时空图信号统一分数阶谱框架：双分数阶变换与测地线耦合

Mingz hi Wang, Manjun Cui, Feiyue Zhao, Yangfan He, and Zhichao Zhang, 会员，*IEE E*

arXiv:2603.01484v1 [eess.SP] 2 Mar 2026

摘要—**图信号处理将谱分析扩展到定义在不规则域上的数据。现有面向二维图信号的分数阶变换，包括二维图分数阶傅里叶变换（GFRFT），通常要求各维度共享同一分数阶数，这限制了其对异质时空谱的自适应能力。为解决这一局限，我们提出二维图双分数阶傅里叶变换，为笛卡尔积中的因子图分配独立的分数阶数，从而在保持可分离性、酉性和可逆性的同时，实现解耦的谱控制。为进一步消除时间分数阶分析中的基底歧义，我们通过在酉流形的主测地线上构造耦合路径，开发了测地线耦合图分数阶傅里叶变换，从而统一图诱导基底与离散时间基底，并保证酉性和闭式逆变换。基于这些变换，我们推导出一种可微的维纳型滤波框架，并采用混合优化策略：分数阶数通过数据进行端到端学习，而耦合参数则固定为结构正则项。在真实世界的时变图数据集和动态图像复原任务上的实验表明，与先进的分数阶变换及具有竞争力的基于学习的基线方法相比，该方法 consistently 带来性能提升。**

索引词—**去噪、测地线耦合图分数阶傅里叶变换、联合时频顶点分数阶傅里叶变换、二维图广义分数阶傅里叶变换、二维图双分数阶傅里叶变换。**

I. 引言

源自现实世界系统的信号通常定义在复杂网络或图上，因此呈现出非欧几里得拓扑。典型示例包括来自环境传感网络的时空测量 [1]–[3], 、社交网络中的交互 [4], [5], 、神经科学中的脑连接图 [6], [7], ，以及图像分析中像素级或区域级的关系 [8]–[11]。这些域的不规则性使得难以直接应用针对欧几里得信号发展起来的经典技术。图信号处理（图信号处理）将包括傅里叶分析 [12]–[16], 、小波变换 [17]–[20], 、采样理论 [21]–[23],和滤波 [12], [14], [16], [24]–[26], 在内的传统方法，有原则地扩展到定义于图上的信号，从而能够在不规则拓扑上实现高效建模与分析。

在图信号处理中，图傅里叶变换（GFT）将信号表示在由图算子的特征值分解所诱导的谱域中。常用的谱算子包括图拉普拉斯算子和邻接矩阵。图拉普拉斯算子强调平滑性，适用于扩散型过程；而邻接矩阵强调连通性，更能捕捉非平稳行为和局部高频模式 [12], [13], [16],[27]。在本研究中，我们采用邻接矩阵作为谱算子，以对具有强局部变化的信号进行建模。我们关注加权无向图，以确保邻接矩阵具有正交归一特征分解，从而得到酉谱基。尽管图傅里叶变换效果显著，但它依赖固定的整数阶谱模态，这限制了其根据多尺度异质结构调整谱表示的能力。

为提供连续的自由度，图分数阶傅里叶变换（GFRFT）通过引入分数阶来参数化一族图谱变换，从而扩展了图傅里叶变换（GFT）。这类表示已应用于去噪、谱稀疏化和图滤波 [28]–[34]。在经典分数阶傅里叶变换（FRFT）中，分数阶通常通过时频旋转来诠释。这种几何诠释无法直接推广至图场景，因为图频率是由所选图算子决定的，而非由欧几里得几何决定。因此，在图场景中，我们将分数阶视为连续的谱参数化。然而，现有的大多数GFRFT方法都聚焦于单图信号，对多维或多结构图数据的支持有限。

许多应用天然涉及多维图信号，例如时间-顶点数据或空间属性数据。笛卡尔积图为此类联合

本研究部分由湖北省应用数学重点实验室开放基金（湖北大学）项目 HBAM202404 资助；部分由教育部系统控制与信息处理重点实验室基金项目 Scip20240121 资助；另有部分由南京工程学院人才引进启动基金项目 YKJ202214 资助。（通讯作者：*Zhichao Zhang*。）

Mingzhi Wang、Manjun Cui 和 Feiyue Zhao 任职于中国南京市南京信息工程大学数学与统计学院，邮编 210044（电子邮箱：wmz200208@163.com；cmj1109@163.com；202511150010@nuist.edu.cn）。

Yangfan He 任职于中国南京市南京工程学院通信与人工智能学院、集成电路学院（邮编 211167），同时任职于中国南京市江苏省智能感知技术与系统工程研究中心（邮编 211167）（电子邮箱：Yangfan.He@njit.edu.cn）。

Zhichao Zhang任职于南京信息工程大学数学与统计学院（中国南京210044）、湖北大学湖北省应用数学重点实验室（中国武汉430062），并同时任职于上海交通大学系统控制与信息处理教育部重点实验室（中国上海200240）（电子邮箱：zzc910731@163.com）。

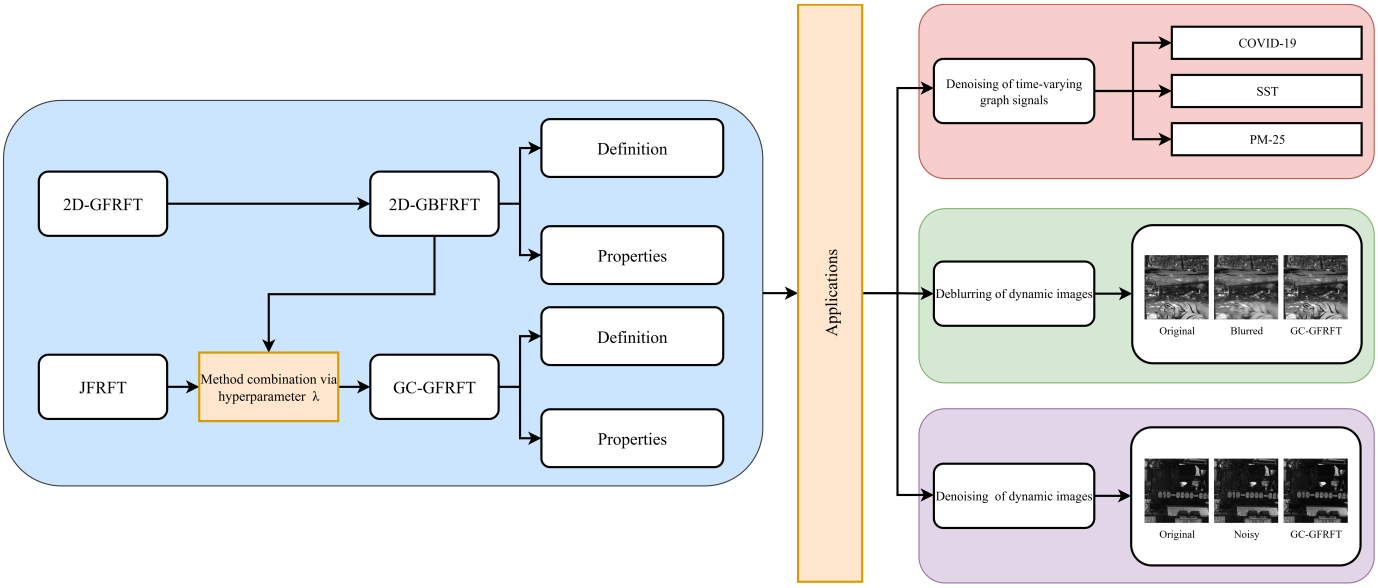

图1. 所提出的 GC-GFRFT 框架及其应用概览。

结构提供了便利的建模方式，它通过组合两个因子图来表示多路依赖关系。在这种设定下，二维图傅里叶变换（2D-GFT）对因子图进行谱分解，并通过克罗内克积将其组合起来，从而得到一种可分离的联合谱表示，且具有良好的计算性质 [35]–[37]。然而，二维图傅里叶变换仍局限于整数阶描述。二维广义分数阶傅里叶变换（2D-GFRFT）通过对两个因子图应用相同的分数阶，缓解了这一局限 [38]。这种共享阶数的构造隐含地假设，单一阶数足以控制两个因子谱。在强异质场景中，例如一个维度相对平滑，而另一个维度存在显著的局部变化时，这一约束会大幅降低表示能力。

为解决这一局限，我们提出二维图双分数阶傅里叶变换（2D-GBFRFT）。通过为笛卡尔积的两个因子图分别指定独立的分数阶数，所提出的双分数阶设计能够对联合谱坐标进行逐因子调节。这提高了对异质二维图信号的建模保真度，同时保留了可支持高效谱域处理的可分离乘积图结构。

除了空间异质性之外，分析时变图信号还需要选择合适的时间分数阶基。联合谱分析是此类信号的核心，例如联合时间-顶点傅里叶变换（JFT） [39], [40] 和联合时间-顶点分数阶傅里叶变换（JFRFT） [41]–[43]。在实际时空场景中，时间维度既可以通过与时间图（如路径图）相关联的图诱导分数阶变换来建模，也可以采用经典的离散分数傅里叶变换（DFRFT）基。尽管这两种选择通常都是酉的，因而能够保持能量，但它们会产生不同的时间谱坐标系，进而影响后续的滤波与表示。

这一观察促使我们提出第二项贡献：一种针对异质时间分数阶基的保结构耦合机制。对两个酉算子进行朴素的欧几里得插值（例如线性混合），通常会破坏酉性，并可能导致病态变换，从而损害能量保持与稳定重建 [44], [45]。我们不在环境欧几里得空间中进行插值，而是将酉算子视为黎曼流形上的点，并沿主测地线连接两个时间端点 [46]。由此得到的单参数族以 $\lambda \in [0,1]$为索引，对所有 λ均保持酉性，其逆算子由共轭转置给出。这种内蕴构造促使我们采用“测地线耦合”这一术语，简称 GC，并将由此得到的框架称为 GC-GFRFT。

维纳滤波是一种基础的均方误差（MSE）去噪技术 [16], [19], [47]–[49]。其图域对应方法在图傅里叶变换域中进行谱衰减，并在随机先验下充当线性最小均方误差估计器 [50],[51]。为使信号谱与噪声谱更好地匹配，图分数阶傅里叶变换提供了可调的谱域。早期基于图分数阶傅里叶变换的滤波器利用先验统计知识推导系数，同时采用固定的分数阶数 [47]。针对时变信号，基于 JFRFT 的滤波器采用网格搜索优化两个混合分数阶参数，其中空间域使用图诱导基，时间域使用离散分数阶傅里叶变换基 [41], [42]。然而，随着维数增加，此类离散参数扫描的计算开销会变得很大。

近期的可微 GFRFT 公式通过支持对分数阶数和滤波器参数进行基于梯度的学习，克服了这一问题 [31]。更广泛地说，基于学习的滤波框架正推动图信号处理不断发展 [52],，并促使研究者探索用于联合时空顶点谱控制的可学习的联合分数阶傅里叶变换设计 [43]。这些进展表明，分数阶域设计能够显著增强

图上谱去噪与谱整形的表达能力。受这些进展以及时间维度存在两种有效但通常不兼容的酉分数基这一事实启发，我们在统一的分数谱模型下开发了一种可微的维纳型滤波框架。在我们的方法中，耦合参数作为固定的结构正则项，通过粗搜索选定；而分数阶数和对角谱滤波器则通过梯度下降（GD）进行端到端学习。

