arXiv:2603.01497v1 [cond-mat.dis-nn] 2 Mar 2026

电子系统中的单杂质诱导的局域化转变

Niaz Ali Khan,[1] Munsif Jan,[2,3] Muzamil Shah,[4] Muhammad Sajid,[5,*] Muhammad Mateen,[6] 和 Mushtaq Ali[7]

[1] *Department of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005, China* [2] *CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China* [3] *Hefei Unitary Quantum Technology Co., Ltd., Hefei 230088, China* [4] *Department of Physics, Quaid-i-Azam University Islamabad 45320, Pakistan* [5] *Department of Physics, Kohat University of Science and Technology, Kohat 26000, Khyber Pakhtunkhwa, Pakistan* [6] *Department of Physics, Jangsu University, Zhenjiang 212013, China* [7] *Department of Physics, Division of Science and Technology, University of Education Lahore, Pakistan*

安德森局域化是无序量子系统中的一种基本现象，其中输运因广泛随机性引起的波干涉而受到抑制。超越传统的多杂质情形，我们通过关注杂质产生的束缚态的性质，研究低维紧束缚系统中的杂质诱导的局域化现象。通过在原本扩展的晶格中引入单个位点杂质，我们证明该杂质可以承载一个束缚态，当杂质强度超过临界值时，其空间特征会从扩展转变为局域化。这一转变仅涉及杂质态，而宿主系统的体态仍保持扩展。我们通过分析束缚态的两种不同空间分布来刻画局域化行为：一种具有对称衰减，另一种则从杂质位置呈指数衰减。我们的结果凸显了局域微扰如何在单个本征态层面上诱导非平凡的局域化行为，而不意味着底层电子系统发生全局局域化转变。

I. 引言

量子相变（QPT）是指多体系统的基态在零温下仅由量子涨落驱动而发生的突变。这类转变为理解不同物理系统中的各种量子现象提供了基础框架。典型实例包括超冷原子中的超流体–莫特绝缘体转变[1]，，这一转变已成为量子模拟的典范平台[2]，，以及腔光磁系统中的相关研究 [3]。量子相变也是自旋系统临界行为的基础，例如铁磁–顺磁转变[4, 5], 以及金属–绝缘体转变的各种表现形式[6, 7]。

安德森局域化是一种基本现象，其中非关联无序会使电子波函数局限在材料的空间区域内，而非延展至整个材料[8–12]。本征态的这种局域化会产生深远影响，其中最显著的是输运受到抑制；这一现象已在多种平台中得到观测，包括无序固体 [13, 14]、光纤[15], 以及光学晶格中的超冷原子 [16, 17]。在低维非相互作用紧束缚系统中，即使是微弱无序，也会通过引发单粒子态局域化而显著影响输运性质 [9, 18–20]。相比之下，三维系统可能出现迁移率边，将延展本征态与局域本征态分隔开来，且需要达到有限的临界无序强度[17–25]。除了平衡态性质之外，无序与量子动力学之间的相互作用还会产生丰富的非平衡现象，包括动力学相变，这些相变体现在量子态及其关联的时间演化中[26–30]。

一个密切相关但概念上有所区别的问题是杂质诱导局域化：局域微扰能够定性地改变特定本征态的性质，却不会引发宿主系统的全局局域化转变。在此背景下，单杂质诱导的量子转变指的是这样一个临界点：随着系统参数变化，杂质产生的束缚态的空间特征发生定性改变。杂质模型为此类研究提供了典型框架，其中包括安德森杂质模型 [31–38]。在这些系统中，当杂质势超过某个临界强度时，可能出现局域化的束缚态，而晶格中其余体态仍保持扩展。近期，将单杂质问题拓展至非厄米晶格的研究，例如非互易 Su–Schrieffer–Heeger[39] 和 Hatano–Nelson 模型 [40]，，揭示了系统对边界条件的高度敏感性，以及随系统尺寸变化的非厄米趋肤效应。然而，据我们所知，在周期性边界条件下，单个杂质在非相互作用厄米晶格系统中诱发杂质束缚态局域化转变所起的作用，尚未得到系统探索。

本文研究了单个位点杂质势对具有周期性边界条件的非相互作用晶格模型的影响。我们的分析聚焦于杂质产生的本征态性质，而非系统的全局局域化转变。我们利用逆参与率（IPR）以及相应本征函数的空间结构来刻画杂质诱导态。我们

* m.sajid@kust.edu.pk

发现，当杂质束缚态扩展至整个晶格时，杂质位点逆参与比按 $\mathcal{O}(1/L)$ 标度变化；而在该态变得强烈局域于杂质周围的区域，杂质位点逆参与比则趋近于 1，其中 L 表示系统尺寸。相应地，本征态分布呈现出明显的变化：从均匀的空间分布转变为以杂质位置为中心的指数局域行为。对于厄米系统，局域化的杂质态表现出对称的空间分布，与底层晶格对称性相符。

本文的结构如下。第II 节介绍含有单个杂质的紧束缚模型，并讨论逆参与率这一用于表征本征态局域化的诊断工具。第III 节详细分析周期性边界条件下束缚态的杂质诱导局域化转变。最后，我们在末节总结结论并展望未来。

