arXiv:2603.01504v1 [math.NA] 2 Mar 2026

用于麦克斯韦特征值问题的扩展拉格朗日有限元法

韩佳宇

Abstract. 我们构造了一个扩展拉格朗日有限元空间，用于求解 $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ 中的麦克斯韦方程及其特征值问题。该空间是向量值 $p-$ 阶拉格朗日有限元空间（$p \geq 1$）与 $p+1-$ 阶拉格朗日有限元空间的梯度之和。在三维中，两种最低阶方法所需的自由度略少于同阶第二族边元方法。我们构造了一个 Cl´ 元插值算子，以证明该有限元空间的离散紧致性，以及新方法求解麦克斯韦方程和其特征值问题的收敛性。对于扩展线性拉格朗日元方法，我们设计了一种平均型旋度恢复方法，以获得具有超收敛性的数值解。在数值部分，我们验证了两种最低阶方法的最优收敛阶，讨论了数值特征值的上界性质，并通过平均型旋度恢复方法考察了其下界性质。

关键词： 麦克斯韦特征值问题、拉格朗日有限元、恢复方法、特征值上界/下界。

1. Introduction

众所周知，N´éd´elec 边元能够以典范离散形式很好地逼近麦克斯韦特征值问题。关于这一主题的详尽综述，请参阅 [2, 第 20] 节。然而，在一般网格上直接使用拉格朗日有限元求解麦克斯韦特征值问题会产生错误的解（例如见 [2, 3]）。获得稳定离散格式的两种基本方法是引入罚项或正则化项 [4–7]，以及采用特殊网格 [8–12]。Hu 等人 [13,14]的研究在不同网格上采用部分不连续拉格朗日基构造了有限元方法。Wong 和 Cendes [8] 采用拉格朗日单元方法，在 $\mathbb{R}^2$ 中的 Powell-Sabin [9] 网格或$\mathbb{R}^3$中的 Worsey-Farin 网格 [10] 上逼近麦克斯韦特征值。近期，Boffi 等人 [11, 12] 从理论上证明了这一数值事实。

为施加散度自由约束，麦克斯韦特征值问题可以离散化为混合形式（参见 [11, 12, 15–19]）。然而，采用拉格朗日有限元空间的典范混合形式并不稳定。本研究旨在提出一种扩展拉格朗日单元法，以弥补这一不足。为此，我们将向量值 p 阶拉格朗日元空间 $\boldsymbol{L}_{h,\,0}$与其 $p+1$ 阶空间 $U_h(p \geq 1)$ 的梯度相结合，对其进行扩展。低阶情形下的扩展有限元方法所需自由度略少于第二族边元方法。为完成误差分析，我们证明了扩展空间 $\boldsymbol{L}_{h,\,0} + \nabla U_h$ 的离散紧致性以及离散解算子的逐点收敛性。随后，利用 Babu˘ska- Osborn 理论 [20]，得到了离散特征对的最优收敛阶。

此外，我们为扩展线性拉格朗日元方法提出了一种平均型旋度恢复格式。我们可以验证，当麦克斯韦特征函数光滑时，

本研究部分得到国家自然科学基金委员会资助（资助项目编号：12361084 和 12001130）。

数值特征值从上方逼近精确特征值（见第 5.2 节）。因此，该格式可用于获得精确特征值的超逼近下界。关于麦克斯韦特征值数值下界的其他研究，请参阅 [21]；关于其他相关早期工作，也请参阅 [22–25]。

据我们所知，所提出的方法似乎是首个在二维和三维的一般单纯形网格上，采用典范离散形式和拉格朗日元空间的有效工作。值得注意的是，采用拉格朗日元空间的有限元程序已在现有软件中得到充分应用。

本文安排如下。第2节介绍扩展拉格朗日元空间、典范离散公式及其等价的混合公式。第3节证明扩展拉格朗日元空间的离散紧致性，以及离散解算子的逐点收敛性。随后推导离散特征对的最优收敛阶。第4节为扩展线性拉格朗日元设计一种平均型旋度恢复格式。最后一节采用二维和三维中的两种最低阶方法，对理论结果进行数值验证。

2. Extended Lagrange element Discretization

我们考虑形状正则的仿射网格 $\mathcal{T}_h = \{K\}$，它们将单连通利普希茨区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2,3$)剖分为 $\mathbb{R}^d$中的三角形或四面体。本文的扩展拉格朗日有限元空间给出如下

$$\boldsymbol{V}_h = \boldsymbol{L}_{h,0} + \nabla U_h \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_h &= \{\boldsymbol{q}_h \in (H^1(\Omega))^d | \boldsymbol{q}_h|_K \in (P_p(K))^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\},\\
\boldsymbol{L}_{h,0} &= \{\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{L}_h | \boldsymbol{q}_h \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},\\
U_h &= \{q_h \in H_0^1(\Omega) | q_h|_K \in P_{p+1}(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad p \geq 1.
\end{aligned}$$

拉格朗日有限元空间$\boldsymbol{L}_{h,0}$ 提供分片 p次多项式的逼近性质，梯度空间 ∇U_h 提供切向连续性。

考虑　　麦克斯韦特征值问题：求$(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R} \times \boldsymbol{H}_0$(旋度,Ω)$\backslash\{0\}$，使得

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl}, \Omega). \tag{2.2}$$

我们引入空间

$$\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl}, \Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : \mathrm{curl}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ and } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

配备标准范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{curl}}$。其中， $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。麦克斯韦特征值问题也可以写成：求 $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R} \times \boldsymbol{H}_0$(curl, Ω)$\backslash\{0\}$和 $\rho \in H_0^1$(Ω)，使得

$$\begin{aligned}
(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}) + (\nabla\rho, \boldsymbol{v}) &= \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl}, \Omega),\\
(\boldsymbol{u}, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

因此，扩展拉格朗日有限元方法关于有限元空间$\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{H}_0$(旋度,Ω)是求 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_h\backslash\{0\}$ 以及非零的 $\lambda_h \in \mathbb{R}$，使得

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h) = \lambda_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \tag{2.4}$$

特征值问题(2.4)的一个等价离散形式如下：求$(\lambda_h, \boldsymbol{u}_h, \rho_h) \in \mathbb{R} \times \boldsymbol{V}_h \times U_h$，且 $\boldsymbol{u}_h \neq 0$ 使得

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h) + (\nabla\rho_h, \boldsymbol{v}_h) &= \lambda_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h,\\ (\boldsymbol{u}_h, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in U_h.\end{aligned} \tag{2.5}$$

显然，$\rho_h = 0$。

3. Error analysis

首先，我们构造一个 Cl´ément 插值算子 [26]，使其适用于 Ω 上的边界条件 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$。令 Δ_i 表示共享第 i 个节点的单元并集，$\frown\Delta_i$ 表示其满足线性变换 $\boldsymbol{x} = F_{\Delta_i}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = B_{\Delta_i}\widehat{\boldsymbol{x}} + b_{\Delta_i}$ 的参考单元。定义算子 $\widehat{\boldsymbol{R}}_i : L^1(\widehat{\Delta}_i) \to \boldsymbol{P}_k(\widehat{\Delta}_i)$，满足

$$\int_{\widehat{\Delta}_i} (\widehat{\boldsymbol{R}}_i\widehat{\boldsymbol{v}} - \widehat{\boldsymbol{v}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{p}} = 0, \quad \forall \widehat{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{P}_k(\widehat{\Delta}_i). \tag{3.1}$$

对于 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^1(\Omega)$，我们定义 $\Pi_h : \boldsymbol{L}^1(\Omega) \to \boldsymbol{L}_h$ 如下：

$$\Pi_h\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N_h} \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\theta_i \tag{3.2}$$

$\widehat{}$其中 $R_i\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{R}_i\widehat{\boldsymbol{v}}(\widehat{\boldsymbol{x}})$，$N_h =$维 $\boldsymbol{L}_h$ 且 θ_i 是网格 $\mathcal{T}_h$ 中第 i 个节点对应的拉格朗日基。

下文中，我们用 $\boldsymbol{W}^{s,q}(D)$ 表示有界利普希茨区域 D 上的标准索博列夫空间，其范数为 $\|\cdot\|_{s,q,D}$。令 $\boldsymbol{H}^s(D) := \boldsymbol{W}^{s,2}(D)$。本文中，符号 $x \lesssim y$ ($x \gtrsim y$) 表示 $x \leq Cy$ ($x \geq Cy$)，其中常数 C 与网格尺寸无关，且在不同位置可能取不同值。