总之，我们为笛卡尔积图和时空图信号开发了统一的分数阶谱框架。主要贡献如下：

- 我们提出了 2D-GBFRFT，这是一种适用于笛卡尔积图的可分离变换，在两个因子图上采用独立的分数阶数，从而实现逐维自适应性；此外，通过在两个维度上均使用图诱导基，阐明了它与 JFRFT 的区别。
- 我们提出了 GC-GFRFT，这是一种酉测地耦合，可在图诱导的时间基与 DFRFT 基之间建立桥梁，并具有闭式逆变换；它将 2D-GBFRFT（$\lambda = 0$）和 JFRFT（$\lambda = 1$）统一为端点情形。
- 我们开发了一种正则化、可学习的维纳型滤波方案，通过梯度下降学习分数阶数和对角谱滤波器，同时将 λ 视为固定的结构超参数，并在真实数据上验证了该方案。

本文其余部分安排如下。第 II 节回顾预备知识，包括 GSP 基础、笛卡尔积图和现有的分数阶变换。第 III 节提出 2D-GBFRFT，并详细介绍其定义和理论性质。第 IV 节介绍 GC-GFRFT，通过酉流形上的测地线耦合解决时间基的歧义问题。第 V 节基于混合优化策略构建可微维纳滤波框架。第 VI 节展示其在真实数据上的应用，包括时变图信号去噪和动态图像复原任务。最后，第 VII 节总结全文并展望未来研究方向，技术证明见附录。图 1 概述了所提出的 GC-GFRFT 框架及其应用。

记号：粗体小写字母表示向量，粗体大写字母表示矩阵。实数集和复数集分别记为 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$。对于集合 $\mathcal{V}$，$|\mathcal{V}|$ 表示其基数。算子 $(\cdot)^*$、$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\cdot)^{\mathrm{H}}$分别表示复共轭、转置和共轭转置。大小为 N 的单位矩阵记为 $\mathbf{I}_N$。算子 diag(h)表示对角线元素由h给出的对角矩阵。算子 vec(·) 表示向量化。期望算子记为 $\mathbb{E}\{\cdot\}$。欧几里得（ℓ_2）范数和弗罗贝尼乌斯范数分别记为 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_F$。克罗内克积、克罗内克和及哈达玛积分别记为 $\otimes$、$\oplus$和 $\circ$。

II. 预备知识

A. 图信号

设 $G = (\mathcal{V}, \mathbf{A})$ 为加权无向图，其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ 表示节点集，其基数为 $|\mathcal{V}| = N$，且 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是加权邻接矩阵。矩阵元素 $\mathbf{A}_{ij} > 0$ 表示节点 v_i与 v_j 之间存在一条权重为 $\mathbf{A}ij$的边，而 $\mathbf{A}_{ij} = 0$ 表示不存在边。图信号是一个函数 $x: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$，它为每个节点 $v_i \in \mathcal{V}$分配一个标量值 x_i。信号值汇集为向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$ [53]，该向量表示顶点域中的信号，其结构由$\mathbf{A}$所编码的连通性决定。

为纳入时间动态，我们假设图信号以单位采样间隔在连续的 T 个时刻被观测。令 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^N$ 表示时刻 t 的信号。时变图信号表示为矩阵$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}2, \ldots\ldots, \mathbf{x}_T] \in \mathbb{R}^{N\times T}$。$\mathbf{X}$ 及其向量化形式 $\mathbf{x}$ =vec(**X**) $\in \mathbb{R}^{NT}$ 均称为时空顶点信号 [54], [55]。

两个加权图 G_1 =($\mathcal{V}_1$, $\mathcal{E}_1$, $\mathbf{A}_1$) 和 G_2 = ($\mathcal{V}_2$, $\mathcal{E}_2$, $\mathbf{A}_2$) 的笛卡尔积 $G_1\square G_2$ 是一个顶点集为$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$的图。其边集 $\mathcal{E}$ 定义为

$$\{(i_1, i_2), (j_1, j_2)\} \in \mathcal{E} \iff [\{i_1, j_1\} \in \mathcal{E}_1,\, i_2 = j_2] \text{ or } [i_1 = j_1,\, \{i_2, j_2\} \in \mathcal{E}_2],$$

边权对应于邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 中的元素，其值由 $G_1\square G_2$给出：

$$[\mathbf{A}]_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = [\mathbf{A}_1]_{i_1,j_1}\,\delta(i_2, j_2) + \delta(i_1, j_1)\,[\mathbf{A}_2]_{i_2,j_2}.$$

图 G_1 和 G_2 被称为$G_1\square G_2$的因子图。

设 G_n 的顶点集为 $\mathcal{V}_n = \{1, 2, \ldots, N_n\}$，其邻接矩阵、度矩阵和拉普拉斯矩阵分别为 $\mathbf{A}_n$、$\mathbf{D}_n$ 和 $\mathbf{L}_n$，其中 n =1,2。当笛卡尔积图 $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ 的顶点按字典序排列，即 (1, 1), (1, 2) . . . , (N_1, N_2) 时， $G_1\square G_2$ 的邻接矩阵、度矩阵和拉普拉斯矩阵可分别写为 $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2$,、$\mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2$, 和 $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, [35]。

B. 二维广义分数阶傅里叶变换

我们考虑加权图G_n的邻接矩阵 $\mathbf{A}_n$。对于实对称加权图，$\mathbf{A}_n$ 可进行特征值分解 $\mathbf{\Lambda}_{A_n}$ =$\mathbf{V}_{A_n}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}_n\mathbf{V}_{A_n}$，其中$\mathbf{V}_{A_n}$ 包含 $\mathbf{A}_n$ 的特征向量，而 $\mathbf{\Lambda}_{A_n}$ 是由特征值构成的对角矩阵。图傅里叶变换矩阵定义为 $\mathbf{F}_{G_n}$ =$\mathbf{V}_{A_n}^{\mathrm{H}}$，其逆变换为 $\mathbf{F}_{G_n}^{-1}$ =$\mathbf{V}_{A_n}$ [13]。

我们将图分数阶傅里叶变换定义为

$$\mathbf{F}_{G_n}^{\alpha_n} = \mathbf{V}_{F_n}\,\mathbf{J}_{F_n}^{\alpha_n}\,\mathbf{V}_{F_n}^{-1}, \tag{1}$$

其中$\mathbf{J}_{F_n}^{\alpha_n}$ 表示图傅里叶域中的分数阶矩阵，$\mathbf{V}_{F_n}$ 是$\mathbf{F}_{G_n}$的特征向量矩阵。如果$\mathbf{F}_{G_n}$是酉矩阵，则 $(\mathbf{F}_{G_n}^{\alpha_n})^{\mathrm{H}}$ =$\mathbf{F}_{G_n}^{-\alpha_n}$。

给定笛卡尔积图 $G_1\square G_2$ 上的图信号 X： $V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$，令 $N_i \triangleq |V_i|$ (i =1,2)，并令 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$ 表示 X 的顶点域矩阵表示。

定义 *1*：$\mathbf{X}$ 的二维广义分数阶傅里叶变换定义为

$$\mathbf{X}_f^{\alpha} = \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\,\mathbf{X}\,\left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{F}_{G_i}^{\alpha}$ (i = 1, 2) 是 G_i 的 α 阶 GFRFT 矩阵。逆变换为

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_{G_1}^{-\alpha}\,\mathbf{X}_f^{\alpha}\,\left(\mathbf{F}_{G_2}^{-\alpha}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

等价地，以向量化形式，令 $\mathbf{x}$ ≜vec(**X**) 且$\mathbf{x}_f^{\alpha}$ ≜ vec($\mathbf{X}_f^{\alpha}$)，则有

$$\mathbf{x}_f^{\alpha} = \left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\right) \mathbf{x} \triangleq \mathbf{F}_{2D}^{\alpha}\, \mathbf{x}, \tag{4}$$

及其对应的逆变换

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{F}_{G_2}^{-\alpha} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{-\alpha}\right) \mathbf{x}_f^{\alpha} \triangleq \mathbf{F}_{2D}^{-\alpha}\, \mathbf{x}_f^{\alpha}. \tag{5}$$

因此，二维广义分数阶傅里叶变换提供了一种由两个因子图的分数阶特征模态张成的联合谱表示，并在 $\alpha = 1$ [38] 时退化为经典二维图傅里叶变换。

C. JFRFT

分数阶傅里叶变换通过引入连续阶次参数 α [56]–[58] 扩展了经典傅里叶变换。其离散版本称为 DFRFT，可用矩阵$\mathbf{F}^{\alpha} \in \mathbb{C}^{T\times T}$表示；当 $\alpha = 1$ [59] 时，它退化为离散傅里叶变换（DFT）。

JFRFT 将这一概念推广到时变图信号，同时纳入图结构和时间动态。设$\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N\times T}$ 表示定义在一个具有 N 个顶点和 T 个时刻的图上的信号矩阵，并令 $\mathbf{x} =$ vec(**X**) $\in \mathbb{C}^{NT}$ 为其向量化形式。

定义 *2*： **X** 的 JFRFT 定义为

$$\mathbf{X}_J^{(\alpha,\beta)} = \mathbf{F}_{\mathrm{G}}^{\beta}\, \mathbf{X} \left(\mathbf{F}^{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

其中，$\mathbf{F}^{\alpha}$ 是 α 阶 DFRFT 矩阵，$\mathbf{F}^{\beta}{}_{\mathrm{G}}$ 是 β 阶 GFRFT 矩阵，$\mathbf{X}_J^{(\alpha,\beta)}$ 表示**X**的联合分数阶傅里叶变换域表示。其逆变换为

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\mathrm{G}}^{-\beta}\, \mathbf{X}_J^{(\alpha,\beta)} \left(\mathbf{F}^{-\alpha}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

等价地，以向量化形式表示为

$$\mathbf{x}_J^{(\alpha,\beta)} = \left(\mathbf{F}^{\alpha} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{G}}^{\beta}\right) \mathbf{x} \triangleq \mathbf{F}_J^{(\alpha,\beta)}\, \mathbf{x}, \tag{8}$$

相应的逆变换为

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{F}^{-\alpha} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{G}}^{-\beta}\right) \mathbf{x}_J^{(\alpha,\beta)} \triangleq \mathbf{F}_J^{(-\alpha,-\beta)}\, \mathbf{x}_J^{(\alpha,\beta)}. \tag{9}$$

因此，JFRFT 为时变图信号提供联合分数阶谱表示；当 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 1$时，它退化为经典 JFT。

III. 二维图双分数阶傅里叶变换

A. 定义

传统的二维广义分数阶傅里叶变换对笛卡尔积图 [38] 的两个因子图采用相同的分数阶数。尽管这种统一设定简化了变换，但可能无法捕捉两个因子之间的结构异质性。特别是，当这两个因子呈现出显著不同的特性时，例如在时空图场景中，使用同一个阶数可能会造成谱混叠，或模糊方向信息。

为克服这些局限，我们提出了 2D-GBFRFT。与传统形式不同，2D-GBFRFT 为因子图分配两个独立的分数阶数 α_1 和 α_2，从而能够沿每个维度进行自适应调整。这种双分数阶设计提升了谱表示的灵活性和保真度，尤其是在因子图具有不同结构性质时。

给定两个图 $G_1 = (\mathcal{V}_1,\ \mathcal{E}_1,\ \mathbf{A}_1)$ 和 $G_2 =(\mathcal{V}_2,\ \mathcal{E}_2,\ \mathbf{A}_2)$，其中 $N_1 = |\mathcal{V}_1|$ 和 $N_2 = |\mathcal{V}_2|$。它们的邻接矩阵 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$ 的特征值分解为

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{V}_{A_1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{V}_{A_1}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{V}_{A_2} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{V}_{A_2}^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

给定两个独立的分数阶数 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$，双分数阶变换矩阵定义为

$$\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1} = \mathbf{V}_{A_1} \mathbf{\Lambda}_1^{\alpha_1} \mathbf{V}_{A_1}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2} = \mathbf{V}_{A_2} \mathbf{\Lambda}_2^{\alpha_2} \mathbf{V}_{A_2}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

