arXiv:2603.01445v1 [math.AG] 2 Mar 2026

曲线覆盖、Ceresa 循环与不太可能的交

TEJASI BHATNAGAR、SHEELA DEVADAS、TOREN D'NELLY-WARADY 和 PADMAVATHI SRINIVASAN

Abstract. 设 C 是一个定义在~零特征域上的光滑、射影、几何整曲线，其 $g \geq 2$ 亏格为 $g \geq 2$ 。我们证明，C 的非常一般分歧~覆盖 C 的 Ceresa 循环 Cer(C) 在其雅可比簇的 Chow 群中是非挠的。我们还证明，存在无穷多个由变化中的曲线族构成的分歧覆盖族，其中这些族的一般点对应于具有非挠 Ceresa 循环的曲线。为说明这一点，我们写出两个显式的 1 维和 2 维 6 属曲线族，在这些族中，具有挠 Ceresa 循环的曲线轨迹是扎里斯基闭的，并且具有正余维。我们的策略是将 Ceresa 循环是否为挠的问题，化归为曲线的雅可比簇上的某个相关点是否为挠的问题。为此，我们使用 Ceresa 循环的"相对典范影"；该点位于曲线的雅可比簇中，由 Ceresa 循环与源自覆盖映射的一个自然对应相交得到。我们将这一方法与不太可能的交理论中的思想（即相对 Manin–Mumford 定理）相结合，以研究相对典范影变为挠点的轨迹。

设 K 是一个零特征域。设 C 是 K 上的一条良好曲线（即光滑、射影、几何整），亏格为 $g \geq 2$。设 J 是 C的雅可比簇。设 e 是 C上的任意一个次数为 1 的除子，并令 i_e: $C \to J$ 表示相应的 Abel-Jacobi 嵌入。Ceresa 循环是如下循环

$$\mathrm{Cer}_e(C) := [i_e(C)] - [-1]^*[i_e(C)] \in \mathrm{CH}_1^{\mathrm{hom}}(J)$$

它属于 J 上同调平凡 1-循环的 Chow 群，模掉有理等价。若 Cer$_e$(C) 在 CH$_1$(J) 中是挠的，则 $(2g-2)e$ 在 C 的 CH$_0$(C) 中是一个典范除子 [ELS，注 3]。此外，若对某个这样的 e，Cer$_e$(C) 是挠的，则对所有这样的 e [它都挠 11]LS24，引理 2.11]。从此我们固定这样一个除子 e，并在 Cer$_e$(C) 中省略下标 e。

在 [Cer83], Ceresa 证明了，对于非常一般的复曲线 C，Cer(C) 在 $g \geq 3$时模代数等价非挠。这类同调平凡的非挠循环在高余维中很难构造。因此，Ceresa 循环在 Chow 群和 Griffiths 群的研究，以及 Beilinson–Bloch 猜想的表述中都发挥了重要作用 [Bei87], [Blo84a], [Blo84b]。我们证明 Ceresa 的结果的如下类比。

令 $d \geq 1$ 为正整数，令 G 为 S_d的传递子群，令 Σ_g 为亏格为 g 的定向曲面，令 $B \subset \Sigma_g$ 为大小为 r的有限子集，并令 ρ 为从基本群 $\pi_1(\Sigma_g \setminus B)$到 G的同态的共轭类。令 $\mathcal{H}_{d,r}(g,\rho)$（以及 $\mathcal{H}_{d,r}(C,\rho)$）分别为 Hurwitz空间，它们参数化单值表示属于表示 ρ的共轭类的光滑亏格为 g 的曲线的 d 次覆盖（分别为特定的亏格为 g 的曲线 C ）。关于 $\mathcal{H}_{d,r}(g,\rho)$ 和 $\mathcal{H}_{d,r}(C,\rho)$ 的构造，参见 [Wew 的定理 4]。

~**定理 1.** 假设 $g \geq 2$，且 ρ 对应于 C的分歧覆盖。那么对于 $\mathcal{H}_{d,\,r}(C,\ \rho)(\mathbb{C})$中的非常一般点 $[C \to C]$，Cer(C) 在 Chow 群中是~非挠的。

注。 支配一条具有非挠 Ceresa 循环的曲线的曲线，其 Ceresa~~循环 [LR，命题 25]，因此，若 Cer(C) 是非挠的，则对每个 C，Cer($[C \to C] \in_{\sim} \mathcal{H}_{d,\,r}(C,\ \rho)$ 也是非挠的。尽管如此，定理 1 给出的结论较弱：Cer(C) 是非挠的

~对于非常一般的$[C \to C] \in \mathcal{H}_{d,\ r}(C,\ \rho)$，即使我们不知道 Cer($C$) 本身是否为挠。定理 1 在 Cer($C$) 为挠时也很有意义，例如 C 为超椭圆曲线时。

注。在 [CP95，定理 4.4。1], Collino 和 Pirola 扩展了 Ceresa 的结果，证明对于任意余维为 C 的子簇，其非常一般点对应的 $\mathcal{V}$ 亏格为 $< (g+2)/3$ 曲线模空间中的点 $\mathcal{M}_g$，当 g 时，Cer($g > 3$) 是非挠的。定理 1 给出了新的子簇实例（其非常一般点对应于具有非挠 Ceresa 循环的曲线），这些实例并非自动包含在 Collino 和 Pirola 的结果之中。

我们还证明，存在无穷多个分歧覆盖族，它们覆盖一个变动的曲线族，且这些族的一般点对应于具有非挠 Ceresa 循环的曲线。令 $\mathcal{M}_g$ 和$\mathcal{M}_{g,\ r}$ 分别为具有完整辛 5 级结构的良好无标记和 r-标记亏格 g 曲线的精细模空间。令 tar : $\mathcal{H}_{d,\ r}(g,\ \rho) \to \mathcal{M}_{g,\ r}$ 表示目标映射，它将一个覆盖映射到以分支点为标记的目标曲线。对于 $\mathcal{M}_g$ 的局部闭子簇 Z，令 $Z_r := \mathcal{M}_{g,\ r} \times_{\mathcal{M}_g} Z$ 和 f_Z: $Z_r \to Z$ 表示自然投影映射。

定理 2。假设 $g \geq 2$，且 ρ 对应于一个分歧覆盖。设 Z 是定义在 $\mathbb{Q}$上的 $\mathcal{M}_g$ 的局部闭不可约子簇，并设 Z_r，f_Z 如上。假设维数为 $\overline{Z} < g$。当我们遍历 Z的非空 ´étale 开子集 U 时，存在无穷多个截面s： $U \to (Z_r)_U$，属于 f_U；使得若 $\mathcal{H}$是 tar^{-1}(s(U)) 的一个不可约分支，则对 $\mathcal{H}$(ℂ)的一个开稠密子集中的 $[C \to C]$，Cer($\widetilde{C}$) 都是~非挠的。

为说明定理 2，我们构造一个显式的一维族和一个二维族，它们由亏格 6 曲线组成，这些曲线是某个变化的亏格 3 曲线族的双覆盖；在该曲线族中，具有非挠 Ceresa 循环的曲线所构成的轨迹是开稠密的。

定理 3。考虑由仿射方程给出的亏格 6 曲线单参数族 C_t

$$y^{12} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \left(\frac{x+t}{x-t}\right)^4.$$

那么，对每个 $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$，Cer($C_t$) 都是非挠的。

Laga 和 Shnidman 在 [LS24的例3中研究了上述族9], ，并证明对每个C_t，Cer(t) 在 Griffiths 群中是挠的；他们还指出，理解其中 Cer(t) 在 Chow 群中变为挠的轨迹C_t将会很有意义。

设 $B \subset \Sigma_3$ 是亏格3定向曲面上的一个二元子集。令 ρ: $\pi_1(\Sigma_3 \setminus B) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是任意一个同态，它将绕 B 中各元素的生成闭路映至 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素；令 $\mathcal{H}_{2,2}$(3) 表示相应的 Hurwitz空间。

The定理 4。考虑由下式定义的平面四次三属曲线的二参数族

$$f_{u,w}(X,Y,Z) := w^2(X(Y^3+Z^3)+Y^2Z^2) + (u^3+w^4)X^2YZ + w^2u^3X^4 = 0.$$

令 A:= [1 : w : $-w$], A':= [1 : $-u$: 0] 为投影 π_2: $V(f) \to \mathbb{A}^2_{(u,w)}$ 的截面。令U 为 π_2 的光滑轨迹的像，令$U \to \mathcal{M}_{3,2}$ 为对应于 (π_2, A, A') 的模映射，并令$S \subset \mathcal{M}_{3,2}$ 为其像。令 $\mathcal{H}$ 为 tar^{-1}(S) 的一个不可约分支。~那么，对 $\mathcal{H}$(ℂ) 的开稠密子集中的 $[C \to C]$，Cer(C) 都是非挠的。

我们的结果属于近期为理解以下轨迹而取得的一系列成果 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$其中$\mathcal{M}_g$ 由具有挠 Ceresa 循环的曲线组成。除至多具有可数多个不可约分支这一事实，以及 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$包含超椭圆轨迹这一事实外，人们对它所知甚少。（关于包含于 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$中的其他一些 Hurwitz层，请参见 [LS24], [QZ24], [Lat 23]; 关于某些较小 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$的情况，请参见 g。）Ceresa 的原始结果表明，当 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}} \neq \mathcal{M}_g$ 时$g \geq 3$, 而 Gao 和 Zhang [GZ], 、Hain [Hai], 以及 Kerr 和 Tayou [KT] 的近期结果表明