设 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^s(\Delta_i)$，其中 $0 \leq m \leq s \leq p+1$。任取 $K \subset \Delta_i$。根据缩放论证和范数等价性

$$|\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}|_{m,K} \lesssim h_{\Delta_i}^{\frac{d}{2}-m} \inf_{\widehat{\boldsymbol{q}} \in \boldsymbol{P}_k(\widehat{K})} |(\widehat{\boldsymbol{R}}_i - I)(\widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{q}})|_{m,\widehat{\Delta}_i} \lesssim h_{\Delta_i}^{\frac{d}{2}-m} |\widehat{\boldsymbol{v}}|_{s,\widehat{\Delta}_i} \lesssim h_{\Delta_i}^{s-m} |\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i}. \tag{3.3}$$

假设有限元节点 a_{i_1}、$\cdots$、a_{i_α} 属于单元 K。由逆估计可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}_{i_1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}|_{m,K} &\leq \sum_{j=2}^{\alpha} \|\theta_{i_j}(\boldsymbol{R}_{i_1}\boldsymbol{v}(a_{i_j}) - \boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}(a_{i_j}))\|_{m,K}\\ &\lesssim h_{\Delta_i}^{\frac{d}{2}-m} \sum_{j=2}^{\alpha} \|\boldsymbol{R}_{i_1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}\|_{\infty,K}\\ &\lesssim h_{\Delta_i}^{-m} \sum_{j=2}^{\alpha} \|\boldsymbol{R}_{i_1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}\|_{0,K}\\ &\lesssim h_{\Delta_i}^{s-m} |\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i} \ by\ (3.3).\end{aligned} \tag{3.4}$$

结合上述两个估计可得

$$|\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}|_{m,K} \leq |\boldsymbol{R}_{i1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}|_{m,K} + |\boldsymbol{R}_{i1}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}|_{m,K} \lesssim h_{\Delta_i}^{s-m} |\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i}. \tag{3.5}$$

我们将拉格朗日基分为两类：内部节点基 $\{\theta_i\}_{i=1}^{N_{h0}}$ 和边界节点基 $\{\theta_i\}_{i=1+N_{h0}}^{N_h}$。对于 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^1(\Omega)$，我们将 $\Pi_{h,\,0}:\ \boldsymbol{L}^1(\Omega)\to\boldsymbol{L}_{h,\,0}$ 定义如下：

$$\Pi_{h,0}\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{N_{h0}}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}(a_i)\theta_i+\sum_{i=1+N_{h0}}^{N_h}J\boldsymbol{v}(a_i)\theta_i \tag{3.6}$$

其中

$$J\boldsymbol{v}(a_i)=\big(\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}(a_i)\cdot\boldsymbol{n}|_{f_1}(a_i)\big)\boldsymbol{n}|_{f_1}(a_i),\quad \boldsymbol{n}|_{f_1}(a_i)=\boldsymbol{n}|_{f_2}(a_i)\text{ and }a_i\in f_1\cap f_2\subset\partial\Omega, \tag{3.7a}$$

$$J\boldsymbol{v}(a_i)=0,\qquad\qquad \boldsymbol{n}|_{f_1}(a_i)\neq\boldsymbol{n}|_{f_2}(a_i)\text{ and }a_i\in f_1\cap f_2\subset\partial\Omega, \tag{3.7b}$$

$$J\boldsymbol{v}(a_i)=\big(\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}(a_i)\cdot\boldsymbol{n}|_{f}(a_i)\big)\boldsymbol{n}|_{f}(a_i),\qquad a_i\in f\subset\partial\Omega\text{ and }a_i\notin\text{ any other face}, \tag{3.7c}$$

f 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个面（或 $\mathbb{R}^2$中的一条边），而 f_1 和 f_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个不同面（或 $\mathbb{R}^2$中的边）。

引理 3.1. 对于 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^s(\Omega)\cap\boldsymbol{H}_0(\Omega$ 的旋度$)$，若满足 $p+1\geq s>1/2$，则有

$$|\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}|_{m,K}\lesssim h_{\Delta_i}^{s-m}|\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i}\ for\ 0\leq m\leq s. \tag{3.8}$$

证明. 设单元 K 满足$\overline{K}\cap\partial\Omega\neq\emptyset$，且 K 在 $\partial\Omega$上有 β 个节点 i_1、$\cdots$、i_β。对于任意整数 $j\in[1,\beta]$ 及 $a_{i_j}\in\partial\Omega\cap\partial K$，我们有

$$(\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v})(a_{i_j})=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{d-1}\boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}(a_{i_j})\cdot\boldsymbol{\tau}_k(a_{i_j})\boldsymbol{\tau}_k(a_{i_j}), & \text{if } a_{i_j}\text{ satisfies (3.7a) and (3.7c)}\\ \boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}(a_{i_j}), & \text{if } a_{i_j}\text{ satisfies (3.7b)}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_k(a_{i_j})$是节点$a_{i_j}$处的第 k个切向方向。选取 $\sigma>0$使得 $\sigma+1/2\leq s$。注意到 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0$，于是

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}|_{m,K}&\lesssim\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{d-1}||\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v}(a_{i_j})-\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}(a_{i_j})|\|\theta_{i_j}\|_{m,K}\\&\lesssim h_{\Delta_i}^{\frac12-m}\sum_{j=1}^{\beta}\|\boldsymbol{R}_{i_j}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\|_{0,\partial K\cap\partial\Omega}\\&\lesssim h_{\Delta_i}^{\frac d2-m}\sum_{j=1}^{\beta}\inf_{\boldsymbol{q}\in P_k(\widehat{K})}\|(\widehat{\boldsymbol{R}}_{i_j}-I)(\widehat{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{q})\|_{1/2+\sigma,\widehat{K}}\\&\lesssim h_{\Delta_i}^{s-m}|\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

结合（3.5）可得

$$|\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}|_{m,K}\leq|\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}|_{m,K}+|\boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\Pi}_h\boldsymbol{v}|_{m,K}\lesssim h_{\Delta_i}^{s-m}|\boldsymbol{v}|_{s,\Delta_i}. \tag{3.10}$$

□

霍奇算子是我们误差分析中的一个有用工具。对于 $\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$，它定义为 $H\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{H}_0$ (curl,Ω) 和 $\varrho\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{curl}H\boldsymbol{g},\mathrm{curl}\boldsymbol{v})+(\nabla\varrho,\boldsymbol{v})=(\mathrm{curl}\boldsymbol{g},\mathrm{curl}\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega),\\&(\nabla q,H\boldsymbol{g})=0,\quad\forall q\in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{3.11}$$

我们引入以下旋度协调元空间 [1]:

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_h := \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\Omega) | \boldsymbol{v}_h|_K \in (P_p(K))^d, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \supset \boldsymbol{V}_h, \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{X}_h := \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h | (\boldsymbol{v}_h, \nabla q) = 0, \forall q \in U_h\}, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{X} := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\Omega) | (\boldsymbol{v}, \nabla q) = 0, \forall q \in H_0^1(\Omega)\}, \tag{3.14}$$

设 λ^{Dir} 为狄利克雷拉普拉斯算子的最小奇异性指数，并满足

$$\left\{\psi \in H_0^1(\Omega) : \Delta\psi \in L^2(\Omega), \ \right\} \subset \bigcap_{s<\lambda^{Dir}} H^{1+s}(\Omega). \tag{3.15}$$

我们给出与上述有限元空间相对应的插值误差估计。

引理 3.2（ [15]中的定理 5.41）。设 $\boldsymbol{r}_h$ 为与$\sim\boldsymbol{V}_h$ 和 $\boldsymbol{v}$相关联的边元插值，旋度$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$($p \geq s > 1/2$)则

$$\|r_h\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl}} \lesssim h^s(\|\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega} + \|\mathrm{curl}\boldsymbol{v}\|_{s,\Omega}). \tag{3.16}$$

设 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{H}^{r_D}(\Omega)$对于 $r_D := \lambda^{Dir} - \varepsilon$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小且旋度$\boldsymbol{v}$ ∈旋度 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_h$时，则

$$\|r_h\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\| \lesssim h^{r_D}(\|\boldsymbol{v}\|_{r_D,\Omega} + \|\mathrm{curl}\boldsymbol{v}\|). \tag{3.17}$$