给定笛卡尔积图 $G_1 \square G_2$ 上的图信号 $X:\ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}$，令 $N_i \triangleq |\mathcal{V}_i|$ $(i = 1,\ 2)$，并令 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$ 表示 X 的顶点域矩阵表示。

定义 *3*：**X**的 2D-GBFRFT 定义为

$$\mathbf{X}_f^{\alpha_1,\alpha_2} = \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\, \mathbf{X} \left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{F}_{G_i}^{\alpha_i}$ $(i = 1,2)$ 表示 G_i 的 α_i 阶图分数阶傅里叶变换矩阵，且 $\mathbf{X}_f^{\alpha_1\ \alpha_2,}$ 是 **X** 的二维广义双分数阶傅里叶变换表示。逆变换为

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_{G_1}^{-\alpha_1}\, \mathbf{X}_f^{\alpha_1,\alpha_2} \left(\mathbf{F}_{G_2}^{-\alpha_2}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

在向量化形式下，令 $\mathbf{x}$ ≜ vec(**X**)，且 $\mathbf{x}_f^{\alpha_1\ \alpha_2}$ ≜ , vec($\mathbf{X}_f^{\alpha_1\ \alpha_2,}$)，则有

$$\mathbf{x}_f^{\alpha_1,\alpha_2} = \left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\right) \mathbf{x} \triangleq \mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\, \mathbf{x}, \tag{14}$$

相应的逆变换为

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{F}_{G_2}^{-\alpha_2} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{-\alpha_1}\right) \mathbf{x}_f^{\alpha_1,\alpha_2} \triangleq \mathbf{F}_{2D}^{(-\alpha_1,-\alpha_2)}\, \mathbf{x}_f^{\alpha_1,\alpha_2}. \tag{15}$$

B. 性质

所提出的 2D-GBFRFT 继承并扩展了分数阶傅里叶变换与图分数阶傅里叶变换的若干经典性质。我们总结了用以确立其在图信号处理中有效性的主要理论性质。

性质*1*（恒等性）：若 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，则2D-GBFRFT退化为恒等变换，即

$$\mathbf{F}_{2D}^{(0,0)} = \mathbf{F}_{G_2}^{0} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{0} = \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{N_1} = \mathbf{I}_{N_1 N_2}. \tag{16}$$

性质*2*（退化为二维广义分数阶傅里叶变换）：当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 时，2D-GBFRFT退化为标准的二维广义分数阶傅里叶变换：

$$\mathbf{F}_{2D}^{(\alpha,\alpha)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\alpha} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha} = \mathbf{F}_{2D}^{\alpha}. \tag{17}$$

性质*3*（酉性）：若$\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}$ 与$\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}$ 均为酉，则$\mathbf{F}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ $_{2D}$ 亦为酉。具体而言，

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1,\alpha_2)} &= \left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\right)^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\right) \\ &= \left(\left(\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}\right) \otimes \left(\left(\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\right) \\ &= \mathbf{I}_{N_1 N_2}, \end{aligned} \tag{18}$$

由此确立酉性。

性质 *4*（阶数可加性）：对于任意两组阶数 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 和 $(\beta_1,\ \beta_2)$，可加性成立：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\mathbf{F}_{2D}^{(\beta_1,\beta_2)} &= (\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1})(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta_2}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\beta_1})\\ &= (\mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2}\mathbf{F}_{G_2}^{\beta_2})\otimes(\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1}\mathbf{F}_{G_1}^{\beta_1})\\ &= \mathbf{F}_{G_2}^{\alpha_2+\beta_2}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha_1+\beta_1}\\ &= \mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1+\beta_1,\,\alpha_2+\beta_2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

特别地，令 $(\beta_1,\ \beta_2) = (-\alpha_1,\ -\alpha_2)$，可得

$$\mathbf{F}_{2D}^{(\alpha_1,\alpha_2)}\mathbf{F}_{2D}^{(-\alpha_1,-\alpha_2)} = \mathbf{F}_{2D}^{(0,0)} = \mathbf{I}_{N_1N_2}, \tag{20}$$

这证实了 2D-GBFRFT 的可逆性。

IV. 测地耦合图分数傅里叶变换

A. 定义

遵循前文引入的笛卡尔积设定，我们考虑一个定义在 $G_1\square G_2$ 上的时空信号 $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N_1\times N_2}$，其中 G_1 是空间因子，G_2 是时间因子。令 $\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\in\mathbb{C}^{N_1\times N_1}$ 表示 G_1 上阶数为 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的空间图分数傅里叶变换。在时间维度上，我们考虑两个阶数相同、均为 $\beta\in\mathbb{R}$ 的酉分数变换：图诱导时间图分数傅里叶变换 $\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\in\mathbb{C}^{N_2\times N_2}$ 和离散分数阶傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}^{\beta}\in\mathbb{C}^{N_2\times N_2}$，满足

$$(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta})^{\mathrm{H}}\mathbf{F}_{G_2}^{\beta} = \mathbf{I}_{N_2},\qquad (\mathbf{F}^{\beta})^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\beta} = \mathbf{I}_{N_2}. \tag{21}$$

尽管这两个算子都是酉的，但它们通常会产生不同的时间谱坐标。正如动机部分所述，在两个端点之间进行简单的欧几里得插值通常无法保持酉性。因此，我们通过酉群$U(N_2)$上的一条酉测地线将二者连接起来，该测地线通过主矩阵对数和指数构造。

将相对基变换算子定义为

$$\mathbf{W}_t \triangleq \big(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\big)^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\beta}\in\mathbb{C}^{N_2\times N_2}. \tag{22}$$

由于两个因子都是酉的，$\mathbf{W}_t$ 也是酉的，且其所有特征值都位于单位圆上。

假设*1*（主对数定义良好）。我们假设 $-1\notin\sigma(\mathbf{W}_t)$，使得主矩阵对数 $\log(\mathbf{W}_t)$ 定义良好且唯一。

定义*4*（时间测地耦合）。对于 $\lambda\in[0,1]$，定义

$$\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} \triangleq \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\,\exp\big(\lambda\,\log(\mathbf{W}_t)\big). \tag{23}$$

对于所有 λ，该曲线都位于 $U(N_2)$ 上，并且具有闭式逆变换。

等价的相位域形式：由于 $\mathbf{W}_t$ 是酉的，因此可进行特征值分解

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{S}_t\mathbf{\Lambda}_t\mathbf{S}_t^{\mathrm{H}},\ \mathbf{\Lambda}_t = \mathrm{diag}\big(e^{\mathrm{j}\theta_1},\dots,e^{\mathrm{j}\theta_{N_2}}\big),\ \theta_k\in(-\pi,\pi), \tag{24}$$

其中$\mathbf{S}_t$ 是酉的，且 θ_k 为主相位。将 (24) 代入 (23) 得

$$\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\,\mathbf{S}_t\,\mathrm{diag}\big(e^{\mathrm{j}\lambda\theta_1},\dots,e^{\mathrm{j}\lambda\theta_{N_2}}\big)\,\mathbf{S}_t^{\mathrm{H}}, \tag{25}$$

这明确表明，λ 对$\mathbf{W}_t$的特征相位进行线性插值。对于固定的 β，当$\mathbf{S}_t$ 和 $\{\theta_k\}_{k=1}^{N_2}$ 已经计算一次后，(25) 还可高效地评估 λ的多个取值，因为改变 λ 只会更新对角相位因子。

定义 *5*（*GC-GFRFT*）。对于$\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N_1\times N_2}$，将 GC-GFRFT 定义为

$$\mathbf{X}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} = \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\,\mathbf{X}\,\big(\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)}\big)^{\mathrm{T}}. \tag{26}$$

等价地，令$\mathbf{x}\triangleq\mathrm{vec}(\mathbf{X})$，且$\mathbf{x}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}\triangleq\mathrm{vec}\big(\mathbf{X}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}\big)$，标准的 vec–Kronecker 恒等式给出

$$\mathbf{x}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} = \Big(\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\Big)\mathbf{x}\ \triangleq\ \mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}\mathbf{x}. \tag{27}$$

B. 性质

接下来研究全局 GC 算子

$$\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} \triangleq \mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\in\mathbb{C}^{(N_1N_2)\times(N_1N_2)}. \tag{28}$$

除非另有说明，所有结果均在假设1以及$\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$、$\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}$和$\mathbf{F}^{\beta}$具有酉性的条件下成立。

性质 *5*（退化至两个端点）。对于 $\lambda\in[0,1]$，全局耦合算子退化为

$$\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(0;\alpha,\beta)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha},\qquad \mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(1;\alpha,\beta)} = \mathbf{F}^{\beta}\otimes\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}. \tag{29}$$

证明：见附录 A。

性质 *6*（酉性）。对于任意 $\lambda\in[0,1]$，

$$\big(\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}\big)^{\mathrm{H}}\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} = \mathbf{I}_{N_1N_2}. \tag{30}$$

证明：见附录 A。

性质 *7*（端点对称性）。定义交换后的时间耦合

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} \triangleq \mathbf{F}^{\beta}\exp\Big(\lambda\log\big((\mathbf{F}^{\beta})^{\mathrm{H}}\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\big)\Big), \tag{31}$$

以及相应的全局算子 $\widetilde{\mathbf{F}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}\triangleq\widetilde{\mathbf{F}}_{t}^{(\lambda;\beta)}{}_{,\ \mathrm{GC}}\otimes\mathbf{F}^{\alpha}_{G_1}$. 那么，对于所有 $\lambda\in[0,1]$，

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} = \mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(1-\lambda;\alpha,\beta)}. \tag{32}$$

证明：参见附录 A。

V. 分数阶谱域中的可学习维纳滤波

我们在所提出的 GC-GFRFT 框架下，将维纳滤波原理扩展至时空图信号。考虑时空域上的随机观测模型

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}_S\mathbf{X}\mathbf{G}_T + \mathbf{N}, \tag{33}$$

其中 $\mathbf{G}_S\in\mathbb{C}^{N_1\times N_1}$ 和 $\mathbf{G}_T\in\mathbb{C}^{N_2\times N_2}$ 分别表示与空间图 G_1和时间维度相关的已知线性系统响应。矩阵 $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N_1\times N_2}$ 表示随机时空信号，而$\mathbf{N}$表示加性噪声。令 $\mathbf{x}=\mathrm{vec}(\mathbf{X})$，$\mathbf{n}=\mathrm{vec}(\mathbf{N})$，则该模型可写成向量化形式：

$$\mathbf{y} = \big(\mathbf{G}_T^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{G}_S\big)\mathbf{x}+\mathbf{n}. \tag{34}$$

当 $\lambda=0$ 时，时间 GC 基会退化为图诱导的时间分数阶基，由此得到的变换则特化为具有独立空间和时间阶数的解耦 2D-GBFRFT。

A. 通过梯度下降实现可学习谱滤波

随着可调参数数量增加，直接对分数阶数进行网格搜索会产生指数级增长的配置数量。为避免这一问题，我们利用 GC-GFRFT 算子的可微性，通过基于梯度的学习联合优化分数阶数和对角谱滤波器系数。

具体而言，分数阶数（α，β）被视为可学习参数，而耦合参数 λ 则被视为固定的结构超参数，用于控制图诱导的时间基与离散时间基之间的测地线耦合。实践中，λ 通过步长为 0.1 的粗搜索确定，并在优化过程中保持固定；因此，λ不参与梯度更新。