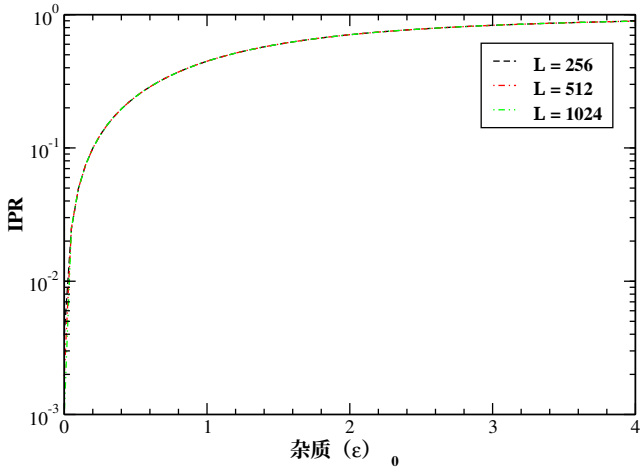


图1：（在线彩色）一维单杂质模型中束缚态的逆参与率随杂质强度 ε_0 的变化。在存在无穷小杂质强度时，本征态是局域化的，对应于与系统尺寸无关的逆参与率

II. 模型

我们研究的模型由周期性边界条件（PBC）下含有单点杂质的非相互作用无自旋电子组成。周期性几何结构消除了边界诱导的局域化效应，从而能够单独考察杂质对单个本征态性质的影响。然而，这一选择并不会改变杂质诱导局域化行为的定性特征。因此，结果的物理解释不受边界条件选择的影响。一维（1D）晶格上的哈密顿量具有一般形式 [39, 40]，

$$\hat{\mathcal{H}} = t\sum_{n=0}^{L}(c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + \varepsilon_0 c_0^\dagger c_0, \qquad (1)$$

其中， ε_0 表示尺寸为 L 的晶格中第 0 个位点处电子的单点能量振幅， t 表示最近邻位点之间的转移能（跃迁积分）。转移积分设为单位值$t = 1$，所有能量尺度均以 t为单位。为刻画杂质诱导的束缚态（归一化后）$|\psi_{i,\ n}\rangle$ 的局域化或扩展性质，我们计算其逆参与率（IPR$_n$），

$$\mathrm{IPR}_n = \sum_{i=1}^{L} |\Psi_{i,n}|^4 . \qquad (2)$$

IPR$_n$ 揭示了$|\psi_{i,\ n}\rangle$的输运特性。其系统尺寸标度在不同相中遵循不同的幂律：

- 扩展相：IPR$_n \propto L^\alpha$ 与 $\alpha \approx -1$，反映了波函数的离域特性，即波函数延伸至整个晶格。在此相中，IPR 在热力学极限下趋于 0。

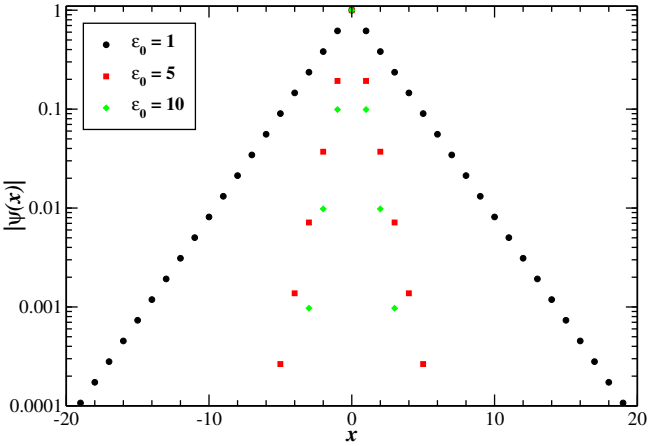


图2：（在线彩色）对数线性标度：不同杂质振幅下，一维模型的杂质诱导束缚本征态分布。这些分布的偏度为零，对应于对称的本征态分布。

- 局域相：IPR$_n \propto L^\alpha$ 与 $\alpha = 0$，这是波函数呈指数衰减并局限于有限区域的特征。在局域相中，IPR 在热力学极限下趋于 1。

- 临界相：逆参与率$_n \propto L^\alpha$，其中 $\alpha \approx 0$。该相中的逆参与率小于 1，但远大于零。波函数既非完全扩展态，也非指数局域态。