存在一个开稠子簇 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}$粗模空间 $\mathcal{M}_g$ 中的 g 亏格曲线，其中 Ceresa 循环至多对可数多个[1]点 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}(\mathbb{C})$ 在 $g \geq 3$时为挠。轨迹 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$包含于 Ceresa 循环的 Abel–Jacobi 像的挠点轨迹中，而 Gao–Zhang、Hain、Kerr–Tayou 使用不同的霍奇理论方法来分析 Ceresa 循环的 Abel–Jacobi 像的挠点轨迹。我们不知道我们所考察的 Hurwitz 空间的通点是否映射到 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}$ 中的 $\mathcal{M}_g$开子集，或者这些论文中的方法是否能够产生这样的族：如我们的定理2、定理3 和定理4中那样，Ceresa 循环在开稠轨迹上为非挠。就我们所知，这些定理给出了首批已知例子中的一些：其中 Ceresa 循环在 Chow 群中一般为非挠，并且挠点轨迹可证为扎里斯基闭。

证明策略概述。我们的结果受到 Laga 和 Shnidman 最近成果的启发 [LS24，定理 C], 作者证明，亏格为 3 的 Picard 曲线族有无穷多个 $\mathbb{Q}$-特化，使得其挠 Ceresa 循环。Laga 和 Shnidman 将 Chow 动机理论与已知的霍奇猜想情形结合起来，证明亏格为 3 的 Picard 曲线族中的 Ceresa 循环成为挠元，当且仅当一个密切相关的椭圆纤维化上的截面成为挠元。我们则利用代数循环的交理论，将 Ceresa 循环是否为挠元这一问题，归结为曲线的雅可比簇上一个密切相关的点是否为挠元。具体来说，对于由本文定理所述覆盖构造得到的曲线，将 Ceresa 循环与一个由覆盖映射产生的自然对应相交，会得到曲线雅可比簇上的一个点；若 Ceresa 循环为挠元，则该点也为挠元。这个点称为该覆盖的“相对典范影”（定义 1.1），由 Ellenberg、Logan 和第四位作者在 [ELS] 中提出，作为 Ceresa 循环平凡性的一个障碍。本文的主要新思路是利用不太可能的交理论中的结果，在族中研究这一障碍。

更确切地说，我们利用 Manin–Mumford–Raynaud 定理（定理 2.1）证明：对于 C 的分歧覆盖，当 C 的亏格至少为 2 时，对分支点作非常一般的选取，会使相对典范影为非挠。在定理 3和定理 4中，我们研究了存在许多到椭圆曲线的 独立映射的双覆盖。定理 3 中的曲线族具有 D_{12} 作用。为证明定理 3，我们将两个对合对应的商上的相对典范影推前，从而得到椭圆纤维化的两个截面。如果 Ceresa 循环的特化是挠的，那么这两个截面都必须同时特化为挠点。我们通过将截面特化到该族中的一个特定成员，证明它们线性独立。随后，我们借助 Masser–Zannier 非常相交定理（定理 2.2 和注 2.3），论证至多只有有限多个点 $t \in \mathbb{C}$ 会使两个截面都特化为挠点。然后，我们利用 Stoll 的一个结果 [Sto17，推论 22]，验证这个同时挠点轨迹实际上是空的。

对于定理 4，我们同样利用 S_3 在光滑平面四次曲线上的作用，并结合特化论证，证明相对雅可比簇族中由相对典范影生成的阿贝尔子簇维数至少为 3（推论 5.7）。由于 $3 > 2 =$ 维数 $\mathcal{H}$，我们可以应用 Gao 和 Habegger 近期证明的相对 Manin–Mumford 定理（定理 2.2）（这是对上述 Manin–Mumford–Raynaud 和 Masser–Zannier 结果的一个共同推广），从而得出挠点轨迹是扎里斯基闭的，且在 $\mathcal{H}$ 中具有正余维（定理 4）。定理 2也可采用类似策略，其中一个关键的额外依据是 Habegger 的“有界高度定理”（定理 2.5），该定理

[1]Gao 和 Zhang 证明，$\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}$中所有具有挠 Ceresa 循环的曲线都定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上，并且 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}(\overline{\mathbb{Q}})$ 中 Ceresa 循环的 Beilinson–Bloch 高度满足 Northcott 性质，即 $\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}(\overline{\mathbb{Q}})$ 中次数有界且其 Ceresa 循环高度有界的点只有有限多个。

意味着，对于定义在 $\mathbb{Q}$ 上并嵌入其雅可比簇 J 中的良曲线 C，存在无穷多个 $C(\mathbb{Q})$ 的生成点，也就是说，存在满足以下条件的点 P：包含 P 的最小阿贝尔子簇就是 J 本身。这使我们能够验证应用相对 Manin–Mumford 定理所需的维数不等式。

$\mathcal{M}_g$的特殊子簇。秉承关于 Shimura 簇的 Andr´e–Oort 风格猜想的精神，人们或许会希望，对于 $\mathcal{M}_g$中的子簇 X，交集 $X(\mathbb{C})\cap\mathcal{M}_g^{\mathrm{tors}}$在 X 中不是扎里斯基稠密的，除非 X 本身在某种意义上是特殊的。[2] Baldi、Klingler 和 Ullmo [BKU，猜想 5。12], 推广了 Klingler 早期的工作 [Kli，第 1 节。5], 最近为混合霍奇结构变分提出了一种 Zilber–Pink 型猜想；这一框架使人们能够利用 $\mathcal{M}_g$ 上由 Ceresa 循环的正规函数所导出的自然混合霍奇结构变分，刻画 $\mathcal{M}_g$ 的特殊子簇（见 [KT，第 2]节）。定理 2、定理 3 和定理 4 中挠点轨迹包含于正余维扎里斯基闭子簇的那些族（以及 [LS24，定理 D][3]中 Ceresa 挠点轨迹扎里斯基稠密的那个族），为检验这一推广的 Zilber–Pink 风格猜想提供了自然的情境，前提是能够验证我们研究的这些族在这一推广框架下确实是非特殊的（相应地，是特殊的）。

Acknowledgements

本项目始于 2024 年在高等研究院举行的代数几何女性研讨会（WIAG）。我们感谢 WIAG 的组织者，让我们有机会参与这场精彩的研讨会。感谢 Jerson Caro、Jordan Ellenberg、Jef Laga、Rachel Pries、Ari Shnidman 和 Salim Tayou 与我们进行了有益的交流。感谢 ICERM 支持“算术与几何中的 Ceresa 循环”会议，该会议为本文提供了灵感。T.B. 于 2025—2026年获得 NSF MSPRF 2503371 资助。P.S. 获得了美国国家科学基金会 DMS-2401547 号资助。

记号。对于整簇 V，一般点（分别为非常一般点）指的是不属于某个真闭子簇 W of V（分别不属于此类子簇的可数并 W）的几何点。域 K 上的良簇 X 是光滑、射影、几何整的 K-簇。对于良曲线 C，我们用 $g(C)$ 表示 C 的亏格，用 $\mathrm{Jac}(C)$ 表示 C的雅可比簇。阿贝尔簇 A的子群簇，是指在加法和取负运算下封闭的闭子簇 A，不要求其不可约。对于零特征域 K 上的阿贝尔簇 A，我们用 $A_{\mathrm{tors}}\subset A(\mathbb{C})$ 表示 A的所有几何挠点构成的集合。对于阿贝尔概形 $\mathcal{A}\to S$，我们用 $\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ 表示 S的所有几何点 s 上 $\mathcal{A}_{s\mathrm{tors}}$ 的并。对于阿贝尔概形 A 和整数 n，我们用 $[n]$ 表示 A上的乘以 n 映射。对于阿贝尔簇 A 上的点 a 以及 A的子簇 X，我们用 $a+X$表示将 X 平移 a所得的子簇。对于阿贝尔 S-概形 $\mathcal{A}$的子簇 X，我们用 $\mathbb{Z}X$ 表示 $\mathcal{A}$ 中的可数并 $\cup_{N\in\mathbb{Z}}[N](X)$，用 $\mathbb{Z}X$ 表示其在 $\mathcal{A}$中的扎里斯基闭包 $\mathbb{Z}X$。

1. Relative canonical shadows of Ceresa cycles for separable covers

在本节中，令 C 和 C' 分别表示域 K 上亏格为 g_C、$g_{C'}$ 的良曲线。设 $\varphi\colon C\to C'$ 是一个次数为 d、分歧除子为 R_φ 的曲线可分覆盖。令 $K_{C'}$ 为 C' 的一个典范除子。

[2]拥有 Ceresa 扭点的一个 Zariski 稠密子集，是特殊子簇的若干相互竞争概念之一，这些子簇所在空间为 $\mathcal{M}_g$，参见 [Bal] 以了解其他概念。[3]参见 [KT，例 4。3] 以进一步了解该族与下述轨迹之间的联系：$\mathcal{M}_g^{\mathrm{amp}}$如上所述。

定义 1.1。 [ELS，定义 5。1]相对典范影 φ是$\mathrm{Pic}^0(C)$ 中由除子

$$D_\varphi := d(2g_{C'}-2)R_\varphi - \deg(R_\varphi)\varphi^*(K_{C'}) + 2(dR_\varphi - \varphi^*\varphi_* R_\varphi).$$

注记 1.2。 有限覆盖（不一定可分）的相对典范影的定义见 [ELS，定义 5。1]为

$$D_\varphi = -(2g_C-2)\varphi^*(K_{C'}) - 2\varphi^*\varphi_*(K_C) + (2dg_{C'})K_C \tag{1}$$

当 φ 可分时，利用黎曼–胡尔维茨公式将 K_C 改写为 $\varphi^*(K_{C'})+R_\varphi$ 并将$2g_C-2$ 改写为 $d(2g_{C'}-2)+\deg(R_\varphi)$（见 D_φ），再结合 $\varphi_*\varphi^*$ 在d 上的除子上是乘以 C'这一事实，便得到定义1.1中的表达式。