定理 *1*（*GC-GFRFT* 关于分数阶数的可微性）：设$\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}$ 表示式（27）中定义的 GC-GFRFT 算子。对于满足假设 1 的任意固定 λ，$\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}$ 关于 α 和 β 可微。这种可微性使得以下风险最小化公式成为可能：

$$\begin{aligned}&\min_{\alpha,\beta,\mathbf{h}} \mathcal{L}(\alpha,\beta,\mathbf{h};\lambda)\\&\quad=\mathbb{E}\left\{\left\|\left(\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}\right)^{-1}\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}\mathbf{y}-\mathbf{x}\right\|_2^2\right\}\end{aligned}\tag{35}$$

其中，$\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}$ =diag(**h**) 是 GC-GFRFT 域中的对角谱滤波器。在实现中，对角滤波对应于矩阵谱域中的逐元素乘法，并且式（35）通过式（26）计算，无需显式构造$\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\mathrm{GC}}$。

相应的梯度下降更新为

$$\begin{bmatrix}\alpha^{(k+1)}\\ \beta^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^{(k)}\\ \beta^{(k)}\end{bmatrix}-\gamma\begin{bmatrix}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{h}^{(k+1)}=\mathbf{h}^{(k)}-\gamma_h\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{h}}.\tag{36}$$

其中，γ 和 γ_h 表示学习率。由于式 (35) 中的前向映射由可微矩阵函数和线性算子构成，因此梯度是良定义的。

证明：见附录 B。
整体流程总结于算法 1。

算法 1 GC-GFRFT 阶数与滤波器优化

要求： 观测$\mathbf{Y}$、固定的耦合参数 λ、学习率 γ，γ_h、迭代次数 L
确保： 学习得到的阶数（α，β）和对角滤波器 $\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}$
1: 初始化 $\alpha=0.5$、$\beta=0.5$ 和 $\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}$ =$\mathbf{I}$
2: **对于** $k=1$ 到 L **执行**
3: 构造空间基$\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$ 和时间耦合基$\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)}$ 通过 (23)
4: 计算$\mathbf{Y}\left(\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)},\mathrm{GC}\right)^{\mathrm{T}}$GC 谱表示：$\widehat{\mathbf{Y}}=\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$
5: 应用逐元素谱滤波：$\widehat{\mathbf{X}}_{\mathrm{spec}}=\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}^{\mathrm{mat}}\circ\widehat{\mathbf{Y}}$
6: 逆变换：$\widehat{\mathbf{X}}=\left(\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}\right)^{\mathrm{H}}\widehat{\mathbf{X}}_{\mathrm{spec}}\left(\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)},\mathrm{GC}\right)^{*}$
7: 计算与 (35) 对应的经验损失
8: 根据 (36) 更新 $(\alpha,\beta,\mathbf{h})$
9: **结束循环**
10: **返回** (α，β) 和 $\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}$

B. 计算效率与优化分析

本小节分析所提出的可学习维纳滤波框架的计算成本和优化行为。其效率主要源于式 (26) 中 GC-GFRFT 的可分离实现，避免了显式构造 $(N_1N_2)\times(N_1N_2)$ 克罗内克矩阵。此外，式 (25) 中的相位域表示阐明了固定耦合参数 λ 如何通过对角相位因子作用于时间算子。

整体计算包括离线谱预处理阶段和在线迭代学习阶段。在稠密情形下，预处理会计算空间和时间图诱导分数阶基所需的特征值分解。由于底层图拓扑固定，这一过程只需执行一次，代价为 $O(N_1^3+N_2^3)$。这些分解提供固定的特征向量基；在训练期间，改变 α 或 β 仅会更新相应的对角相位因子。因此，变换应用会复用缓存的特征向量，并通过以下形式的乘积计算算子：$\mathbf{V}\,\mathrm{diag}(\cdot)\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$，而无需在各训练轮数之间重新计算特征值分解。

在学习过程中，GC-GFRFT 的正变换和逆变换可通过式 (26) 中的连续矩阵乘法高效计算。对于 $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{N_1\times N_2}$，每次正变换或逆变换均包含一次左乘 $\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$ 和一次右乘 $\left(\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)},\mathrm{GC}\right)^{\mathrm{T}}$。采用稠密运算时，每次变换计算的开销为 $O(N_1^2N_2+N_1N_2^2)$。对角谱滤波器 $\mathbf{H}_{\mathrm{GC}}$ = diag(**h**) 在谱域中逐元素应用，仅需 $O(N_1N_2)$ 次运算。因此，每轮训练的复杂度主要由固定次数的正变换/逆变换计算决定。

对于时间耦合算子，式 (25) 表明，给定固定的 β 时，其对 λ 的依赖仅体现在对角相位因子上。然而，由于 β 是可学习的，$\mathbf{W}_t(\beta)$ 会随训练轮数变化。根据式 (25) 更新 $\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)},\mathrm{GC}$ 需要对 $N_2\times N_2$ 酉矩阵 $\mathbf{W}_t(\beta)$ 重新进行谱分解，其最坏情况下的稠密运算开销为 $O(N_2^3)$。在典型的时空场景中，当 $N_2\ll N_1$时，该项远小于空间变换开销 $O(N_1^2N_2)$，因此不会改变整体的复杂度阶。表 I 总结了所有所考虑变换的参数数量和计算复杂度。

学习目标呈现出混合结构。对于固定的 (α、β、λ)，优化对角谱滤波器系数**h** 可归结为一个凸二次优化问题。优化分数阶数 (α、β) 通常是非凸的，因为 GC-GFRFT 算子对这些参数存在非线性依赖；因此，一阶方法通常收敛到驻点。在我们的实验中，所提出的算子族关于 (α、β) 可微，并且在采用算法 1 所述初始化时，标准优化器表现出稳定的收敛性。

表 I 不同分数阶变换的可学习参数与计算复杂度比较

方法	可学习参数	渐近复杂度
二维广义分数阶傅里叶变换	N_1N_2+1	$O(N_1^3+N_2^3+L(N_1^2N_2+N_1N_2^2))$
2D-GBFRFT	N_1N_2+2	$O(N_1^3+N_2^3+L(N_1^2N_2+N_1N_2^2))$
JFRFT	N_1N_2+2	$O(N_1^3+N_2^3+L(N_1^2N_2+N_1N_2^2))$
GC-GFRFT	N_1N_2+2	$O(N_1^3+N_2^3+L(N_1^2N_2+N_1N_2^2+N_2^3))$

注意： N_1 和 N_2 分别表示空间图和时间图的规模，L 表示训练轮数。项 $O(N_1^3+N_2^3)$ 表示为图诱导基进行一次性离线特征值分解的开销。对于涉及 DFRFT 时间基的变换（例如 JFRFT），时间基可预先计算一次；为保持一致性，我们报告稠密上界，但更快的构造方法可以降低此开销。在线开销主要来自可分离变换计算。对于 GC-GFRFT，当 β 可学习时，更新 $\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)}$ 、GC 需要重新计算$\mathbf{W}_t(\beta)$ 的谱分解，因此每个训练轮数都会额外产生一项 $O(N_2^3)$ 开销。耦合参数 λ 被视为固定的结构超参数，不计为可学习参数。

VI. 真实世界数据上的应用

A. 时变图信号去噪

在 [1],中，时变图信号通过将时间维度表示为路径图、将空间关系表示为另一个图来建模，从而形成笛卡尔积图。这种时空建模方案使得在相同数据和图构造设置下，能够与 JFRFT 进行直接比较。为评估去噪性能，我们将所提出的框架应用于三个取自 [42],基准测试设置的真实世界时空数据集，即 COVID-19、海表温度（SST）和 PM-25空气质量。对于每个数据集，空间关系均由 k近邻图建模，简称为 k-NN，其中$k \in \{3,4,5\}$，并通过向干净的时空信号注入标准差为 $\sigma \in \{0.6,0.9,1.2\}$ 的加性白高斯噪声（AWGN）来生成受噪观测。

为确保在基于分数阶变换的方法类别中进行有原则的比较，我们对二维广义分数阶傅里叶变换、2D-GBFRFT、JFRFT 和所提出的 GC-GFRFT 采用相同的梯度下降优化方案。具体而言，学习率设为 0.1，迭代次数固定为 200。所有分数阶数均初始化为 0.5，对角谱滤波器则初始化为单位矩阵。这一统一设置可将底层分数阶谱表示的影响与异质优化选择所带来的混杂因素区分开来。

对于 GC-GFRFT，耦合正则化参数 λ通过外层网格搜索选取，步长为 0.1，随后在优化过程中保持固定。因此，λ 不计入可学习参数数量，也不会通过基于梯度的学习进行更新。对于每个候选 λ，其余分数阶数和对角滤波器均采用上述相同的梯度下降方案进行优化；报告的结果对应于在所采用的验证准则下表现最佳的 λ。

如表II–IV所示，在大多数设置下，2D-GBFRFT的性能优于二维广义分数阶傅里叶变换，这支持了在空间和时间维度上解耦分数阶数的优势。少数配置的性能较差，这与分数阶谱参数化所导致的非凸性，以及一阶优化对初始化和局部驻点的敏感性相一致。此外，2D-GBFRFT与JFRFT的相对排序因数据集和图构造而异，这表明对于真实世界的时变图信号，不存在一种始终最优的固定分数阶基。

与经典滤波基线相比，包括谱图小波变换（SGWT） [18]，中位数滤波 [60], 和自回归移动平均（ARMA）图滤波 [24],基于分数阶变换的方法在几乎所有噪声水平和 k-NN设置下都显著降低了均方误差。这些结果表明，自适应分数阶谱表示能提供比人工设计的平滑算子更强的去噪先验。

最后，GC-GFRFT在大多数配置中取得了最佳或并列最佳表现，展现出对异质时空特征的稳健适应能力。我们进一步将GC-GFRFT与具有代表性的图神经网络基线进行比较，包括图卷积网络（GCN） [61],图注意力网络（GAT） [62],和切比雪夫图卷积（ChebyNet） [63]。由于神经网络模型通常采用特定于模型的训练实践，例如学习率调度、训练轮数和早停准则，因此这些基线按照其标准训练和模型选择方案进行报告，而不受限于分数阶变换所采用的GD设置。在这些常规设置下，GC-GFRFT仍具有很强的竞争力，并且往往能取得更低的均方误差；不过，在少数配置中，神经网络基线的表现可能略胜一筹。总体而言，结果表明，GC-GFRFT始终优于经典滤波基线，同时在真实世界的时变图信号上，性能优于或媲美具有代表性的神经网络方法。

B. 动态图像去模糊

我们进一步评估所提出的 GC-GFRFT 在动态图像去模糊任务上的表现，并将其与分数阶变换基线方法进行比较，包括二维广义分数阶傅里叶变换、2D-GBFRFT 和 JFRFT。此外，我们还报告了三种具有代表性的学习型去模糊方法 DeepDeblur [64],Restormer [65],和 NAFNet [66],的结果，并将它们作为外部基线。实验在 REDS 数据集上进行。我们提取连续的三帧，将其调整为 200×200 像素，并将每帧划分为 100 个大小为 20×20 的互不重叠图像块。将三帧中相对应的图像块组成的三元组建模为时空图信号，其中灰度强度视为信号值。空间图根据像素位置构建为 4近邻图，时间维度则用一个 3 节点路径图表示。

每个 20×20 图像块三元组被视为独立的优化实例。分数阶数和对角滤波系数以逐图像块的方式进行优化，并将复原图像块重新组合以重建去模糊序列。自适应滤波在相应变换（二维广义分数阶傅里叶变换、2D-GBFRFT、JFRFT以及