引理 3.3. 设 $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h$，则 $H\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}$，使得 旋度$\boldsymbol{v}_h$ =旋度$H\boldsymbol{v}_h$，且

$$\|H\boldsymbol{v}_h\|_{r_D,\Omega} \lesssim \|\mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h\|, \tag{3.18}$$

$$\|H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h\| \leq \|r_hH\boldsymbol{v}_h - H\boldsymbol{v}_h\|. \tag{3.19}$$

证明. 证明可参见 [15] 中的引理 7.6 或 [17]中的引理 4.5。正则性估计 (3.18) 归功于 $\boldsymbol{X} \subset H^{r_D}(\Omega)$（参见 [27]中的注 3.8）。根据 H的定义，我们有 旋度$H\boldsymbol{v}_h$ =旋度$\boldsymbol{v}_h$。由 r_h 的交换性质，我们有旋度$(r_hH\boldsymbol{v}_h)$ = 旋度$\boldsymbol{v}_h$。这意味着 $r_hH\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h \in \nabla U_h$（参见 [15]中的第 7.2.1 节）。根据 ($H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}$) =0, $\forall \boldsymbol{q} \in \nabla U_h$，我们有 $(H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h, r_hH\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h) = 0$。因此，利用引理 3.2，我们推得

$$\begin{aligned}(H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h, H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h) &= (H\boldsymbol{v}_h - r_hH\boldsymbol{v}_h, H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h)\\ &\lesssim \|H\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_h\|(h^{r_D}\|H\boldsymbol{v}_h\|_{r_0,\Omega} + h\|\mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h\|).\end{aligned}$$

然后，由上述估计和 (3.18) 可得估计 (3.19)。 □

为分析离散化 (2.5) 的收敛性，我们考虑带有散度自由约束的源问题：求 $T\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}_0$(curl, Ω) 和 $S\boldsymbol{f} \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}T\boldsymbol{f}, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}) + (\nabla S\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\Omega),\\ (\nabla q, T\boldsymbol{f}) = 0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{3.20}$$

其扩展拉格朗日有限元离散化为求解 $T_h\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}_h$ 和 $S_h\boldsymbol{f} \in U_h$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}T_h\boldsymbol{f}, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h) + (\nabla S_h\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h,\\ (\nabla q, \boldsymbol{T}_h\boldsymbol{f}) = 0, \quad \forall q \in U_h.\end{aligned} \tag{3.21}$$

容易验证，对于任意 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}$，都有 $S\boldsymbol{f} = S_h\boldsymbol{f} = 0$。令 $\boldsymbol{f} = 0$，则 $T_h\boldsymbol{f} \in \nabla U_h$，因此 $T_h\boldsymbol{f} = 0$。所以问题 (3.21) 有唯一解。

令 $\lambda^{Neu} \in (1/2,\ 1]$ 为 Neumann Laplace 算子的最小奇异性指数，并满足

$$\left\{\psi \in H^1(\Omega) : \Delta\psi \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0\ on\ \partial\Omega, \int_\Omega \psi dx = 0\right\} \subset \bigcap_{s<\lambda^{Neu}} H^{1+s}(\Omega). \tag{3.22}$$

引理 3.4（ [28]中的推论 6.4）。对于方程（3.20）中的 $T\boldsymbol{f}$，有如下分解:

$$T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}_0 + \nabla\phi\ with\ \boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{H}^{1+\lambda^{Neu}-\varepsilon_1}(\Omega)\ and\ \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+\lambda^{Dir}-\varepsilon_2}(\Omega) \tag{3.23}$$

其中 ε_1、$\varepsilon_2 > 0$ 可任意趋近于 0。

由于 $\mathrm{curl}^2 T\boldsymbol{f} = -\nabla S\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}$，由上述引理可得 $T\boldsymbol{f}$，$\mathrm{curl} T\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^r(\Omega)$，其中某个 $r \geq r_0$ 满足 r_0，其由下述定理给出。

定理 3.5。设 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$、$T\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^r(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{w}_0 \in \boldsymbol{H}^{r+1}(\Omega)$ 对于 $p \geq r \geq r_0 := \min(\lambda^{Dir}, \lambda^{Neu}) - \varepsilon$，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，则

$$\|(T - T_h)\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{curl}} \lesssim h^r + \inf_{v_h \in U_h} |S\boldsymbol{f} - v_h|_{1,\Omega}; \tag{3.24}$$

进一步假设 $T\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ 对于 $r \leq s \leq r_0 + r \leq r_0 + p$，且 $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 0$，则

$$\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\| \lesssim h^s. \tag{3.25}$$

证明。(3.20) 和 (3.21) 结合可得

$$(\mathrm{curl}(T - T_h)\boldsymbol{f}, \mathrm{curl}\boldsymbol{v}_h) + (\nabla(S - S_h)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h.$$

由此可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_h - T_h\boldsymbol{f}), \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_h - T_h\boldsymbol{f})) &= (\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_h - T\boldsymbol{f}), \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_h - T_h\boldsymbol{f})) \\ &\quad - (\nabla(S - S_h)\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h - T_h\boldsymbol{f}), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h.\end{aligned}$$

因此，由 X_h and $\boldsymbol{V}_h = \boldsymbol{X}_h \bigoplus \nabla U_h$ 中的 Poinc´are 不等式可得

$$\|\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_h - T_h\boldsymbol{f})\| \lesssim \|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}_h)\| + |(S - S_h)\boldsymbol{f}|_{1,\Omega}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h.$$

取 $\boldsymbol{v}_h$ 为 $\boldsymbol{\Pi}_{h,\ 0}\boldsymbol{w}_0$，结合三角不等式可推出

$$\|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| \lesssim \|\mathrm{curl}(\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{\Pi}_{h,0}\boldsymbol{w}_0)\| + |(S - S_h)\boldsymbol{f}|_{1,\Omega} \lesssim h^r + |(S - S_h)\boldsymbol{f}|_{1,\Omega}.$$

~令 P_h 为到 $\boldsymbol{V}_h$ 上的正交投影，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0$(旋度, Ω)

$$(\boldsymbol{v} - P_h\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) + (\mathrm{curl}(\boldsymbol{v} - P_h\boldsymbol{v}), \mathrm{curl}\boldsymbol{q}) = 0,\ \forall \boldsymbol{q} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h. \tag{3.26}$$

由三角不等式和离散 Poinc´are 不等式可得

$$\begin{aligned}\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\| &\lesssim \|T\boldsymbol{f} - P_hT\boldsymbol{f}\| + \|\mathrm{curl}(P_hT\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| \\ &\lesssim \|T\boldsymbol{f} - P_hT\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{curl}} + \|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\|.\end{aligned}$$

结合上述估计和 (3.16)，可得结论 (3.24)。我们有~如下亥姆霍兹分解 $r_hT\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}_0^c + \nabla q_h$，其中 $\boldsymbol{w}_0^c \in \boldsymbol{V}_h$，$(\boldsymbol{w}_0^c, \nabla q) = 0$，$\forall q \in U_h$ 且 $q_h \in U_h$。对于满足 $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 0$ 的 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$，我们从以下步骤开始

$$\begin{aligned}\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\|^2 &= (T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, T\boldsymbol{f} - r_hT\boldsymbol{f} + r_hT\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_h\boldsymbol{f}) \\ &\lesssim \|T\boldsymbol{f} - r_hT\boldsymbol{f}\|\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\| + |(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_0^c)|.\end{aligned} \tag{3.27}$$

注意到 $S_h H\boldsymbol{w}_0^c = SH\boldsymbol{w}_0^c = 0$。利用引理 3.2–3.4，右端的第二项可估计如下：

$$
\begin{aligned}
|(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_0^c)| &\lesssim |(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_0^c - H\boldsymbol{w}_0^c)| + |(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, H\boldsymbol{w}_0^c)| \\
&\lesssim h^{r_0}\|\mathrm{curl}\boldsymbol{w}_0^c\|\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\| + |(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, H\boldsymbol{w}_0^c)| \text{ by (3.19), (3.17) and (3.18)} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
|(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}, H\boldsymbol{w}_0^c)| &= (\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}), \mathrm{curl}(TH\boldsymbol{w}_0^c - \boldsymbol{\Pi}_{h,0}TH\boldsymbol{w}_0^c)) \\
&\lesssim h^{r_0}\|H\boldsymbol{w}_0^c\|\|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| \text{ by Lem. 3.1 and (3.23)} \\
&\lesssim h^{r_0}(h^{r_D}\|\mathrm{curl}\boldsymbol{w}_0^c\| + \|\boldsymbol{w}_0^c\|)\|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| \text{ by (3.19)} \\
&\lesssim (h^{r_0}\|\mathrm{curl}(r_hT\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| + \|r_hT\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\|)\|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\|h^{r_0}. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

