arXiv:2603.01483v1 [math.CV] 2 Mar 2026

$\mathbb{C}^4$ 中的一个域及其与 μ-综合问题的联系

Sourav Pal 与 Nitin Tomar

摘要。由 Biswas-Pal-Tomar [17], 引入的六方块 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{C}^4$中以 $\mathbb{C}^3$ 中的四块域 $\mathbb{E}$ 为底的 Hartogs 域，定义为

$$\mathbb{H}=\left\{(a,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}\times\mathbb{E}:\sup_{z_1,z_2\in\mathbb{D}}\left|\frac{a\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}{1-x_1z_1-x_2z_2+x_3z_1z_2}\right|<1\right\},$$

其中 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$。六方块域出现在 μ-综合问题的背景中。虽然对称化双圆盘与四块域是与 μ-综合问题相关的著名域，但它们也可实现为经典嘉当域的二重正规全纯像。受此启发，Ghosh-Zwonek [24] 引入了域族 $\{\mathbb{L}_n:\ n\geq 2\}$，并研究其函数论性质与几何性质。进一步证明，$\mathbb{L}_2$ 与 $\mathbb{L}_3$分别双全纯等价于对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 与四块域 $\mathbb{E}$。此外，域 $\mathbb{L}_4$ 双全纯等价于如下给出的域

$$\mathbb{F}=\left\{(a_{11},a_{22},\det(A),a_{21}+a_{12})\in\mathbb{C}^4:A=(a_{ij})_{i,j=1}^2\in M_2(\mathbb{C}),\|A\|<1\right\}.$$

$\mathbb{F}$与 $\mathbb{H}$都是 $\mathbb{C}^4$中的域，并且与四块域 $\mathbb{E}$密切相关，其意义在于：若(x, a, p, s) $\in\mathbb{F}$，则(x, a, p) $\in\mathbb{E}$；若(a, x_1,x_2,x_3) $\in\mathbb{H}$，则(x_1, x_2, x_3) $\in\mathbb{E}$。此外，(x, a, p, 0) $\in\mathbb{F}$当且仅当(0, x, a, p) $\in\mathbb{H}$。另外，当A $=(a_{ij})_{i,j=1}^2\in M_2(\mathbb{C})$且 $\|A\|<1$时，(a_{21},a_{11},a_{22},det(A)) $\in\mathbb{H}$。 $\mathbb{F}$与 $\mathbb{H}$ 之间的这些结构相似性自然引出一个问题：这两个域是否双全纯等价。本文对这一问题给出了否定的回答。此外，我们给出了域 $\mathbb{F}$的其他刻画，并探讨它与 μ-综合问题相关的域之间的联系，例如对称化双圆盘、四块域、五块域和六方块。我们还讨论了Ghosh-Zwonek在 [24]中提出的如下问题： $\mathbb{F}$ 是否以与 $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$ 相同的方式源于某个 μ-综合问题?

1. 引言

全文中，复数、实数、有理数、整数和自然数集分别记作 $\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Z}$和 $\mathbb{N}$。符号 $\mathbb{D}$，$\mathbb{T}$分别表示复平面中以原点为中心的开单位圆盘和单位圆。我们用 $M_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n\times n$ 阶复矩阵组成的空间。矩阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 的转置、伴随、迹、行列式、谱半径和算子范数分别记作 A^t，A^*，$\mathrm{tr}(A)$、$\det(A)$、$r(A)$ 和 $\|A\|$。

在控制工程中（参见 [20, 21]），$n\times n$ 矩阵 A 的结构奇异值是一种代价函数，它推广了A的经典算子范数，并纳入了有关所考虑扰动的结构信息。它是相对于指定的线性子空间E （属于$M_n(\mathbb{C})$）计算的，该子空间通常称为结构。给定这样的子空间 $E\subseteq M_n(\mathbb{C})$，结构奇异值定义为

$$\mu_E(A)=\frac{1}{\inf\{\|X\|\ :\ X\in E,\ \det(I-AX)=0\}}\quad(A\in M_n(\mathbb{C})) \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。 47A13,47A20,47A25, 47A45。关键词和短语。 域 $\mathbb{F}$、六方块、 μ-综合问题、特征边界。

其中约定，若不存在满足 $\det(I - AX) = 0$的$X \in E$，则 $\mu_E(A) = 0$。求解 μ-综合问题不同情形的尝试，产生了 $\mathbb{C}^2$ 和$\mathbb{C}^3$ 中的各种域，例如对称化双圆盘 [5], 、四块域 [1] 和五块域 [8]。这些域分别记作 $\mathbb{G}_2, \mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$，定义如下:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{G}_2 = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\},\\
&\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \ : \ 1 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_1 z_2 \neq 0 \ \text{ for } \ |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\},\\
&\mathbb{P} = \{(a_{21}, \mathrm{tr}(A), \det(A)) \in \mathbb{C}^3 : A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C}), \|A\| < 1\}.
\end{aligned}$$

除了与 μ 综合和控制工程的联系之外， $\mathbb{G}_2$， $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 这些域在几何和函数论方面也有丰富的文献。关于 $\mathbb{G}_2$ 的进一步阅读，可参阅 [2]-[7] 和 [12, 18, 19,32, 34, 33, 40] 。类似地，读者可分别参阅 [1, 9, 13, 28, 30, 44, 46]和 [8, 10, 26, 29, 41, 42] ， 了解关于四块域和五块域的一些有趣研究。除了丰富的几何和函数论之外，这些域也引起了算子理论领域的关注。在这方面，关于对称化双圆盘，可参阅文献 [4, 3, 12, 14] ； 关于四块域，可参阅文献 [13, 11, 35] ； 关于五块域，可参阅文献 [27, 38]。此外，也可参见其中的参考文献。

最近，Biswas-Pal-Tomar [17] 引入了另一个域 $\mathbb{C}^4$ ，与 μ-合成问题有关。令E为所有 2×2上三角复矩阵构成的线性子空间，并将此情形下相应的代价函数记为 μ_E μ_{hexa}。考虑映射

$$\pi : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{21}, a_{11}, a_{22}, \det(A)).$$

集合 $\mathbb{H}_\mu = \{\pi(A) \colon \ A \in M_2(\mathbb{C}) \ \mu_{\text{hexa}}(A) < 1\}$ 在 [17]中称为 μ-六方块。然而， $\mathbb{H}_\mu$ 是连通的但在 $\mathbb{C}^4$中不是开集，因此不是 $\mathbb{C}^4$中的域。 [17]的作者引入了一族新的分式线性映射，定义如下:

$$\Psi_{z_1,z_2}(a, x_1, x_2, x_3) := \frac{a\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}{1 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_1 z_2}, \quad ((z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{D}}^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}). \tag{1.2}$$

注意，对于任意$z_1, z_2 \in \mathbb{D}$，有 $1 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_1 z_2 \neq 0$，因为$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$。定义

$$\mathbb{H} := \left\{ (a, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{E} : \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}} |\Psi_{z_1,z_2}(a, x_1, x_2, x_3)| < 1 \right\}. \tag{1.3}$$

集合 $\mathbb{H}$ 由 Biswas–Pal–Tomar [17], 引入，因其实截面 $\mathbb{H} \cap \mathbb{R}^4$ 的几何结构而被称为六方块域；该实截面是一个有界集合，其边界恰由四个极端集和两个超曲面组成。六方块域 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{C}^4$ 中的一个域，并且 $\mathbb{H} = \text{int}(\mathbb{H}_\mu)$。它与对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$、四块域 $\mathbb{E}$ 以及五块域 $\mathbb{P}$ 的联系已在 [17]中得到探讨。事实上， [17] 中证明了这三个域都是六方块域的全纯收缩。此外， $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$ 分别可以实现为经典 IV 型嘉当域在 $\mathbb{C}^2$ 和 $\mathbb{C}^3$ 中的二重正规全纯像。为此，Ghosh–Zwonek [24] 引入了一个有趣的域族 $\{\mathbb{L}_n : n \geq 2\}$，并研究了它们的几何性质。为此，令 L_n 为 $\mathbb{C}^n$ 中定义的经典 IV 型嘉当域:

$$L_n = \left\{ z \in \mathbb{B}_n : \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^2 - \left|\sum_{j=1}^n z_j^2\right|^2} < 1 - \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right\},$$

其中 $\mathbb{B}_n = \{(z1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : n \sum |z\, j|^2 < 1\}$。映射 $\Lambda_n : L_n \to \mathbb{C}^n$ 由 $\Lambda_n(z_1, z2, \ldots, z_n) = j{=}1(z_1^2, z2, \ldots, z_n)$ 给出，是一个重数为 2 的真全纯映射。域 $\mathbb{L}_n$ 是 L_n 在映射 Λ_n 下的像，即当 $n \geq 2$ 时，$\Lambda_n(L_n) = \mathbb{L}_n$。域 $\mathbb{L}_2$ 和 $\mathbb{L}_3$ 分别与 $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$双全纯等价（双全纯同构的显式公式见 [24] 中的推论 3.9）。我们考虑在 [24], 中引入并定义如下的域 $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F} = \left\{ (a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{12} + a_{21}) \in \mathbb{C}^4 : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ with } \|A\| < 1 \right\}.$$

域 $\mathbb{F}$ 是一个有界的 (1，1，2，1)-拟平衡域。回顾一下，若一个域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 满足以下条件，则称其为 ($m1$，$\cdots$，m_n)-拟圆形域，其中$m1$，.....，m_n 是互素数:

$$\left(\lambda^{m_1} z_1, \cdots, \lambda^{m_n} z_n\right) \in \Omega \qquad \text{for all } \lambda \in \mathbb{T} \text{ and } z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega.$$

此外，若上述关系对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 都成立，则称 Ω 为 $(m1, \cdots, m_n)$-平衡域（或简称拟平衡域）。由 [24] 中的推论 3.9 可知，域 $\mathbb{L}_4$ 和 $\mathbb{F}$ 双全纯等价。如前所述，$\mathbb{H}$ 与 $\mathbb{G}_2$、$\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 密切相关。受此启发，我们在第2节中证明，域 $\mathbb{F}$ 也与域 $\mathbb{G}_2$、$\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 密切相关。特别地，证明了若 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}$，则 $(s, ax - p) \in \mathbb{G}_2$、$(x, a, p) \in \mathbb{E}$ 且 $(a, s - p) \in \mathbb{P}$。此外，还证明了 $\mathbb{G}_2 = \{(s - p) : (0, 0, p, s) \in \mathbb{F}\}$ 以及 $\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) : (0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}\}$。对于 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in M_2(\mathbb{C})$ 且 $\|A\| < 1$，有

$$(a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{12} + a_{21}) \in \mathbb{F} \quad \text{and} \quad (a_{21}, a_{11}, a_{22}, \det(A)) \in \mathbb{H},$$

其中最后一个结论在 [17] 的第6章中得到证明。$\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{H}$之间的这些相似性，连同它们各自与 $\mathbb{G}_2, \mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 的联系，自然引出如下问题：**问题1.** 域 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{H}$ 是否双全纯等价?

