$H^{d-1}(C_n, \mathbb{Z})$ 对挠元取商后是无限循环群，其生成元是 C_n 中与子集 $Z \subset C_n$ 的交数；该子集由所有满足某个点“正好位于”另一个点上方的构形组成。商映射 $Y_{ij} \to Z$ 保持定向，并且一般是一个 $(n-2)!$ 重覆盖，因此映射

$$H^{d-1}(F_n, \mathbb{Z}) \to H^{d-1}(C_n, \mathbb{Z})$$

将生成元 α_{ij} 送到 $H^{d-1}(C_n, \mathbb{Z})$ 中一个模挠元的生成元的 $(n-2)!$ 倍。总之，

定理 11。推前映射 $H^i(F_n, \mathbb{Z}) \to H^i(C_n, \mathbb{Z})$ 在次数 0 上是乘以 $n!$ 的映射，并将生成元 α_{ij} 映射为自由部分中次数 $d-1$ 上的一个生成元的 $n-2)!$ 倍。

4. The homology of $\exp_n S^d$

4.1. exp的同调谱序列。$\exp_n S^d$ 的拓扑显著取决于 d 是偶数还是奇数；在后一种情况下，还取决于 n 是偶数还是奇数。我们先考虑 d 为偶数的情形。

与空间 $\exp_n S^d$ 上的滤过相关联的同调谱序列，其第 k 项为 $\exp_k S^d$，具有带有以下内容的 E^1 项：

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(C_p^+) = H^{p(d-1)-q}(C_p, \mathbb{Z}). \tag{4.1}$$

由定理 8 可知，与有理数张量后，$E^1_{p,q}$ 的非零项对于 $p \le n$ 等于$\mathbb{Q}$，以及 $q = p(d-1)$ 或 $q = (p-1)(d-1)$。

在 $\mathbb{Q}$ 上，谱序列必然在 E^2 项处退化，因为没有次数为 2 或更高的微分连接非零项；第一阶段未被消去的项都会保留到极限。我们断言，除 $\mathbb{Q}$ 在 $E^1_{n,\, n(d-1)}$ 处的一份拷贝外，所有项都会彼此抵消。

事实上，根据引理 5，空间 $\exp \overline{S^d} = \cup_r \exp_r \overline{S^d}$ 是可缩的。包含映射

$$\overline{\exp}_n S^d \to \overline{\exp}\, S^d$$

与由子空间 $\exp_r S^d$ 给出的滤过相容，并且谱序列的 E^1-项的相应映射是将 $\exp_n S^d$ 的 E^1-项作为前 $n+1$ 列包含进 $\exp S^d$ 的 E^1- 项。这意味着，若按公式 (4.1) 将谱序列向右无限延伸并超出 $p = n$，则所有非零项都应在第一阶段相互抵消。然而，唯一可能被来自区域 $p > n$ 的微分抵消的项位于 $E^1_{n,n(d-1)}$，因此所有其他项都必须由 $\exp_n S^d$ 的谱序列的微分所抵消。

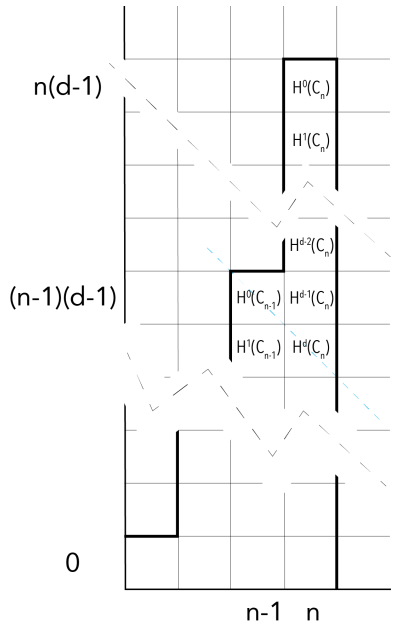


FIGURE 1. $\exp_n S^d$的同调谱序列

位于$E^1_{n,n(d-1)}$ 的项是极限中唯一剩下的项，因此我们得到如下陈述：

Pr命题 12。 当 d 为偶数时，空间 $\exp_n S^d$与球面 S^{nd}有理等价 .