将 (3.29) 和 (3.28) 代入 (3.27) 得

$$
\begin{aligned}
\|T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f}\| &\lesssim h^{r_0}\|\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| + h^{r_0}\|\mathrm{curl}(r_hT\boldsymbol{f} - T\boldsymbol{f} + T\boldsymbol{f} - T_h\boldsymbol{f})\| + \|r_hT\boldsymbol{f} - T\boldsymbol{f}\| \\
&\lesssim h^{r_0+r} + h^s \text{ by (3.24) and Lemma 3.1,} \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $\|r_hT\boldsymbol{f} - T\boldsymbol{f}\| \lesssim h^s\|T\boldsymbol{f}\|_{s,\,\Omega}$（参见 [15] 中的定理 8.15）。证明至此完成。□

设 $\mathcal{H}$ 为一列趋于 0 的网格尺寸。

引理 3.6.（离散紧性性质）任意满足 $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h$ 且关于 $\|\cdot\|_{\mathrm{curl}}$ 一致有界的序列 $\{\boldsymbol{v}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$，都包含一个在 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中强收敛的子序列。

证明. 设 $\{\boldsymbol{v}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ 满足 $\|\boldsymbol{v}_h\|_{\mathrm{curl}} \le M$，其中 M 为正数。显然可以假设序列 $h_i \in \mathcal{H}$ 满足 $h_i \to 0$，当 $i \to \infty$ 时。由 (3.19)、(3.17) 和 (3.18)，$\|H\boldsymbol{v}_{h_i} - \boldsymbol{v}_{h_i}\| \lesssim h^{r_0}|\text{旋度}\boldsymbol{v}_{h_i}\| \to 0$，当 $i \to \infty$ 时。注意

$$\|\mathrm{curl}H\boldsymbol{v}_{h_i}\| = \|\mathrm{curl}\boldsymbol{v}_{h_i}\| \le M.$$

这意味着 $\{H\boldsymbol{v}_{h_i}\}$ 在 $\boldsymbol{H}(\text{旋度}, \Omega)$ 中有界。由于 $\boldsymbol{X}$ 紧嵌入到 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中，故 $\{H\boldsymbol{v}_{h_i}\}$ 存在一个子序列收敛到 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中的某个 $\boldsymbol{v}_0$。因此，$\{\boldsymbol{v}_{h_i}\}$ 的一个子序列也将在 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中收敛到 $\boldsymbol{v}_0$。□

以下的一致收敛性可由 $\boldsymbol{X}_h$ 的离散紧性性质推出。

定理 3.7. 以下一致收敛性成立

$$\|T_h - T\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)\to\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \to 0,\ h \to 0.$$

证明. 由于 $\cup_{h\in\mathcal{H}}U_h$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，由定理 3.5 可得 T_h 在 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中逐点收敛到 T。由 $\boldsymbol{X}_h$ 的离散紧致性，$\cup_{h\in\mathcal{H}}T_hBa$ 是 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中的相对紧集，其中 Ba 是 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中的单位球。事实上，任取一个序列 $\{\boldsymbol{v}_h\}_{h\in\mathcal{H}} \subset Ba$。注意到 T 是从 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 的紧算子，因此 $\{T\boldsymbol{v}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ 是 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 中的相对紧集。因此，当 $h \to 0$ 时，有 $T_h \to T\ in\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 的集体紧收敛性。注意到 T，T_h：$\boldsymbol{L}^2(\Omega) \to \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 是自伴的，根据 [29] 中的命题 3.7 或表 3.1，结论成立。□

我们现在可以证明数值特征值的误差估计。

定理 3.8. 设 λ_h 是（2.4）的一个特征值，且收敛于（2.3）的特征值 λ 。在定理 3.5 的条件下，设 $M(\lambda) \subset \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^r(\Omega) : \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{r+1}(\Omega) + \nabla H_0^1(\Omega)\}$，其中某个 $r \in [r_0, p]$ 满足

$$|\lambda - \lambda_h| \lesssim h^{2r}, \tag{3.31}$$

其中， $M(\lambda)$表示由与特征值λ对应的所有特征函数张成的空间。

证明. 设 $\lambda = \lambda_k$为第 k个麦克斯韦特征值，且 $\dim M(\lambda) = q$。由 [20] 中的定理 7.3 可得

$$|\lambda - \lambda_h| \lesssim \sum_{i,j=k}^{k+q-1} |((T - T_h)\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j)| + \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)\to\boldsymbol{L}^2(\Omega)}, \tag{3.32}$$

其中， $\boldsymbol{\phi}_k$、 $\cdots$、 $\boldsymbol{\phi}_{k+q-1}$是 $M(\lambda)$的一组基函数。注意，对于（3.20）和（3.21）中的任意 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}$， $S\boldsymbol{f} = S_h\boldsymbol{f} = 0$。因此，以下伽辽金正交性成立：

$$((T - T_h)\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j) = (\mathrm{curl}(T - T_h)\boldsymbol{\phi}_i, \mathrm{curl}T\boldsymbol{\phi}_j) = (\mathrm{curl}(T - T_h)\boldsymbol{\phi}_i, \mathrm{curl}(T - T_h)\boldsymbol{\phi}_j).$$

将其代入（3.32），由（3.24）可得（3.31）。 □

4. Super-convergence of Average-type curl Recovery Scheme in Extended Linear Lagrange element

我们将 $\mathcal{N}_h$ 定义为拟一致三角剖分 $\mathcal{T}_h$的节点集。给定 $z \in \mathcal{N}_h$，我们考虑节点 z 周围的单元补丁 ω_z，并选取该节点作为局部坐标的原点。在此坐标系下，令 z为单纯形 $K_j \subset \omega_z, j = 1, 2, \ldots, m_z$的重心，其中 m_z 是包含顶点 z的单元数。

接下来，我们将提出一种平均型旋度恢复格式，它与 [30]中的格式类似。定义简单平均算子 C_h: $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl}, \Omega) : \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}|_{\overline{K}}) \in \boldsymbol{C}^0(\overline{K}) \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \mapsto \boldsymbol{L}_h$ 如下：

$$C_h\boldsymbol{u}_h(z) = \frac{1}{m_z} \sum_{K\subset\omega_z} \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h|_K.$$

其中， $\boldsymbol{L}_h$ 是针对 $d = 3$ 的张量线性拉格朗日元空间（或针对 $d = 2$的线性拉格朗日元空间）。

注意，恢复算子 C_h 在节点 z处保持 P_2 多项式不变：

$$(C_h\boldsymbol{p})(z) = (\mathrm{curl}\boldsymbol{p})(z), \quad \forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}_2(\omega_z). \tag{4.1}$$

定义 $\boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^\infty(\Omega) : \ \ \boldsymbol{v}|_K \in \boldsymbol{W}^{3,\infty}(K) \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$。

定理 4.1. 设 $T\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega)$，则对于 C_h，有如下超逼近估计：

$$\|\mathrm{curl}T\boldsymbol{f} - C_hT\boldsymbol{f}\| \lesssim h^2\|T\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega)}. \tag{4.2}$$

证明. 我们分解

$$\mathrm{curl}T\boldsymbol{f} - C_hT\boldsymbol{f} = (\mathrm{curl}T\boldsymbol{f} - (\mathrm{curl}T\boldsymbol{f})_I) + ((\mathrm{curl}T\boldsymbol{f})_I - C_hT\boldsymbol{f})$$

其中 $(\mathrm{curl}T\boldsymbol{f})_I \in \boldsymbol{L}_h$ 是 $\mathrm{curl}T\boldsymbol{f}$ 的分片线性插值。根据标准逼近理论，

$$\|\mathrm{curl}T\boldsymbol{f} - (\mathrm{curl}T\boldsymbol{f})_I\| \lesssim h^2\|T\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega)}.$$

此外

$$\|(\mathrm{curl}T\boldsymbol{f})_I - C_hT\boldsymbol{f}\| \leq \left(\sum_{K\in\Omega}|K|\sum_{z\in\mathcal{N}_h\cap\bar{K}}\inf_{\boldsymbol{q}_z\in\boldsymbol{P}_2(\omega_z)}|C_h(T\boldsymbol{f}+\boldsymbol{q}_z)(z)-\mathrm{curl}(T\boldsymbol{f}+\boldsymbol{q}_z)(z)|^2\right)^{1/2}$$
$$\lesssim h^2\|T\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega)}|\Omega|^{1/2} \lesssim h^2\|T\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{PW}^{3,\infty}(\Omega)}$$