我们在第3节通过研究它们各自的特征边界来处理这一问题。这里我们指出，域 $\mathbb{F}$ 的特征边界 $\partial_s\mathbb{F}$ 以及六方块的特征边界的描述可见于 [46, 17]。出于我们的目的，我们在定理 3.3 中得到了 $\partial_s\mathbb{F}$的进一步结构刻画。利用这一点，我们在定理 2.12 中证明域$\mathbb{F}$与 $\mathbb{H}$ 并非双全纯等价。证明的关键步骤在于表明，$\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{H}$ 之间的任一双全纯同构都可延拓为它们闭包之间的同胚，特别地，诱导出它们特征边界之间的同胚，从而导致矛盾。

基于 $\mathbb{L}_2$ 与 $\mathbb{L}_3$ 分别双全纯等价于 $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$ 这一事实，Ghosh-Zwonek[24] 提出了如下问题:

Q2. 域族 $\mathbb{L}_n$ 是否源于 μ-综合的一种特殊情形，如对称多圆盘 $\mathbb{G}_n$ 和四块域 $\mathbb{E}$？

在第4节中，我们针对 $\mathbb{F}$探讨了这个问题；它与 $\mathbb{L}_4$ 双全纯等价。我们通过证明 $\mathbb{F}$ 源于一种合适的 μ-综合构造，给出了肯定的答案。具体而言，我们证明

$$\mathbb{F} = \{(a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{12} + a_{21}) : A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C}), \mu_E(A) < 1\},$$

其中 E 域 $\subset M_2(\mathbb{C})$ 是由 E 域 $= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}$ 给出的线性子空间。有趣的是，事实表明 E 域的选择并不唯一。因此，作为自然的下一步，我们刻画了所有此类线性子空间。我们衷心感谢 Włodzimierz Zwonek 教授提醒我们关注本文所研究的问题。

2. F 域 $\mathbb{F}$ 及其闭包

在本节中，我们研究 $\mathbb{C}^4$ 中如下给出的一个域

$$\mathbb{F} = \{\pi_{\mathbb{F}}(B) : B \in M_2(\mathbb{C}), \|B\| \leq 1\},$$

其中 $\pi_{\mathbb{F}}: M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4$, $\pi_{\mathbb{F}}(B) = (b_{11}, b_{22}, \det(B), b_{12} + b_{21})$，其中 $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2 \in M_2(\mathbb{C})$。[24]的作者证明了，$\mathbb{F}$是一个有界的 (1, 1, 2, 1)-拟平衡域。在此，我们讨论 $\mathbb{F}$的另一种刻画，以及它与和 μ-综合相关的域之间的联系，例如对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$、四块域 $\mathbb{E}$ 和五块域 $\mathbb{P}$。为此，我们需要以下引理。

引理 2.1. 设 $B = \begin{pmatrix} x & b_{12} \\ b_{21} & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$，并令 $(b_{12} + b_{21}, b_{12}b_{21}) = (s, ax - p)$，其中 $s, p \in \mathbb{C}$。则

$$\det(I - B^*B) = 1 - |a|^2 - |x|^2 + |p|^2 - \frac{|s|^2}{2} - \frac{|s^2 - 4(ax - p)|}{2}$$

并且满足以下条件。

(1) 若 $|p| < 1$，则 $\|B\| < 1$ 当且仅当 $\det(I - B^*B) > 0$;

(2) 若 $|p| \leq 1$，则 $\|B\| \leq 1$ 当且仅当 $\det(I - B^*B) \geq 0$。

证明。 由于 $(b_{12} + b_{21}, b_{12}b_{21}) = (s, ax - p)$，经过常规计算可得

$$|s^2 - 4(ax - p)| = |b_{12} - b_{21}|^2 \quad \text{and} \quad \frac{|s|^2}{2} + \frac{|s^2 - 4(ax - p)|}{2} = |b_{12}|^2 + |b_{21}|^2. \tag{2.1}$$

再次经过几步简单计算，可得

$$I - B^*B = \begin{pmatrix} 1 - |x_1|^2 - |b_{21}|^2 & -\bar{x}b_{12} - a\bar{b}_{21} \\ -x\bar{b}_{12} - \bar{a}b_{21} & 1 - |a|^2 - |b_{12}|^2 \end{pmatrix}$$

因此,

$$\begin{aligned} \det(I - B^*B) &= (1 - |x_1|^2 - |b_{21}|^2)(1 - |a|^2 - |b_{12}|^2) - |-\bar{x}b_{12} - a\bar{b}_{21}|^2 \\ &= 1 - |a|^2 - |x|^2 + |p|^2 - \frac{|s|^2}{2} - \frac{|s^2 - 4(ax - p)|}{2}, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 (2.1) 得出。再次由 (2.1)，可得

$$\operatorname{tr}(I - B^*B) = 2 - |a|^2 - |x|^2 - (|b_{12}|^2 + |b_{21}|^2) = 2 - |a|^2 - |x|^2 - \frac{|s|^2}{2} - \frac{|s^2 - 4(ax - p)|}{2}.$$

注意到 $\operatorname{tr}(I - B^*B) = \det(I - B^*B) + (1 - |p|^2)$，因此对于 $p \in \mathbb{D}$，有 $\operatorname{tr}(I - B^*B) \geq \det(I - B^*B)$。所需结论现由以下事实得出：$\|B\| \leq 1$ 当且仅当 $\operatorname{tr}(I - B^*B), \det(I - B^*B) > 0$，且 $\|B\| \leq 1$ 当且仅当 $\operatorname{tr}(I - B^*B), \det(I - B^*B) \geq 0$。证明至此完成。 ∎

接下来，我们给出 $\mathbb{F}$ 中元素的如下刻画。

命题 2.2。 元素 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}$ 当且仅当 $(s, ax - p) \in \mathbb{G}_2$, $p \in \mathbb{D}$ 且

$$1 - |a|^2 - |x|^2 + |p|^2 - \frac{|s|^2}{2} - \frac{|s^2 - 4(ax - p)|}{2} > 0.$$

证明。 设 $(x,a,p,s)\in\mathbb{F}$。那么存在 $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{2}\in M_2(\mathbb{C})$，使得 $\|B\|<1$

因此，$B=\begin{pmatrix} x & b_{12}\\ b_{21} & a\end{pmatrix}$ 满足 $(b_{11},b_{22},\det(B),b_{12}+b_{21})=(x,a,p,s)$。显然，$\det(B),b_{12},b_{21}\in\mathbb{D}$，

因为 $\|B\|<1$。因此，$p\in\mathbb{D}$ 且 $(s,\ ax-p)=(b_{12}+b_{21},b_{12}b_{21})\in\mathbb{G}_2$。由引理 2.1，可得

$$\det(I-B^*B)=1-|a|^2-|x|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2}>0.$$

反之，设 $(s,\ ax-p)\in\mathbb{G}_2$，$p\in\mathbb{D}$，并设 $1-|a|^2-|x|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2}>0$

$p)$。由于 $(s,\ ax-p)\in\mathbb{G}_2$，可以选取 $b_{12},b_{21}\in\mathbb{D}$，使得 $(b_{12}+b_{21},b_{12}b_{21})=(s,ax-p)$。对于 $B=\begin{pmatrix} x & b_{12}\\ b_{21} & a\end{pmatrix}$，由引理 2.1 可知 $\|B\|<1$，因此，$\pi_{\mathbb{F}}(B)=(x,a,p,s)\in\mathbb{F}$。 ■

对于 $(x,a,p,s)\in\mathbb{F}$，由命题 2.2 可知 $(s,\ ax-p)\in\mathbb{G}_2$。因此，可以选择 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{D}^2$，使得 $(s,\ ax-p)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1\lambda_2)$，从而 $(x,a,p,s)=(x,a,p\ \lambda_1+\lambda_2)$。令 $(x_0,a_0,p_0,s_0)=(\lambda_1,\lambda_2,-p,a+x)$。那么 $(s_0,a_0x_0-p_0)=(a+x,ax)\in\mathbb{G}_2$，因为 $|a|,|x|<1$。显然，$|p_0|=|p|<1$。此外，不难看出

$$1-|a_0|^2-|x_0|^2+|p_0|^2-\frac{|s_0|^2}{2}-\frac{|s_0^2-4(a_0x_0-p_0)|}{2}=1-|a|^2-|x|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2},$$

根据命题 2.2，这一数严格为正。再次由命题 2.2，$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ -p,\ a+x)\in\mathbb{F}$ 当 $(a,\ x,\ p\ \lambda_1+\lambda_2)\in\mathbb{F}$。反向结论可用类似论证得到。因此，我们得到如下结果。

推论 2.3。 对于 $(x,a,p,s)\in\mathbb{C}^4$，设 $(s,ax-p)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1\lambda_2)\in\mathbb{G}_2$。那么 $(x,a,p,s)\in\mathbb{F}$ 当且仅当 $(\lambda_1,\lambda_2,-p,a+x)\in\mathbb{F}$。

命题 2.2 对集合 $\mathbb{F}$ 有一个类似的结论，如下一个结果所示。

命题 2.4。 设 $(x,a,p,s)\in\mathbb{C}^4$。那么以下条件等价：

(1) $(x,a,p,s)\in\overline{\mathbb{F}}$;

(2) there exists $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{2}\in M_2(\mathbb{C})$ *with* $\|A\|\le 1$ *such that* $\pi_{\mathbb{F}}(A)=(x,a,p,s)$;

(3) $(s,ax-p)\in\Gamma, p\in\overline{\mathbb{D}}$ *and* $1-|a|^2-|x|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2}\ge 0.$