当 n 为奇数时，我们有

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(C^+_p) = H^{p(d-1)-q}(C_p, \mathbb{Z}_\pm). \tag{4.2}$$

在 $\mathbb{Q}$上，$E^1_{p,q}$的非零项在 $p \le n$时等于 $\mathbb{Q}$，且 $q = (p - [p/2])(d-1)$。同样，谱序列的形状迫使它在第 E^2项处退化。出于与之前相同的原因，除 n 为偶数时的项$E^1_{n,(n+1)(d-1)/2}$ 外，所有项都相互抵消。当 n 为奇数时，所有项都必须彼此抵消，我们得到如下结果：

命题 13。 当 d 和 n 均为奇数时，空间 $\exp_n S^d$与球面 $S^{(n+1)(d+1)/2-1}$有理等价。当 d 为奇数且 n 为偶数时，$\exp_n S^d$ 具有点的有理同调。

4.2. **$\exp_n S^d$ 在最高 d 次**。在整数系数下，谱序列不一定在项 E^2 处退化；对于我们的目的，只需考虑余纤维化 (2.2)，其中 $Y = R^d$：

$$C^+_{n-1} \to \overline{\exp}_n S^d / \overline{\exp}_{n-2} S^d \to C^+_n. \tag{4.3}$$

由于 C^+_{n-1} 是维数为 $nd-d$ 的伪流形，当且仅当 d 为偶数时它可定向；而 $\exp_{n-2} S^d$ 的维数为 $nd = 2d$，因此我们有

$$H_{nd-r}(\overline{\exp}_n S^d) = H_{nd-r}(C^+_n)$$

对所有 $r < d-1$ 均成立。当 d 为偶数时，连接映射

$$H_{nd-d+1}(C^+_n) \to H_{nd-d}(C^+_{n-1}) = \mathbb{Z}$$

在 (4.3) 的长正合同调序列中，在 $H_{nd-d+1}(C^+_n)$ 的自由部分上是单射：事实上，它与 $\exp_n S^d$ 的谱序列中的微分 d_1 相同。（我们稍后将看到，它实际上是乘以 $n-1$ 的映射。）当 d 为奇数时， $H_{nd-d}(C^+_{n-1}) = 0$。

定理 9 和 10 给出如下结论：

命题 14。我们有

$$H_{nd-r}(\overline{\exp}_n S^d) = \begin{cases} H^r(S_n, \mathbb{Z}) & for\ d\ even, 0 \le r \le d-1, \\ H^r(S_n, \mathrm{sgn}) & for\ d\ odd,\ 0 \le r < d-1\ or\ r = d-1\ and\ n > 3, \\ H^r(S_n, \mathrm{sgn}) \oplus \mathbb{Z} & for\ d\ odd,\ r = d-1\ and\ n = 2, 3. \end{cases} .$$

根据引理 4，$\exp_{n+1}(S^d, *)$ 上滤过各项的逐次商空间，与 $\exp_n S^d$ 上的逐次商空间相同。由于 $\exp(S^d, *)$ 是可缩的，前面关于空间 $\exp_n S^d$ 的论证可以逐字推广到空间 $\exp_{n+1}(S^d, *)$。我们得到：

命题 15. 当 d 为偶数时，空间 $\exp_n(S^d, *)$ 与球面 $S^{(n-1)d}$ 有理等价。当 d 为奇数且 n 为偶数时，空间 $\exp_n(S^d, *)$ 与球面 $S^{n(d+1)/2-1}$ 有理等价。当 d 和 n 为奇数时，$\exp_n(S^d, *)$ 具有点的有理同调。

在余维 d 下，我们的结果不那么确定：

命题 16. 设 $n \ge 3$。当 $d > 1$ 为奇数时，

$$H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d) \subseteq H^d(C_n, \mathbb{Z}_\pm)$$

是指数至多为 2 的子群。当 d 为偶数时，$H_{nd-d}(\exp_n S^d)$ 是 $H^d(C_n, \mathbb{Z})$ 被一个阶为 $n-1$ 的循环群扩张所得的扩张。该循环群由 $\exp_{n-1} S^d$ 的基本类的像生成。

特别地，对于 $d = 2$，我们看到 $H_{2n-2}(\overline{\exp}_n S^2) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$，因为辫群的第二整系数上同调为零 [3]。

证明。 首先考虑 $d \ge 3$ 为奇数的情形。余纤维化 (4.3) 在次数 $nd-d$ 和 $nd-d-1$ 上的同调正合列给出

$$0 \to H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d / \overline{\exp}_{n-2} S^d) \to H_{nd-d}(C_n^+) \to H_{nd-d-1}(C_{n-1}^+)$$

也就是说，

$$0 \to H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d) \to H^d(C_n, \mathbb{Z}_\pm) \to H^1(C_{n-1}, \mathbb{Z}_\pm) = H^1(S_{n-1}, \mathrm{sgn}) = \mathbb{Z}/2,$$

因此，要么 $H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d) = H^d(C_n, \mathbb{Z}_\pm)$，要么它是该群中指数为 2 的子群。现在设 d 为偶数。下面这段

$$H_{nd-d+1}(C_n^+) \to H_{nd-d}(C_{n-1}^+) \to H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d / \overline{\exp}_{n-2} S^d) \to H_{nd-d}(C_n^+) \to H_{nd-d-1}(C_{n-1}^+)$$