我们之所以关注相对典范影，是因为有以下命题。

命题 1.3。 [ELS，引理 2.3，注 9，引理 5。2]若 D_φ 具有无限阶，则对于 C 上的每个次数为 1 的除子 e， C的 Ceresa 循环 $\mathrm{Cer}_e(C)$ 都具有无限阶。

注记 1.4。 (另见 [ELS，注 18]) 我们记录几个特殊情形，在这些情形中，相对典范影的表达式可以进一步简化。

(1) 若 φ 是 ´平展的，则 $K_C = \varphi^*(K_{C'})$ $\varphi^*\varphi_*(K_C) = \deg(\varphi)K_C$，从而 $D_\varphi = 0$。(2) 若 $g_{C'}=0$，则 $D_\varphi = \varphi^*(-(2g_C-2)K_{C'} - 2\varphi_*(K_C)) = 0$，因为$\mathrm{Pic}^0(C')=0$。(3) 若 $g_{C'}=1$，则 $K_{C'}$ 是平凡的，且 $D_\varphi = 2dR_\varphi - 2\varphi^*\varphi_* R_\varphi$。(4) 若 φ 是一个 G-伽罗瓦覆盖，则 $\varphi^*\varphi_*(R_\varphi) = \sum_{\sigma\in G}\sigma(R_\varphi) = dR_\varphi$，因此

$$D_\varphi = d(2g_{C'}-2)R_\varphi - \deg(R_\varphi)\varphi^*(K_{C'}) = (2g_C-2)R_\varphi - \deg(R_\varphi)K_C.$$

(5) 若 $g_{C'}=1$ 且 φ 是伽罗瓦的，则 $K_{C'}$ 是平凡的，并由前一部分 $D_\varphi = 0$。

因此， D_φ 不立即为零的情形是亏格至少为 2 的曲线覆盖，以及亏格为 1 的曲线的非伽罗瓦覆盖。

现在我们证明一个关于相对典范影的推前的引理。

引理 1.5。 除子 $\varphi_*(D_\varphi) = d((2g_{C'}-2)\varphi_*(R_\varphi) - \deg(R_\varphi)K_{C'})$。 特别地，如果$g_{C'}=1$，则 $\varphi_*(D_\varphi)=0$。

证明。 由于 $\varphi_*\varphi^*$ 是 $\mathrm{Pic}^0(C')$ 上乘以 d 的映射，因此可得

$$\begin{aligned}
\varphi_*(D_\varphi) &= \varphi_*(d(2g_{C'}-2)R_\varphi - \deg(R_\varphi)\varphi^*(K_{C'}) + 2(dR_\varphi - \varphi^*(\varphi_*)R_\varphi)) \\
&= d(2g_{C'}-2)\varphi_*(R_\varphi) - \deg(R_\varphi)\varphi_*(\varphi^*(K_{C'})) + 2(d\varphi_*(R_\varphi) - \varphi_*(\varphi^*(\varphi_*)R_\varphi)) \\
&= d(2g_{C'}-2)\varphi_*(R_\varphi) - d\deg(R_\varphi)K_{C'} + 2d\varphi_*(R_\varphi) - 2d\varphi_*(R_\varphi) \\
&= d((2g_{C'}-2)\varphi_*(R_\varphi) - \deg(R_\varphi)K_{C'}).
\end{aligned}$$

□

2. Unlikely intersections in abelian varieties

本节汇总一些关于不太可能的交的结果，我们将在接下来的两节中利用这些结果证明本文的主要定理。

定理 2.1。 (Manin–Mumford–Raynaud， [Zan12，定理 3。1]) 设 X 是阿贝尔簇 A 上的一个子簇，定义在特征零域上。 X 中的挠点包含于有限个阿贝尔子簇的挠平移之并中，且在其中扎里斯基稠密；这些阿贝尔子簇 A包含于 X中。特别地，若维数 $X=1$ 且 X 包含无穷多个挠点，则X 是椭圆曲线的一个挠平移。

回顾记号部分中 $\mathbb{Z}X$ 和 $\mathbb{Z}X$ 的定义。

定理 2.2。 (相对 Manin–Mumford 猜想 [GH，定理 1。1]) 设 S 是代数闭域 L 上的一个良好簇，其特征为零。设 $\pi\colon \mathcal{A} \to S$ 是一个相对维数为 $g \geq 1$的阿贝尔概形。设 X 是 $\mathcal{A}$的一个不可约子簇。假设$\mathbb{Z}X = \mathcal{A}$。若 $X(L) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ 在 X中扎里斯基稠密，则维数 $X \geq g$。

注 2.3。当 S 是一个点时，相对 Manin–Mumford 猜想便归结为上述 Manin–Mumford–Raynaud 定理。当 $\mathcal{A} = \mathcal{E}^2 \to S$ 对于一个维数为 $\dim S = 1$ 的椭圆 S-概形 $\mathcal{E}$ 时，相对 Manin–Mumford 猜想便归结为 Masser–Zannier 非常相交定理 [MZ12], , 其中取 X 为截面 $\tau \times \sigma\colon S \to \mathcal{E}^2$ 的像，该截面来自 $\mathcal{E}$ 的一对线性无关截面（注意， $\mathbb{Z}X = \mathcal{E}^2$ 当且仅当截面 τ 和 σ 线性无关）。在这种情况下，定理 2.2 蕴含至多存在有限多个点 $t \in S$，使得 $\tau(t)$ 和 $\sigma(t)$ 同时为挠点。在第 5 节中，我们将定理 2.2 应用于维数为 $\dim S = 1$ 且 $\dim S = 2$ 的阿贝尔 S-概形，这些概形是椭圆 S-概形的乘积，从而证明定理 3 和定理 4。

定义 2.4 定义。 设 Z 是阿贝尔簇 A的一个子簇。若 Z 生成 A 最小 if 包含 Z 的 A 的阿贝尔子簇是 A。

设 A 是定义在 $\mathbb{Q}$上的阿贝尔簇。固定一个 $A(\mathbb{Q})$上的 Néron–Tate 高度，该高度与某个对称丰沛线丛相关。设 $X \subset A$ 是一个同样定义在 $\mathbb{Q}$上的子簇。现在我们陈述 Habegger 关于 $X(\mathbb{Q})$中位于所有正余维阿贝尔子簇之外的点的一个结果，限于 $\dim X = 1$的特殊情形。根据 [Hab09 第 406], 页底部的讨论，当 $\dim X = 1$时， $X^{oa,[1]} \subset X$ （见 [Hab09，第 407 页，定理] ）中的子集等于X ，前提是 X 不包含在 A 的余维为 ≥ 1的任何阿贝尔子簇的平移中。

定理 2.5。 ([Hab09，定理]) 设 $X \subset A$是定义在 $\mathbb{Q}$上的阿贝尔簇的子簇。设 T 为 A 中所有余维为 ≥ 1的阿贝尔子簇构成的集合。假设维数 $X = 1$，且 X 不包含在 T中任何元素的平移内。那么，$X(\mathbb{Q}) \cap \left(\bigcup_{B \in T} B\right)$ 中的点集具有有界高度。特别地， $X(\mathbb{Q})$ 中有无穷多个点生成 A。

2.1. **阿贝尔簇的生成子簇**。 本节中，我们构造阿贝尔概形 X 的子簇 $\mathcal{A} \to S$，使其满足定理 $\mathbb{Z}X = \mathcal{A}$ 的假设2.2。我们先给出一个引理，它将在定理 1 的证明中用到。

设 C 是域 K上的一条良曲线，设 A 是一个阿贝尔簇，并设 $i\colon C \to A$ 是一个K-态射。设 $r \geq 1$ 是一个整数，且设 $\vec{a} := (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_r)$ 是一个由正整数组成的 r-元组。设 $i_r := i_r^{\vec{a}}\colon C^r \to A$ 是由 $i_r(x_1, \ldots\ldots, x_r) := \sum_{i=1}^{r} a_i i(x_i)$ 定义的映射。

引理 2.6。 设 C， A， i， i_r 如上。假设 $i(C)$ 生成 A。设 $X := i_r(C^r)$。那么，要么 $X = A$，要么 $\dim X < \dim A$，且包含于 X 的任意阿贝尔子簇的挠平移在 X 中具有正余维。

证明。 如果 $\dim X \geq \dim A$，那么 $X = A$，因为 A 不可约，而 X 是 A 的闭子簇。因此现在假设 $\dim X < \dim A$。

设 $a \in A$ 是一个阶为 n 的挠点，并设 B 是 A 的阿贝尔子簇，使得挠平移 $T := a + B$ 包含于 X。设 $j_r := [n] \circ i_r$，设 $Y := [n](X) = j_r(C^r)$，并设 $B := [n](T)$，因此 B 是 Y 的闭子簇。由于 $[n]$ 是同源且 $\mathrm{ord}(a) = n$，因此可得 $B = [n](a + B) = [n](B)$ 是 A 的阿贝尔子簇。由于 $[n]$ 是有限映射，我们有 $\dim B = \dim T$ 且 $\dim Y = \dim X$，因此只需证明 $\dim B < \dim Y$。

假设维数 $B \geq$维数 Y。那么 $B = Y$，因为 B是 Y的闭子簇，且 $Y = j_r(C^r)$不可约。现在我们说明，若 Y是阿贝尔簇，则 $Y = A$，这与我们的假设——维数Y = 维数 X < 维数 A——矛盾。令 $d := \sum n a_{i\circ}$ 将 j_r与下式复合：

对角嵌入 $C \to C^r$，可知 Y 包含 $[d]_*(i(C))$。根据假设，$i(C)$生成 A，因此 $[d]_*(i(C))$生成 $[d]_*(A) = A$。因此 $Y = A$。□