证明。 容易验证，(2) $\Longleftrightarrow$ (3) 的证明与命题 2.2 的证明思路相同。因此，我们证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 和 (2) $\Longrightarrow$ (1)。

(1) $\Longrightarrow$(2)。取一个序列 $\alpha_n\in\mathbb{F}$，使得 $\alpha_n\to(x,a,p,s)$。于是可以选取 $A_n\in M_2(\mathbb{C})$，使得 $\|A_n\|<1$ 对每个满足 $\pi_{\mathbb{F}}(A_n)=\alpha_n$ 的 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。必要时取一个收敛子列，我们有 $\pi_{\mathbb{F}}(A)=\lim_{n\to\infty}\pi_{\mathbb{F}}(A_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=(x,a,p,s)$。

(2) $\Longrightarrow$(1)。对于某个 A，设 $\alpha=\pi_{\mathbb{F}}(A)$，其中 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{2}\in M_2(\mathbb{C})$，且 $\|A\|\le 1$。对于 $r\in(0,1)$，有 $\|rA\|<1$，因此 $\pi_{\mathbb{F}}(rA)=(ra_{11},ra_{22},r^2\det(A),ra_{12}+ra_{21})\in\mathbb{F}$。容易看出，$\lim_{r\to 1}\pi_{\mathbb{F}}(rA)=\pi_{\mathbb{F}}(A)=\alpha$，因此 $\alpha\in\overline{\mathbb{F}}$。证明至此完成。 ■

下一个引理　由命题 2.4 以及 $\mathbb{F}$ is (1，1，2，1)-拟平衡这一事实可得。

Le引理 2.5。 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\overline{\mathbb{F}}$ 且设 $r\in(0,1)$。则 $(rx_1,rx_2,r^2x_3,rx_4)\in\mathbb{F}$.

域 $\mathbb{G}_2$、 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 与六方块 $\mathbb{H}$ 有着特别密切的关系， [17] 第10章对此进行了探讨。类似地，我们建立了 $\mathbb{F}$ 与域 $\mathbb{G}_2$、 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$ 之间的类似联系。为此，我们回顾了相关文献中的一些有用结果。

对称化双圆盘。 对称化双圆盘是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个有界域，由 Agler 和 Young [2] 于 1999年 引入。其定义为

$$\mathbb{G}_2 = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1, z_2 \in \mathbb{D}\},$$

其闭包为 $\Gamma = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1, z_2 \in \mathbb{D}\}$。我们列出文献[2, 4, 5, 6, 12, 18, 19]中关于这一方向的几个重要结果。

定理 2.6 ([5], 定理 2.1)。 对于$(s, p) \in \mathbb{C}^2$，以下各条件等价:

(1) $(s, p) \in \mathbb{G}_2$; *(2)* $|s - sp| < 1 - |p|^2$; *(3)* $2|s - sp| + |s^2 - 4p| < 4 - |s|^2$; *(4)* 存在 $A \in M_2(\mathbb{C})$，其中 $\|A\| < 1$，使得 $s = tr(A)$ 且 $p = \det(A)$。

对于 Ω in $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，令 $A(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上且在 Ω 中全纯的连续函数代数。Ω （或称 $\partial_s\Omega$ 的希洛夫边界）的特征边界 b是 Ω 的 Ω 中的最小闭子集，使得 $A(\Omega)$ 中的每个函数都在 $b\Omega$ 上取得其最大模。Agler 和 Young [5] 证明了 $b\Gamma = \{(z_1 + z_2, z_1 z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{T}\}$。下面的结果给出了判定$b\Gamma$中元素的条件。

Th定理 2.7 ([12], 定理 1.3)。 设$(s, p) \in \mathbb{C}^2$。以下各条件等价:

(1) $(s, p) \in b\Gamma$; *(2)* $|p| = 1$, $s = sp$ 且 $|s| \leq 2$;

(3) $(s, p) \in \Gamma$ 且 $|p| = 1$; *(4)* $|p| = 1$，并且存在 $\beta \in \mathbb{T}$ 使得 $s = \beta + \beta p$。

四块域。 对称化双圆盘及其与 μ-综合的联系，引出了对应于 μ-综合不同情形的其他各种域。在这一方向上，Abouhajar等人[1] 于2007年引入了一个域，其定义为

$$\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : 1 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + x_3 z_1 z_2 \neq 0 \text{ whenever } |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}.$$

集合 $\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{C}^3$ 中的一个有界域，称为四块域，其闭包记为$\mathbb{E}$。四块域这一域已被证明是多复变函数论 [1, 9, 23, 28, 30, 43, 44, 46] 与算子理论 [11, 13, 15, 16, 36, 37, 35]中具有独立研究价值的域。这里我们回顾若干对我们的目的有用的关于四块域的重要事实。

定理 2.8 ([1], 定理 2.2)**.** 对于$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$，下列各项等价:

(1) $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$; *(2)* $|x_1|^2 + |x_2 - x_1 x_3| + |x_1 x_2 - x_3| < 1$; *(3)* 存在一个 2×2 矩阵 $A = (a_{ij})$，使得 $\|\bar{A}\| < 1$ 且 $x = (a_{11}, a_{22}, det(A))$; *(4)* $1 - |x_1|^2 - |x_2|^2 + |x_3|^2 > 2|x_1 x_2 - x_3|$，并且如果 $x_1 x_2 = x_3$，那么此外还有 $|x_1| + |x_2| < 2$。

We 回顾 [1]四块域特征边界的描述 .

定理 2.9 ([1], 定理 7.1)。 对于 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$，以下条件等价:

(1) $x_1 = x_2 x_3$，$|x_3| = 1$ 以及 $|x_2| \leq 1$; *(2)* 存在一个 2×2 酉矩阵 $U = (u_{ij})$，使得 $x = (u_{11}, u_{22}, \det(U))$;

(3) $x \in b\mathbb{E}$; *(4)* $x \in \mathbb{E}$

以及 $|x_3| = 1$。

五块域。 五块域是 Agler 等人于2015年引入的一个域 [8]。与对称化双圆盘和四块域一样，它自然出现在 μ-综合问题的研究中。五块域 $\mathbb{P}$定义为

$$\mathbb{P} = \{(a_{21}, \mathrm{tr}(A), \det(A)) : A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in M_2(\mathbb{C}), \|A\| < 1\},$$

这是 $\mathbb{C}^3$中的一个有界域。其闭包记为$\mathbb{P}$。五块域具有许多有趣的几何性质，因此近年来备受关注。感兴趣的读者可参阅文献 [8, 10, 26, 27, 29, 38, 42, 41]。我们从文献中回顾五块域的各种刻画与性质。

定理 2.10 ([8], 定理 5.2)**.** 设 $a \in \mathbb{C}$，并设 $(s, p) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) \in \mathbb{G}_2$。则下列命题等价:

(1) $(a, s, p) \in \mathbb{P}$;

(2) $\sup_{z\in\mathbb{D}} \left| \dfrac{a(1-|z|^2)}{1-sz+pz^2} \right| < 1$;

(3) $|a| < \frac{1}{2}|1 - \overline{\lambda}_2\lambda_1| + \frac{1}{2}\sqrt{(1-|\lambda_1|^2)(1-|\lambda_2|^2)}$.

以下 结果给出了五块域的特征边界$b\mathbb{P}$的描述 .

定理 2.11 ([8], 定理 8.4)**.** $(a, s, p) \in b\mathbb{P}$ 当且仅当 $(s, p) \in b\Gamma$ 且 $|a|^2 + |s|^2/4 = 1$。

现在我们给出以下结果，展示域 $\mathbb{F}, \mathbb{G}_2, \mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$之间的相互关系。

定理 2.12. 设 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}$。则 $(s, ax - p) \in \mathbb{G}_2$,$(x, a, p) \in \mathbb{E}$且 $(a, s - p) \in \mathbb{P}$。

证明。由于 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}$，存在 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in M_2(\mathbb{C})$，且 $\|A\| < 1$，使得 $\pi_{\mathbb{F}}(A) = (a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{12} + a_{21}) = (x, a, p, s)$。定义

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and so,} \quad AU = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}.$$

由于U是酉矩阵，我们有 $\|AU\| = \|A\| < 1$。根据 $\mathbb{P}$的定义，$(a_{22}, a_{12} + a_{21}, -\det(A)) = (a, s - p) \in \mathbb{P}$。$(x, a, p) \in \mathbb{E}$这一事实由 $\mathbb{F}$的定义和定理 2.8 的第 (3) 部分得出。此外，根据命题 2.2，我们有$(s, ax - p) \in \mathbb{G}_2$，由此证明完毕。 ■

命题 2.13. 点$(x_1, x_2, x_3, 0)$属于 $\mathbb{F}$，当且仅当$(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$；这又等价于$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$。

证明. 根据定理 6.1，在 [17]中，$(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$当且仅当$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$。此外，由定理 2.12 可知，若 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$，则$(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{F}$。设$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$，并设$(x, a, p, s) = (x_1, x_2, x_3, 0)$。根据命题 2.2，我们有$(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{F}$当且仅当

$$(0, x_1x_2 - x_3) \in \mathbb{G}_2, \quad |x_3| < 1 \quad \text{and} \quad 1 - |x_2|^2 - |x_1|^2 + |x_3|^2 - 2|x_1x_2 - x_3|^2 > 0. \tag{2.2}$$

根据定理 2.6，$(0, x_1x_2 - x_3) \in \mathbb{G}_2$当且仅当 $|x_1x_2 - x_3| < 1$，这可直接由定理 2.8 的第 (2) 部分推出。由于 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$，我们有 $|x_3| < 1$。最后，(2.2) 中的最后一个不等式由定理 2.8 的第 (4) 部分推出。证明至此完成。 ■

对于对称化双圆盘中的点，我们有一个类似的刻画。

命题 2.14。 点 $(0,0,p,s)\in\mathbb{F}$ 当且仅当 $(s,-p)\in\mathbb{G}_2$。

证明。 由定理 2.12 可知 $(0,s,-p)\in\mathbb{P}$，因此由定理 2.10 可得 $(s,-p)\in\mathbb{G}_2$。反过来，假设 $(s,-p)\in\mathbb{G}_2$。可以选取 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{D}^2$，使得 $(s,-p)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1\lambda_2)$。简单计算可得 $s^2+4p=(\lambda_1-\lambda_2)^2$，因此，

$$1+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2+4p|}{2}=1+|\lambda_1\lambda_2|^2-\frac{|\lambda_1+\lambda_2|^2}{2}-\frac{|\lambda_1-\lambda_2|^2}{2}=\sqrt{(1-|\lambda_1|^2)(1-|\lambda_2|^2)}>0.$$