因此，指数 α 充当标度维数，用于区分金属态、绝缘态和临界区。

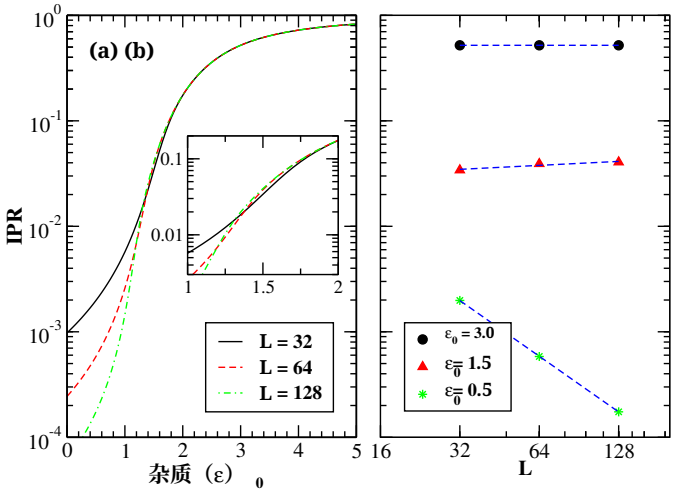


图3：（彩色在线）(a) 二维单杂质模型中，束缚态的逆参与率（对数线性标度）随杂质强度 ε_0 在对数线性标度下的变化。通过调节杂质强度，束缚态的性质从扩展变为局域化。I

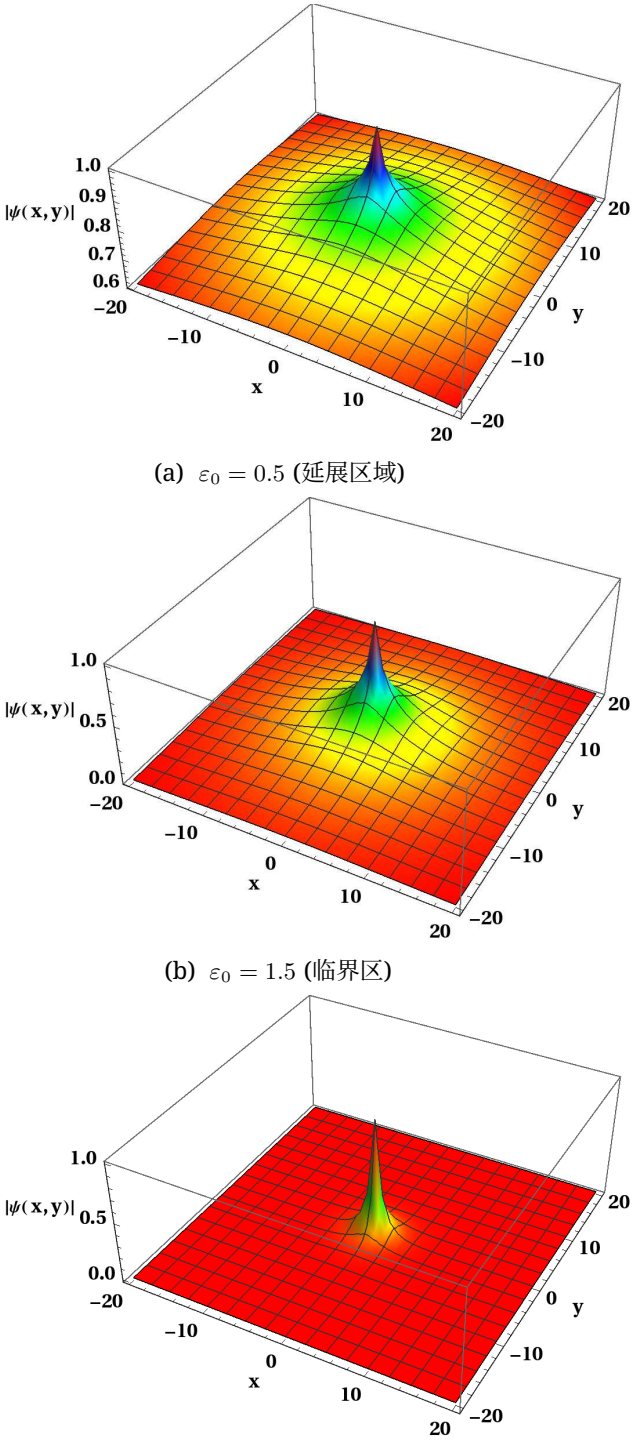
n the inset, 我们 en large t he IPR regi on aroun d $\varepsilon_0 = 1 - 2$ 以阐明有限尺寸临界区。(b) 固定杂质强度下，束缚态的逆参与率（双对数坐标）随系统尺寸 L 的变化。数据与 IPR $\propto L^{\alpha}$高度吻合。对于 $\varepsilon_0 = 3.0$ ($\alpha = 0$)，逆参与率约等于 1，且与 L 无关，对于 $\varepsilon_0 = 1.5$，随 L 呈代数变化 $(\alpha \approx 0)$，并且对于 $\varepsilon_0 = 0.5$ ($\alpha < 0$)，呈衰减趋势，对应于局域化的、临界的和扩展态行为。

III. 杂质诱导局域化

A. 一维杂质晶格

主要研究目标是在周期性边界条件下晶格系统中的单杂质问题。在不存在杂质势（$\varepsilon_0 = 0$）时，哈密顿量的本征态$\mathcal{H}_{1\mathrm{D}}$是具有本征能量的平面波， $E_{1\mathrm{D}} = 2t$ 余弦 k。图1 展示了不同系统尺寸下束缚态的逆参与率随杂质振幅的变化关系。逆参与率的典型值随着杂质强度的增加而单调增大，并趋近于1，这体现了系统的局域特性。此外，在无穷小杂质强度下，逆参与率表现出与系统尺寸无关的特性。这反映出在一维晶格中，零杂质强度处存在单格点局域化转变。在存在单杂质势的情况下，哈密顿量的本征态可以通过格林函数获得：

$$\psi(x) = \frac{\varepsilon_0 \delta_{x,0}}{E_{1\mathrm{D}} - \mathcal{H}_{1\mathrm{D}}} \psi(0), \qquad (3)$$