其中， $\boldsymbol{q}_z$ 是关于 ω_z 和 $C_h\boldsymbol{q}_z$（z）的任意二次多项式， =旋度（$\boldsymbol{q}_z$）（z）。上述两个估计结合起来即可得出结论。

□

5. Numerical Experiments数值实验

本节通过使用扩展线性和二次拉格朗日元进行数值实验，以支持我们的理论工作。我们按以下方法生成有限元网格。对于三维立方体和厚L形区域，我们将区域划分为小的全等立方体，再将每个小立方体划分为12个四面体。对于三维四面体，每次网格加密时，我们将网格中的每个四面体划分为8个小四面体。网格加密的详细信息请参阅 [31]。对于厚L形区域和四面体，图1展示了扩展二次拉格朗日元中的粗网格和边界自由度。

5.1. 麦克斯韦方程的数值结果。首先考虑 $\Omega = (0,1)^3$ 中麦克斯韦方程的源问题 (3.20)，其精确解为

$$T\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} sin(\pi x_1)^3 sin(\pi x_2)^2 sin(\pi x_3)^2 cos(\pi x_2)cos(\pi x_3) \\ sin(\pi x_2)^3 sin(\pi x_3)^2 sin(\pi x_1)^2 cos(\pi x_3)cos(\pi x_1) \\ -2sin(\pi x_3)^3 sin(\pi x_1)^2 sin(\pi x_2)^2 cos(\pi x_1)cos(\pi x_2) \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

我们计算数值解 $T_h\boldsymbol{f}$ 和误差 $\boldsymbol{e}_h := T_h\boldsymbol{f} - T\boldsymbol{f}$。我们还计算旋度 $T_h\boldsymbol{f}$ 的恢复 $C_hT_h\boldsymbol{f}$，并将误差记为 $\delta CT_h\boldsymbol{f} := C_hT_h\boldsymbol{f} - \mathrm{curl}T\boldsymbol{f}$。采用扩展线性和二次拉格朗日元得到的数值解误差列于表 1。可以看出，对于线性和二次拉格朗日元， $\boldsymbol{H}$(curl)-半范数和 L^2-范数下的收敛率分别约为 1 和 2。表 1 还表明，恢复 $C_hT_h\boldsymbol{f}$ 与 $\mathrm{curl}T_h\boldsymbol{f}$ 超逼近。

5.2. 麦克斯韦特征值的数值结果。设 $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i=1}^{N_1}$ 和 $\{\boldsymbol{\phi}_i\}_{i=1}^{N_2}$ 分别为 $\boldsymbol{L}_{h,\,0}$ 和 U_h 的基。(2.4) 中的特征函数写作 $\boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{N_1} u_i\boldsymbol{\xi}_i + \sum_{i=1}^{N_2} u_{i+N_1}\nabla\phi_i$。记 $N_h := N_1 + N_2$ 和 $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_{N_h})^T$。为描述我们的算法，我们在离散情形下定义以下矩阵。

矩阵	维数	定义
A_{11}	$N_1 \times N_1$	$A_{11}(l,i) = \int_\Omega$ 旋度$\boldsymbol{\xi}_i \cdot$ 旋度$\boldsymbol{\xi}_l dx$
B_{11}	$N_1 \times N_1$	$B_{11}(l,i) = \int_\Omega \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_l dx$
B_{12}	$N_1 \times N_2$	$B_{12}(l,i) = \int_\Omega \nabla\phi_l \cdot \boldsymbol{\xi}_i dx$
B_{22}	$N_2 \times N_2$	$B_{22}(l,i) = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_l dx$

然后，离散化可写为广义特征值问题

$$A\vec{u} = \lambda B\vec{u}.$$

其中

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

为了给出扩展拉格朗日单元法的自由度（Dofs）数量，我们用 N, NE, NF, NT表示网格中的节点、边、面和四面体的数量。它们满足以下关系： $N: NE: NF: NT \approx 1: 7:12:6$（在 $\mathbb{R}^3$ 中），以及$N: NE: NF \approx 1:3:$~~2（在~~ $\mathbb{R}^2$~~中）~~。我们分别用 NDofs 和 NDofs 表示扩展拉格朗日单元法和第二族 N´ed´elec 单元法的自由度数量。为便于比较，它们列于下表。

	p	$Dim(\boldsymbol{L}_{h,0})$	$Dim(U_h)$	NDofs	NDofs
$d=3$	1	$3N$	$N+NE \approx 8N$	$11N$	$3NE \approx 14N$
	2	$3N+3NE \approx 24N$	$N+2NE+NF \approx 27N$	$52N$	$3NE+3NF \approx 57N$
$d=2$	1	$2N$	$N+NE \approx 4N$	$6N$	$2NE \approx 6N$
	2	$2N+2NE \approx 8N$	$N+2NE+NF \approx 9N$	$17N$	$3NE+3NT \approx 15N$

上表显示，当 $p=1$,2 时，扩展拉格朗日单元方法在三维中的计算复杂度接近但低于三维中的第二族 N´ed´elec 单元方法。

注 5.1. 如果 $\boldsymbol{L}_{h,\ 0} \cap \nabla U_h \neq \{\mathbf{0}\}$，则存在一个非零向量 $\vec{u}$，使得 $\boldsymbol{u}_h = 0$。这样的 $\vec{u}$ 恰好是 (5.2) 的一个特征向量。我们可以使用以下公式过滤代数伪特征值 λ_h

$$\frac{\sqrt{|(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h, \mathrm{curl}\boldsymbol{u}_h) - \lambda_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h)|}}{\|\boldsymbol{u}_h\|} > \mathcal{E}$$

其中 $\mathcal{E}$ 是较小的容差。

现在，我们测试用于求解麦克斯韦特征值问题 (2.3) 的新方法。不同区域上的前八个特征值如下所示：

单位正方形:	π^2	π^2	$2\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$5\pi^2$	$5\pi^2$	$8\pi^2$
L 形区域:	1.4756218	3.5340314	π^2	π^2	11.389479	12.57219	$2\pi^2$	21.4242598
单位立方体:	$2\pi^2$	$2\pi^2$	$2\pi^2$	$3\pi^2$	$3\pi^2$	$5\pi^2$	$5\pi^2$	$5\pi^2$
厚 L 形:	9.63972	11.34523	13.40364	15.19725	19.50933	$2\pi^2$	$2\pi^2$	$2\pi^2$

设 $(\lambda_i, \boldsymbol{u}_i)$ 为第 i 个麦克斯韦特征对，$(\lambda_{i,h}, \boldsymbol{u}_{i,h})$ 为通过扩展拉格朗日有限元法得到的近似。由 [20] 可得

$$\lambda_{i,h} - \lambda_i = \frac{(\mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_{i,h} - \boldsymbol{u}_i), \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_{i,h} - \boldsymbol{u}_i))}{(\boldsymbol{u}_{i,h}, \boldsymbol{u}_{i,h})} - \lambda \frac{(\boldsymbol{u}_{i,h} - \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i,h} - \boldsymbol{u}_i)}{(\boldsymbol{u}_{i,h}, \boldsymbol{u}_{i,h})}, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{5.3}$$

如果特征函数 $\boldsymbol{u}$ 足够光滑，预期有 $\lambda_{i,h} \geq \lambda_i$，因为 $\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|$ 的阶高于 $\|\mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u})\|$。

我们首先使用扩展线性拉格朗日有限元法计算最低的八个特征值。从表2-6可以看出，对于二维单位正方形情形（参见表2）以及三维立方体、四面体和厚 L 形情形（参见表4-6），由扩展线性拉格朗日有限元法得到的所有计算特征值均给出相应特征值的上界；二维 L 形区域上的数值特征值$\lambda_{i,h}(i = 2, \cdots, 8)$亦是如此；然而，在 L 形域上由扩展线性拉格朗日有限元法得到的$\lambda_{1,h}$ 并非如此，因为相应的特征函数 $\boldsymbol{u}_1$ 具有强无界奇异性。由扩展二次拉格朗日有限元法得到的$\lambda_{2,h}$ 同样如此。在此处给出的所有情形中，扩展线性拉格朗日有限元法计算特征值的收敛率约为2，这是最优的。