表 II COVID-19 数据集上的去噪结果（均方误差）

方法	3-NN			4-NN			5-NN		
	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2
基于分数阶变换的方法									
二维广义分数阶傅里叶变换 (α)	0.6424 (0.307)	1.0626 (=0.263)	1.0749 (-0.485)	0.4901 (0.285)	0.8104 (0.298)	1.1075 (0.788)	0.3828 (0.682)	0.5896 (0.860)	0.7687 (1.184)
2D-GBFRFT (α_1, α_2)	0.1060 (0.033, 0.999)	**0.2155** (0.047, 0.998)	**0.3459** (0.060, 0.998)	0.4012 (1.358, 0.594)	0.6977 (1.362, 0.566)	1.1212 (2.129, 0.565)	**0.1077** (0.008, 1.000)	**0.2216** (0.005, 1.000)	**0.3593** (-0.002, 1.000)
JFRFT (α, β)	**0.1051** (0.051, 0.996)	0.2164 (0.072, 0.995)	0.7659 (1.055, 1.082)	0.4095 (1.281, 0.609)	0.7371 (1.274, 0.611)	**0.3538** (0.057, 1.000)	0.7058 (0.547, 0.318)	1.1149 (0.553, 0.281)	0.3693 (-0.040, 1.000)
GC-GFRFT (α, β, λ)	**0.1051** (0.051, 0.996, 1.000)	**0.2155** (0.047, 0.998, 0.000)	**0.3459** (0.060, 0.998, 0.000)	**0.1697** (0.060, 0.715, 0.800)	**0.2740** (0.071, 1.019, 0.800)	**0.3538** (0.057, 1.000, 1.000)	**0.1077** (0.008, 1.000, 0.000)	**0.2216** (0.005, 1.000, 0.000)	**0.3593** (-0.002, 1.000, 0.000)
传统基线									
SGWT	3.5500	6.8600	11.5600	3.5200	6.8400	11.5600	3.5000	6.7900	11.5100
中位数	4.5300	9.5900	17.2800	5.2500	9.9700	16.5400	4.5700	9.0500	14.9300
ARMA	2.4300	3.3200	4.2100	2.4300	2.9800	3.4900	2.3100	2.7200	3.1000
图神经网络基线									
GCN	1.2613	1.3116	1.3455	1.3972	1.4315	1.4547	1.4741	1.5060	1.5163
GAT	1.3306	1.2610	1.2498	1.3729	1.4338	1.5736	1.4473	1.4668	1.5487
ChebyNet	0.9834	1.1955	1.3489	0.7331	0.9758	1.1557	0.4505	0.5852	0.6853

表 III SST 数据集上的去噪结果（均方误差）

方法	3-NN			4-NN			5-NN		
	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2
基于分数阶变换的方法									
二维广义分数阶傅里叶变换 (α)	0.7200 (0.698)	1.5089 (0.684)	2.4722 (0.668)	0.7888 (0.262)	1.6653 (0.262)	2.7415 (0.265)	0.6310 (0.783)	1.2809 (0.792)	2.0307 (0.820)
2D-GBFRFT (α_1, α_2)	0.6534 (0.582, 0.740)	**1.3608** (0.561, 0.755)	**2.2075** (0.522, 0.774)	0.5552 (0.181, 0.827)	**1.0648** (0.163, 1.003)	1.7662 (0.165, 1.000)	0.6064 (0.739, 0.379)	1.2161 (0.753, 0.484)	1.9799 (0.762, 0.517)
JFRFT (α, β)	1.1685 (0.752, 0.747)	2.2851 (0.748, 0.779)	3.4158 (0.850, 0.889)	2.1764 (0.430, 0.447)	1.1908 (0.185, 0.994)	2.0045 (0.185, 1.000)	**0.4772** (0.740, 0.642)	**0.8394** (0.667, 0.759)	**1.4031** (0.669, 0.744)
GC-GFRFT (α, β, λ)	**0.6395** (0.604, 0.717, 0.100)	**1.3608** (0.561, 0.755, 0.000)	**2.2075** (0.522, 0.774, 0.000)	**0.5295** (0.238, 1.238, 0.400)	**1.0648** (0.163, 1.003, 0.000)	**1.2807** (1.098, 1.289, 0.600)	**0.4772** (0.740, 0.642, 1.000)	**0.8394** (0.667, 0.759, 1.000)	**1.4031** (0.669, 0.744, 1.000)
传统基线									
SGWT	5.3200	10.7100	18.2900	5.3000	10.6200	18.1200	4.8400	9.7700	16.7800
中位数	6.0400	13.7600	24.2800	6.3400	12.6900	21.6500	5.4000	10.0900	16.8300
ARMA	2.9700	4.3900	5.7900	3.2400	4.3500	5.2800	3.7300	4.7800	5.6300
图神经网络基线									
GCN	2.5521	3.6928	4.4128	1.9366	2.6767	3.3740	2.1656	2.9620	3.7989
GAT	2.5520	3.7652	4.9559	3.0085	4.2111	5.4557	3.2268	4.5049	5.9509
ChebyNet	3.4350	4.7864	5.4158	3.0030	4.3172	5.3172	2.6764	4.0671	4.8447

表 IV PM-25 数据集上的去噪结果（均方误差）

方法	3-NN			4-NN			5-NN		
	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2	σ=0.6	σ=0.9	σ=1.2
基于分数阶变换的方法									
二维广义分数阶傅里叶变换 (α)	0.6636 (0.813)	1.2474 (0.804)	1.8847 (0.801)	0.9222 (0.584)	1.7594 (0.577)	2.1018 (1.014)	0.6605 (0.315)	1.1877 (0.318)	1.7555 (0.320)
2D-GBFRFT (α_1, α_2)	0.6398 (0.784, 1.371)	1.1952 (0.723, 0.513)	1.8206 (0.716, 0.507)	0.7653 (0.613, -0.273)	1.5059 (0.618, 0.272)	2.2999 (0.624, 0.275)	0.6008 (0.474, 0.527)	1.1854 (0.322, 0.298)	1.7549 (0.322, 0.311)
JFRFT (α, β)	0.4872 (0.785, 0.517)	0.8825 (0.846, 0.573)	1.3697 (0.827, 0.563)	**0.4219** (0.965, 0.561)	**0.8629** (0.977, 0.567)	1.3931 (0.974, 0.564)	0.4497 (0.480, 0.541)	0.9242 (0.490, 0.538)	1.4784 (0.505, 0.536)
GC-GFRFT (α, β, λ)	**0.3746** (0.857, 0.868, 0.700)	**0.7509** (0.852, 0.855, 0.700)	**1.1665** (0.701, 1.398, 0.300)	**0.4219** (0.965, 0.561, 1.000)	**0.8629** (0.977, 0.567, 1.000)	**1.3445** (1.025, 0.944, 0.600)	**0.4191** (0.418, 0.656, 0.600)	**0.8275** (1.078, 1.475, 0.300)	**1.3906** (0.414, 0.686, 0.600)
传统基线									
SGWT	3.6100	6.6500	10.9800	3.3700	6.1900	10.2300	3.3700	6.2000	10.2400
中位数	5.0300	8.9600	14.7000	4.3800	7.4200	11.8700	4.6700	7.7800	12.0500
ARMA	2.6200	3.3000	3.9700	2.5000	3.0300	3.5900	2.4000	2.7500	3.0800
图神经网络基线									
GCN	0.7009	0.7143	0.6977	0.7127	0.7210	0.7150	0.7032	0.7084	0.6992
GAT	0.8098	0.7671	0.7785	0.8110	0.7697	0.7958	0.7495	0.7194	0.7359
ChebyNet	0.6436	0.6625	0.6766	0.5952	0.6204	0.6527	0.6026	0.6215	0.6459

GC-GFRFT）下进行，并以均方误差作为优化目标。优化采用Adam进行，学习率为2×10^{-2}，共100个训练轮数。分数阶数初始化为0.8，对角滤波器初始化为单位矩阵。

对于 GC-GFRFT，耦合参数 λ 通过外层网格搜索选定，搜索步长为 0。1，随后在优化过程中保持固定。基于梯度的更新仅应用于分数阶数和对角谱滤波器系数；具体而言， λ不会通过反向传播进行更新且不计为可学习参数。

对于每一帧 t，我们按如下方式计算均方误差、峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性指数 (SSIM)：

$$MSE_t = \frac{1}{HW}\sum_{i,j}\left(I_t(i,j) - \hat{I}_t(i,j)\right)^2, \tag{37}$$

$$PSNR_t = 10\log_{10}\left(\frac{\mathrm{MAX}^2}{MSE_t}\right), \tag{38}$$

$$SSIM_t = \frac{(2\mu_{I_t}\mu_{\hat{I}_t} + C_1)(2\sigma_{I_t\hat{I}_t} + C_2)}{(\mu_{I_t}^2 + \mu_{\hat{I}_t}^2 + C_1)(\sigma_{I_t}^2 + \sigma_{\hat{I}_t}^2 + C_2)}, \tag{39}$$

ˆ其中， I_t 和 I_t 分别表示时间 t 的真实值帧和重建帧， H 和 W 分别表示图像高度和宽度。

定量结果见表 V 和表 VI。在基于分数阶变换的基线方法中，2D-GBFRFT 的表现始终优于二维广义分数阶傅里叶变换，这表明允许空间维度和时间维度采用不同的分数阶数是有益的。GC-GFRFT 进一步降低了 MSE_{avg}，并在 MSE_{avg}、$PSNR_{\text{avg}}$ 和 $SSIM_{\text{avg}}$ 方面取得了最佳的整体表现，表明耦合感知分数阶建模能够为逐块优化下的动态去模糊提供更有效的变换域表示。

对于基于分数阶变换的方法，我们采用统一的逐块实例自适应优化协议，对每个图像块三元组使用 Adam 更新分数阶数和对角谱滤波器。相比之下，基于学习的基线方法使用其官方实现和公开发布的权重，在推理模式下进行评估，不进行任何测试时参数自适应。因此，与基于学习的方法的比较，主要反映了短时间窗口下实例自适应分数谱建模的有效性，而非完全匹配的训练范式。

图 2 展示了动态图像去模糊的定性比较。对于每一帧，完整图像上都标出了一个代表性区域，其对应的放大图像块显示在下方。与其他方法相比，GC-GFRFT 能够恢复更锐利的边缘和更清晰的局部纹理，同时减少物体边界和精细结构周围的残余模糊伪影。这些视觉观察与定量结果一致，并进一步证明了 GC-GFRFT 在动态图像去模糊方面的有效性。

表 V REDS 数据集上的去模糊性能比较（均方误差/峰值信噪比/结构相似性指数）

数据集	方法	帧	MSE	PSNR	SSIM
REDS	二维广义分数阶傅里叶变换	帧 1	1.0389	47.96	0.9992
		帧 2	0.9281	48.45	0.9992
		帧 3	1.2405	47.20	0.9991
	2D-GBFRFT	帧 1	1.0010	48.13	0.9993
		帧 2	**0.9137**	**48.52**	**0.9993**
		帧 3	1.2424	47.19	0.9992
	JFRFT	帧 1	**0.9406**	**48.40**	**0.9994**
		帧 2	0.9392	48.40	0.9993
		帧 3	1.2460	47.18	0.9991
	GC-GFRFT	帧 1	0.9564	48.32	0.9994
		帧 2	0.9308	48.44	0.9993
		帧 3	**1.2107**	**47.30**	**0.9992**
	DeepDeblur	帧 1	204.6643	25.02	0.8140
		帧 2	214.1956	24.82	0.8054
		帧 3	229.0492	24.53	0.8028
	Restormer	帧 1	253.9732	24.08	0.7949
		帧 2	245.9362	24.22	0.7961
		帧 3	262.5448	23.94	0.7934
	NAFNet	帧 1	245.4231	24.23	0.7994
		帧 2	238.4010	24.36	0.7997
		帧 3	266.5690	23.87	0.7901