在本节余下部分，设 C 是一条良曲线，其雅可比簇为 J。对于 C 上的一个次数为 1 的除子 D，令 $i_D\colon C \to J$ 表示相应的阿贝尔–雅可比映射，该映射由 $i_D(P) := [P - D]$ 定义。

引理 2.7. 设 C 是一条良曲线。假设 $g(C) \geq 2$。固定一个次数为 1 的除子 P 和一点 $a \in J$。固定一个非零的 $n \in \mathbb{Z}$。则 $a + [n](i_P(C))$ 不包含在 J 的一个正余维阿贝尔子簇的平移中。

证明。假设对某个 $a' \in J$ 以及 J 的一个正余维阿贝尔子簇 B，有 $a + [n](i_P(C)) \subset a' + B$。那么 $(a - a') + [n](i_P(C)) \subset B$。将 a 替换为 $a - a'$ 后，不失一般性，我们可以假设 $a + [n](i_P(C)) \subset B$。令 Q 为一个次数为 1 的除子，使得 $a + [nP - nQ] = 0 \in J$。那么

$$[n](i_Q(C)) = [n]((Q - P) + i_P(C)) = [n(Q - P)] + [n](i_P(C)) = a + [n](i_P(C)) \subset B.$$

若 $[n](i_Q(C)) \subset B$，则 $i_Q(C) \subset [n]^{-1}(B)$。由于 $n \neq 0$，可知 $[n]$ 是一个同源，因而 $[n]^{-1}(B)$ 是 J 中正余维阿贝尔子簇的平移的有限并。由于 $i_Q(C)$ 不可约，它必包含于其中之一；再次通过向次数为 1 的除子 Q 添加一个适当的次数为 0 的除子，我们不妨假设 $i_Q(C)$ 包含于 J 中一个正余维的阿贝尔簇，而不失一般性。这构成矛盾，因为根据我们关于 $g \geq 2$ 的假设，$i_Q(C)$ 生成 J。□

引理 2.8. 固定一个整数 $r \geq 1$、一个由正整数组成的 r 元组 $(a_1, \dots, a_r)$，并令 C、i、i_r如引理 2.6 中所述。假设 C 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且 $g(C) \geq 2$。固定 $C(\overline{\mathbb{Q}})$ 的两两不同的点P_2、$\dots P_r$。存在无穷多个 $P \in C(\mathbb{Q})$，使得 $\mathbb{Z}i_r(P, P_2, \dots, P_r) = J$。

证明。令 $p\colon C \to C^r$ 由 $p(P) := (P, P_2, \dots, P_r)$ 定义，并令 $j_r := i_r \circ p$。令 $a := \sum_{i=2}^r a_i i(P_i) \in J$。于是 $j_r(C) = a + [a_1](i(C))$，又因为 $a_1 \neq 0$，可知 $j_r(C) \subset J$是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的曲线。引理 2.7 表明，$j_r(C)$ 不包含于 J 中某个正余维阿贝尔子簇的平移。将定理 2.5 应用于 $j_r(C) \subset J$，我们得出结论：存在无穷多个 $P \in C(\mathbb{Q})$，使得 $J = \mathbb{Z}j_r(P) = \mathbb{Z}i_r(P, P_2, \dots, P_r)$。□

3. A very general cover of a hyperbolic curve has nontorsion Ceresa cycle

~定理 1 的证明。令 $[\varphi\colon C \to C] \in \mathcal{H}_{C,r}(\rho)$。令 d, R_φ, D_φ 如引理 1.5 中所述。由于覆盖 φ 至少在一个点处分支，我们可以将 $\varphi_* R_\varphi = \sum_{i=1}^r a_i B_i$ 写成某些整数$r, a_1, \dots, a_r \geq 1$的形式。由命题 1.3 和引理 1.5，为证明该定理，只需证明：对固定的 C，以及非常一般地选取分支点 $(B_1, \dots, B_r) \in C^r(\mathbb{C})$，该点

$$\varphi_*(D_\varphi) = d(2g_C - 2)\left(\sum_{i=1}^r a_i B_i\right) - \left(\sum_{i=1}^r a_i\right) dK_C$$

在 $J := \mathrm{Jac}(C)$ 中是非挠的。现在我们构造一个态射 $i_r\colon C^r \to J$，使得 $\varphi_*(D_\varphi) = i_r(B_1, \dots, B_r)$；那么若 $X := i_r(C^r)$，要证明对于非常一般地选取的 $(B_1, \dots, B_r) \in C^r(\mathbb{C})$，$\varphi_*(D_\varphi)$ 是非挠的，只需证明 $X(\mathbb{C})$ 的非常一般点是非挠的。为此，令 $i\colon C \to J$为由 $x \mapsto d(2g_C - 2)x - dK_C$定义的 Abel-Jacobi映射，并令$i_r\colon C^r \to J$由 $i_r(x_1, \dots, x_r) := \sum_{i=1}^r a_i i(x_i)$ 定义。

我们现在证明 $X(\mathbb{C})$ 的非常一般点是非挠的。若 $X = J$，则此结论成立，因为J_{tors} 是 J 的正余维闭子簇的可数并。因此现在假设$X \neq J$。由于 $\deg(dK_C) = d(2g_C - 2) > 0$ 当 $g_C \geq 2$时，一次黎曼-罗赫计算表明，J 中包含 $i(C)$ 的最小阿贝尔子簇是 J。因此由引理 2.6，包含在 X 中的阿贝尔子簇的每个挠平移在 X中都具有正余维。

此外，由于定理 2.1 蕴含 X 中的挠点轨迹包含在 J 的且包含于 X中的阿贝尔子簇的扭平移的有限并中，故 $X(\mathbb{C})$ 的一般点当 $X \neq J$时是非挠的。□

注 3.1。注意，证明实际上给出了更强的结论：对于一般点 $[C \to C]$，在 $\mathcal{H}_{d,r}(C,\rho)(\mathbb{C})$ 中，当 $\dim i_r(C^r) < \dim J$ 时，$\mathrm{Cer}(C)$ 在 Chow 群中是非挠的。当 $r < \dim J$ 时，这一结论恰好成立，因为 a_i 为正（例如，可以像所有 $a_i = 1$ 的情形那样，通过考察一点处诱导的切空间映射来论证）。

4. Infinitely many families with small Ceresa-torsion locus

本节中，我们利用定理 2，证明定理 2.2，将其应用于一对 $(\mathcal{A}, X)$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔概形，$\mathcal{A} \to Z_r$ 由将相对雅可比簇的万有族拉回到子簇 $Z_r \subset \mathcal{M}_{g,r}$而得到；而 $X \subset \mathcal{A}$ 是某个加权 Abel–Jacobi 映射 i_r 的像所得到的子簇，我们现在来定义这个映射。为此，回顾一下定理 2的设定。

固定一个整数 $r \geq 1$。对于 $\mathcal{M}_g$ 中的局部闭子簇 Z，令 $\mathcal{J}_g \to Z$ 为由 Z 参数化的曲线的雅可比簇通用族，令 $Z_r := \mathcal{M}_{g,r} \times_{\mathcal{M}_g} Z$，我们令 $\mathcal{A}_Z := Z_r \times_Z \mathcal{J}_g$。令 $\pi_Z\colon \mathcal{A}_Z \to Z_r$ 和 $f_Z\colon Z_r \to Z$ 表示自然投影映射；当 Z 固定时，为简化记号，我们省略 $\mathcal{A}_Z$，π_Z 和 f_Z 上的下标。对于一个由正整数组成的 r 元组 $\vec{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_r)$，定义 $\pi\colon \mathcal{A} \to Z_r$ 的截面 $i_r^{\vec{a}}$ 如下：

$$i_r^{\vec{a}}\colon Z_r \to \mathcal{A}$$
$$(C, P_1, P_2, \ldots, P_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} \left[(2g-2)a_i P_i - a_i K_C\right].$$

对于阿贝尔概形 $\mathcal{A} \to U$ 和点 $z \in U$，我们用 $\mathcal{A}_z$ 表示 $\mathcal{A}$ 在 z 上方的纤维。

引理 4.1。设 $\tilde{z} \in Z_r(\mathbb{Q})$，且设 $z := f(\tilde{z}) \in Z(\mathbb{Q})$。设 $\vec{a}$ 为由正整数组成的 r 元组，并令 $i_r := i_r^{\vec{a}}$ 如上所述。则存在 z 在 Z 中的一个非空 étale 开邻域 U，以及 f_U 的一个截面 $s\colon U \to (Z_r)_U$，使得 $s(z) = \tilde{z}$。此外，若 $\mathbb{Z}i_r(\tilde{z}) = \mathcal{A}_z$，则 $\mathbb{Z}i_r(s(U)) = \mathcal{A}_U$。

证明。由于 $\mathcal{M}_g$、r 和 $\mathcal{M}_g$ 是 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上的光滑 Deligne–Mumford 叠（见 [DM69，定理 5.2]，），我们可以分别取 $\tilde{z}$ 的 V étale 邻域和 z 的 U étale 邻域，并假设 $f\colon V \to U$ 是概形之间的光滑满射态射。由 [EGA IV$_4$，推论 17.16.3 (ii)] 以及 [EGA IV$_4$，推论 17.16.1] 的证明，可得 s 的存在性。