我们接下来使用扩展二次拉格朗日有限元法计算最低的八个特征值。从表2-6可以看出，对于二维单位正方形情形（参见表2）以及三维立方体、四面体和厚 L 形情形（参见表4-6），由扩展二次拉格朗日有限元法得到的所有计算特征值均给出相应特征值的上界；二维 L 形区域上的数值特征值$\lambda_{i,h}(i = 3, 4, 5, 7)$（参见表3）亦是如此；然而，在 L 形域上由扩展二次拉格朗日有限元法得到的$\lambda_{i,h}(i = 1, 2, 6, 8)$并非如此，因为相应特征函数具有奇异性。

采用扩展二次拉格朗日有限元法计算得到的二维正方形上的特征值收敛率（参见表2）以及三维立方体和四面体上的特征值收敛率（参见表4–5）约为 4，达到了最优阶。然而，对于采用扩展二次拉格朗日有限元法在二维 L 形域上计算得到的特征值$\lambda_{i,\ h}(i = 1,2,6,8)$（参见表3），以及在三维厚L形区域上计算得到的特征值 $\lambda_{i,\ h}(i = 1, 2, 5)$（参见表6），情况并非如此。这是由于相应特征函数的奇异性所致。

5.3. 通过恢复方法得到的超逼近下界。使用文献 [32], 中的恢复方法，对采用扩展线性拉格朗日有限元法得到的数值特征对（$\lambda_{i,\ h}$,$\boldsymbol{u}_{i,\ h}$），我们将计算恢复型后验误差估计量

$$\eta_h(\boldsymbol{u}_{i,h}) := \frac{\|\mathrm{curl}\boldsymbol{u}_{i,h} - C_h\boldsymbol{u}_{i,h}\|^2}{\|\boldsymbol{u}_{i,h}\|^2}, \quad i = 1, 2, \cdots .$$

~　　~设$\lambda_{i,h} := \lambda_{i,h} - \eta_h(\boldsymbol{u}_{i,h})$。可以预期，当特征函数 $\boldsymbol{u}_i$ 光滑时，$\lambda_{i,h}$ 具有超逼近性质。

对于二维单位正方形和三维立方体的情形，从表7和~9可以看出，$\lambda_{i,h}(i = 1, 2, 3)$分别是 $\lambda_i(i = 1, 2, 3)$的超逼近下界。

对于二维L形域的情形，我们可以从表8看出，$\lambda_{i,h}(i = 1, 2, 3, 4)$是 λ_i 的超逼近下界；我们可以从表3看出，$\lambda_{1,h}$并不给出 λ_1 的上界，因为相应的特征函数 $\boldsymbol{u}_1$ 是强~无界奇异的。因此，$\lambda_{1,h}$ 的超逼近性质不成立，我们~不列出$\lambda_{1,h}$。

~对于三维厚 L 形区域的情况，从表 9 可以看出，$\lambda_{i,\ h}$ $(i = 1, 2, 3)$ 分别是 λ_i $(i = 1, 2,3)$ 的下界；同时，$\lambda_{3,\ h}$ 是 λ_3 的超逼近。~　　~$\lambda_{1,\ h}$ 和 $\lambda_{2,\ h}$ 由于特征函数 $\boldsymbol{u}_1$和 $\boldsymbol{u}_2$ 的奇异性，不具有超逼近性质。

TABLE 1. 使用扩展线性（左）和二次拉格朗日有限元方法求解单位立方体上式（3.20）时的误差。

h	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10
$\|$旋度$(\boldsymbol{e}_h)\|$	0.7516	0.4818	0.3351	0.2556	0.2062
$Rate$	–	0.64	0.90	0.94	0.96
$\|\boldsymbol{e}_h\|$	0.0555	0.0244	0.0117	0.0067	0.0044
$Rate$	–	1.19	1.81	1.94	1.88
$\|\delta C$旋度$T_h\boldsymbol{f}\|$	0.8063	0.3778	0.1363	0.056	0.0266
$Rate$	–	1.09	2.51	3.09	3.34

1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
0.425	0.2291	0.1168	0.0769	0.0544
–	1.52	2.34	1.87	1.90
0.017	0.0059	0.0023	0.0012	7.38E-04
–	2.61	3.27	2.92	2.67

TABLE 2. 通过扩展线性（左）和二次（右）拉格朗日有限元方法在单位正方形上获得的数值特征值。

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/4	1/8	1/16	1/32
$\lambda_{1,h}$	10.0918	9.92542	9.88357	9.87310	9.8712349	9.8697136	9.8696108	9.8696048
$Rate$	–	1.99↓	2.00↓	2.00↓	–	3.90↓	4.08↓	4.00↓
$\lambda_{2,h}$	10.1067↓	9.92907↓	9.88448↓	9.87332↓	9.8713258	9.8697073	9.8696112	9.8696048
$Rate$	–	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	4.06↓	3.91↓	4.00↓
$\lambda_{3,h}$	20.7531	19.9912	19.8021	19.7549	19.750518	19.73995	19.739256	19.739211
$Rate$	–	2.01↓	2.00↓	2.00↓	–	3.92↓	3.98↓	4.00↓
$\lambda_{4,h}$	43.1269	40.4107	39.7121	39.5368	39.574996	39.484880	39.478789	39.478443
$Rate$	–	1.97↓	2.00↓	2.00↓	–	3.90↓	4.12↓	3.85↓
$\lambda_{5,h}$	43.3726	40.4638	39.7252	39.5401	39.566074	39.484259	39.478828	39.478440
$Rate$	–	1.98↓	2.00↓	2.00↓	–	3.91↓	3.83↓	4.14↓
$\lambda_{6,h}$	55.4626	50.8812	49.7304	49.4435	49.514075	49.359361	49.348848	49.348067
$Rate$	–	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	3.87↓	3.78↓	4.18↓
$\lambda_{7,h}$	55.9247	50.9809	49.7541	49.4494	49.534035	49.360921	49.348748	49.348074
$Rate$	–	2.01↓	2.01↓	2.00↓	–	3.85↓	4.15↓	3.80↓
$\lambda_{8,h}$	94.8772	83.0772	79.9849	79.2136	79.639538	79.005160	78.959969	78.957032
$Rate$	–	1.95↓	2.00↓	2.00↓	–	3.82↓	3.95↓	3.99↓

TABLE 3. 采用扩展线性（左）和二次（右）拉格朗日有限元方法得到的 L 形区域上的数值特征值。

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/4	1/8	1/16	1/32
$\lambda_{1,h}$	1.4777	1.47511	1.47508	1.47532	1.47548	1.47278	1.474489	1.475171	1.475443
$Rate$	–	2.49↓	-0.12↓	1.17↑	2.52↑	–	1.41↑	1.58↑	2.27↑
$\lambda_{2,h}$	3.5694	3.54292	3.53630	3.53459	3.53417	3.53407	3.534029	3.5340305	3.5340312
$Rate$	–	2.00↓	1.97↓	2.02↓	2.00↓	–	4.63↓	1.08↑	2.32↑
$\lambda_{3,h}$	10.095	9.92637	9.88380	9.87316	9.87049	9.87118	9.869704	9.8696106	9.8696048
$Rate$	–	1.99↓	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	3.99↓	4.00↓	4.00↓
$\lambda_{4,h}$	10.132	9.93564	9.88610	9.87374	9.87064	9.87201	9.869756	9.8696139	9.8696050
$Rate$	–	1.99↓	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	3.98↓	3.99↓	4.00↓
$\lambda_{5,h}$	11.699	11.4677	11.4091	11.3943	11.3907	11.3926	11.38967	11.38949	11.38947
$Rate$	–	1.98↓	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	4.03↓	4.12↓	4.36↓
$\lambda_{6,h}$	12.933	12.6608	12.5933	12.5770	12.5733	12.5674	12.56899	12.57094	12.57181
$Rate$	–	2.03↓	2.07↓	2.11↓	2.08↓	–	0.58↑	1.36↑	1.71↑
$\lambda_{7,h}$	20.758	19.9959	19.8035	19.7552	19.7432	19.7525	19.74008	19.73926	19.73921
$Rate$	–	1.99↓	2.00↓	2.00↓	2.00↓	–	3.92↓	3.98↓	4.00↓
$\lambda_{8,h}$	22.598	21.7148	21.4944	21.4409	21.4282	21.4232	21.41747	21.42140	21.42338
$Rate$	–	2.01↓	2.05↓	2.07↓	2.05↓	–	-2.74↓	1.25↑	1.70↑