(a) $\varepsilon_0 = 0.5$ (延展区域)

(b) $\varepsilon_0 = 1.5$ (临界区)

(c) $\varepsilon_0 = 3$ (局域化区域)

图4：二维杂质模型中杂质诱导的束缚态的空间分布，其杂质振幅分别为 (a) $\varepsilon_0 = 0.5$、(b) $\varepsilon_0 = 1.5$ 和 (c) $\varepsilon_0 = 3$。这些分布关于 (x,y)=(0,0) 对称。

对 $\psi(x)$ 进行傅里叶变换，可得，

$$\psi(k)=\frac{\varepsilon_0\psi(0)}{E_{1\mathrm{D}}-2t\cos k}, \tag{4}$$

通过对 $\psi(k)$ 进行傅里叶逆变换，变回位置空间，得到：

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dk\frac{e^{ikx}\varepsilon_0\psi(0)}{E_{1\mathrm{D}}-2t\cos k}, \tag{5}$$

在杂质嵌入位点（$x=0$）处，可以得到束缚态的本征能量：

$$E_{1\mathrm{D}}=\pm\sqrt{4t^2+\varepsilon_0^2}, \tag{6}$$

相应的本征态为

$$\psi(x)=\frac{\varepsilon_0\psi(0)}{E_{1\mathrm{D}}-2t}\,{}_3\tilde{F}_2(\frac{1}{2},1,1;1-x,1+x;\frac{4t}{E_{1\mathrm{D}}-2t}), \tag{7}$$

其中 ${}_3F_2(z)$ 是一种正则化广义超几何函数。图2展示了一维单点嵌入模型的本征态分布。本征态分布随其与杂质位置之间距离的增加而呈指数衰减。杂质强度越大，衰减越明显。此外，本征态分布关于零对称，可通过计算平均距离 $\langle n\rangle=\sum_n\langle\psi|n|\psi\rangle$来表征。平均距离为零对应于对称的本征态分布。本征态分布还揭示了相应位点处量子态的局域化或扩展特性。当杂质振幅较大时，可以在杂质增强位点处得到尖锐、峰值明显的本征态分布。文献[39], 中，作者研究了一维非厄米单杂质晶格的本征态分布。研究发现，正或负非厄米性可能分别导致右偏分布（正偏度）或左偏分布（负偏度）。

B. 二维杂质晶格

本节重点研究周期性边界条件下二维晶格系统中的单杂质问题。在无杂质（ε_0=0）时，系统哈密顿量 $\mathcal{H}_{2\mathrm{D}}$ 是平移不变的。因此，其本征态为平面波，相应能量遵循标准紧束缚色散关系 $E_{2\mathrm{D}}$ =2t（cos k_x +cos k_y）。这些本征态是平移不变的，其概率振幅延展于所有晶格位点，反映了该系统的金属性。然而，在系统中引入单杂质势会产生束缚态，如图 3所示。对于 $\varepsilon_0\le 1.2$，杂质诱导态的逆参与率依赖于尺寸，并随 L^α 趋近于零，且

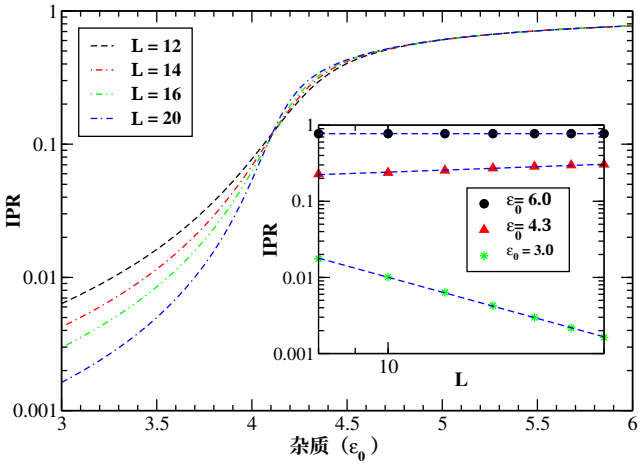


图5：（在线彩色）三维中，杂质诱导态的逆参与率随杂质强度 ε_0的变化。插图显示了在固定杂质强度下，束缚态的逆参与率随线性系统尺寸 L 的变化（双对数坐标）。拟合结果（蓝色虚线）IPR $\approx L^{\alpha}$揭示了不同的标度指数：对于 $\varepsilon_0=6.0$， $\alpha=0$ 中

局域化区域；对于 $\varepsilon_0=1.5$， $\alpha\approx 0$ 处于临界区；对于 $\varepsilon_0=0.5$， $\alpha<0$ 处于延展区域。