令 $\mathcal{B} := \overline{\mathbb{Z}i_r(s(U))}$，并令 $B := \overline{\mathbb{Z}i_r(\tilde{z})}$。由于 $z \in U$ 和 $s(z) = \tilde{z}$，可知 $i_r(\tilde{z}) \in i_r(s(U))$，因此 $B \subset \mathcal{B}_z \subset \mathcal{A}_z$。假设 $B = \mathcal{A}_z$。则 $B = \mathcal{B}_z = \mathcal{A}_z$。我们要证明 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_U$。若维数 $\mathcal{B}$ < 维数 $\mathcal{A}_U$ = 维数 $\mathcal{A}$，则维数 $\mathcal{B}_z$ < 维数 $\mathcal{A}_z$，这与 $\mathcal{B}_z = \mathcal{A}_z$ 矛盾。因此维数 $\mathcal{B}$ = 维数 $\mathcal{A}$，在此情形下，$\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}_U$ 中的指数有限。由于 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}_U$ 的闭子群簇，若 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}_U$ 中的指数有限，则它在 $\mathcal{A}_U$ 中也是开集；又由于 $\mathcal{A}_U$ 不可约，也可推出 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_U$。□

命题 4.2. 假设 $g \geq 2$、$r \geq 1$，且 C定义在 $\mathbb{Q}$上。令 Z、$\vec{a}$、Z_r、$\mathcal{A}$、π、i_r 如引理 4.1 中所述。则当我们遍历 Z的非空 étale 开子集 U 时，存在无穷多个截面 $s\colon U \to (Z_r)_U$，其属于 f_U，满足 $\mathbb{Z}i_r(s(U)) = \mathcal{A}_U$。

证明。令 C 为对应于点 $z \in Z$的曲线。由于 C 定义在 $\mathbb{Q}$上，根据引理 2.8，存在无穷多个点 $\tilde{z} \in (Z_r)_z(\mathbb{Q})$，它们对应于一个由两两不同的点$(P_1, P_2, \ldots, P_r)$组成的 r-元组，且满足 $\mathbb{Z}i_r(\tilde{z}) = \mathrm{Jac}(C)$。对每个这样的 $\tilde{z}$，取引理 4.1 中的 s，即可完成证明。□

定理 2 的证明。令 $\pi\colon\ \mathcal{A}\to Z_r$ 为命题 4.2 中的阿贝尔概形。对于每个满足 $1\le i\le r$的 $\widetilde{i}$，令 P_i 为次数为 d 的覆盖 $\varphi\colon\ C\to C$ 的第 i个分支点，该覆盖的单值表示为 ρ，分歧除子为 R_φ。定义 a_i 为除子$d(2g-2)\varphi_*(R_\varphi)$中 P_i 的系数 $\in \mathrm{Pic}^0(C)$，并令 $i_r:=i_r^{\vec{a}}$如命题 4.2 中所述。于是，根据i_r 的定义和引理 1.5，若 D_φ 是上述覆盖 φ 的相对典范影，则 $\varphi_*(D_\varphi)=i_r(P_1,\dots,P_r)$。

根据命题 4.2，随着我们在 Z 的非空 ́étale 开子集 U 上变化，存在无穷多个截面 $s\colon U\to (Z_r)_U$，使得 $i_r(s(U))=\mathcal{A}_U$。固定这样一个截面 s。由于根据假设，$\dim i_r(s(U))=\dim U=\dim Z<g$，且根据 s 的选取，$\mathbb{Z}i_r(s(U))=\mathcal{A}_U$，定理 2.2 蕴含 $i_r(s(U))\cap\mathcal{A}_{\mathrm{tors}}$ 包含于 X 的一个正余维扎里斯基闭子概形中；等价地，对于 Z 的某个非空 ́étale 开子集 U 中的 $x_0:=(C,P_1,\dots,P_r)$，点 $i_r(P_1,\dots,P_r)$ 在 C 的雅可比簇中是非挠的。根据命题 1.3$\widetilde{\ }$以及等式 $\varphi_*(D_\varphi)=i_r(P_1,\dots,P_r)$，可知对于任意 $\mathcal{H}\cap\mathrm{tar}^{-1}(U)\subset\mathrm{tar}^{-1}(Z)$ 中的 $[C\to C]$，$\mathrm{Cer}(C)$ 都是非挠的。由于 tar 是有限平坦态射，因此 $\mathcal{H}\cap\mathrm{tar}^{-1}(U)$ 是不可约子簇 $\mathcal{H}$ 的一个非空开稠密子集。□

5. Explicit families of curves with small Ceresa torsion locus

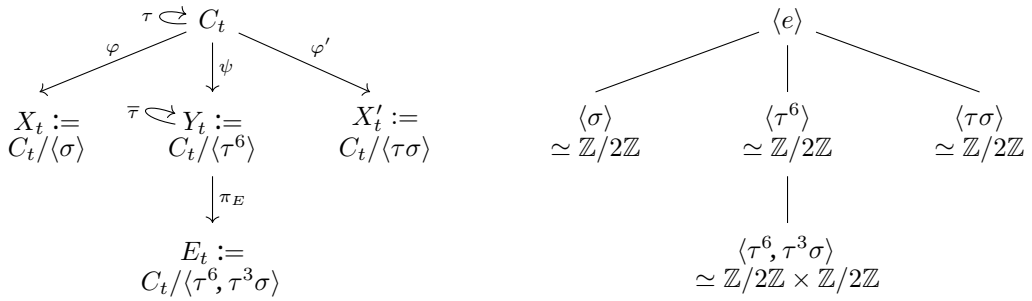
5.1. **单1参数 D_{12}族。** 回顾定理 3 中由以下仿射模型给出的光滑射影 6 属曲线单参数族：

$$C_t: y^{12}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^4.$$

固定一个本原 24 次单位根 ζ_{24}，对于 $m\mid 24$，令 $\zeta_m:=\zeta_{24}^{24/m}$。二面体群 D_{12} 作用在由自同构生成的 C_t 上：

$$\sigma(x,y):=(-x,y^{-1}),\qquad \tau(x,y):=(x,\zeta_{12}y).$$

我们在本小节证明定理 3，即至多只有有限多个 $t\in\mathbb{C}$使得 $\mathrm{Cer}(C_t)$ 为挠。我们的策略是将覆盖 $C_t\to C_t/\langle a\rangle$的相对典范影（其中 $a\in\{\sigma,\tau^3\sigma\}$）推前到商 $C_t/\langle\tau^6,\ \tau^3\sigma\rangle$从而构造椭圆纤维化的两个线性无关截面，随后运用 Masser–Zannier 非常相交定理，证明这些截面的同时挠点轨迹具有有限性。



我们首先写出相关商曲线的显式仿射模型。令 φ，φ'和 ψ为从曲线 C_t到其商 X_t，X_t'，Y_t的映射，它们分别由 σ，$\tau\sigma$和 τ^6给出。由于τ^6 生成了 D_{12}的中心，σ 和 τ 的作用下降为商 Y_t上的自同构 $\bar\sigma$ 和 $\bar\tau$。考虑 Y_t的自同构$\tau^3\sigma$，并令 $\pi_E\colon\ Y_t\to Y_t/\langle\bar\tau^3\bar\sigma\rangle=:E_t$表示相应的商映射。现在我们写出 Y_t 和 E_t的显式方程。

定义有理函数 y_1, u, w 如下:

$$y_1 := y^2, \quad u := y_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x-t}{x+t}\right), \quad \text{and } w := \left(\frac{x+t}{x-t}\right).$$

那么, y_1, u, w 由 τ^6 和 Y_t 固定: $= C_t/\langle\tau^6\rangle$ 由以下仿射方程定义

$$y_1^6 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \left(\frac{x+t}{x-t}\right)^4, \text{ or equivalently by } u^3 = w.$$

类似地, 定义有理函数 v, z 如下:

$$v := u + u^{-1}, \quad z := \left(\frac{y_1 - y_1^{-1}}{R(v)}\right) h(v), \quad \text{where}$$

$$R(v) := v(v-1)(v+2)(t+1) - 2$$
$$h(v) := (v^3 - 3v + 2)t^2 - (v^3 - 3v - 2).$$

由于 $\tau^3\sigma(y_1) = -y_1^{-1}$ 且 $\tau^3\sigma(u) = u^{-1}$, 因此 v, z 在 τ^6 和 $\tau^3\sigma$ 作用下均保持不变, 而亏格 1 曲线 $E_t := Y_t/\langle\bar{\tau}^3\bar{\sigma}\rangle$ 的仿射方程为

$$z^2 = (v-2)h(v).$$

We 通过选取点 $(v = 2, \ z = 0)$ 作为单位元, 使 E_t 成为定义在 $\mathbb{Q}(t)$ 上的椭圆曲线 .