由命题 2.2 可知，$(0,0,p,s)\in\mathbb{F}$，证明至此完成。 ∎

由定理 2.12 可知，若 $(0,a,p,s)\in\mathbb{F}$，则 $(a,s,-p)\in\mathbb{P}$。受命题 2.13 和 2.14 的启发，我们可以问这个命题的逆命题是否成立，即若 $(a,s,-p)\in\mathbb{P}$，是否有 $(0,a,s,-p)\in\mathbb{F}$。下面的例子表明，一般情况下该命题并不成立。

例 2.15。 设 $r\in(0,1)$，且 $(a,s,p)=\left(1-r^2/2,0,r^2\right)$。设 $(\lambda_1,\lambda_2)=(r,-r)$。显然，$(s,-p)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1\lambda_2)$，因此 $(s,-p)\in\mathbb{G}_2$。由定理 2.10 的第 (3) 部分，$(a,s,-p)\in\mathbb{P}$，因为

$$\frac{1}{2}|1-\overline{\lambda}_2\lambda_1|+\frac{1}{2}\sqrt{(1-|\lambda_1|^2)(1-|\lambda_2|^2)}=1>|a|=1-\frac{r^2}{2}.$$

简单计算可得

$$1-|a|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2}=1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2+r^4-2r^2=(1-r^2)^2-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2<0$$

并且由命题 2.2，$(0,a,p,s)\notin\mathbb{F}$。 ∎

以下结果可由定理 2.12、命题 2.13 和 2.14 直接推出。

推论 2.16。 设 $(x,a,p,s)\in\mathbb{C}^4$。则以下结论成立。

(1) If $(x,a,p,s)\in\overline{\mathbb{F}}$, *then* $(s,ax-p)\in\Gamma,(s,-p)\in\Gamma,(x,a,p)\in\overline{\mathbb{E}}$ *and* $(a,s,-p)\in\overline{\mathbb{P}}$.

(2) $(x,a,p)\in\overline{\mathbb{E}}$ *if and only if* $(x,a,p,0)\in\overline{\mathbb{F}}$.

(3) $(s,p)\in\Gamma$ *if and only if* $(0,0,-p,s)\in\overline{\mathbb{F}}$.

现在我们给出一个例子，说明推论 2.16 的第 (1) 部分的逆命题未必成立；也就是说，即使 $(s,ax-p)\in\Gamma,(x,a,p)\in\mathbb{E}$ 且 $(a,s,-p)\in\overline{\mathbb{P}}$，$(x,a,p,s)$ 也可能不属于 $\mathbb{F}$。

例 2.17. 对于 $r\in(0,1)$，定义 $(x_r,a_r,p_r,s_r)=\left(0,1-r^2/2,0,r^2\right)$。由例 2.15 可知，$(a_r,s_r,-p_r)\in\mathbb{P}$ 且 $(s_r,a_rx_r-p_r)=(s_r,-p_r)\in\mathbb{G}_2$。此外，由定理 2.8 的第 (2) 部分可知，$(x_r,a_r,p_r)\in\mathbb{E}$。令 $(x,a,p,s)=(0,1/2,0,1)$。显然，当 $r\to1$ 时，(x,a,p,s) 是 (x_r,a_r,p_r,s_r) 的一个极限点。因此，$(s,ax-p)\in\Gamma$，$(x,a,p)\in\mathbb{E}$ 且 $(a,s,-p)\in\mathbb{P}$。简单计算可得

$$1-|a|^2+|p|^2-\frac{|s|^2}{2}-\frac{|s^2-4(ax-p)|}{2}=-\frac{1}{4}<0$$

因此，根据命题 2.4，$(x,a,p,s)\notin\mathbb{F}$。 ∎

赋范六块 $\mathbb{H}_N$ 和域 $\mathbb{F}$。 如第 1 节所述，域 $\mathbb{G}_2$、$\mathbb{E}$和 $\mathbb{P}$ 是在研究某些 μ-综合问题时出现的。如前所述，这些域可以写成

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_2&=\left\{(a_{11}+a_{22},\det(A)):A=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{C}),\|A\|<1\right\},\\ \mathbb{E}&=\left\{(a_{11},a_{22},\det(A)):A=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{C}),\|A\|<1\right\},\\ \mathbb{P}&=\left\{(a_{21},a_{11}+a_{22},\det(A)):A=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{C}),\|A\|<1\right\}.\end{aligned}$$

受上述关于 $\mathbb{G}_2$、$\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$的描述启发， [17] 的作者研究了由下式给出的集合:

$$\mathbb{H}_N = \left\{(a_{21}, a_{11}, a_{22}, \det(A)) : A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C}), \|A\| < 1\right\},$$

并将 $\mathbb{H}_N$ 称为赋范六块。此外， $\mathbb{H}_N$ 不是 $\mathbb{C}^4$中的一个域，并且$\mathbb{H}_N$ 的多项式凸包的内部等于六方块 $\mathbb{H}$。因此，六方块与赋范六块密切相关。另外，文献 [17] 证明了 $\mathbb{H}_N$ 严格包含于 $\mathbb{H}$。下一个结果揭示了赋范六块 $\mathbb{H}_N$ 与域 $\mathbb{F}$之间的联系。

命题 2.18. 对于（a, x_1, x_2, x_3） $\in \mathbb{C}^4$，以下结论成立。

(1) If $(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_N$, *then* $(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{F}$.

(2) If $a \neq 0$, *then* $(a, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_N$ *if and only if* $\left(x_1, x_2, x_3, a + \dfrac{x_1x_2 - x_3}{a}\right) \in \mathbb{F}$

证明. 对于$a = 0$，定义$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$。由 [17] 中的定理 5.6 可得:

$$(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_N \implies (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E} \text{ and } x_1x_2 = x_3 \implies \|A_0\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1$$

因此， $\pi_{\mathbb{F}}(A_0) = (x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{F}$。令$a \neq 0$，并取$w \in \mathbb{C}$，使得$w^2 = x_1x_2 - x_3$。定义

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & w^2/a \\ a & x_2 \end{pmatrix}.$$

若 $(a, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_N$，则由 [17] 中的引理5.4和定理 5.6可得 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$且 $\|B\| < 1$。因此， $\pi_{\mathbb{F}}(B) = \left(x_1, x_2, x_3, a + x_1x_2 - x_3a\right) \in \mathbb{F}$。反过来，假设

$$a \neq 0 \quad \text{and} \quad (x, a_0, p, s) = \left(x_1, x_2, x_3, a + \frac{x_1x_2 - x_3}{a}\right) \in \mathbb{F}.$$

根据定义，存在$A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$，其中 $\|A\| < 1$ 满足 $\pi_{\mathbb{F}}(A) = (x, a_0, p, s) = (a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{21} + a_{12})$。特别地，我们有

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} \\ a_{21} & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad (a_{12} + a_{21}, a_{12}a_{21}) = (s, a_0x - p) = \left(a + \frac{w^2}{a}, w^2\right) = (b_{12} + b_{21}, b_{12}b_{21}).$$

由引理 2.1 可知

$$\det(I - A^*A) = \det(I - B^*B) = 1 - |a_0|^2 - |x|^2 + |p|^2 - \frac{|s|^2}{2} - \frac{|s^2 - 4(a_0x - p)|}{2}.$$

由于 $\|A\| < 1$，由引理 2.1 可得 $\det(I - A^*A) = \det(I - B^*B) > 0$，因此 $\|B\| < 1$。于是，$(b_{21}, b_{11}, b_{22}, \det(B)) = (a, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_N$。证明至此完成。 ■

注意，上述定理第 (1) 部分的逆命题一般未必成立。例如，对于所有$x_1, x_2, x_3, a) = (0, 0, r^2, 0) \in \mathbb{F}$，都有 $r \in (0, 1)$。事实上，我们有

$$(0, 0, r^2, 0) = \pi_{\mathbb{F}}(A), \quad \text{where} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} \quad \text{which satisfies } \|A\| < 1.$$

然而，$(a, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, r^2) \notin \mathbb{H}_N$，因为 $x_1x_2 \neq x_3$（参见 [17] 中的定理 5.6）。事实上，命题 2.13 刻画了属于域 $\mathbb{F}$ 的形如 $(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{C}^4$ 的点。

我们现在给出 赋范六块的一种替代表征 $\mathbb{H}_N$ 通过域 $\mathbb{F}$给出。

Coro推论 2.19。 $\mathbb{H}_N$ 的内部和赋范六块 $\mathbb{H}_N$ 可写为

$$int(\mathbb{H}_N) = \left\{(a,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^4 : a \neq 0, \left(x_1,x_2,x_3,a+\frac{x_1x_2-x_3}{a}\right) \in \mathbb{F}\right\} and$$
$$\mathbb{H}_N = int(\mathbb{H}_N) \cup \{(0,x_1,x_2,x_1x_2) \in \mathbb{C}^4 : (0,x_1,x_2,x_1x_2) \in \mathbb{F}\}.$$

证明。 由 [17] 中的命题 5.10 可得 int($\mathbb{H}_N$) $= \{(a,\ x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{H}_N : a \neq 0\}$，因此，定理陈述中关于 int($\mathbb{H}_N$) 的第一个等式由命题 2.18 得出。其余结论由命题 2.13，以及以下事实得出：$(0,\ x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{H}_N$ 当且仅当 $x_3 = x_1x_2$ 且 $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{E}$ （参见 [17] 中的定理 5.6）。证明完毕。■

3. F 域的特殊（Shilov）边界 $\mathbb{F}$

对于 $z \in \mathbb{C}^n$，z 的欧几里得范数记为 $\|z\|$，而 $z \bullet z = z_1^2 + \ldots + z_n^2$。我们将 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球记为 $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$。对于 $n \geq 1$，李球 L_n 定义为

$$L_n = \left\{z \in \mathbb{B}_n : 2\|z\|^2 - |z \bullet z|^2 < 1\right\},$$

这是一个凸平衡域。L_n 的希洛夫边界由下式给出

$$\partial_s L_n = \left\{e^{i\theta}x = (e^{i\theta}x_1, \ldots, e^{i\theta}x_n) : \theta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\right\}.$$