表 VI REDS 数据集上以 MSE_{AVG}、$PSNR_{\text{AVG}}$ 和 $SSIM_{\text{AVG}}$ 为指标的去模糊性能

数据集	方法	MSE_{avg}	$PSNR_{\text{avg}}$	$SSIM_{\text{avg}}$
REDS	二维广义分数阶傅里叶变换	1.0692	47.87	0.9992
	2D-GBFRFT	1.0524	47.95	0.9992
	JFRFT	1.0419	47.99	0.9993
	GC-GFRFT	**1.0326**	**48.02**	**0.9993**
	DeepDeblur	215.9697	24.79	0.8074
	Restormer	254.1514	24.08	0.7948
	NAFNet	250.1310	24.15	0.7964

C. 动态图像去噪

为进一步评估动态图像去模糊之外的鲁棒性，我们在 REDS 数据集上考虑动态图像去噪任务。首先，将干净序列转换为浮点表示，并归一化至范围 $[0, 1]$。随后，在归一化强度值中注入均值为零、标准差为 $\sigma/255$ 的加性白高斯噪声（AWGN），其中 8 位尺度下设定 $\sigma = 18$。注入噪声后，将受噪帧裁剪至有效范围 $[0, 1]$，并重新量化为 8 位整数；这遵循标准数字成像流程，并确保像素表示有效。

我们将所提出的 GC-GFRFT 与分数阶变换基线方法进行比较，包括二维广义分数阶傅里叶变换、2D-GBFRFT 和 JFRFT。我们还纳入三种经典空间去噪器作为参考基线，即高斯滤波、中值滤波和非局部均值（NLM），并遵循 [43] 中的实现和参数设置。这些经典方法逐帧应用，不进行任何学习或测试时适配。高斯滤波使用 5×5 核，其标准差由核大小决定。中值滤波使用 5×5 邻域。非局部均值去噪使用滤波强度 $h = 20$，并采用 7×7 模板窗口和 21×21 搜索窗口。对于基于分数阶变换的方法，除非另有说明，所有实验设置——包括分块时空图构建、初始化策略、优化超参数和停止准则——均与前述动态去模糊实验保持一致，从而确保在分数阶变换族内进行一致且公平的比较。

定量结果见表VII和表VIII。总体而言，基于分数阶变换的方法在所评估的各帧上始终优于经典空间滤波器。这表明，通过基于图的谱表示利用时空结构，能够提供比纯粹的空间邻域平滑更强的去噪先验。在分数阶变换族中，沿空间和时间维度解耦分数阶阶次，通常优于使用单一共享阶次，这与建模灵活性提升所带来的收益相一致。所提出的GC-GFRFT取得了最佳的总体平均性能，并且

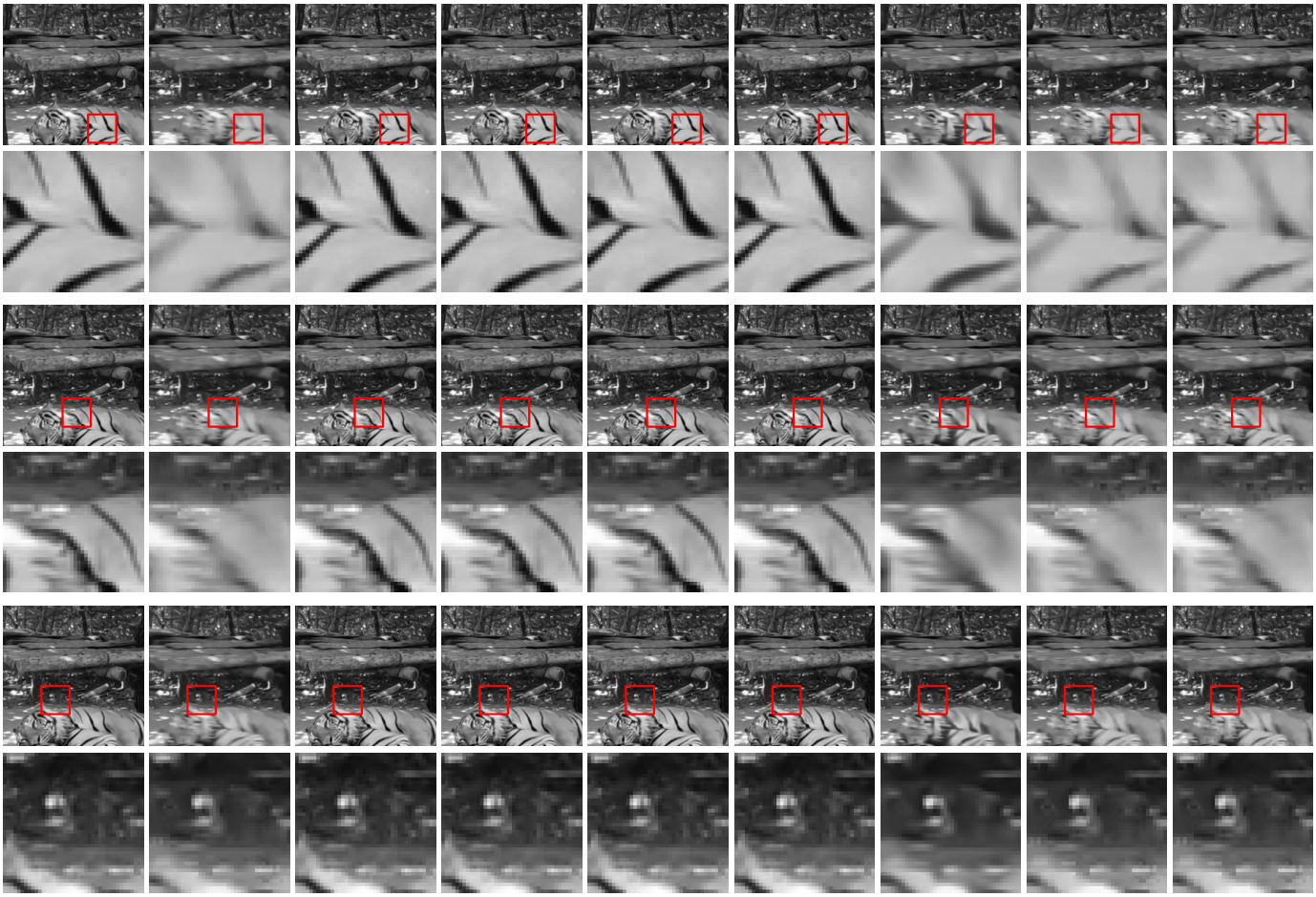

图 2. REDS 序列动态图像去模糊的视觉比较。对于每帧，第一行显示完整图像上选定的区域，第二行显示对应的放大图像块。

在逐帧层面仍保持高度竞争力，从而支持耦合感知分数阶建模在动态去噪中的有效性。

图 3 展示了动态图像去噪的定性比较。对于每帧，完整图像上都标出了一个代表性区域，其对应的放大图像块显示在下方。与经典空间滤波器相比，基于分数阶变换的方法在更有效地抑制噪声的同时，能够保留更多有意义的局部结构。其中，GC-GFRFT 生成的纹理更干净，残余噪声伪影更少，同时避免了高斯滤波、中值滤波和非局部均值中观察到的过度平滑现象。这些观察结果与表 VII 和表 VIII 中的定量结果一致，进一步证明了 GC-GFRFT 在动态图像去噪方面的有效性。

VII. 结论与未来工作

本文提出了一种面向笛卡尔积图上图信号的统一分数阶谱框架，将传统的整数阶变换和单参数分数阶变换加以拓展。我们首先提出了 2D-GBFRFT，为因子图指定独立的分数阶数，放宽了标准二维广义分数阶傅里叶变换的阶数共享约束，从而提升了对时空信号的建模灵活性。为连接图诱导的时间基与离散时间基，我们进一步通过在酉流形上构造耦合路径，引入了 GC-GFRFT。这一构造保持酉性，并具有闭式逆变换，从而为连通性诱导的图谱与经典时间谱表示之间提供了有理论依据的联系。

基于这些变换，我们提出了一种可微的维纳滤波方法，通过基于梯度的学习端到端地优化分数阶数，同时将耦合参数作为固定的结构正则项。在包括时变图信号去噪和动态图像恢复在内的真实任务上的实验表明，该方法始终优于现有的分数阶变换，并且与具有代表性的基于学习的方法相比也具有竞争力。

尽管取得了这些令人鼓舞的成果，当前框架仍存在若干局限。具体而言，所提出的 GC-GFRFT 目前仅限于两个端点酉基之间的插值，因此尚不支持更一般的谱外推。此外，耦合参数 λ 被视为固定的结构超参数，而非与其余模型参数联合学习。

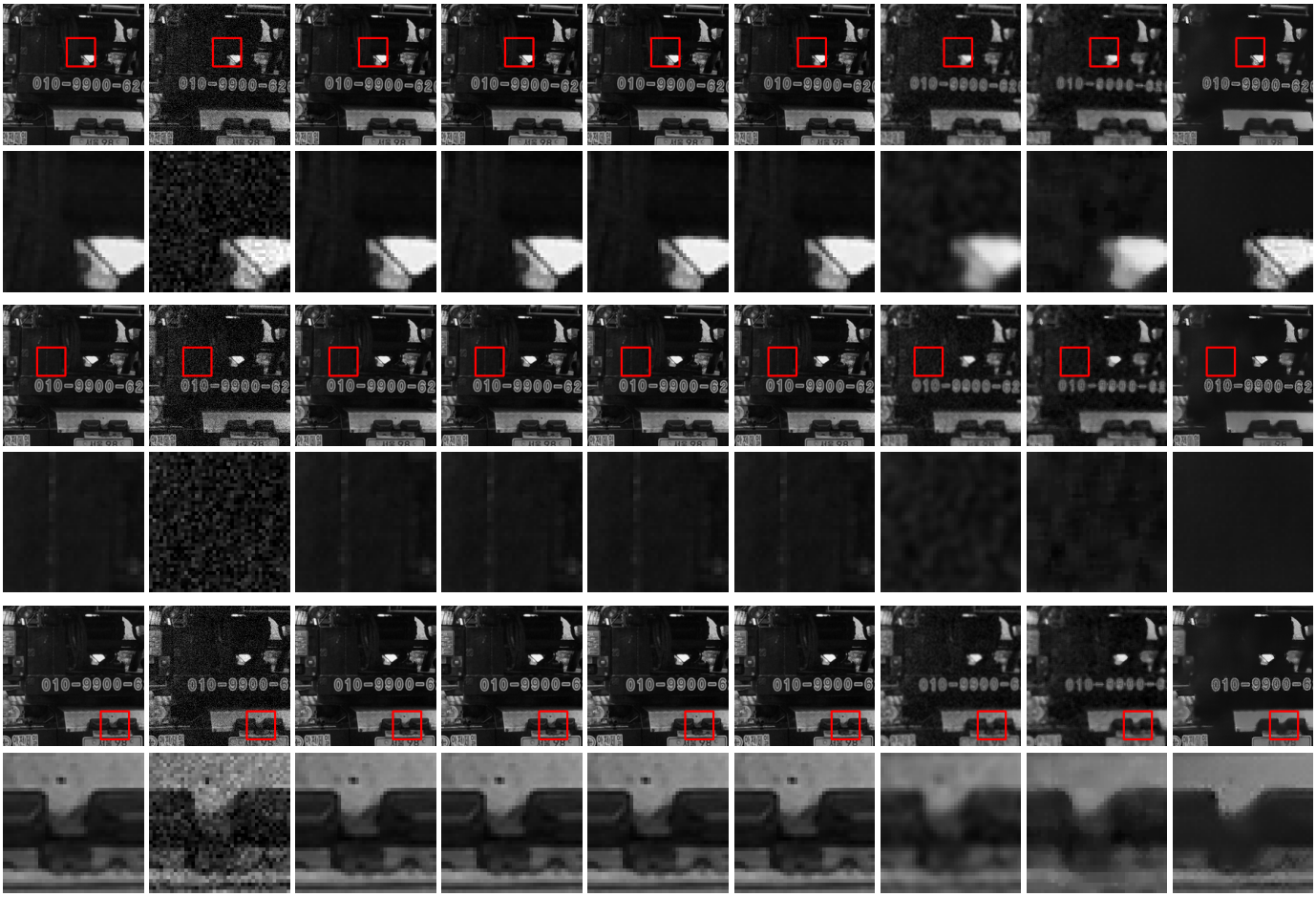

图 3. REDS 序列上动态图像去噪的视觉比较。对于每一帧，第一行显示完整图像中选定的区域，第二行显示对应的放大图像块。

因此，未来的工作将着重于扩展测地耦合机制，使其超越当前的插值范围，以支持谱外推。另一个重要方向是将可微分的 GC-GFRFT 模块集成到深度图神经网络中，作为轻量级谱层，从而以适度的参数开销增强谱表达能力。