6. CONCLUSION

本文提出了一种利用拉格朗日元空间求解麦克斯韦方程及相关特征值问题的新方法。为获得具有超逼近性质的数值解，我们针对扩展线性拉格朗日有限元法提出了一种平均型旋度恢复格式。该格式可用于求得麦克斯韦特征值的数值下界。尽管本文仅研究常系数下的麦克斯韦方程及其特征值问题，但这种新方法及相关理论结果也适用于间断系数情形。

TABLE 4. 采用扩展线性（左）和二次（右）拉格朗日有限元方法，在单位立方体上得到的数值特征值。

h	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$\lambda_{1,h}$	24.6853	21.6648	20.7846	20.3917	20.1865	19.879	19.7648	19.7468	19.7421	19.7406
Rate	–	2.33↓	2.12↓	2.11↓	2.07↓	–	4.19↓	4.22↓	4.33↓	4.01↓
$\lambda_{2,h}$	24.7298	21.7094	20.7907	20.3935	20.1886	19.8836	19.7659	19.7468	19.7422	19.7406
Rate	–	2.29↓	2.18↓	2.13↓	2.06↓	–	4.16↓	4.37↓	4.17↓	4.2↓
$\lambda_{3,h}$	24.7577	21.7018	20.7935	20.396	20.1902	19.886	19.7659	19.7469	19.7422	19.7406
Rate	–	2.32↓	2.16↓	2.12↓	2.06↓	–	4.20↓	4.33↓	4.23↓	4.20↓
$\lambda_{4,h}$	39.9657	33.1761	31.4867	30.7537	30.3871	30.0109	29.6946	29.6345	29.6189	29.6134
Rate	–	2.63↓	2.23↓	2.22↓	2.12↓	–	3.81↓	4.19↓	4.19↓	4.32↓
$\lambda_{5,h}$	39.9684	33.301	31.5064	30.7633	30.396	30.0139	29.6966	29.6347	29.619	29.6134
Rate	–	2.54↓	2.31↓	2.23↓	2.1↓	–	3.77↓	4.24↓	4.18↓	4.38↓
$\lambda_{6,h}$	74.4975	61.1531	56.009	53.5104	52.2029	50.9636	49.6862	49.4548	49.3926	49.3697
Rate	–	1.87↓	1.99↓	2.11↓	2.07↓	–	3.86↓	4.01↓	3.91↓	3.95↓
$\lambda_{7,h}$	74.6583	61.356	56.0925	53.539	52.2052	51.0757	49.6884	49.4561	49.3931	49.3699
Rate	–	1.84↓	2.01↓	2.13↓	2.10↓	–	4.01↓	3.99↓	3.92↓	3.97↓
$\lambda_{8,h}$	74.7468	61.7022	56.1204	53.5613	52.2208	51.1667	49.6958	49.4577	49.3935	49.3699
Rate	–	1.78↓	2.09↓	2.13↓	2.10↓	–	4.08↓	4.01↓	3.95↓	4.01↓

TABLE 5. 采用扩展线性（左）和二次（右）拉格朗日有限元方法在四面体上得到的数值特征值。

h	1/2	1/4	1/8	1/16	1/4	1/8	1/16	1/32
$\lambda_{1,h}$	32.3467	27.6752	26.46	26.156	26.532	26.2471	26.0698	26.0557
Rate	–	1.96↓	2.00↓	2.01↓	–	1.32↓	3.76↓	3.65↓
$\lambda_{2,h}$	33.079	27.7695	26.4806	26.161	27.7558	26.2883	26.0726	26.0559
Rate	–	2.04↓	2.01↓	2.01↓	–	2.87↓	3.8↓	3.69↓
$\lambda_{3,h}$	33.079	27.7695	26.4806	26.161	27.7558	26.2883	26.0726	26.0559
Rate		2.04↓	2.01↓	2.01↓	–	2.87↓	3.8↓	3.69↓
$\lambda_{4,h}$	80.8141	60.8229	55.2449	53.8868	70.0000	54.9355	53.5601	53.446
Rate	–	1.89↓	2.04↓	2.03↓	–	3.47↓	3.71↓	3.59↓
$\lambda_{5,h}$	81.3878	61.3432	55.4132	53.9318	70.8989	54.9545	53.5859	53.448
Rate	–	1.82↓	2.01↓	2.02↓	–	3.53↓	3.45↓	3.31↓
$\lambda_{6,h}$	81.3878	61.3432	55.4132	53.9318	74.6667	54.9545	53.5859	53.448
Rate	–	1.82↓	2.01↓	2.02↓	–	3.82↓	3.45↓	3.31↓
$\lambda_{7,h}$	81.5981	63.3483	58.5518	57.3607	76.6727	58.6841	57.1064	56.9740
Rate	–	1.95↓	2.01↓	2.03↓	–	3.53↓	3.69↓	3.58↓
$\lambda_{8,h}$	85.5942	64.6753	58.9099	57.4519	76.6727	58.8057	57.1416	56.9769
Rate	–	1.89↓	1.99↓	2.02↓	–	3.43↓	3.47↓	3.34↓

REFERENCES

[1] J. C. NÉDÉLEC, *Mixed finite elements in R^3*, 《Numerische Mathematik》, 35(1980), 315-341. [2] D. BOFFI, *Finite Element approximation of eigenvalue problems*, 《Acta Numerica》, 19(2010), 1–120. [3] D. N. ARNOLD, R. S. FALK, AND R. WINTHER, *Finite element exterior calculus,homological techniques, and applications* 2006 1 155 , 《Acta Numerica》, ( ), – . [4] A. BONITO AND J. -L. GUERMOND, *Approximation of the eigenvalue problem for the time harmonic Maxwell system by continuous Lagrange finite elements* 80 2011 1887 1910 , 《Mathematics of Computation》, ( ), – . [5] S. BADIA AND R. CODINA, *A nodal-based finite element approximation of the Maxwell problem suitable for singular solutions* 50 2012 398 417 , SIAM 数值分析杂志, ( ), – . [6] A. BUFFA, P. CIARLET, AND E. JAMELOT, *Solving electromagnetic eigenvalue problems in polyhedral domains with nodal finite elements* 113 2009 497 518 ,Nume. Math., ( ), – .

TABLE 6. 采用扩展线性（左）和二次（右）拉格朗日有限元方法在厚L形区域上获得的数值特征值。

h	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$\lambda_{1,h}$	11.091	10.341	10.0498	9.9144	9.8393	9.7357	9.6882	9.6717	9.6632	9.658
Rate	–	1.79↓	1.87↓	1.80↓	1.75↓	–	1.68↓	1.45↓	1.38↓	1.37↓
$\lambda_{2,h}$	14.0532	12.5497	12.0375	11.7989	11.6686	11.4258	11.3765	11.3635	11.3579	11.3548
Rate	–	2.00↓	1.93↓	1.89↓	1.86↓	–	2.33↓	1.87↓	1.64↓	1.54↓
$\lambda_{3,h}$	15.3133	14.2097	13.8451	13.6809	13.5949	13.4498	13.4121	13.4063	13.4048	13.4042
Rate	–	2.13↓	2.09↓	2.08↓	2.04↓	–	4.18↓	4.02↓	3.71↓	3.97↓
$\lambda_{4,h}$	17.6559	16.2547	15.7792	15.5624	15.4465	15.2731	15.2126	15.2025	15.1996	15.1985
Rate	–	2.08↓	2.08↓	2.09↓	2.09↓	–	3.94↓	3.73↓	3.6↓	3.47↓
$\lambda_{5,h}$	23.9564	21.6577	20.7545	20.3179	20.0812	19.7751	19.6082	19.5667	19.5492	19.5393
Rate	–	1.79↓	1.9↓	1.93↓	1.9↓	–	2.44↓	1.89↓	1.63↓	1.57↓
$\lambda_{6,h}$	24.046	21.6728	20.7908	20.3998	20.1912	19.8665	19.7619	19.7461	19.7419	19.7405
Rate	–	1.98↓	2.12↓	2.08↓	2.08↓	–	4.25↓	4.14↓	4.21↓	4.03↓
$\lambda_{7,h}$	24.4227	21.7218	20.7969	20.4008	20.1916	19.869	19.7626	19.7461	19.7419	19.7405
Rate	–	2.12↓	2.18↓	2.10↓	2.08↓	–	4.23↓	4.25↓	4.21↓	4.03↓
$\lambda_{8,h}$	24.7486	21.7637	20.8081	20.4013	20.1924	19.8817	19.7631	19.7463	19.7421	19.7405
Rate	–	2.23↓	2.22↓	2.15↓	2.08↓	–	4.40↓	4.22↓	4.02↓	4.42↓