考虑如下定义的真全纯映射

$$\Lambda_n : L_n \to \mathbb{C}^n, \quad \Lambda_n(z_1,z_2,\ldots,z_n) = (z_1^2,z_2,\ldots,z_n).$$

域 $\mathbb{L}_n$ 是在映射 Λ_n 下由 L_n 定义的，即 $\mathbb{L}_n = \Lambda_n(L_n)$。特别地，$\mathbb{L}_4 = \Lambda_4(L_4)$。此外，域 $\mathbb{L}_4$ 是一个 (2,1,1,1)-拟平衡域。由 [24] 中的命题 4.1 可知，$\mathbb{L}_4$ 的希洛夫边界由下式给出

$$\partial_s \mathbb{L}_4 = \Lambda_4(\partial_s L_4) = \left\{(e^{2i\theta}x_1^2, e^{i\theta}x_2, e^{i\theta}x_3, e^{i\theta}x_4) : \theta, x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R},\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1\right\}. \tag{3.1}$$

同样，由 [24] 中的推论 3.9 可知，以下映射

$$f : \mathbb{L}_4 \to \mathbb{F}, \quad f(w_1,w_2,w_3,w_4) = (w_3 + iw_4, -w_3 + iw_4, -w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 - w_1, 2w_2) \tag{3.2}$$

定义了一个双全纯同构。本节利用 (3.2) 中的双全纯同构，并结合 $\mathbb{L}_4$ 和 $\mathbb{F}$ 都是拟平衡域这一事实，明确描述域 $\mathbb{F}$ 的希洛夫边界。此外，我们证明域 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{H}$ 彼此不双全纯等价；为此，只需证明它们的希洛夫边界不同胚。我们先介绍 Kosi´nski [28]，的以下结果，它在本节中起着关键作用。

引理 3.1 ([28],引理 6). 设 D、G 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域。假设 G 是$(m_1,\cdots,m_n)$-圆形的，并且包含原点。此外，我们假设伯格曼核函数$\bar{K}_D(z\ \xi)\,(z\ \xi \in D)$与 D 相关联，并满足如下性质：对 D 的任一开的、相对$\bar{}$紧子集 E，存在包含 D 的开集 $U = U(E)$，使得对每个 $\xi \in E$，$K_D(z\ \xi)$作为 z 的函数可全纯延拓到 U 上。于是，任一真全纯映射$f : D \to G$ 可全纯延拓到 $\overline{D}$ 的某个邻域。

我们还从 [28, 31]回顾到，给定的（$m1,\ldots,m_n$）-拟平衡域D 在 $\mathbb{C}^n$中的闵可夫斯基泛函 定义为

$$M_D(x) := \inf\left\{t > 0 : (t^{-m_1}x_1, \ldots, t^{-m_n}x_n) \in D\right\}, \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

对于$r > 0$，我们将$D_r = \{x \in \mathbb{C}^n : M_D(x) < r\}$记为。闵可夫斯基泛函具有若干有趣的性质。特别地，我们有

$$M_D(\alpha^{m_1}x_1^m, \ldots, \alpha^{m_n}x_n) = |\alpha| M_D(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{C}^n : M_D(x) < 1\}. \tag{3.4}$$

由 [28] 中的备注 7 可知，有界拟平衡域 D 的闵可夫斯基泛函连续，当且仅当 D 在 $D^{1/r}$ 中对每个 $r \in (0,1)$ 都相对紧。

由于 $\mathbb{L}_4$ 和 $\mathbb{F}$都是包含原点的 $\mathbb{C}^4$ 中的拟平衡有界域，由引理 3.1 及 [28] 中的备注 7 可知，f可延拓为从 $\mathbb{L}_4$ 到$\mathbb{F}$的双全纯同构。对于$r \in (0,1)$，我们定义

$$\mathbb{F}_{1/r} = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : M_{\mathbb{F}}(x_1, x_2, x_3, x_4) < 1/r\right\}.$$

由 (3.3) 和 (3.4) 可知，$\mathbb{F}_{1/r} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : (rx_1, rx_2, r^2x_3, rx_4) \in \mathbb{F}\right\}$，因此$\mathbb{F}_{1/r}$ 是 $\mathbb{C}^4$ 中的一个域。由引理 2.5 可知，对于每个$r \in (0,1)$，$\mathbb{F}$在 $\mathbb{F}_{1/r}$ 中相对紧。应用 [28] 中推论 4 的 (a) 部分和备注 7，可得映射f: $\mathbb{L}_4 \to \mathbb{F}$ （如 (3.2) 中所示）将 $\partial_s\mathbb{L}_4$ 映射到 $\partial_s\mathbb{F}$。由此得到以下结果。

定理 3.2。定理 $\mathbb{F}$ 的希洛夫边界由 $\partial_s\mathbb{F} = f(\partial_s\mathbb{L}_4)$ 给出，其中 f 是式 (3.2) 中的映射 .

下面给出 $\mathbb{F}$ 的希洛夫边界的其他若干种刻画。

定理 3.3。 设$(x,a,p,s) \in \mathbb{C}^4$。则以下命题等价:

(1) $(x,a,p,s) \in \partial_s\mathbb{F}$; *(2)* 存在实数 θ，x_1, x_2, x_3, x_4，满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$，使得

$$(x,a,p,s) = \left(e^{i\theta}(x_3 + ix_4),\ -e^{i\theta}(x_3 - ix_4),\ -e^{2i\theta},\ 2e^{i\theta}x_2\right);$$

(3) th 存在 $(z,w) \in \mathbb{B}_2$与 $\eta \in \mathbb{T}$，使得 $(x,a,p,s) = (z - \bar{\eta}z - \eta,\ w + w\bar{\eta})$;

(4) $(x,a,p) \in b\mathbb{E}$且存在 $w \in \mathbb{C}$，使得 $(x,w) \in \mathbb{B}_2$且 $s = w - w\bar{p}$.

证明。 由 (3.1) 可得

$$\partial_s\mathbb{L}_4 = \left\{(e^{2i\theta}x_1^2, e^{i\theta}x_2, e^{i\theta}x_3, e^{i\theta}x_4) : \theta \in \mathbb{R}, (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}.$$

对于 $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$，其中 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$，由 (3.2) 可得

$$f(e^{2i\theta}x_1^2, e^{i\theta}x_2, e^{i\theta}x_3, e^{i\theta}x_4) = \left(e^{i\theta}(x_3 + ix_4),\ -e^{i\theta}(x_3 - ix_4),\ -e^{2i\theta},\ 2e^{i\theta}x_2\right).$$

由定理 3.2，(1) 与 (2) 是等价条件。我们证明 (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (2)。

(2) $\Longrightarrow$ (3)。设存在实数 $\theta, x_1, x_2, x_3, x_4$，满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$，使得

$$(x,a,p,s) = \left(e^{i\theta}(x_3 + ix_4),\ -e^{i\theta}(x_3 - ix_4),\ -e^{2i\theta},\ 2e^{i\theta}x_2\right).$$

定义 $(z, w\ \eta) = \left(e^{-i\theta}(x_3 - ix_4), e^{i\theta}x_2, e^{2i\theta}\right)$。不难看出，$|z|^2 + |w|^2 = 1 - x_1^2 \le 1$且 (x, a, p, s) $= (z - \eta z - \bar{\eta}, w + w\eta)$。

(3) $\Longrightarrow$ (4). 假设存在 $(z, w) \in \mathbb{B}_2$且 $\eta \in \mathbb{T}$使得 $(x, a, p, s) = (z - \eta z - \eta, w + w\eta)$。容易看出 $x = ap$ $|p| = 1$且 $|a| \le 1$，因此由定理 2.9，$(x, a, p) \in b\mathbb{E}$。显然，$(x, w) = (z, w) \in \mathbb{B}_2$且 $s = w + w\eta = w - w\bar{p}$。

(4) $\implies$(2)。假设 (x,a, p) $\in$b$\mathbb{E}$ 且存在 w $\in\mathbb{C}$ 使得 (x, w) $\in\mathbb{B}_2$ 且 s =w $-$ w$\overline{\text{p}}$。由定理 2.9, $\overline{\text{存在 z}}\in\mathbb{D}$ 且 $\eta\in\mathbb{T}$ 使得 (x, a, p) $\overline{=}$(z $-\eta$z $-\eta$)。于是 s =w $+$w$\eta_{\text{。}}\overline{\text{}}$可以选取 θ, x $_3$,x$_4\in\mathbb{R}$, $\overline{\text{}}$使得 $\eta=\text{e}^{2i\theta}$且 $\text{e}^{i\theta}$z =x$_3-$ix$_4$。现在，我们令 x$_2=$Re(e$^{-i\theta}$w)。显然，$\text{x}_2^2+\text{x}_3^2+\text{x}_4^2=\left(\text{Re}(\text{e}^{-i\theta}\text{w})\right)^2+|\text{z}|^2\le|\text{w}|^2+|\text{z}|^2\le 1$。取 $\text{x}_1=(1-\text{x}_2^2-\text{x}_3^2-\text{x}_4^2)^{1/2}$。经过常规计算可得

$$(x,a,p,s)=(\bar{z},-\eta z,-\eta,w+\bar{w}\eta)=\left(e^{i\theta}(x_3+ix_4),\ -e^{i\theta}(x_3-ix_4),\ -e^{2i\theta},\ 2e^{i\theta}x_2\right).$$

证明至此完成。 ■

以下结果描述了 $\mathbb{F}$ 如何通过其希洛夫边界与 $\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{E}$相互作用。

推论 3.4. 若$(x, a, p, s)\in\partial_s\mathbb{F}$，则$(x, a, p)\in b\mathbb{E}$ 且$(s\ -p)\in b\Gamma$。

证明。 设 $(x,\ a,\ p,\ s)\in\partial_s\mathbb{F}$。由定理 3.3 可得 $(x,\ a,\ p)\in b\mathbb{E}$ 且 $p\in\mathbb{T}$。根据推论 2.16，$(s-p)\in\Gamma$，因此由定理 2.7 可得，$(s\ -p)\in b\Gamma$。 ■