Appendix A
Proof of Properties 5–7

性质 *5* 的证明：由 (23) 可得，$\mathbf{F}_{t}^{(\lambda;\beta)}{}_{,\mathrm{GC}} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}$。在 $\lambda = 1$ 处，假设 1 给出 $\exp(\log(\mathbf{W}_t)) = \mathbf{W}_t$，因此

$$\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(1;\beta)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\mathbf{W}_t = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta})^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\beta} = \mathbf{F}^{\beta}.$$

代入 (28) 即得 (29)。 ■

性质 *6* 的证明：令 $\mathbf{A} \triangleq \log(\mathbf{W}_t)$。根据假设1，$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{A}$，因此对于任意实数 λ，$\exp(\lambda\mathbf{A})$ 都是酉矩阵，特别是对于 $\lambda \in [0,1]$。因此，$\mathbf{F}_{t}^{(\lambda;\beta)}{}_{,\mathrm{GC}} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\exp(\lambda\mathbf{A})$ 是酉矩阵。最后，利用 $(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q})^{\mathrm{H}}(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}^{\mathrm{H}}\mathbf{P})\otimes(\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q})$ 以及 (28)，可得 (30)。 ■

性质 *7* 的证明：由于在假设1下，$(\mathbf{F}^{\beta})^{\mathrm{H}}\mathbf{F}_{G_2}^{\beta} = \mathbf{W}_t^{-1}$，且 $\log(\mathbf{W}_t^{-1}) = -\log(\mathbf{W}_t)$，因此有

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} = \mathbf{F}^{\beta}\exp\big(-\lambda\log(\mathbf{W}_t)\big).$$

利用 $\mathbf{F}^{\beta} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\exp(\log(\mathbf{W}_t))$，可得

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\exp\big((1-\lambda)\log(\mathbf{W}_t)\big) = \mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(1-\lambda;\beta)}.$$

与 $\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$ 进行张量积可得 (32)。 ■

附录 B 定理 1 的证明

为清晰起见，我们沿用第 IV 节中的记号，并将可学习空间阶数记为 α。在整个证明过程中，耦合参数 λ 视为固定的超参数，不通过 GD 更新。

回顾式 (27)，全局 GC 算子可写成克罗内克形式

$$\mathbf{F}_{\mathrm{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)} = \mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}, \tag{40}$$

其中，时间 GC 基由式 (23) 给出：

$$\mathbf{F}_{t,\mathrm{GC}}^{(\lambda;\beta)} = \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\exp\big(\lambda\log(\mathbf{W}_t(\beta))\big), \quad \mathbf{W}_t(\beta) = \big(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\big)^{\mathrm{H}}\mathbf{F}^{\beta}. \tag{41}$$

根据假设1，$-1 \notin \sigma(\mathbf{W}_t(\beta))$，因此主矩阵对数 $\log(\mathbf{W}_t(\beta))$ 定义良好且 Fr´echet 可微，$\exp(\lambda\log(\mathbf{W}_t(\beta)))$ 亦然。

关于 α的可微性。由于$\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}$ 是关于其阶数可微的分数阶算子，$\partial\mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}/\partial\alpha$ 存在。

表 VII REDS 数据集上的去噪性能比较（均方误差/峰值信噪比/结构相似性指数）

数据集	方法	帧	MSE	PSNR	SSIM
REDS	二维广义分数阶傅里叶变换	帧 1	10.9443	37.74	0.9791
		帧 2	4.2729	41.82	0.9947
		帧 3	8.3665	38.91	0.9889
	2D-GBFRFT	帧 1	10.7856	37.80	0.9793
		帧 2	4.2707	41.83	0.9947
		帧 3	8.3324	38.92	0.9890
	JFRFT	帧 1	10.6420	37.86	0.9795
		帧 2	4.2716	41.82	0.9947
		帧 3	**8.2394**	**38.97**	**0.9891**
	GC-GFRFT	帧 1	**10.4633**	**37.93**	**0.9796**
		帧 2	**4.1533**	**41.95**	**0.9948**
		帧 3	8.3356	38.92	0.9890
	高斯	帧 1	162.5462	26.02	0.7850
		帧 2	158.1820	26.14	0.7877
		帧 3	161.3213	26.05	0.7829
	中位数	帧 1	272.5740	23.78	0.6850
		帧 2	268.2410	23.85	0.6810
		帧 3	279.8108	23.66	0.6703
	NLM	帧 1	89.5665	28.61	0.8332
		帧 2	89.2881	28.62	0.8302
		帧 3	93.9571	28.40	0.8272

表 VIII 以 MSE_{AVG}、$PSNR_{\text{AVG}}$ 和$SSIM_{\text{AVG}}$ 衡量的 REDS 数据集去噪性能

数据集	方法	MSE_{avg}	$PSNR_{\text{avg}}$	$SSIM_{\text{avg}}$
REDS	二维广义分数阶傅里叶变换	7.8612	39.49	0.9876
	2D-GBFRFT	7.7963	39.52	0.9877
	JFRFT	7.7177	39.55	0.9877
	GC-GFRFT	**7.6507**	**39.60**	**0.9878**
	高斯	160.6831	26.07	0.7852
	中位数	273.5419	23.76	0.6787
	NLM	90.9372	28.54	0.8302

使用（40）和克罗内克积法则（其中$\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)}$，GC 与 α无关），我们得到

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}}{\partial \alpha} = \mathbf{F}_{t,\text{GC}}^{(\lambda;\beta)} \otimes \frac{\partial \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}}{\partial \alpha}. \tag{42}$$

因此，$\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\text{GC}}$ 关于 α 可微。

关于 β的可微性。由 (41) 可知，$\mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)}{}_{,\text{GC}}$ 是 $\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}$ 与 $\exp(\lambda \log(\mathbf{W}_t(\beta)))$ 的乘积。应用 Fr´echet 导数的乘积法则和链式法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_{t,\text{GC}}^{(\lambda;\beta)}}{\partial \beta} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}}{\partial \beta}\, \exp\big(\lambda \log(\mathbf{W}_t(\beta))\big) \\ &\quad + \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\, L_{\exp}\big(\lambda \log(\mathbf{W}_t(\beta));\, \mathbf{E}_t(\beta)\big),\end{aligned} \tag{43}$$

$$\mathbf{E}_t(\beta) \triangleq \lambda\, L_{\log}\big(\mathbf{W}_t(\beta);\, \mathbf{W}_t'(\beta)\big). \tag{44}$$

其中 $L_{\exp}(\cdot;\cdot)$ 和 $L_{\log}(\cdot;\cdot)$ 分别表示矩阵指数和主对数的 Fr´echet 导数。

此外，对 (41) 中的 $\mathbf{W}_t(\beta) = \big(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\big)^{\text{H}}\mathbf{F}^{\beta}$ 求导可得

$$\mathbf{W}_t'(\beta) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{G_2}^{\beta}}{\partial \beta}\right)^{\text{H}} \mathbf{F}^{\beta} + \big(\mathbf{F}_{G_2}^{\beta}\big)^{\text{H}} \frac{\partial \mathbf{F}^{\beta}}{\partial \beta}, \tag{45}$$

且 $\partial \mathbf{F}^{\beta}/\partial \beta$ 存在，因为$\mathbf{F}^{\beta}$ 也是关于 β的可微分数阶变换。因此，$\partial \mathbf{F}_t^{(\lambda;\beta)}{}_{,\text{GC}}/\partial \beta$ 存在。

最后，由式（40）可得，

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{F}_{t,\text{GC}}^{(\lambda;\beta)}}{\partial \beta} \otimes \mathbf{F}_{G_1}^{\alpha}, \tag{46}$$

这证明了关于 β的可微性。

目标函数的可微性。根据第 IV 节中的性质 6，$\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\text{GC}}$ 关于 $\lambda \in [0,1]$是酉的，因此其逆存在且满足 $(\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\text{GC}})^{-1} = (\mathbf{F}^{(\lambda;\alpha,\beta)}{}_{\text{GC}})^{\text{H}}$。因此，该映射

$$\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{F}_{\text{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)})^{-1}\mathbf{H}_{\text{GC}}\mathbf{F}_{\text{GC}}^{(\lambda;\alpha,\beta)}\mathbf{y}$$

是（α，β，$\mathbf{h}$）中可微矩阵函数与线性算子的复合。因此，对于固定的可行 λ，式（35）中的损失关于（α，β，$\mathbf{h}$）可微。

■

参考文献

[1] C. Cheng、Y. Chen、Y. J. Lee 和 Q. Sun，“有向积图上的基于奇异值分解的图傅里叶变换”，*IEEE*信号、信息与网络处理汇刊，第 9 卷，第 531–541 页，2023年。[2] P. Ferrer-Cid、J. M. Barcelo-Ordinas 和 J. Garcia-Vidal，“物联网空气污染监测平台的图信号重构技术”，*IEEE*物联网杂志，第 9 卷，第 24 期，第 25 350–25 362 页，2022年。[3] H. Zhao、C. Li 和 W. Xiang，“传感器网络上的图信号估计数据复用自适应算法”，*IEEE*传感器杂志，第 24 卷，第 4 期，第 5086–5096 页，2024年。[4] C. Koke 和 G. Kutyniok，“超越小波束缚的图散射”，载于 神经信息处理系统进展（*NeurIPS*），第 35 卷，2022年，第 30 219–30 232 页。[5] J. Jiang、H. Feng、D. B. Tay 和 S. Xu，“联合时空顶点非下采样滤波器组的理论与设计”，*IEEE*信号处理汇刊，第 69 卷，第 1968–1982 页，2021年。[6] F. Schwock、J. Bloch、L. Atlas、S. Abadi 和 A. Yazdan-Shahmorad，“利用图上信号处理估计和分析神经信息流”，载于 *IEEE*国际声学、语音与信号处理会议（*ICASSP*），2023年，第 1–5 页。[7] H. Mohammadi 和 W. Karwowski，“脑连接研究中的图神经网络：方法、挑战与未来方向”，脑科学，第 15 卷，第 1 期，第 17 页，2024年。[8] W. Hu、J. Pang、X. Liu、D. Tian、C.-W. Lin 和 A. Vetro，“几何数据及其他领域的图信号处理：理论与应用”，*IEEE*多媒体汇刊，第 24 卷，第 3961–3977 页，2021年。[9] S. Sardellitti 和 S. Barbarossa，“广义胞腔复形上的拓扑信号处理”，*IEEE*信号处理汇刊，第 72 卷，第 687–700 页，2024年。[10] Z. Fu、Y. Lin、D. Yang 和 S. Yang，“分数阶傅里叶变换遇上黎斯势与图像处理”，*SIAM*成像科学杂志，第 17 卷，第 1 期，第 476–500 页，2024年。[11] S. Yang、Z. Fu、D. Yang、Y. Lin 和 Z. Li，“通过线性正则黎斯变换改进图像边缘检测”，*SIAM*成像科学杂志，2026年，在线优先发表，Doi: 10.1137/25M1752225。[12] D. I. Shuman、S. K. Narang、P. Frossard、A. Ortega 和 P. Van- dergheynst，“图上信号处理的新兴领域：将高维数据分析扩展到网络及其他不规则域”，*IEEE*信号处理杂志，第 30 卷，第 3 期，第 83–98 页，2013年。[13] A. Sandryhaila 和 J. M. F. Moura，“图上的离散信号处理”，*IEEE*信号处理汇刊，第 61 卷，1656，2013年 7，1644，期号：页码。[14] A. Sandryhaila 和 J. M. F. Moura，“图上的离散信号处理：频率分析”，*IEEE*信号处理汇刊，第 62 卷，第 12 期，第 3042–3054 页，2014年。