在 $\mathbb{Q}(t)$ 的代数闭包中取一个满足 $c^3 = \frac{1+t}{1-t}$ 的元素 c, 对于 $i = 1$、2、3, 考虑由以下条件定义的 Y_t 上的点

$$A_{i,t} := \left(x = 1, (x-1)y_1^2 = 2\zeta_3^i c^4\right), \text{ or equivalently by } \left(u = \zeta_3^i c, w = \frac{1+t}{1-t}\right), \text{ and,}$$
$$B_{i,t} := \left(x = -1, \frac{y_1^2}{(x+1)} = \frac{-\zeta_3^i}{2c^4}\right), \text{ or equivalently by } \left(u = \frac{\zeta_3^i}{c}, w = \frac{1-t}{1+t}\right).$$

引理 5.1。 ψ、φ、φ' 和 π_E 的分歧除子 R_ψ、R_φ、$R_{\varphi'}$、R_{π_E} 为

$$R_\psi = \sum_{i=1}^{3}\left(\left(x = 1, (x-1)y^4 = 2\zeta_3^i c^4\right) + \left(x = -1, \frac{y^4}{(x+1)} = \frac{-\zeta_3^i}{2c^4}\right)\right)$$
$$R_\varphi = (1/x = 0, y = 1) + (1/x = 0, y = -1),$$
$$R_{\varphi'} = (x = 0, y = \zeta_{24}) + (x = 0, y = -\zeta_{24}), \text{ and,}$$
$$R_{\pi_E} = (x = 0, y_1 = \zeta_4) + (x = 0, y_1 = -\zeta_4).$$

证明。 这些结论由上述曲线 C_t, Y_t 的显式方程, 以及 φ, φ', π_E 的分歧点分别是自同构 $\sigma(x, y) = (-x, y^{-1})$ $\tau\sigma(x, y) = (-x, \zeta_{12}y^{-1})$ 与 $\tau^3\sigma(x, y_1) = (-x, -y_1^{-1})$ 的不动点这一事实得出。□

引理 5.2。 设 D_φ 和 $D_{\varphi'}$ 是 φ 和 φ' 的相对典范影。那么

$$\psi_*(D_\varphi) = 20\left(\frac{1}{x} = 0, y_1 = 1\right) - 4K_{Y_t} - 2\sum_{i=1}^{3}(A_{i,t} + B_{i,t}), \text{ and,}$$
$$\psi_*(D_{\varphi'}) = 20(x = 0, y_1 = \zeta_{12}) - 4K_{Y_t} - 2\sum_{i=1}^{3}(A_{i,t} + B_{i,t}).$$

P屋顶。 由于 $g_{C_t}=6$ 并且由于 φ 是伽罗瓦的，利用注 1.4 (4) 中的公式，我们得到

$$D_\varphi = 10R_\varphi - 2K_{C_t}.$$

由于 $y_1=y^2$ 且由于 $R_\varphi=(\frac{1}{x}=0,\ y=1)+(\frac{1}{x}=0,\ y=-1)$，根据引理 5.1，可得

$$\psi_*(R_\varphi)=10\psi_*R_\varphi-2\psi_*(K_{C_t})=20\left(\frac{1}{x}=0,y_1=1\right)-2\psi_*(K_{C_t}).$$

由于 $\deg\psi=2$，黎曼–赫尔维茨公式和投影公式推出

$$\psi_*(K_{C_t})=\psi_*(\psi^*(K_{Y_t})+R_\psi)=2K_{Y_t}+\psi_*(R_\psi).$$

综合以上结果可得

$$\psi_*(D_\varphi)=20\left(\frac{1}{x}=0,y_1=1\right)-4K_{Y_t}-2\psi_*(R_\psi).$$

所需的 $\psi_*(D_\varphi)$ 表达式现在可由 $y_1=y^2$ 和引理 5.1推出。对于 $\psi_*(D_{\varphi'})$ 的表达式，同样可用 $R_{\varphi'}$ (引理 5.1) 中的公式代替 R_φ。□

引理 5.3。令 $D_1(t):=(\pi_E)_*(\tau^2)_*\psi_*(D_\varphi)$ 且 $D_2(t):=(\pi_E)_*\psi_*(D_{\varphi'})$。那么 $D_1(t)$ 和$D_2(t)$ 是椭圆纤维化 E_t 的线性无关截面。

证明。我们将 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 计算为 E 上的点之和，并用v,z坐标表示于 E上。若 $x=0$且 $y=\pm\zeta_4$，则 $y_1^2=u=-1,w=-1,v=-2,h(v)=4,z=\pm4\zeta_4$。结合黎曼–赫尔维茨公式和引理5.1，得到

$$(\pi_E)_*(K_{Y_t})=(\pi_E)_*(R_{\pi_E})=(-2,4\zeta_4)+(-2,-4\zeta_4).$$

若 $x=\pm1$，则 $w=\frac{\pm1+t}{\pm1-t},u=(\zeta_3^ic)^{\pm1},v=\zeta_3^ic+\frac{1}{c}\zeta_3^{-i},h(v)=0$且 $z=0$。结合 $\pi_E(x=0,y_1=\zeta_{12})=(1,-2\zeta_4)$、引理5.2 以及 $D_2(t)$ 的定义，得到

$$D_2(t)=20(1,-2\zeta_4)-4(-2,4\zeta_4)-4(-2,-4\zeta_4)-4\sum_{i=0}^{2}\left(c\zeta_3^i+\frac{1}{c\zeta_3^i},0\right)$$

结合可得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{(v+2)^4}{(v-2)^2}\right)&=4(-2,4\zeta_4)+4(-2,-4\zeta_4)-8(2,0),\ \text{and},\\ \operatorname{div}\left(\frac{z^2}{(v-2)^3}\right)&=2\sum_{i=0}^{2}\left(c\zeta_3^i+\frac{1}{c\zeta_3^i},0\right)-6(2,0),\end{aligned}\tag{2}$$

我们得到

$$D_2(t)=20(1,-2\zeta_4)-20(2,0)\in\operatorname{Pic}^0(E_t).$$

现在我们计算 $D_1(t)$。由于$\tau^2(x,y_1)=(x,\zeta_3y_1)$，可知 τ^2循环置换两个集合 $\{A_{1,t},A_{2,t},A_{3,t}\}$和 $\{B_{1,t},B_{2,t},B_{3,t}\}$中的元素。由于 τ^2是自同构，且$\overline{K_{Y_t}}$ 是典范除子，我们进一步有 $(\tau^2)_*(K_{Y_t})=K_{Y_t}$ 属于 $\operatorname{Pic}^0(Y_t)$。结合引理 5.2 中 $\psi_*(D_\varphi)$ 的表达式，我们得到

$$(\bar\tau^2)_*(\psi_*(D_\varphi))=20\left(\frac{1}{x}=0,y_1=\zeta_3\right)-4K_{Y_t}-2\sum_{i=1}^{3}A_{i,t}-2\sum_{i=1}^{3}B_{i,t}\in\operatorname{Pic}^0(Y_t).$$

结合 $\pi_E(1/x=0,\ y_1=\zeta_3)=(v=-1,\ z=2t(2\zeta_3+1))$，我们得到

$$(\pi_E)_*(\bar{\tau}^2)_*(\psi_*(D_\varphi)) = 20(-1,2t(2\zeta_3+1)) - 4(-2,4\zeta_4) - 4(-2,-4\zeta_4) - 4\sum_{i=0}^{2}(c\zeta_3^i + \frac{1}{c\zeta_3^i}, 0).$$
$$= 20(-1,2t(2\zeta_3+1)) - 20(2,0) \in \mathrm{Pic}^0(E_t), \text{ using Equation (2).}$$

我们使用 [BDDS] 在 Magma 中 [BCP97] 来检验 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 线性无关，方法是检验其在 $t=7/9$ 上的特化在 $E_{7/9}$上线性无关。□

注记 5.4。由于 $\pi_E(1/x=0,\ y_1=1)=(v=2,\ z=0)$，可以用类似的计算证明 $(\pi_E)_*(\psi_*)(D_\varphi)=0$，因此，在 $D_1(t)$ 的定义中加入额外的推前 $(\tau^2)_*$，对于产生 E_t的线性无关截面是必要的。

引理 5.5。设 $D_1(t)$ $D_2(t)$ E_t如引理 5.3所述。不存在参数 $t\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\}$使得 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 都是 E_t的挠点。

证明。令 $P_1(t):=(-1,2t(2\zeta_3+1))-(2,0)$，且 $P_2(t):=(1,-2\zeta_4)-(2,,0)$。引理 5.3 的证明表明 $D_1(t)=20P_1(t)$，且 $D_2(t)=20P_2(t)$。我们使用 [Sto17 的推论 22]，来检验截面 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 的同时挠点轨迹是否为空。对于勒让德族 E_λ: $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$，以及满足 $\alpha\neq\beta$ 且 trdeg $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=1$ 的一对 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$，Stoll 汇集了一组 $\mathbb{Z}[a,b]$ 中的绝对不可约多项式 F（见 [Sto]）。如果对于某个 λ，α 和 β 是 E_λ 上同时为挠点的点的 x-坐标，那么对于他列表中的某个多项式 F，有 $F(\alpha,\beta)=0$。

为了应用他的结果，我们将给定方程 E_t: $z^2=(v-2)h(v)$ 化为勒让德形式，并计算截面 $P_2(t)$ 和 $P_1(t)$ 的 x-坐标 α,β。接着可以直接验证 trdeg $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=1$，并计算一个绝对不可约的 $F\in\mathbb{Z}[a,b]$，使得$F(\alpha,\beta)=0$。由于 Stoll 证明了这样的多项式 F整除其绝对不可约多项式列表中的某个多项式，因此只需验证我们计算出的 F 不在 Stoll 的列表中。对于下文列出的、由截面 $D_1(t)$ $D_2(t)$ 得出的相关三元组 (α,β,F)，情况确实如此，由此证明了该引理。

为求得 (α,β,F)，首先像之前一样取 $c\in\mathbb{Q}(t)$，使得 $c^3=(1+t)/(1-t)$；对于 $1\le i\le 3$，令 $v_i:=\zeta_3^i c+\frac{1}{c}\zeta_3^{-i}$。若 ψ 是由$2\mapsto\infty, v_1\mapsto 0, v_2\mapsto 1$定义的分式线性变换，那么

$$\alpha=\psi(1)=\frac{(c+\zeta_3)(c-\zeta_3)^2}{(\zeta_3^2-\zeta_3)c(c-1)},\qquad \beta=\psi(-1)=\frac{(2\zeta_3+1)(c-\zeta_3)^3}{9c(c+1)},\ \text{and,}$$
$$F(a,b):=2ab(a-3b)^2-(a-3b)(a^2-6ab-3b^2)+8b^2\in\mathbb{Z}[a,b].\qquad\square$$