这里要指出的是，上述推论的逆命题未必成立。例如，考虑四元组 (x, a, p, s) =(i, 1,i $1-$i)。根据定理 2.7 和定理 2.9，(x, a, p) $\in$b$\mathbb{E}$ 且 (s $-$p) $\in$bΓ。若设 (x, a, p,s) $\in\partial_s\mathbb{F}$，则由定理 3.3 可知，存在 w $\in\mathbb{C}$ 使得 $|\text{x}|^2+\overline{|\text{w}|^2}\le 1$且 s =w $-$wp。这意味着 w =0 且 s =0，矛盾。因此，(x, a, p,s) $\notin\partial_s\mathbb{F}$。

在得到 $\partial_s\mathbb{F}$ 的显式描述后，我们证明它与 $\mathbb{T}\times E_3$, 的某个商空间同胚，其中 E_3 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭单位球。

推论 3.5. 希洛夫边界 $\partial_s\mathbb{F}$ 与商空间 $(\mathbb{T}\times E_3)/\sim$ 同胚，其中 E_3 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭单位球，而 $\sim$ 是式 (3.5) 中的等价关系。

证明。 设 E_3 为 $\mathbb{R}^3$ 中的闭单位球，即 $E_3=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3:\ y_1^2+y_2^2+y_3^2\le 1\}$。由定理 3.3 可知，以下映射

$$g:\ \mathbb{T}\times E_3\to\partial_s\mathbb{F},\quad g(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)=\left(e^{i\theta}(x_3+ix_4),\ -e^{i\theta}(x_3-ix_4),\ -e^{2i\theta},\ 2e^{i\theta}x_2\right)$$

是良定义的连续满射。对于 $(\text{e}^{i\theta},\text{x}_2,\text{x}_3,\text{x}_4)$,$(\text{e}^{i\beta},\text{y}_2,\text{y}_3,\text{y}_4)\in\mathbb{T}\times\text{E}_3$,，不难看出，g$(\text{e}^{i\theta},\text{x}_2,\text{x}_3,\text{x}_4)$ =g$(\text{e}^{i\beta},\text{y}_2,\text{y}_3,\text{y}_4)$ 当且仅当以下两种情况之一成立：$(\text{e}^{i\theta},\text{x}_2,\text{x}_3,\text{x}_4)$ =$(\text{e}^{i\beta},\text{y}_2,\text{y}_3,\text{y}_4)$，或 $(\text{e}^{i\theta},\text{x}_2,\text{x}_3,\text{x}_4)$ =$(-\text{e}^{i\beta},-\text{y2},-\text{y3},-\text{y}_4)$。令 $\sim$ 为 $\mathbb{T}\times\text{E}_3$ 上由下式定义的等价关系

$$(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)\sim(e^{i\beta},y_2,y_3,y_4)\iff g(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)=g(e^{i\beta},y_2,y_3,y_4).\tag{3.5}$$

特别地，等价类恰好由下式给出

$$[(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)]=\{(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4),-(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)\}.$$

由于 $\mathbb{T}\times E$ 域$_3$与 $\partial_s\mathbb{F}$ 均为紧豪斯多夫空间，因此如下定义的映射

$$\tilde{g}:(\mathbb{T}\times E_3)/\sim\to\partial_s\mathbb{F},\quad \tilde{g}([(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)])=g(e^{i\theta},x_2,x_3,x_4)$$

是从商空间$(\mathbb{T}\times E$ 域$_3)/\sim$到 $\partial_s\mathbb{F}$上的一个同胚。 ■

现在我们给出本节的主要结果之一。

定理 m 3.6. 六方块 $\mathbb{H}$ 与域 $\mathbb{F}$ 彼此不是双全纯等价的 .

证明。 设若可能，h: $\mathbb{F}\to\mathbb{H}$ 是一个双全纯同构。由于 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{H}$ 都是 $\mathbb{C}^4$ 中包含原点的拟平衡有界域，由 [28] 中的注记7以及引理 3.1可知，h 可延拓为从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{H}$上的双全纯同构。由定理 3.2之前的讨论可知，对每一个$r\in(0,1)$， $\mathbb{F}$ 在 $\mathbb{F}_{1/r}$ 中相对紧。类似地，利用 [17] 中的推论6.4可以证明，对每一个$r\in(0,1)$， $\mathbb{H}$ 在 $\mathbb{H}_{1/r}$ 中也相对紧。由 [28], 中的注记7, $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{H}$的闵可夫斯基泛函是连续的。现由[28] 中推论4的第（b）部分可知，$h(\partial_s\mathbb{F})=\partial_s\mathbb{H}$，因此 $\partial_s\mathbb{F}$ 与 $\partial_s\mathbb{H}$ 彼此同胚。由 [17]中的推论8.22， $\partial_s\mathbb{H}$ 与 $\mathbb{T}\times\partial\mathbb{B}_2$同胚。从而由推论 3.5 可知，商空间（$\mathbb{T}\times E$ 域$_3$）$/\sim$与 $\mathbb{T}\times\partial\mathbb{B}_2$同胚。综合以上，我们有

$$(S^1\times E_3)/\sim \text{ is homeomorphic to } S^1\times S^3, \tag{3.6}$$

其中，$S^n=\{(x1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}: x_1^2+\ldots+x_n^2=1\}$，而 $\sim$是（3.5）中的等价关系。验证（3.6）中的两个空间实际上不同胚，是一项常规练习。为求完整起见，我们简要概述一种可能的论证。首先， $\mathbb{Z}_2$ 通过 $S^1\times E_3$上的对径映射 $\alpha\mapsto-\alpha$，自然作用于 $S^1\times E_3$。特别地，这是 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$对 $S^1\times E_3$的作用，其中 0 对应恒等映射，1 对应对径映射。此外， $\mathbb{Z}_2$ 对 $S^1\times E_3$ 的作用是自由且适当不连续的。因此，商映射 $q: S^1\times E_3\to(S^1\times E_3)/\sim$是一个覆盖映射，而 $\mathbb{Z}_2$ 是其覆盖变换群。由于 q 是覆盖映射，故 q 是满射局部同胚映射。此外，$S^1\times E_3$是一个带边界的 4-流形，因此 $(S^1\times E_3)/\sim$也是一个带边界的 4-流形。由于 $S^1\times S^3$是一个无边界的 4-流形，它不可能与 $(S^1\times E_3)/\sim$同胚，这与（3.6）矛盾。因此，$\mathbb{H}$与 $\mathbb{F}$不双全纯等价。 ■

我们通过比较域 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{H}$ 的特征边界来结束本节。 [17]中的定理 8.21 表明，$b\mathbb{H}=\{(a,\ x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{H}_N:\ |x_3|=1\}$. 由于 $\mathbb{E}$通过最后三个坐标嵌入 $\mathbb{H}$，并通过前三个坐标嵌入 $\mathbb{F}$，人们可能会期待对 $\mathbb{F}$也有类似的描述，即 $b\mathbb{F}=\{(x,\ a,\ p,\ s)\in\mathbb{F}:\ |p|=1\}$. 然而，推论 3.4 后的讨论表明，事实并非如此。

4. F 域与 μ-综合问题的联系

Ghosh 和 Zwonek [24] 提出了这样一个问题：μ-综合方法能否构造域 $\mathbb{L}_n$，类似于已知的对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 和四块域 $\mathbb{E}$的情形。本节将通过介绍一种 μ-综合方法来回答关于 $n=4$ 的问题；该方法构造出的域 $\mathbb{F}$与（3.2）中所述的 $\mathbb{L}_4$ 双全纯等价。回顾一下，给定 E 中的一个线性子空间$M_n(\mathbb{C})$，结构奇异值定义为

$$\mu_E(A)=(\inf\{\|X\|\ :\ X\in E,\ \det(I-AX)=0\})^{-1}\quad(A\in M_n(\mathbb{C})),$$

若不存在$X\in E$使得 $\det(I-Ax)=0$，则定义 $\mu_E(A)=0$。线性子空间E称为结构。若$E=M_n(\mathbb{C})$，则 $\mu_E=\|.\|$；而若E是标量矩阵空间，则 $\mu_E(A)=r(A)$，即A的谱半径。对于包含单位矩阵I的任意$M_n(\mathbb{C})$的线性子空间E，有$r(A)\le\mu_E(A)\le\|A\|$。

μ-综合问题的目标是求一个从开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $M_n(\mathbb{C})$、并受有限多个插值条件约束的解析函数 F，使得对每一个 $\lambda\in\mathbb{D}$ 都有 $\mu_E(F(\lambda))<1$。当 $\mu_E=\|.\|$时， μ-综合问题即为经典的 Nevanlinna-Pick 插值问题。当 μ_E 为谱半径时， μ-综合问题称为谱 Nevanlinna-Pick 插值问题。求解 μ-综合问题的各种实例的尝试已经

引出了对各种域的研究，例如对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$、四块域 $\mathbb{E}$，以及分别在 [5], [1], [8], 和 [17], 中引入的五块域 $\mathbb{P}$ 与六方块 $\mathbb{H}$。

μ-综合方法用于 $\mathbb{G}_2$、$\mathbb{E}$、$\mathbb{P}$和 $\mathbb{H}$。为了说明 μ-综合方法如何产生域 $\mathbb{F}$，我们首先观察域 $\mathbb{G}_2$、 $\mathbb{E}$、 $\mathbb{P}$和 $\mathbb{H}$如何作为μ-综合的实例出现。对于给定的线性子空间 $\mathrm{E} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$，记 $\mathbb{B} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : \|\mathrm{A}\| < 1\}$ 以及 $\mathbb{B}_{\mu_E} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : \mu_E(\mathrm{A}) < 1\}$。当 E 由 2×2 标量矩阵构成时， μ_E 是谱半径函数。Agler-Young [2] 引入了对称化双圆盘 $\mathbb{G}_2$，并证明

$$\mathbb{G}_2 = \{(\mathrm{tr}(A), \det(A)) \in \mathbb{C}^2 : r(A) < 1\} = \{(\mathrm{tr}(A), \det(A)) \in \mathbb{C}^2 : \|A\| < 1\}.$$

因此， $\mathbb{B}_{\mu_E}$ 和 $\mathbb{B}$ 在映射$A \mapsto (\mathrm{tr}(A), \det(A))$下的像重合。当$E$ 由 2×2 对角矩阵构成时， μ_E 是一个中间代价函数 μ_{tetra}。Abouhajar、Young 和 White 在 [1]中研究了这一情形，并由此得到四块域 $\mathbb{E}$。事实上，[1] 中证明了

$$\mathbb{E} = \{(a_{11}, a_{22}, \det(A)) \in \mathbb{C}^3 : \mu_{\mathrm{tetra}}(A) < 1\} = \{(a_{11}, a_{22}, \det(A)) \in \mathbb{C}^3 : \|A\| < 1\}.$$