$\alpha<0$。另一方面，在临界区（$1.2\lessapprox\varepsilon_0\lessapprox 1.6$）中，逆参与率按 L^α 标度， $\alpha\approx 0$，而在局域化区域中与系统尺寸无关（$\alpha=0$），其中$\varepsilon_0\gtrsim 1.6$。存在单杂质势时，二维哈密顿量的本征态可通过格林函数得到：

$$\psi(x,y)=\frac{\varepsilon_0\delta_{x,0}\delta_{y,0}}{E_{2\mathrm{D}}-\mathcal{H}_{2\mathrm{D}}}\psi(0,0), \tag{8}$$

与本征态$\psi(x,y)$对应的准动量可通过对 $\psi(x,y)$进行傅里叶变换得到，

$$\psi(k_x,k_y)=\int_{\Omega}dxdy\psi(x,y)e^{-i(k_xx+k_yy)},$$

我们得到，

$$\psi(k_x,k_y)=\frac{\varepsilon_0\psi(0,0)}{E_{2\mathrm{D}}-2t(\cos k_x+\cos k_y)}, \tag{9}$$

对 $\psi(k_x,k_y)$进行傅里叶逆变换，即可变换回位置空间，得到 [41],

$$\psi(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dk_xdk_y\frac{\varepsilon_0\psi(0,0)e^{i(k_xx+k_yy)}}{E_{2\mathrm{D}}-2t(\cos k_x+\cos k_y)}, \tag{10}$$

在杂质嵌入位点（$x=y=0$），表达式 [式（10）] 变为

$$\frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_xdk_y}{E_{2\mathrm{D}}-4t\cos\frac{k_x+k_y}{2}\cos\frac{k_x-k_y}{2}}=1, \tag{11}$$

式（11）可表示为

$$\frac{\varepsilon_0}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{d\alpha d\beta}{E_{2D}-4t\cos\alpha\cos\beta}=1, \tag{12}$$

with

$$\alpha=\frac{k_x+k_y}{2},\qquad \beta=\frac{k_x-k_y}{2},$$

表达式 [式（12）] 可简化为以下形式

$$\frac{K\left(\frac{16t^2}{16t^2-E_{2D}^2}\right)}{\sqrt{E_{2D}^2-16t^2}}+\frac{K\left(\frac{16t^2}{E_{2D}^2}\right)}{E_{2D}}=\frac{\pi}{\varepsilon_0},\qquad |E_{2D}|<4t. \tag{13}$$

其中 K（x）表示第一类椭圆积分。束缚态的本征能量可通过数值求解式（13）得到能量 E_{2D}。单杂质系统相应的本征态具有如下形式，

$$\psi(x,y)=\frac{\varepsilon_0\psi(0,0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dk_x\frac{e^{ik_x x}}{E_{2D}-4t\sin^2\frac{k_x}{2}}{}_3\tilde{F}_2\left(\frac{1}{2},1,1;1-y,1+y;-\frac{4t}{E_{2D}-4t\sin^2\frac{k_x}{2}}\right). \tag{14}$$

该积分（式（14））可数值求解，从而得到二维杂质系统的本征态，如图 4所示。可以清楚地看到，在单点杂质影响下，系统的本征态分布如预期那样呈指数衰减，对应情形为（a） $\varepsilon_0=0.5$，（b） $\varepsilon_0=1.5$，以及（c）$\varepsilon_0=3$，分别对应于单点杂质束缚态的延展区域、临界区域和局域化区域。本征态分布随远离杂质位置的格点距离对称衰减。需要指出的是，在系统中引入非厄米性可能会引起本征态的非对称分布。在延展区域，杂质诱导态分布于所有晶格位点，而在局域化区域则仅分布于少数晶格位点，如图 4 （a）和图 4 （c）所示。这表明本征态分布也可表征束缚态的局域化-离域化转变。

C. 三维杂质晶格

接下来考虑在保持周期性边界条件的情况下，将单个杂质嵌入三维非相互作用晶格模型。三维系统哈密顿量的本征态 $\mathcal{H}_{3D}$ 在没有杂质时为平面波，其对应的本征能量为， $E_{3D}=-2t(\cos k_x+\cos k_y+\cos k_z)$。系统哈密顿量的所有本征态均具有平移不变性，反映出该系统的金属性。引入单点杂质后，平移不变性被破坏，杂质诱导态会在临界单杂质势处发生局域化—离域化转变，如图5所示。值得注意的是，在延展区域（杂质强度 L^{α}）中，逆参与率趋于零，且 $\alpha<0$。另一方面，在临界区中，逆参与率随 $\varepsilon_0\leq 4.1$增大而增大，且 L^{α} 随 $\alpha\approx 0$变化

对于 $4.1\lessapprox\varepsilon_0\lessapprox 4.6$。当 $\varepsilon_0\gtrapprox 4.6$ 时，杂质态呈现与系统尺寸无关的局域行为，逆参与率为≈ 1。

存在单杂质势时，三维哈密顿量的本征态分布可通过格林函数获得：

$$\psi(x,y,z)=\frac{\varepsilon_0\delta_{x,0}\delta_{y,0}\delta_{z,0}}{E_{3D}-\mathcal{H}_{3D}}\psi(0,0,0), \tag{15}$$