定理 3 的证明。由命题 1.3，只需证明对于每个 $t\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\}.$，$D_1(t)\times D_2(t)\in E_t\times E_t$ 都是非挠的。为此，令 $\mathcal{E}\to U\subset\mathbb{A}^1$ 为椭圆纤维化，其一般纤维为 E_t，单位截面为 $(v=2,z=0)$。令 X 为截面$U\to\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ 的像，使得 $t\mapsto D_1(t)\times D_2(t)$。由引理 5.3 可知 $\mathbb{Z}X=\mathcal{E}\times\mathcal{E}$。由于维数 $X=1$，由定理 2.2 和注 2.3 可得，对于至多有限多个 $t\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\}$ 的取值，截面 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 同时为挠。随后引理 5.5 表明，这个同时挠点轨迹实际上为空。□

5.2. **一个 2参数覆盖 S_3 族**。回顾定理 4 – 我们有一个由以下方程定义的二维参数族，其成员是平面四次亏格3曲线:

$$f_{u,w}(X,Y,Z):=w^2(X(Y^3+Z^3)+Y^2Z^2)+(u^3+w^4)X^2YZ+w^2u^3X^4=0,$$

以及投影 p: $V(f)\to\mathbb{A}^2_{(u,w)}$的截面 $A:=[1:\ w:\ -w],\ A':=[1:\ -u:\ 0]$。回顾一下，我们有 $\mathbb{A}^2_u$ 的子集 $U_{,w}$，它是 p 的光滑轨迹的像，即一个模映射

$U \to \mathcal{M}_{3,\,2}$ 对应于（$p,\ A,\ A'$）的子簇 $S \subset \mathcal{M}_{3,\,2}$，即模映射的像；以及子簇 $\mathcal{H}$，它是 $\mathrm{tar}^{-1}(S)$ 的一个不可约分支。在本小节中，我们证明 $\widetilde{\qquad\qquad}$：对于 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ 的一个开稠密子集中的 $[C \to C]$，$\mathrm{Cer}(C)$ 是非挠的。

为此，先回想 S_3 在 $\mathcal{C}$ 上的作用给出了雅可比簇的同源分解：$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}'$，其中 $\mathcal{E}$ 因子是对合中两个对合对应的商，而 $\mathcal{E}'$ 是 S_3 中一个三阶元素对应的商（例如参见 [LLRS23，表 2]）。策略是证明双覆盖的相对典范影生成一个维数至少为 3 的阿贝尔概形：具体来说，证明它到 $\mathcal{E}^2$ 和 $\mathcal{E}'$ 的投影均为占优映射，并且 $\mathcal{E}$与 $\mathcal{E}'$ 不同源。由于 Ceresa 挠点轨迹包含于相对典范影的挠点轨迹中，定理4 由相对 Manin–Mumford 猜想即可推出。

为方便记号，我们记作 $t = (u,\ w)$，并令 $\mathcal{C}_t$、A_t、A'_t 为相应的曲线和标记点。纤维化 $\mathcal{C} \to U$ 的相对典范除子 $K_{\mathcal{C}}$ 由 $\mathbb{P}^2_U$的任意一个超平面截面给出。令 $K_{\mathcal{C}} = \mathrm{div}(X) = 2[0:1:0] + 2[0:0:1]$。令 $\pi_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ 和$\pi_{\mathcal{E}'}\colon \mathcal{E}' \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$为 Proj $\mathbb{Q}[a,b,c] \times$ Spec $\mathbb{Q}[u,w]$ 中由下列方程定义的亏格1纤维化

$$w^2(a^3 - 3abc + b^2c) + (u^3 + w^4)bc^2 + w^2u^3c^3 = 0,\ \text{and},$$

$$w^2(a^2c + b^3 + ab^2) + (u^3 + w^4)abc + w^2u^3ac^2 = 0$$

分别如此。选取单位截面 $[a{:}b:c] = [0:1:0]$ 和 $[a:b:c] = [1:0:0]$ 后，$\pi_{\mathcal{E}}$ 和 $\pi_{\mathcal{E}'}$ 这两个亏格1纤维化分别成为椭圆纤维化。

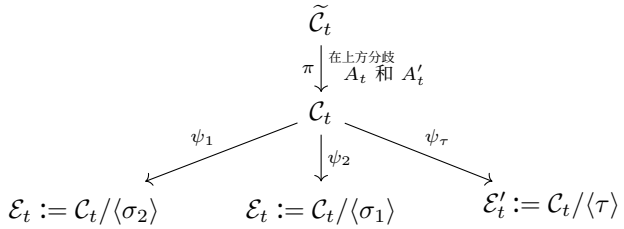
令 ζ_3 为本原三次单位根。族 $\mathcal{C}$ 中的曲线有三个不交换的对合 σ_i，以及商映射 $\psi_i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}:= \mathcal{C}/\sigma_i$，对应 $i = 0$、1、2，定义如下：

$$\sigma_i([X:Y:Z]) := [X:\zeta_3^i Z:\zeta_3^{2i}Y],\quad \psi_i([X:Y:Z]) := [X(\zeta_3^i Y + \zeta_3^{2i}Z) : YZ : X^2] \tag{3}$$

在上述映射下，满足 $X = 0$ 的点映到 $\mathcal{E}$ 中的单位元 $[0:1:0]$。此外，$\mathcal{C}$ 有一个阶为 3 的自同构 τ，其对应的商映射为 $\mathcal{C} \to \mathcal{E}' := \mathcal{C}/\tau$：

$$\tau([X:Y:Z]) := ([X:\zeta_3 Y:\zeta_3^2 Z]),\quad \psi_\tau([X:Y:Z]) := [Y^3 : XYZ : X^3] \tag{4}$$

本节的主要结果是定理4的以下改述。



$\widetilde{\qquad}$设 $\mathcal{C}_{\mathrm{univ}} \to \mathcal{H}_{2,2}(3)$ 表示通过沿源映射 $\mathcal{H}_{2,2}(3) \to \mathcal{M}_6$拉回位于 $\mathcal{M}_6$ 上方的万有族而得到的万有族。回想我们有一个对应于族 $\mathcal{C}$ 的模映射$U \to S \subset \mathcal{M}_{3,2}$。设 $i\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{2,2}(3)$ 为 $\mathrm{tar}^{-1}(S)$ 的不可约分支 $\mathcal{H}$ 的包含映射。我们将滥用记号，并继续把万有族 $\mathcal{C}_{\mathrm{univ}} \to \mathcal{H}_{2,2}(3)$ 沿 i 的$\widetilde{\qquad}$拉回记为 $\mathcal{C}_{\mathrm{univ}} \to \mathcal{H}$。

$\widetilde{\qquad}$定理 4. </style}设，A, A' 如上所述。设 $\mathcal{C} \to U$ 为通过模映射 $U \to S$拉回复合映射 $\mathcal{C}_{\mathrm{univ}} \to \mathcal{H} \to S$ 得到的亏格 6 曲线族。那么，对于 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ 中开稠密子集内的 $[C \to C]$，$\mathrm{Cer}(C)$ 是$\widetilde{\qquad}$非挠的。

我们先证明一些引理。令 $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}/U) =: \mathcal{J} \to U$ 表示曲线族 $\mathcal{C} \to U$的雅可比簇族。我们将 $\pi_*(D_\pi): U \to \mathcal{J}$定义为这样的截面：其在 $t \in U$处的取值由 $\pi_t: \mathcal{C}_t \to \mathcal{C}_t$的相对典范影到 $\mathcal{J}_t$ 的推前给出。对于 $i = 0, 1, 2$，令 $P_i: U \to \mathcal{E}$ 为由 $(\psi_i)_*(\pi)_*(D_\pi)$ 给出的截面。记 $P_\tau: U \to \mathcal{E}'$ 为由 $(\psi_\tau)_*(\pi_*)(D_\pi)$给出的截面。证明定理 4 的关键是下面这个引理。

引理 5.6。椭圆纤维化 $\pi_\mathcal{E}$ 和 $\pi_{\mathcal{E}'}$ 在几何上非同源。此外，P_1 和 P_2 是 $\pi_\mathcal{E}$的线性无关截面，而 P_τ 是 $\pi_{\mathcal{E}'}$的无限阶截面。

证明。利用引理 1.5以及映射 ψ_i的黎曼–赫尔维茨公式，我们计算出 P_i关于 $i = 1、2、\tau$的表达式，得到

$$P_i = 8(\psi_i)_*(A_t + A'_t) - 4(\psi_i)_*(K_{\mathcal{C}_t}). \tag{5}$$

只需找到一点 $t \in U$，使得 P_1 和 P_2 在t 处的特化 P_1 和 P_2 线性无关，P_τ 在 t 处的特化 P_τ 非挠，并且椭圆纤维化 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 在 t 处的特化 E 和 E' 在几何上非同源。我们使用 Magma [中的代码 [BDDS]，在 $t = (w, u) = (1,2)$ 处进行检验，使用

$$\begin{aligned}
\overline{P_1} &= 8[(\zeta_3 - \zeta_3^2) : -1 : 1] + 8[-2\zeta_3 : 0 : -1] - 8 \cdot [0 : 1 : 0] \\
\overline{P_2} &= 8[(\zeta_3^2 - \zeta_3) : -1 : 1] + 8[-2\zeta_3^2 : 0 : -1] - 8 \cdot [0 : 1 : 0] \\
\overline{P_\tau} &= 8[1 : -1 : 1] + 8[-8 : 0 : 1] - 8 \cdot [1 : 0 : 0] - 8 \cdot [1 : -1 : 0],
\end{aligned}$$

□

推论 5.7. 考虑相对维数为 3 的阿贝尔概形族 $\mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}' \to U$。设 $X \subset \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$ 为截面 $P_1 \times P_2 \times P_\tau: U \to \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$ 的像。那么 $\mathbb{Z}X = \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$。