在这种情况下， $\mathbb{B}_{\mu_E}$和 $\mathbb{B}$ 在映射$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2 \mapsto (a_{11}, a_{22}, \det(A))$下的像也相同。沿着这一方向迈出的下一步，是 Agler、Lykova 和 Young 在 [8] 中所做的工作。作者考虑了线性空间E，它由$M_2(\mathbb{C})$中对角线元素相同的上三角矩阵组成。此时的 μ函数记作 μ_{penta}，相应的 μ综合问题导出了五块域 $\mathbb{P}$。文献 [8] 证明了

$$\mathbb{P} = \{(a_{21}, \mathrm{tr}(A), \det(A)) \in \mathbb{C}^3 : \mu_{\mathrm{penta}}(A) < 1\} = \{(a_{21}, tr(A), \det(A)) \in \mathbb{C}^3 : \|A\| < 1\}.$$

由此可知， $\mathbb{B}_{\mu_E}$和 $\mathbb{B}$ 在映射$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2 \mapsto (a_{21}, \mathrm{tr}(A), \det(A))$下的像相同。最近，Biswas、Pal 和 Tomar [17] 研究了E 为$M_2(\mathbb{C})$中上三角矩阵子空间的情形，这是线性子空间的另一种自然选择。对于<style id='39}, $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{P}$，在$M_2(\mathbb{C})$中选取这样的E，便概括了以往所有的线性子空间。相应的 μ函数记作 μ_{hexa}，满足以下性质：

$$r(A) \leq \mu_{\mathrm{tetra}}(A),\ \mu_{\mathrm{penta}}(A) \leq \mu_{\mathrm{hexa}}(A) \leq \|A\|$$

对于每一个 $A \in M_2(\mathbb{C})$。考虑该映射

$$\pi_{hexa} : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{21}, a_{11}, a_{22}, \det(A)).$$

分别设 $\mathbb{H}_\mu$ 与 $\mathbb{H}_N$ 为范数单位球 $\mathbb{B}$ 与 μ_E-单位球 $\mathbb{B}_{\mu_E}$ 在映射π_{hexa}下的像。与先前研究的 μ-综合方法情形不同，结果表明$\mathbb{H}_N$ 并不等同于 $\mathbb{H}_\mu$，且它们都不是域。如 [17]中所说明的，按 (1.3) 定义的六方块域 $\mathbb{H}$ 被证明是此项工作中的自然选择。此外，我们有

$$\overline{\mathbb{H}} = \overline{\mathbb{H}}_\mu = \widehat{\overline{\mathbb{H}}_N} \text{ (the polynomial convex hull of } \overline{\mathbb{H}}_N).$$

综合以上，我们得到：域 $\mathbb{G}_2, \mathbb{E}, \mathbb{P}$与 $\mathbb{H}$源于μ-综合问题的不同情形，而域 $\mathbb{G}_2, \mathbb{E}, \mathbb{P}$是六方块 $\mathbb{H}$的全纯收缩。有兴趣的读者可参阅 [17]以了解进一步细节。

受此启发，一个自然的问题是：在 [24], 中引入的域 $\mathbb{F}$，能否实现为由某种特定的 μ-综合问题实例所产生的域？根据定义，我们有

$$\mathbb{F} = \{\pi_{\mathbb{F}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}), \|A\| < 1\},$$

其中 $\pi_{\mathbb{F}}$: $M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4$定义为 $\pi_{\mathbb{F}}(A) = (a_{11}, a_{22}, \det(A), a_{12}+a_{21})$，其中 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2} \in M_2(\mathbb{C})$。要回答 [24], 中提出的这个问题，需要确定一个 E 的线性子空间 $M_2(\mathbb{C})$，使得 $\mathbb{F}$ 是 μ_E 单位球在映射 $\pi_{\mathbb{F}}$ 下的像，即 $\mathbb{F} = \pi_{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_{\mu_E})$。从这里开始，设

$$\mathbb{F}_{\mu_E} = \pi_{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_{\mu_E}) = \{\pi_{\mathbb{F}}(A) : A \in M_2(\mathbb{C}), \mu_E(A) < 1\}$$

对于 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个线性子空间 E 域 。若 E 域 $= M_2(\mathbb{C})$，则 $\mu_E = \|.\|$，因此，$\mathbb{F} = \pi_{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_{\mu_E})$ 显然成立。因此，要得到非平凡的描述，需要考虑满足$\mathbb{F} = \pi_{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_{\mu_E})$的 $M_2(\mathbb{C})$ 的一个真线性子空间 E 域 。下一个结果给出了 $M_2(\mathbb{C})$ 中所有此类线性子空间的刻画。

定理 4.1. 设 $E \subseteq M_2(\mathbb{C})$ 是一个线性子空间，且设 $\mathbb{F}_{\mu_E} = \pi_{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_{\mu_E})$。则以下条件等价:

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_E}$; *(2)* $\mu_E(A) = \|A\|$ 对于所有 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 都成立; *(3)* 对每一对单位向量 u、$v \in \mathbb{C}^2$，均存在 $A \in E$，使得 $\|A\| = 1$，且 $Au = v$。

证明。部分 (2) $\Longrightarrow$ (1) 显然成立，而等价关系 (2) $\Longleftrightarrow$ (3) 由 [39] 中的定理 3.1 得出。因此，只需证明部分 (1) $\Longrightarrow$ (2)。假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_E}$。对于任意 A $\in M_2(\mathbb{C})$，有 $\mu_E(A) \leq \|A\|$。反设存在 A $\in M_2(\mathbb{C})$，使得$\mu_E(A) < \|A\|$。取 r > 0使得 $\mu_E(A) < r \leq \|A\|$。定义 B $= (b_{ij})_{i,j=1}^{2} = r^{-1}A$。由于$\mu_E(r^{-1}A) = r^{-1}\mu_E(A)$，故有 $\mu_E(B) < 1 \leq \|B\|$。令 $\pi_{\mathbb{F}}(B) = (x, a, p, s)$。由于 $\mu_E(B) < 1$，可得 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}_{\mu_E}$，因此 $(x, a, p, s) \in \mathbb{F}$。于是，存在 C $= (c_{ij})_{i,j=1}^{2} \in M_2(\mathbb{C})$，且 $\|C\| < 1$，使得 $(x, a, p, s) = \pi_{\mathbb{F}}(C)$。于是

$$(b_{11}, b_{22}, \det(B), b_{21}+b_{12}) = (x, a, p, s) = (c_{11}, c_{22}, \det(C), c_{12}+c_{21})$$

简单计算可得 $(b_{12}+b_{21}, b_{12}b_{21}) = (c_{12}+c_{21}, c_{12}c_{21}) = (s, ax-p)$。我们有两种可能：要么 $(b_{12}, b_{21}) = (c_{12}, c_{21})$，要么 $(b_{12}, b_{21}) = (c_{21}, c_{12})$。换言之，要么 C $=$ B，要么 C $= B^t$。无论哪种情况，$\|C\| = \|B\|$，因此，$\|B\| < 1$。这与 $\|B\| \geq 1$ 这一事实矛盾。因此，$\mu_E(A) = \|A\|$，证明至此完成。 ■

例 3.4 在 [39] 中表明，对于由以下形式给出的 $M_2(\mathbb{C})$ 的真线性子空间，$\mu_{E_\theta} = \|.\|$

$$E_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ e^{i\theta}w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\} \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

定理 4.1 与例 3.4 在 [39] 中的结果直接推出以下结论，该结论确立了域 $\mathbb{F}$ 与 μ-综合之间的联系。

推论 4.2. 对于 $\theta \in \mathbb{R}$ 以及 $E_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 w & e^{i\theta}w \\ z_2 & \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}$，我们有 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_{E_\theta}}$。

如前所述，四块域 $\mathbb{E}$可以刻画为

$$\mathbb{E} = \{(a_{11}, a_{22}, \det(A)) : \|A\| < 1\} = \{(a_{11}, a_{22}, \det(A)) : \mu_{\text{diag}}(A) < 1\},$$

其中 μ_{diag} 是与 E 域diag 在 $M_2(\mathbb{C})$ 中相关联的结构奇异值。由于 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$，我们现在将讨论限制在 $M_2(\mathbb{C})$ 的线性子空间 E 域 上，使得 E 域$_{\text{diag}} \subseteq E$ 域 且 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_E}$。特别地，如上一推论所述，对任意 $\theta \in \mathbb{R}$，可以取 E 域 $= E$ 域 $_\theta$。下一个定理表明，这些事实上是 $M_2(\mathbb{C})$ 的此类真线性子空间 E 域 的仅有可能情形。

定理 4.3。 $M_2(\mathbb{C})$ 的真线性子空间 E 满足 $E_{diag} \subseteq E$，当且仅当 $\mathbb{F}_{\mu_E} = \mathbb{F}$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ e^{i\theta}w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\} \textit{ for some } \theta \in \mathbb{R}.$$

证明。记 $\mathrm{E}_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ e^{i\theta} w & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}$ for $\theta \in \mathbb{R}$。设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_E}$ 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的一个真子空间，且 E 包含 $\mathrm{E}^{\mathrm{diag}}$。由定理 4.1 可得，对于所有 $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$，均有 $\mu_E(A) = \|A\|$。对于 $\mathrm{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，不难看出，不存在 $X \in \mathrm{E}^{\mathrm{diag}}$ 使得 $\det(I - \mathrm{E}_{12}X) = 0$，因此 $\mu_{\mathrm{E}^{\mathrm{diag}}}(\mathrm{E}_{12}) = 0$。由于 $\|\mathrm{E}_{12}\| = 1$，我们有 $\mathrm{E}_{\mathrm{diag}} \subsetneq \mathrm{E}$。于是 $\dim(\mathrm{E}) = 3$，因此我们有

$$E = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

对于某些 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。若 $\beta = 0$，则 E 域是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 中所有上三角矩阵构成的线性子空间，相应的结构奇异值记为 μ_{hexa}，且与 $\|.\|$ 相同。这不可能成立，因为在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 中不存在上三角矩阵 X，使得 $\det(I - \mathrm{E}_{12}X) = 0$，这意味着 $\mu_{\mathrm{hexa}}(\mathrm{E}_{12}) = 0$。考虑 $\alpha = 0$ 的情形，并定义 $\mathrm{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。此时，E 域是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 中所有下三角矩阵构成的空间，并且容易证明 $\mu_E(\mathrm{E}_{21}) = 0$；但这不可能，因为 $\mu_E(\mathrm{E}_{21}) = \|\mathrm{E}_{21}\|$ 且 $\|\mathrm{E}_{21}\| = 1$。因此，$\alpha, \beta \neq 0$，于是我们可以改写为

$$E = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & w \\ xw & z_2 \end{pmatrix} : z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \right\}$$