TABLE 7. 正方形上的恢复离散特征值。

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
$\tilde{\lambda}_{1,h}$	9.79974	9.86602	9.86933	9.86958	9.86960
Rate	–	4.28↑	3.71↑	3.56↑	3.42↑
$\tilde{\lambda}_{2,h}$	19.24442	19.70742	19.73691	19.73903	19.73919
Rate	–	3.96↑	3.79↑	3.69↑	3.56↑
$\tilde{\lambda}_{3,h}$	35.99717	39.21930	39.46352	39.47736	39.47834
Rate	–	3.75↑	4.12↑	3.82↑	3.79↑

TABLE 8. L 形域上恢复的离散特征值。

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
$\tilde{\lambda}_{2,h}$	3.532018	3.533785	3.534006	3.534028	3.534031
Rate	–	3.03↑	3.25↑	3.10↑	2.96↑
$\tilde{\lambda}_{3,h}$	9.82203	9.86564	9.86929	9.86958	9.86960
Rate	–	3.59↑	3.64↑	3.54↑	3.40↑
$\tilde{\lambda}_{4,h}$	11.29961	11.38192	11.38890	11.38943	11.38948
Rate	–	3.57↑	3.70↑	3.64↑	3.51↑

TABLE 9. 立方体（左）和厚 L 形区域（右）上的离散特征值。

h	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/3	1/4	1/5	1/6
$\tilde{\lambda}_{1,h}$	9.79974	9.86602	9.86933	9.86958	9.86960	9.345	9.5008	9.5555	9.5826
Rate	–	4.28↑	3.71↑	3.56↑	3.42↑	–	2.61↑	2.24↑	2.13↑
$\tilde{\lambda}_{2,h}$	19.24442	19.70742	19.73691	19.73903	19.73919	11.0998	11.2155	11.2574	11.2809
Rate	–	3.96↑	3.79↑	3.69↑	3.56↑	–	2.22↑	1.75↑	1.71↑
$\tilde{\lambda}_{3,h}$	35.99716	39.21929	39.46352	39.47736	39.47834	13.1075	13.2933	13.3529	13.3767
Rate	–	3.75↑	4.12↑	3.82↑	3.79↑	–	3.43↑	3.48↑	3.47↑

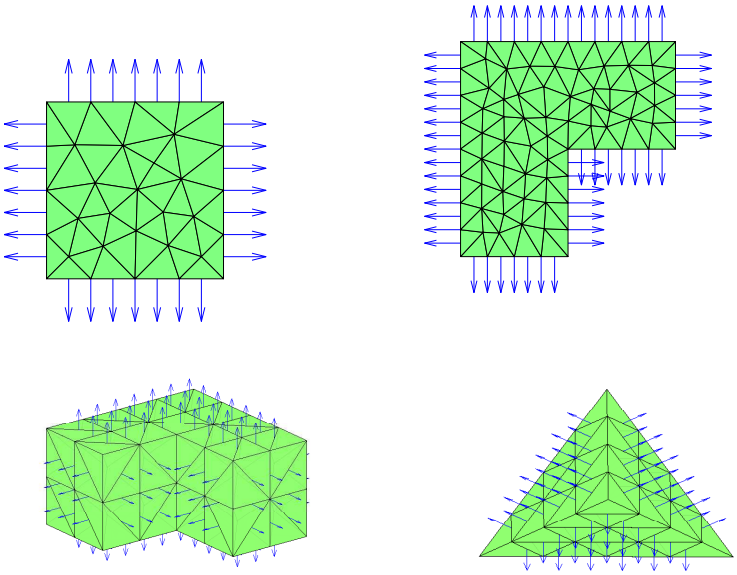

FIGURE 1. 二维和三维中扩展二次拉格朗日元在 $\partial\Omega$ 上的粗网格和自由度。

[7] H. Duan, W. Liu, J. Ma, R. C. Tan, and S. Zhang, *A family of optimal Lagrange elements for Maxwell equations* 358 2019 241 265 ,《计算与应用数学杂志》, ( ), –。[8] S. H. Wong and Z. Cendes, *Combined finite element-modal solution of three-dimensional eddy current problems* 24 1988 2685 2687 , IEEE 磁学汇刊, ( ), –。

[9] M. J. Powell and M. A. Sabin, *Piecewise quadratic approximations on triangles*, ACM 数学软件汇刊（TOMS）, 3 (1977), 316–325。[10] A. Worsey and G. Farin, *An n-dimensional Clough-Tocher interpolant*, 构造性逼近, 3 (1987), 99–110。[11] D. Boffi, J. Guzmán, and M. Neilan, *Convergence of Lagrange finite elements for the Maxwell eigenvalue problem in two dimensions* 2022 10 1093 104 , IMA 数值分析杂志, ( ), 。/imanum/drab。[12] D. Boffi, J. Guzmán, and M. Neilan, 三维麦克斯韦特征值问题的拉格朗日有限元方法收敛性, (2022), arXiv:2204.10876 [math.NA]。[13] K. Hu, Q. Zhang, J. Han, L. Wang, and Z. Zhang, *Spurious solutions for high order curl problems*, IMA 数值分析杂志, 111(2022), 1-28。[14] J. Hu, K. Hu, and Q. Zhang, *Partially discontinuous nodal finite elements for* H(旋度) *and* H(div), 计算方法与应用数学, 22 (2022), 613-629。[15] P. Monk, 麦克斯韦方程的有限元方法, 牛津大学出版社, 英国牛津, 2003。[16] D. Boffi, P. Fernandes, L. Gastaldi, and I. Perugia, *Computational Models of ElectromagneticResonators: Analysis of Edge Element Approximation*, SIAM 数值分析杂志, 36 (1999), 1264–1290。[17] R. Hiptmair, *Finite elements in computational electromagnetism*, 数学学报, 11 (2002), 237-339。[18] W. Xiao and J. Sun, *Band structure calculation of photonic crystals with frequency-dependent permittivities* 38 2021 628 633 , 美国光学学会杂志 A, ( ), -。[19] B. Gong, J. Sun, and X. Wu, *Finite element approximation of the modified Maxwell's Stekloff eigenvalues* 59 2021 , SIAM 数值分析杂志, ( )。[20] I. Babuska and J. Osborn, *Eigenvalue Problems* *Finite Element* , *in: P. G. Ciarlet, Methods (Part 1)* 2, *J. L. Lions, (Ed.)*,《数值分析手册》, 第 vol. 卷, north-holand：Elsevier science publishers, 1991, 640-787。

[21] D. Gallistl and V. Olkhovskiy,*Computational lower bounds of the Maxwell eigenvalues*, SIAM 数值分析杂志, 61(2023), 539-561。[22] Y. Yang, Z. Zhang, F. Lin,
Eigenvalue approximation from below using non-conforming finite elements, 中国科学：数学，137-150,53(2010)。
[23] J. Hu, Y. Huang and Q. Lin, *Lower bounds for eigenvalues of elliptic operators: by nonconforming finite element methods* 61 2014 196 221 , 计算科学杂志, ( ), -。[24] C. Carstensen and D. Gallistl, *Guaranteed lower eigenvalue bounds for the biharmonic equation*。《Numerische Mathematik》126, 33–51 (2014)。。[25] C. You, H. Xie and X. Liu,
Guaranteed eigenvalue bounds for the Steklov eigenvalue problem SIAM , , J. Numer. Anal. 57(3) (2019) 1395-1410. , , Approximation by finite element functions using local regularization,
[26] P. clément
RAIRO 数值分析，R-2(1975), 77-84。[27] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge and V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains* 21 1998 823 864 , 数学方法与应用科学，( )，-。[28] M. Costabel, M. Dauge, *Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains*,《Numerische Mathematik》，93(2002), 239-277。[29] F. Chatelin,《线性算子的谱近似》，学术出版社，纽约，1983。
[30] Y. Huang, J. Li, C. Wu, W. Yang, *Superconvergence analysis for linear tetrahedral edge elements*, J. Sci. Comput. 62(2015), 122-145。[31] L. Chen, *iFEM: An Integrated Finite Element Methods Package in MATLAB*, 技术报告，加利福尼亚大学欧文分校，2009。[32] A. Naga, Z. Zhang and A. Zhou,
Enhancing eigenvalue approximatioin by gradient recovery, SIAM 科学计算杂志，28 (2006), 1289-1300。

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang, 550025
Email address: hanjiayu@gznu.edu.cn, hanjiayu126@126.com