(4.3) 的同调正合列为

$$H^{d-1}(S_n, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{nd-(d-1)}} \mathbb{Z} \to H_{nd-d}(\overline{\exp}_n S^d) \to H^d(C_n, \mathbb{Z}) \to H^1(C_{n-1}, \mathbb{Z}).$$

当 $d = 2$, $H^2(C_n, \mathbb{Z}) = 0$ ([3]) 时；当 $d > 2$ 时，最后一个群为零。 $\mathbb{Z} = H_{nd-d}(C_{n-1}^+)$ 的生成元是 $\exp_{n-1} S^d$ 的基本类在将 $\exp_{n-2} S^d$ 压缩所得商映射下的像。只要证明 $\partial_{nd-(d-1)}$ 将 $H_{nd-d+1}(C_n^+)$ 自由部分的生成元映射为 $n-1$ 倍 $H_{nd-d}(C_{n-1}^+)$ 的生成元，命题 16 即得证。

我们计算 ∂_{nd-d+1} 的方法是，用一个类似的余纤维化覆盖余纤维化 (4.3)；该余纤维化由有序 构形空间组成。

对于 $i \ne j$，令 $V_{ij} \subset (\mathbb{R}^d)^n$ 表示余维为 d 的子空间

$$V_{ij} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i = x_j\}.$$

那么，如果

$$V = \bigcup_{i,j} V_{ij}$$

and

$$W = \bigcup_{\{i,j\} \ne \{i',j'\}} V_{ij} \cap V_{i'j'},$$

V 在 $(\mathbb{R}^d)^n$ 中的补集是构形空间 F_n，而 W 在 V 中的补集是 $n(n-1)/2$ 个 $F_{n-1}(\mathbb{R}^d)$ 的互不相交副本 F_{n-1}^{ij}。和之前一样，记 S^{nd} 为 $((\mathbb{R}^d)^n)^+$。我们有 $S^{nd}/V^+ = F_n^+$，$V^+/W^+ = \vee_{ij}(F_{n-1}^{ij})^+$，并且存在一个余纤维化

$$\vee_{ij}(F_{n-1}^{ij})^+ \to S^{nd}/W^+ \to F_n^+. \tag{4.4}$$

由于 W^+ 在 S^{nd}中的余维为 $2d$，我们有 $H_{nd-i}(S^{nd}/W^+) = 0$，其中 $0 < i < 2d-1$。因此，连接同态

$$\partial_{nd-d+1} : H_{nd-d+1}(F_n^+) \to H_{nd-d}(\vee_{ij} F_{n-1}^{ij})$$

在 $d > 1$成立时是一个同构。

现在，通过忘记构形的顺序，余纤维化 (4.4) 映射到余纤维化 (2.2)。在图中

$$\begin{array}{ccccccc} H^{d-1}(F_n,\mathbb{Z}) & = & H_{nd-d+1}(F_n^+) & \xrightarrow{\partial_{nd-d+1}} & H_{nd-d}(\vee_{ij}(F_{n-1}^{ij})^+) & = & \mathbb{Z}^{n(n-1)/2} \\ & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \\ H^{d-1}(C_n,\mathbb{Z}) & = & H_{nd-d+1}(C_n^+) & \xrightarrow{\partial_{nd-d+1}} & H_{nd-d}(C_{n-1}^+) & & \end{array}$$

竖直映射 h_1 和 h_2 是定理 11 中所述的推前映射。每个生成元 $\alpha_{ij} \in H^{d-1}(F_n, \mathbb{Z})$，也就是与 V_{ij}的链接数，经由 h_1映射为自由部分 $H^{d-1}(C_n, \mathbb{Z})$的标准生成元的 $(n-2)!$ 倍。另一方面，映射 h_2将 α_{ij}的像映为该生成元的 $(n-1)!$ 倍，由此可见，∂_{nd-d+1} 在 $H^{d-1}(C_n, \mathbb{Z})$的自由部分上是乘以 $n-1$ 的映射。

□

4.3. **exp 的同调**。考虑带有$X = S^d$的余纤维化 (2.1) 的同调长正合列：

$$\mathrm{exp}_n(S^d, *) \to \mathrm{exp}_n S^d \to \overline{\mathrm{exp}}_n S^d. \tag{4.5}$$

定理1可由命题 12、13 和 15 立即推出。下面证明定理2。如命题 6 后所述，我们只需处理 d 为偶数且 $r = d-1$ 的情形。

当 d 为偶数时，$H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n(S^d, *)) = \mathbb{Z}$。次数为 $nd-d+1$ 的长正合列形式如下

$$0 \to H_{nd-d+1}(\mathrm{exp}_n S^d) \to H_{nd-d+1}(\overline{\mathrm{exp}}_n S^d) \to \mathbb{Z}.$$