证明。设 $\pi_1: \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}^2$为到第一因子的投影。根据引理 5.6，截面 P_1和 P_2线性无关。于是注 2.3 推出 $\pi_1(\mathbb{Z}X) = \mathbb{Z}(P_1 \times P_2)(U) = \mathcal{E}^2$。引理 5.6 推出 P_τ是非挠的，因而 $\mathbb{Z}P_\tau(U) = \mathcal{E}'$。结合前两句以及 $\pi_\mathcal{E}$ 和 $\pi_{\mathcal{E}'}$ 非同源这一事实，可知 $\mathbb{Z}X = \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$。□

定理 4 的证明。由于 $\mathcal{H}$ 不可约，$\mathcal{H}$ 的任意非空开子簇都是扎里斯基稠密的。由于 tar: $\mathcal{H} \to U$ 是有限平坦态射，U 中任意非空开子集的原像仍是 $\mathcal{H}$中的非空开子集。结合前两句和命题 1.3，可知只需证明 $((\psi_1 \times \psi_2 \times \psi_\tau) \circ \pi)_*(D_\pi): U \to \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$ 的相对典范影的推前在 U的开稠密子集上于 $\mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$ 中是非挠的。设 X 如推论 5.7 中所述。由推论 5.7，$\mathbb{Z}X = \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}'$。由 $\dim U = \dim X = 2 < 3 = \dim(\mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}') - \dim U$，根据定理 2.2，我们得出$X(\mathbb{C}) \cap (\mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}')_{\mathrm{tors}}$ 是 X 中的正余维扎里斯基闭子集。由于 X 不可约，$X(\mathbb{C})$ 的挠点轨迹的补集是扎里斯基稠密的，换言之，相对典范影在 U的开稠密子集上是非挠的。□

注 5.8. 在 [LS24中，命题 5.3], Laga 与 Shnidman 证明，模空间 $\mathcal{M}_3^{S_3}$中具有 S_3 作用的亏格3曲线的非常一般点具有非挠 Ceresa 循环。由于支配一条具有无限阶 Ceresa 循环的曲线的曲线也具有无限阶 Ceresa 循环 [LR，命题 25], Laga 与 Shnidman 的结果蕴含 $\mathrm{Cer}(\mathcal{C}_t)$ 对非常一般的 $t \in U$是非挠的。尽管我们的证明技巧并不能直接说明族 $\mathcal{C} \to U$ 中曲线的 Ceresa 循环（见注 1.4 （5）），但它使我们能够证明一个更强的有限性陈述，其对象为出现在双覆盖族 $\mathcal{C} \to U$中的曲线。

References

[Bal] Gregorio Baldi. “是什么使一条代数曲线变得特殊？ ” URL: https://arxiv.org/pdf/2502.06366（引用于第4页）。[BKU] Gregorio Baldi、Bruno Klingler 与 Emmanuel Ullmo. “论霍奇轨迹的分布”. URL: https://arxiv.org/pdf/2107.08838（引用于第4页）。[Be187] A. A. Be1linson. “代数循环之间的高度配对”. 载于： K-理论、算术与几何（莫斯科，1984–1986）. 第1289卷. Lecture Notes in Math. Springer，柏林，1987，第1–25页. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0078364（引用于第1页）。[BDDS] Tejasi Bhatnagar、Sheela Devadas、Toren D’Nelly Warady 与 Padmavathi Srinivasan. Magma脚本. URL: https://github.com/padmask/CeresaUnlikelyInter

截面

（引文见第 12、14 页）。[Blo84a] Spencer Bloch。《代数循环与 L-函数的值》。载于：《J. Reine Angew. Math.》350（1984），第 94–108 页。 URL: https://doi.org/10.1515/crll.1984.350. 94（引文见第 1 页）。[Blo84b] Spencer Bloch。《代数循环的高度配对》。载于：卢米尼代数 K理论会议论文集（卢米尼，1983）。第 34 卷，第 2–3 期。1984 年，第 119–145 页。 URL: https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90032-X（引文见第 1 页）。[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。《Magma 代数系统（V2.27-9）。I. 用户语言》。载于：《J. Symbolic Comput.》24.3-4（1997）。计算代数与数论（伦敦，1993），第 235–265 页。 URL: http : //dx.doi.org/10.1006/jsco.1996.0125（引文见第 12、14 页）。[Cer83] G. Ceresa。《C 在其雅可比簇中与 C^- 不代数等价》。载于：《Ann. of Math. (2)》117.2（1983），第 285–291 页。 URL: https://doi.org/10.2307/2007078（引文见第 1 页）。[CP95] Alberto Collino 和 Gian Pietro Pirola。《曲线在其雅可比簇中的 Griffiths无穷小不变量》。载于：《Duke Math. J.》78.1（1995），第 59–88 页。 URL: https: // doi.org/10.1215/S0012-7094-95-07804-1（引文见第 2 页）。[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford。《给定亏格的曲线空间的不可约性》。载于：《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》36（1969），第 75–109 页。 URL: http: //www.numdam.org/item?id=PMIHES_1969__36__75_0 （引文见第 8 页）。[EGA IV$_4$] J. Dieudonn´e。《 ´El ´ements de g ´eom ´etrie alg ´ebrique. IV. ´Etude locale des sch ´emas et des morphismes de sch ´emas IV》。法文。32，361 页（引文见第 8 页）。[ELS] Jordan Ellenberg、Adam Logan 和 Padmavathi Srinivasan。《曲线 Ceresa类非平凡性的验证》。 URL: https://arxiv.org/abs/2412.02015（引文见第 1、3、5 页）。[GH] Ziyang Gao 和 Philipp Habegger。《相对 Manin–Mumford猜想》。 URL: https://ziyangjeremygao.github.io/articles/RMM.pdf（引文见第 6 页）。[GZ] Ziyang Gao 和 Shou-Wu Zhang。《族中代数循环的高度与周期》。 URL: https://arxiv.org/pdf/2407.01304（引文见第 2 页）。[Hab09] P. Habegger。《与互补维数代数子群相交的阿贝尔簇子簇》。载于：《Invent. Math.》176.2（2009），第 405–447 页。 URL: https://doi- org.ezproxy.bu.edu/10.1007/s00222-008-0170-6（引文见第 6 页）。[Hai] Richard Hain。《Ceresa 循环与 Gross–Schoen循环的正规函数的秩》。 URL: https://arxiv.org/pdf/2408.07809（引文见第 2 页）。[KT] Matt Kerr 和 Salim Tayou。《论Ceresa正规函数的挠点轨迹》。URL: https://arxiv.org/pdf/2406.19366（引文见第 2、4 页）。

[Kli] Bruno Klingler。《霍奇轨迹与非典型交：猜想》。 URL：https: //arxiv.org/abs/1711.09387（引文见第 4 页）。[LS24] Jef Laga 和 Ari Shnidman。《Ceresa 循环的消失判据》。2024 年。URL：https://arxiv.org/abs/2406.03891（引文见第 1、2、3、4、14 页）。[Lat23] Robert Laterveer。《Humbert 曲线的典范环》。载于：《Manuscripta Math.》172.3-4（2023），第 1093–1107 页。 URL：https://doi-org.ezproxy.bu.edu/ 10.1007/s00229-022-01445-4（引文见第 2 页）。[LLRS23] Davide Lombardo、Elisa Lorenzo Garc´ıa、Christophe Ritzenthaler 和 Jeroen Si-jsling。《通过伽罗瓦覆盖分解雅可比簇》。载于：《Exp. Math.》32.1（2023），第 218–240 页。URL：https://doi.org/10.1080/10586458.2021.1926008（引文见第 13 页）。[LR] Elvira Lupoian 和 James Rawson。《 $X_0(N)$的 Ceresa 循环》。 URL：https : // arxiv.org/abs/2501.14060（引文见第 1、14 页）。[MZ12] D. Masser 和 U. Zannier。《椭圆曲线平方族中的挠点》。载于：《Math. Ann.》352.2（2012），第 453–484 页。 URL：https://doi.org/10.1007/s00208-011-0645-4（引文见第 6 页）。[QZ24] Congling Qiu 和 Wei Zhang。《修正对角循环在 Chow 群中的消失结果》。载于：《Tunis. J. Math.》6.2（2024），第 225–247 页。 URL：https://doi-org.ezproxy.bu.edu/10.2140/tunis.2024.6.225（引文见第 2 页）。[Sto17] Michael Stoll。《勒让德族中的同步挠点》。载于：《Exp. Math.》26.4（2017），第 446–459 页。 URL：https : / / doi - org . ezproxy . bu . edu / 10 . 1080 / 10586458.2016.1201443（引文见第 3、12 页）。[Sto] Michael Stoll。《次数至多为 192 的 $\mathcal{C}$ 的全部分支列表》。http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/simultaneous-torsion/allcurves.magma（ci

t.

见第 12页）。[Wew] Stefan Wewers。《Hurwitz 空间的构造》（见第 1页）。[Zan12] Umberto Zannier。算术与几何中一些不太可能的交问题。第181卷。《数学年刊研究》。附录由 David Masser 撰写。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），2012年，第 xiv +160 （见第 5页）。

The Ohio State University, 100 Math Tower, 231 W 18th Ave, Columbus, OH 43210
Email address: bhatnagar.62@osu.edu
URL: https://sites.google.com/view/tbhatnagar/home?authuser=0

University of Maine, Neville Hall, Room 237, Orono, ME 04469
Email address: sheela.devadas@maine.edu
URL: https://sheeladevadas.github.io

University of California, San Diego, 9500 Gilman Drive La Jolla, CA 92093, USA
Email address: tdnellywarady@ucsd.edu

Boston University, 665 Commonwealth Avenue, Boston, MA 02215, USA
Email address: padmask@bu.edu
URL: https://padmask.github.io/