对 $\psi(x,y,z)$ 进行傅里叶变换，即可得到与本征态 $\psi(x,y,z)$ 对应的准动量：

$$\psi(k_x,k_y,k_z)=\int_{\Omega}dxdydz\psi(x,y,z)e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)}.$$

积分得到以下简化表达式：

$$\psi(k_x,k_y,k_z)=\frac{\varepsilon_0\psi(0,0,0)}{E_{3D}-2t(\cos k_x+\cos k_y+\cos k_z)}, \tag{16}$$

对 $\psi(k_x,k_y,k_z)$ 进行傅里叶逆变换，变换回位置空间后得到 [42],

$$\psi(x,y,z)=\varepsilon_0\psi(0,0,0)\mathcal{I}. \tag{17}$$

with

$$\mathcal{I}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}dk_x dk_y dk_z}{E_{3D}-2t(\cos k_x+\cos k_y+\cos k_z)}. \tag{18}$$

可解释为立方晶格的晶格格林函数的傅里叶变换。对于 $x=y=z=0$，该积分化简为原点处的态密度或局域格林函数。为了求出本征能量

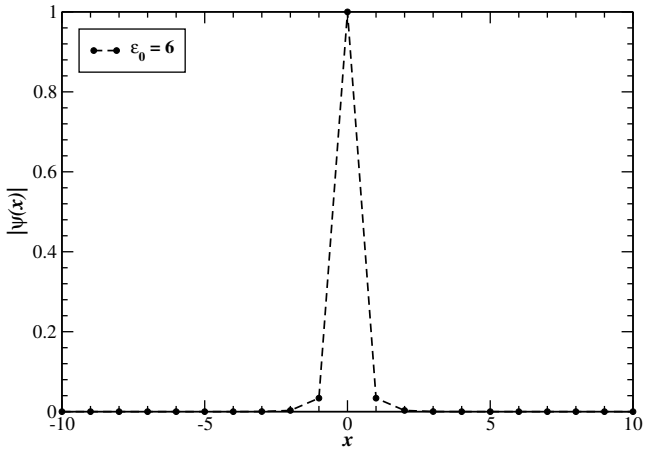


图6：（彩色在线）杂质诱导量子态在三维立方晶格模型中的空间分布。本征态分布关于$x=0$对称，并呈指数局域化。

束缚态的本征能量，我们需要在杂质嵌入位点 (17) 处求解表达式$x=y=z=0$。该表达式为：

$$\mathcal{I}=\frac{1}{\varepsilon_0} \tag{19}$$

对于 $|E_{3D}|<6$，积分发散（由于分母中的极点），因此 $\mathcal{I}$ 并非有限，且式（19）无解。类似地，在带边（$|E_{3D}|=6$）处，积分对数发散。因此，在带边处不存在有限解。对于 $|E_{3D}|>6$，格林函数为实值，并随 E_{3D}单调递减，且该积分可用完全第一类椭圆积分，

$$\frac{1}{\sqrt{E_{3D}^2-12}}\mathbf{K}\left(\frac{4}{E_{3D}+\sqrt{E_{3D}^2-12}}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

其中$\mathbf{K}(q)$是第 1st类完全椭圆函数，定义为 [43]

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(q)&=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-q^2\sin^2\theta}}\\&=\frac{\pi}{2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;q^2\right),\end{aligned} \tag{21}$$

with

$$q=\frac{4}{E_{3D}+\sqrt{E_{3D}^2-12}}. \tag{22}$$

表达式 [式（21）] 也可以写成

$$\mathbf{K}(q)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\right)^2 q^{2n}, \tag{23}$$

利用如下恒等式

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)\Gamma(\gamma)}{n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\gamma)}\chi^n, \tag{24}$$

其中 $\Gamma(s)$ 为伽马函数，且 $(\frac{1}{2})_n=\Gamma(n+\frac{1}{2})/\Gamma(\frac{1}{2})$。式（20）中给出的表达式可通过数值求解来计算本征能量 E_{3D}（束缚态的）。为了得到单杂质系统的本征态，我们首先将式（18）的分母表示为拉普拉斯变换。相应方程的辅助积分表示为

$$\psi(x,y,z)=\frac{\varepsilon_0\psi(0,0,0)}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}e^{-\tau(E_{3D}-2(\cos k_x+\cos k_y+\cos k_z))}dk_xdk_ydk_zd\tau, \tag{25}$$

我们所引用的恒等式为：

$$\frac{1}{\beta}=\int_0^{\infty}e^{-\tau\beta}d\tau,\quad \mathrm{Re}[\beta]>0. \tag{26}$$

该表达式 [式（25）] 可通过用第一类修正贝塞尔函数表示来进一步简化，如下所示（类似的推导可见参考文献[44, 45]），

$$\psi(x,y,z)=\varepsilon_0\psi(0,0,0)\int_0^{\infty}e^{-\tau E_{3D}}I_x(2\tau)I_y(2\tau)I_z(2\tau)d\tau, \tag{27}$$