[15] L. Stankovi´c, D. Mandic, M. Dakovi´c, 及 A. G. Constantinides, “顶点-频率图信号处理：全面综述”，数字信号处理，第 107 卷，102802，2020 年，第 .[16] A. Gavili 和 X.-P. Zhang，“图信号处理中移位算子、图频率与最优滤波”，IEEE信号处理汇刊，第 65 卷，第 23 期，第 6303–6318 页，2017 年。[17] R. R. Coifman 和 M. Maggioni，“扩散小波”，Appl. Comput. Harmon. Anal.，第 21 卷，第 1 期，第 53–94 页，2006年。[18] D. K. Hammond、P. Vandergheynst 和 R. Gribonval，“基于谱图论的图上的小波”，Appl. Comput. Harmon. Anal.，第 30 卷，第 2 期，第 129–150 页，2011年。[19] S. K. Narang 和 A. Ortega，“适用于图结构数据的完美重构双通道小波滤波器组”，IEEE信号处理汇刊，第 60 卷，第 6 期，第 2786–2799 页，2012年。[20] S. Deutsch、A. Ortega 和 G. Medioni，“基于谱图小波的流形去噪”，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，2016 年，第 4673–4677 页。[21] S. Chen、R. Varma、A. Sandryhaila 和 J. Kova˘cevi´c，“图上的离散信号处理：采样理论”，IEEE信号处理汇刊，第 63 卷，第 24 期，第 6510–6523 页，2015年。[22] Y. Tanaka 和 Y. C. Eldar，“基于子空间和平滑度先验的图上广义采样”，IEEE信号处理汇刊，第 68 卷，第 2272–2286 页，2020年。[23] J. Shi 和 J. M. F. Moura，“图信号处理：在顶点域和谱域对偶化图信号处理采样”，IEEE信号处理汇刊，第 70 卷，第 2883–2898 页，2022年。[24] E. Isufi、A. Loukas、A. Simonetto 和 G. Leus，“自回归移动平均图滤波”，IEEE信号处理汇刊，第 65 卷，第 2 期，第 274–288 页，2017年。[25] D. B. Tay 和 J. Jiang，“通过中值滤波器对时变图信号进行去噪”，IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs，第 68 卷，第 3 期，第 1053–1057 页，2020年。[26] E. Bayram、P. Frossard、E. Vural 和 A. Alatan，“采用谱图滤波对机载激光雷达点云进行分析”，IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.，第 15 卷，第 8 期，第 1284–1288 页，2018年。[27] A. Ortega，《图信号处理导论》。剑桥大学出版社，2022年。[28] Y. Wang 和 B. Li，“图上的分数阶傅里叶变换：采样与恢复”，载于 IEEE 国际信号处理会议（ICSP）论文集，2018 年，第 1103–1108 页。[29] Y. Wang、B. Li 和 Q. Cheng，“图上的分数阶傅里叶变换”，载于亚太信号与信息处理协会年度峰会暨会议（APSIPA ASC）论文集，2017 年，第 105–110 页。[30] L. B. Almeida，“分数阶傅里叶变换与时频表示”，IEEE信号处理汇刊，第 42 卷，第 11 期，第 3084–3091 页，2002年。[31] T. Alikas¸ifo˘glu、B. Kartal 和 A. Koc¸，“图分数阶傅里叶变换：统一理论”，IEEE信号处理汇刊，第 72 卷，第 3834–3850 页，2024年。[32] D. Wei 和 Z. Yan，“基于图分数阶傅里叶变换及先验信息的图信号广义采样”，信号处理，第 214 卷，109263 页，2024年。[33] E. Koc¸、T. Alikas¸ifo˘glu、A. C. Aras 和 A. Koc¸，“可训练分数阶傅里叶变换”，IEEE信号处理快报，第 31 卷，755，2024 年，第 751 页。[34] F. S¸ahinuc¸ 和 A. Koc¸，“分数阶傅里叶变换与 Transformer编码器相遇”，IEEE信号处理快报，第 29 卷，第 2258–2262 页，2022年。[35] T. Kurokawa、T. Oki 和 H. Nagao，“多维图傅里叶变换”，arXiv 预印本 arXiv:1712.07811，2017年。[36] A. Natali、E. Isufi 和 G. Leus，“图上多维过程的预测”，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，2020 年，第 5575–5579 页。[37] R. A. Varma 和 J. Kova˘cevi´c，“乘积图上的图信号采样理论”，载于 IEEE 全球信号与信息处理会议（GlobalSIP）论文集，2018 年，第 768–772 页。[38] F. Yan 和 B. Li，“多维图分数阶傅里叶变换及其在数据压缩中的应用”，数字信号处理，第 129 卷，103683 页，2022年。[39] A. Loukas 和 D. Foucard，“时变图信号的频率分析”，载于 IEEE 全球信号与信息处理会议（GlobalSIP）论文集，2016 年，第 346–350 页。[40] F. Grassi、A. Loukas、N. Perraudin 和 B. Ricaud，“时空顶点信号处理：框架、解析扩展与应用”，IEEE信号处理汇刊，第 66 卷，第 3 期，第 817–831 页，2018年。[41] T. Alikas¸ifo˘glu、B. Kartal、E. ¨Ozg¨unay 和 A. Koc¸，“联合时空顶点分数阶傅里叶变换

[42] T. Alikas¸ifo˘glu、B. Kartal 和 A. Koc¸，《联合时空顶点分数阶傅里叶域中的维纳滤波》，IEEE信号处理快报，第 31 卷，第 1319–1323 页，2024年。[43] Z. Yan 和 Z. Zhang，《可训练联合时空顶点分数阶傅里叶变换》，数字信号处理，第 105909 页，2026年。[44] S. Nijhawan、A. Gupta、K. Appaiah、R. Vaze 和 N. Karamchandani，《面向 MIMO-OFDM 系统的基于旗流形的预编码器插值技术》，IEEE Trans. Commun.，第 69 卷，第 4359 页，2021年7月，第 4347 页。[45] P. Mehta、A. Kumar、S. R. B. Pillai 和 K. Appaiah，《面向 MIMO-OFDM无线通信系统的矩阵酉预编码器插值》，IEEE Commun. Lett.，第 27 卷，第 11 期，第 3038–3042 页，2023年。[46] R. Sun、C. Wang、A.-A. Lu、X. Gao 和 X.-G. Xia，《基于矩阵流形优化的大规模 MIMO下行链路预编码器设计》，IEEE信号处理汇刊，第 72 卷，第 1065–1080 页，2024年。[47] C. Ozturk、H. M. Ozaktas、S. Gezici 和 A. Koc¸，《图信号的最优分数阶傅里叶滤波》，IEEE信号处理汇刊，第 69 卷，第 2902–2912 页，2021年。[48] T. Lin 和 S. Bourennane，《基于张量分解的高光谱图像去噪方法综述》，EURASIP J. Adv. Signal Process.，第 2013 卷，第 1 期，第 186 页，2013年。[49] S. Gannot 和 I. Cohen，《自适应波束成形与后置滤波》，载于《Springer语音处理手册》。Springer，2008年，第 945–978 页。[50] J. Hara、Y. Tanaka 和 Y. C. Eldar，《随机先验下的图信号采样》，IEEE信号处理汇刊，第 71 卷，第 1434 页，2023 年，第 1421 页。[51] A. C. Ya˘gan 和 M. T. ¨Ozgen，《用于图像和图信号去噪的基于谱图的顶点-频率维纳滤波》，IEEE Trans. Signal Inf. Process. Netw.，第 6 卷，第 584–598 页，2020年。[52] E. Isufi、A. Loukas、M. Perlmutter、A. Ribeiro 和 G. Leus，《用于信号处理和机器学习的图滤波器》，IEEE信号处理汇刊，第 72 卷，第 4745–4781 页，2024年。[53] G. B. Ribeiro 和 J. B. Lima，《图信号处理简述》，J. Commun. Inf. Syst.，第 33 卷，第 1 期，2018年。[54] K. Qiu、X. Mao、X. Shen、X. Wang、T. Li 和 Y. Gu，《时变图信号重建》，IEEE J. Sel. Topics Signal Process.，第 11 卷，第 6 期，第 870–883 页，2017年。[55] X. Mao 和 Y. Gu，《时变图信号重建》，载于《图信号的顶点-频率分析》。Springer，2018年，第 293–316 页。[56] H. M. Ozaktas 和 D. Mendlovic，《分数阶傅里叶变换及其光学解释》，Opt. Commun.，第 101 卷，第 3-4 期，第 163–169 页，1993年。[57] D. Mendlovic 和 H. M. Ozaktas，《分数阶傅里叶变换及其光学实现：I》，J. Opt. Soc. A mer. A，第 10 卷，第 9 期，第 1875–1881 页，1993年。[58] H. M. Ozaktas 和 M. A. Kutay，《分数阶傅里叶变换》，载于《欧洲控制会议（ECC）论文集》，2001年，第 1477–1483 页。[59] C. Candan、M. A. Kutay 和 H. M. Ozaktas，《离散分数阶傅里叶变换》，IEEE信号处理汇刊，第 48 卷，第 5 期，第 1329–1337 页，2000年。[60] T. S. Huang、G. J. Yang 和 G. Y. Tang，《一种快速二维中值滤波算法》，IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.，第 27 卷，第 1 期，第 13–18 页，1979年。[61] T. N. Kipf 和 M. Welling，《基于图卷积网络的半监督分类》，载于《国际学习表征会议（ICLR）论文集》，2017年。[62] P. Veli˘ckovi´c、G. Cucurull、A. Casanova、A. Romero、P. Li`o 和 Y. Bengio，《图注意力网络》，载于《国际学习表征会议（ICLR）论文集》，2018年。[63] M. Defferrard、X. Bresson 和 P. Vandergheynst，《具有快速局部谱滤波的图卷积神经网络》，载于《神经信息处理系统进展（NeurIPS）论文集》，2016年，第 3844–3852 页。[64] S. Nah、T. H. Kim 和 K. M. Lee，《用于动态场景去模糊的深度多尺度卷积神经网络》，载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集》，2017年，第 3803–3814 页。[65] S. W. Zamir、A. Arora、S. Khan、M. Hayat、F. S. Khan、M.-H. Yang 和 L. Shao，《Restormer：用于高分辨率图像复原的高效Transformer》，载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集》，2022年，第 5728–5739 页。[66] L. Chen、X. Chu、X. Zhang 和 J. Sun，《图像复原的简易基线方法》，载于《欧洲计算机视觉会议（ECCV）论文集》，2022年，第 48–63 页。