事实上，映到 $\mathbb{Z}$ 的最后一个映射为零。的确，由命题 14 可知，$H_{nd-d+1}(\mathrm{exp}_n S^d) = H^{d-1}(S_n)$，它是挠元。由此可见，对所有 $r < d$，$H_{nd-r}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 与 $H_{nd-r}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 同构，定理2得证。

最后，考虑余维为 d的情形。

设 d 为偶数。余纤维化 (4.5) 的同调长正合列给出

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d) \to H_{nd-d}(\overline{\mathrm{exp}}_n S^d) \to 0$$

因为 $H_{nd-d+1}(\overline{\mathrm{exp}}_n S^d) = H^{d-1}(S_n, \mathbb{Z})$ 是挠元。根据命题 16，群 $H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 是 $H^d(C_n, \mathbb{Z})$的一个扩张，扩张群为 $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$，且 $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ 的一个生成元可由映射表示

$$\overline{\mathrm{exp}}_{n-1} S^d \to \overline{\mathrm{exp}}_n S^d.$$

设 $\gamma \in H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 是 $\mathrm{exp}_{n-1} S^d$ 的类减去 $\mathrm{exp}_n(S^d, *)$ 的类的两倍。一方面，γ 映射到 $H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 中 $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ 的生成元；另一方面，根据命题 7，它的阶为 $n-1$。因此，$H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d)$ 是 $H^d(C_n, \mathbb{Z})$ 的一个扩张，扩张群为 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$。

若 d 为奇数，则 $H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n(S^d, *))$ 消失，而 $H_{nd-d-1}(\mathrm{exp}_n(S^d, *)) = H^1(S_{n-1}, \mathrm{sgn})$，显然等于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。于是，(4.5) 的同调长正合列给出

$$0 \to H_{nd-d}(\mathrm{exp}_n S^d) \to H_{nd-d}(\overline{\mathrm{exp}}_n S^d) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

而定理 3 可由命题 16 推出。

References

[1] M. Adamaszek, *Topology and subsets – the story of a theorem*, arXiv:1011.1236 [math.HO]。https://doi.org/10 48550 1011 1236 。/arXiv。 。G. d'Antonio, G. Gaiffi, 构形空间中构形的对称群作用及其上同调。意大利[2]林琴国家科学院物理、数学与自然科学类学报 21 (2010), 第 3 期, 235–250。[3] V.I. Arnol'd, 关于代数函数的一些拓扑不变量, 莫斯科数学会会刊 21 (1970), 27–46（俄文）, 英文译本见莫斯科数学会汇刊 21 (1970), 30–52。[4] R. Bott, *On the third symmetric potency of S_1*, 《基础数学》39 (1953), 264–268。[5] G. E. Bredon, 《层论》, 第 2 版。施普林格, 纽约, NY, 1997。[6] E.R. Fadell, S.Y.Husseini, 《构形空间的几何与拓扑》, 施普林格, 柏林、海德堡, 2000。[7] C. Giusti, D. Sinha, *Fox-Neuwirth cell structures and the cohomology of symmetric groups*。载于: Bjorner, A., Cohen, F., De Concini, C., Procesi, C., Salvetti, M.（编）《构形空间》。CRM 丛书。高等师范学院出版社, 比萨, 2002。https://doi.org/10 1007 978 88 7642 431 1 12 。/ - - - - D. Handel, [8] *Some homotopy properties of spaces of finite subsets of topological spaces* 26 2000 4, , 《休斯敦747, 764数学杂志》（ ）, 第 – 期。[9] A. Beilinson, V. Drinfeld, 《手征代数》, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2004。[10] K. Brown, 《群上同调》。施普林格, 纽约, 1982。[11] S. Kallel, *Symmetric products, duality and homological dimension of configuration spaces*, 《几何与拓扑专著》13 (2008) 499–527。[12] S. Kallel, *Configuration Spaces of Points: A User's Guide*, 载于 R. Szabo, M. Bojowald（编）《数学物理百科全书》（第二版）, 学术出版社, 2025, 98 135 10 1016 978 0 323 95703 8 00211 1 – 。[13] *Remarks on finite subset spaces* 11 2009 229 250 https://doi.org/ 。/B - - - - 。- S. Kallel, D. Sjerve, , 《同调、同伦及其应用》（ ）, – 。[14] J. Mostovoy, R. Sadykov, *On the connectivity of finite subset spaces*, 《基础数学》217 (2012) 279-282。[15] W. Taamallah, *Connectivity and homology of finite subset spaces of cardinality at most four*, 《拓扑学及其应用》158 (2011), 1699–1712。[16] C. Tuffley, *Finite subset spaces of S^1*, 《代数与几何拓扑学》2 (2002), 1119–1145。 。[17] C. Tuffley, *Finite subset spaces of closed surfaces*, arXiv:math/0311371。