其中

$$I_s(2\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik_ss+2\tau\cos k_s}dk_s;\quad s\in(x,y,z), \tag{28}$$

是第一类修正贝塞尔函数。该

三维系统的本征态可通过求解式（27）中给出的表达式数值获得。关键在于，晶格系统中本征态的空间分布为理解杂质态的性质提供了关键洞见——它是延展的（金属态）还是局域化的（绝缘态）。将单个杂质引入原本洁净的晶格会改变系统的行为，诱导出空间局域化的束缚态，并破坏平移对称性。束缚态的分布如图6所示。本征态在杂质位置周围呈现镜面对称的空间衰减 $x = 0$，反映了晶格的各向同性。

IV. 结论与展望

在本研究中，我们考察了非相互作用晶格系统在周期性边界条件下的一维、二维和三维空间中的杂质诱导局域化。通过分析逆参与率和本征态的空间结构，我们证明，单个位点杂质能够使杂质束缚态的空间特征发生明显的交叉转变：当杂质强度超过某个临界值时，杂质束缚态会从扩展态演变为强局域态。虽然这种局域化在一维中很容易发生，但在更高维度中则需要更大的杂质势，这反映了晶格连通性的增加。值得注意的是，在所有情况下，体态本征态仍保持扩展态，证实所观察到的转变并非全局安德森局域化。这些结果表明，杂质诱导局域化是一种稳健且具有维度依赖性的现象，并为理解局域扰动如何影响晶格系统中的本征态性质提供了统一框架。我们的发现为未来研究高维系统中的相互作用、多个杂质和动力学效应开辟了新的方向。

---

[1] M. Greiner、O. Mandel、T. Esslinger、T. W. H¨ansch 和 I. Bloch，《超冷原子气体中从超流体到莫特绝缘体的量子相变》，《自然》415，39（2002年）。[2] I. Bloch 和 M. Greiner，《从超流体到莫特绝缘体的转变与实验量子模拟的诞生》，Nature Reviews Physics 4，739（2022年）。[3] Q. Cao、L. Tan 和 W.-M. Liu，《腔光-磁振子系统中的超流体–莫特绝缘体量子相变》，Physical Review A 105，043705（2022年）。[4] K. L. Zhang 和 Z. Song，《非零温度下量子伊辛链中的量子相变》，Physical Review Letters 126，116401（2021年）。[5] T. Grover 和 T. Senthil，《金属中从反铁磁体到自旋液体的量子相变》，Physical Review B 81，205102（2010年）。[6] S. Paschen 和 Q. Si，《强关联驱动的量子相》，Nature Reviews Physics 3，9（2021年）。[7] B. Zheng、J. Wang、Q. Wang、X. Su、T. Huang、S. Li、F. Wang、Y. Shi 和 X. Wang，《黑磷中激子莫特金属-绝缘体转变的量子临界性》，Nature Communications 13，7797（2022年）。[8] P. W. Anderson，《某些无序晶格中不存在扩散》，Physical Review 109，1492（1958年）。[9] D. J. Thouless，*Ill-Condensed Matter*，*Les Houches Session XXXI*，由 R. M. R. Balian 和 G. Toulouse 编辑（North-Holland，纽约，1979年）。[10] J. P. S. Pires、N. A. Khan、J. M. V. P. Lopes 和 J. M. B. L. dos Santos，《de Moura–Lyra模型中的全局离域转变》，Physical Review B **99**，205148（2019年）。[11] N. A. Khan 和 S. T. Amin，《用核多项式方法探测带中心反常》，《物理学文摘》**96**，045812（2021年）。[12] E. Economou，*Green's Functions in Quantum Physics*，《施普林格固态科学丛书》（施普林格柏林海德堡，2006年）。[13] M. Filoche、M. Piccardo、Y.-R. Wu、C.-K. Li、C. Weis-buch 和 S. Mayboroda，《半导体无序的局域化景观理论：I. 理论与建模》，Physical Review B**95**, 144204 (2017年).

[14] P. S. Pirola，《掺杂半导体中的安德森局域化》，Physical Review B 107，174204（2023年）。[15] A. Mafi、J. Ballato、K. W. Koch 和 A. Schulz-gen，《用于图像传输的无序安德森局域化光纤——综述》，《光波技术杂志》37，5652（2019年）。[16] D. H. White、T. A. Haase、D. J. Brown、M. D. Hoogerland、M. S. Najafabadi、J. L. Helm、C. Gies、D. Schumayer 和 D. A. Hutchinson，《超冷原子二维安德森局域化的观测》，《自然·通讯》11，4942（2020年）。[17] F. Jendrzejewski、A. Bernard、K. Mueller、P. Cheinet、V. Josse、M. Piraud、L. Pezze、L. Sanchez-Palencia、A. Aspect 和 P. Bouyer，《光学无序势中超冷原子的三维局域化》，《自然·物理》8，398（2012年）。[18] N. A. Khan、J. M. V. P. Lopes、J. P. S. Pires 和 J. M. B. L. dos Santos，《具有关联无序的一维系统的谱函数》，《物理学杂志：凝聚态》31，175501（2019年）。[19] N. A. Khan、J. P. S. Pires、J. M. V. P. Lopes 和 J. M. B. L. dos Santos，《利用核多项式方法探究 de Moura-Lyra 模型中的全局离域化转变》，《欧洲物理学杂志网络会议论文集》233，05011（2020年）。[20] M. T. Agne、F. R. Lange、J. P. Male、K. S. Siegert、H. Volker、C. Poltorak、A. Poitz、T. Siegrist、S. Maier、G. J. Snyder 和 M. Wuttig，《用于双维热电材料优化的无序诱导类安德森局域化》，Matter 4，2970（2021年）。[21] G. Roati、C. D'Errico、L. Fallani、M. Fattori、C. Fort、M. Zaccanti、G. Modugno、M. Modugno 和 M. Inguscio，《非相互作用玻色-爱因斯坦凝聚体的安德森局域化》，《自然》453，895（2008年）。[22] C. A. Muller 和 D. Delande，*Disorder and interference: localization phenomena: Ultracold Gases and Quantum Information*，《莱乌什暑期学校第 XCI 期》），编者 C Miniatura 等（牛津：牛津大学出版社），2010年）。