对某个 $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。根据定理 4.1，存在 $A = \begin{pmatrix} z_1 & w \\ xw & z_2 \end{pmatrix} \in E$，满足 $\|A\| = 1$，使得 $Ae_1 = e_2$。由于 $\|A\| = 1$，我们有 $|w| \leq 1$。此外，条件 $Ae_1 = e_2$ 表明 $xw = 1$，因此，$|x| \geq 1$。再次根据定理 4.1，存在 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ xb & c \end{pmatrix}$，满足 $\|B\| = 1$，使得

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ x/|x| \end{pmatrix} = e_1 \quad \text{and so,} \quad \begin{pmatrix} bx/|x| \\ c/|x| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$b = |x|/x$，且 $c = 0$。注意，$|b| = 1$ 和 $\|B\| = 1$ 表明 $a = 0$。所以，$B = \begin{pmatrix} 0 & |x|/x \\ |x|/x & 0 \end{pmatrix}$。显然，$\|B\| = \max\{1, |x|\} = 1$，因此 $|x| \leq 1$。于是，$|x| = 1$，我们可以将 x 写成 $= e^{i\theta}$，其中 $\theta \in \mathbb{R}$。因此，$\mathrm{E} = \mathrm{E}_\theta$。反向结论可由推论 4.2 直接推出。 ∎

注意，上述定理中的假设 E 域$_{\mathrm{diag}} \subsetneq E$ 域 不能去掉。为说明这一点，设

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} z & w_1 \\ w_2 & -z \end{pmatrix} : z, w_1, w_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

显然，E 域 不包含E 域^{diag} 以及E 域 $\neq E$ 域$_\theta$（对任意 $\theta \in \mathbb{R}$）。由 [39]中的例3.5可知 $\mu_E = \|.\|$。现在由定理 4.1可得 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mu_E}$。

资助。 第一作者获得了印度政府 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）核心研究资助（资助编号 CRG/2023/005223）的部分资助。本文撰写期间，第二作者获得了第一作者所获同一项资助的支持。

参考文献

[1] A. A. Abouhajar, M. C. White 和 N. J. Young，关于一个与 μ-综合相关的域的施瓦茨引理，《几何分析杂志》，17（2007），717 – 750。[2] J. Agler 和 N. J. Young，关于 E 域中的交换子提升定理及谱插值，《泛函分析杂志》，161（1999），452 – 477。[3] J. Agler 和 N. J. Young，以对称化双圆盘为谱集的算子，《爱丁堡数学会会刊》，43（2000），195 – 210。[4] J. Agler 和 N. J. Young，关于 Γ-收缩的模型理论，《算子理论杂志》，49（2003），45 – 60。[5] J. Agler 和 N. J. Young，对称化双圆盘的双曲几何，《几何分析杂志》，14（2004），375 – 403。[6] J. Agler 和 N. J. Young，二阶谱 Nevanlinna-Pick 问题，《美国数学会汇刊》，356（2004），573 – 585。[7] J. Agler 和 N. J. Young，一个域的魔法函数与自同构，《复分析与算子理论》，2（2008），383 – 404。[8] J. Agler、Z. A. Lykova 和 N. J. Young，一个与 μ-综合相关的域的复几何，《数学分析与应用杂志》，422（2015），508 – 543。[9] O. M. O. Alsalhi 和 Z. A. Lykova，有理四内函数与四块域的特殊簇，《数学分析与应用杂志》，506（2022），125534，52页。[10]N. M. Alshehri 和 Z. A. Lykova，五块域的施瓦茨引理，《几何分析杂志》，65（2023），https://doi.org/10.1007/s12220-022-01107-7。[11] J. A. Ball 和 H. Sau，重新审视四块域压缩算子的有理扩张，《泛函分析杂志》，278（2020），第1期，108275，14页。[12] T. Bhattacharyya、S. Pal 和 S. S. Roy，通过求解算子方程对 Γ-收缩进行膨胀，《数学进展》，230（2012），577 – 606。[13] T. Bhattacharyya，四块域作为谱集，《印第安纳大学数学杂志》，63（2014），1601 – 1629。[14] T. Bhattacharyya 和 S. Pal，纯 Γ-收缩的函数模型，《算子理论杂志》，71（2014），327 – 339。[15] B. Bisai 和 S. Pal，与两个和 μ-综合相关的域相关的算子结构定理，《数学科学通报》，159（2020），102822。[16] B. Bisai 和 S. Pal，与一个和 μ-综合相关的域相关的算子模型理论，《数学汇刊》，74（2023），第1期，173 – 198。[17] I. Biswas、S. Pal 和 N. Tomar，六方块：与 $M_2(\mathbb{C})$ 中的 μ-综合相关的域，arXiv：2506.15149。[18] C. Costara，对称化双圆盘与 Lempert 定理，《伦敦数学会通报》，36（2004），656 – 662。[19] C. Costara，2×2 谱 Nevanlinna-Pick问题，《伦敦数学会杂志》，71（2005），684 – 702。[20] J. Doyle，具有结构化不确定性的反馈系统分析，《IEE 控制理论与应用学报》，129（1982），242 – 250。[21] J. C. Doyle 和 G. Stein，多变量反馈设计：经典／现代综合的概念，《IEEE 自动控制汇刊》，26（1981），4 – 16。[22] A. Edigarian 和 W. Zwonek，对称多圆盘的几何，《巴塞尔数学档案》，84（2005），364 – 374。[23] A. Edigarian、L. Kosi´nski 和 W. Zwonek，Lempert 定理与四块域，《几何分析杂志》，23（2013），1818 – 1831。[24] G. Ghosh 和 W. Zwonek，经典嘉当域的二重正规全纯像，《印第安纳大学数学杂志》，74（2025），第3期，575–603。[25] G. Ghosh 和 W. Zwonek，李球与四块域中的全纯收缩，《几何分析杂志》，35（2005），第118号论文，17页。

[26] A. Jindal 和 P. Kumar, 《五块域上的有理五内函数及其特征边界》, 《复分析与算子理论》, 120（2022年）, https://doi.org/10.1007/s11785-022-01297-6。[27] A. Jindal 和 P. Kumar, 《五块域上的算子理论》, 《数学分析与应用杂志》, 540（2024年）, 第 1 期, 论文编号 128589, 共 17 页。[28] L. Kosi´nski, 《拟圆域的几何及其在四块域中的应用》, 《美国数学会会刊》, 139（2011年）, 559–569。[29] L. Kosi´nski, 《五块域的自同构群》, 《复分析与算子理论》, 6（2015年）, 1349–1359。[30] L. Kosi´nski 和 W. Zwonek, 《凸域、对称化双圆盘及四块域中的 Nevanlinna-Pick问题与左逆唯一性》, 《几何分析杂志》, 26（2016年）, 1863–1890。[31] N. Nikolov, 《对称多圆盘不能由与凸域双全纯等价的域穷尽》, 《波兰数学年刊》, 88（2006年）, 279–283。MR2260407（2007f:32024）[32] N. Nikolov、P. Pflug 和 P. J. Thomas, 《n ´的谱 Nevanlinna-Pick 问题与 Carath ´eodory-Fej ≤ 3er 问题》, 《印第安纳大学数学杂志》, 60（2011年）, 883–893。[33] S. Pal 和 O. M. Shalit, 《对称化双圆盘中的谱集与特异簇》, 《泛函分析杂志》, 266（2014年）, 5779–5800。[34] S. Pal, 《从对称化双圆盘上的 Stinespring扩张到 Sz.-Nagy扩张及算子模型》, 《纽约数学杂志》, 20（2014年）, 545–564。[35] S. Pal, 《四块域上的有理扩张失效》, 《泛函分析杂志》, 269（2015年）, 1903–1924。[36] S. Pal, 《四块域的子簇与 von Neumann不等式》, 《印第安纳大学数学杂志》, 65（2016年）, 2051–2079。[37] S. Pal, 《四块收缩的典范分解与算子模型》, 《数学分析与应用杂志》, 438（2016年）, 274–284。[38] S. Pal 和 N. Tomar, 《与五块域相关的算子及其与双球和对称化双圆盘的关系》, arXiv: 2309.15080。[39] S. Pal 和 N. Tomar, 《结构奇异值的刚性及其应用》, 预印本。[40] P. Pflug 和 W. Zwonek, 《对称化双圆盘中所有复测地线的描述》, 《伦敦数学会会报》, 37（2005年）, 575–584。[41] G. Su、Z. Tu 和 L. Wang, 《五块域真全纯自映射的刚性》, 《数学分析与应用杂志》, 424 （ 2015 年）, 460–469。[42] G. Su, 《五块域的几何性质》, 《复分析与算子理论》, 14（2020年）, 第 4 期, 论文编号 44, 共 14 页。[43] N. Tomar, 《若干与 μ-合成问题相关的域的特征边界的一种新刻画》, 《印度科学院院刊：数学科学》, 134（2024年）, 第 2 期, 论文编号 27, 共 7 页。[44] N. J. Young, 《四块域的自同构群》, 《伦敦数学会杂志》, 77（2008年）, 757–770。[45] N. J. Young, 《 μ-合成问题的一些可分析实例》, 载于：《数学方法：系统、优化与控制》, 第 351–368 页, 算子理论进展与应用, 第 222 卷, Birkh¨auser/Springer Basel AG, 巴塞尔（2012年）。[46] W. Zwonek, 《四块域的几何性质》, 《数学文献》, 100（2013年）, 159–165。（Sourav Pal）印度理工学院孟买分校数学系, Powai, 孟买 - 400076, 印度。电子邮件地址：sourav@math.iitb.ac.in（Nitin Tomar）印度理工学院孟买分校数学系, Powai, 孟买 - 400076, 印度。电子邮件地址：tomarnitin414@gmail.com