[23]A. Lagendijk、B. V. Tiggelen 和 D. S. Wiersma，《安德森局域化五十年》，《今日物理》62，24（2009年）。[24] N. A. Khan、S. Muhammad 和 M. Sajid，《关联安德森模型中的单参数标度》，《物理学 E》139，115150（2022年）。[25] N. A. Khan、M. Jan 和 G. Xianlong，《无序电子系统中的纠缠轮廓》，《物理学 E》145，115511（2023年）。[26] N. A. Khan、P. Wang、M. Jan 和 G. Xianlong，《异常关联诱导的动力学相变》，《科学报告》13，9470（2023年）。[27] S. Ye、Z. Zhou、N. A. Khan 和 G. Xianlong，《准晶体中依赖能量的动力学量子相变》，Physical Review A 109，043319（2024年）。[28] N. A. Khan、S. Ye、Z. Zhou、S. Cheng 和 G. Xianlong，《洛施密特回波的切比雪夫多项式方法：在二维准晶体淬火动力学中的应用》，Physical Review E 109，065311（2024年）。[29] N. A. Khan，《保真度易感性对动力学量子临界性的探测》，《混沌、孤子与分形》183，114975（2024年）。[30] S. Ye、N. A. Khan 和 M. Sajid，《厘清静态与动力学相变之间的联系》，Physical Review A 111，042208（2025年）。[31] N. Ng、G. Park、A. J. Millis、G. K.-L. Chan 和 D. R. Reichman，《通过张量网络影响泛函实现安德森杂质模型的实时演化》，Physical Review B 107，125103（2023年）。[32] F. Roccati，《非厄米皮肤效应作为一个杂质问题》，Physical Review A 104，022215（2021年）。[33] M. Fabrizio，《近藤效应与安德森杂质模型的物理学》（施普林格国际出版，查姆，2022年）。[34] B. Davies、S. Barandun、E. O. Hiltunen、R. V. Craster 和 H. Ammari，《非厄米系统中缺陷诱导局域化转变的双尺度有效模型》，Physical Review B 111, 035109 (2025年)。[35] P. Molignini、O. Arandes 和 E. J. Bergholtz，《含单个非厄米杂质的无序系统中的反常皮肤效应》，Phys. Rev. Res. 5, 033058 (2023年)。[36] J. J. Wang、Y. Zhang、X. Zhang 和 X. X. Yi，《基于含杂质非厄米拓扑系统的多种物理量传感器》，Phys. Rev. Res. 7, 033133 (2025年)。[37] B. Het´enyi 和 B. D´ora，《紧束缚模型中非厄米杂质周围的局域态与皮肤效应》，Phys. Rev. B 112, 075123 (2025年)。[38] N. G. Leumer 和 D. Bercioux，《烟中–纳尔逊模型中的杂质诱导反向皮肤效应与线性模》，APL Quantum 2, 036105 (2025年)。[39] Y. Liu 和 S. Chen，《利用杂质模诊断非互易拓扑晶格的体相相图》，Phys. Rev. B 102, 075404 (2020年)。[40] Y. Liu、Y. Zeng、L. Li 和 S. Chen，《非互易晶格中单杂质问题的精确解：杂质诱导的尺寸依赖非厄米皮肤效应》，Phys. Rev. B 104, 085401 (2021年)。[41] G. G. Eugene Kogan，《若干二维晶格的格林函数与态密度》，《石墨烯》10, 1 (2024年)。[42] M. Inoue，《面心立方晶格的晶格格林函数》，J. Math. Phys. 15, 704 (1974)。[43] T. Morita 和 T. Horiguchi，《用完全椭圆积分表示的立方晶格格林函数》，J. Math. Phys. 12, 981 (1971)。[44] R. Delves 和 G. Joyce，《利用傅里叶生成函数与李群恒等式推导简单立方晶格格林函数的精确乘积形式》，J. Phys. A: Math. Theor. 40, 8329 (2007)。[45] G. S. Joyce，《关于简单立方晶格格林函数》，Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. 273, 583 (1973)。