arXiv:2603.01513v1 [cs.SI] 2 Mar 2026

超图中节点和超边的两步张量特征向量中心性

Qing Xu、Chunmeng Liu、Changjiang Bu 和 Jihong Shen

摘要—**超图是表示高阶交互的有力工具，其中超边可以连接任意数量的节点。量化超图中节点和超边的相对重要性，是网络分析中的一个基本问题。本文提出一种适用于一般超图的新型基于张量的中心性度量。我们使用三阶张量表示节点与超边之间的关系。将该张量的正佩龙向量定义为超图的中心性向量。张量Perron-Frobenius定理保证了该中心性向量的存在性和唯一性。这种新的中心性度量刻画了一种高阶相互增强机制：节点的重要性由其关联超边以及这些超边中其他节点的重要性决定；对称地，超边的重要性由其组成节点以及包含这些节点的其他超边的重要性决定。我们还通过证明该中心性向量表示两步扩展树的极限几何容量，给出了组合解释。我们在真实世界超图数据集上展示了这种中心性度量。**

索引词—**超图、张量、佩龙向量、中心性。**

I. 引言

MODELING 复杂系统通常需要刻画超越简单成对连接的相互作用。超图推广了简单图的概念，并已成为表示此类高阶相互作用的有力工具。设 $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$为一个超图，其中$\mathcal{V}$ 是节点集合， $\mathcal{E}$ 是超边集合。一条超边 $e \in \mathcal{E}$ 可以包含任意数量的节点，而图中的一条边只能连接两个节点。若每条超边恰好包含 k 个节点，则 H 称为 k-均匀超图；否则， H 称为非均匀[1]。给定一个超图，一个基本问题是评估各个节点或超边的中心性或相对重要性。在标准图的分析中，这一问题已借助多种中心性度量得到广泛研究，包括度、接近中心性、中介中心性、Katz中心性、子图中心性和特征向量中心性 [2]–[6]。在这些既有基础之上，一些中心性度量已被推广到超图，用以量化节点和超边的重要性 [7]。

在这些度量中，特征向量中心性是一种重要的中心性度量，在社会网络分析 [8] 和网页搜索排序 [9]中有着广泛的应用。受简单图中特征向量中心性的启发，研究人员将其推广到了超图。2019年，Benson 将特征向量中心性推广到了 k均匀超图 [10]。这种方法与图的情形类似：正如图的特征向量中心性对应于邻接矩阵的佩龙向量，均匀超图中心性则由邻接张量的佩龙向量导出。然而，真实世界的超图通常并非均匀超图。对于非均匀超图，Tudisco 和 Higham 将超图中心性表述为一般的约束非线性特征值问题，并定义了一类谱测度，用于识别超图中的重要节点和超边 [20]。关于超图中心性的更多研究，请参阅文献 [4], [21]–[23]。

本文提出了一种适用于一般超图的基于张量的中心性度量。我们首先将超图转换为其关联二部图，并构造一个三阶张量来编码两步游走，这一方法最初见于文献 [24]。具体而言，张量元素 $a_{ijk} = 1$表示关联二部图中的一条游走 $i \sim j \sim k$ ，对应于两个节点 i， k 共享一条超边 j，或两条超边 i， k 在一个节点 j处相交。假设节点或超边的重要性与相连超边和邻居的联合影响成正比（以二者得分的乘积量化），我们将中心性向量推导为张量谱半径对应的唯一正特征向量。张量 Perron-Frobenius 定理保证了该正向量的存在性和唯一性。我们采用基于非负张量幂法的迭代算法，高效计算中心性向量 [30]–[32]。此外，我们使用两步扩展树来解释中心性。我们在这些树上定义了一种称为几何容量的递归度量，并证明，当树深度趋于无穷时，中心性向量恰好是这些容量的归一化极限。

本文其余部分的组织结构如下。第 2 节介绍与张量相关的定义和基本引理。第 3 节详细介绍所提出的基于张量的中心性度量，并给出计算中心性向量的算法。第 4 节通过真实世界数据集上的数值实验说明该中心性度量的有效性。最后，第 5 节给出本文的结论。

II. 预备知识

本节回顾张量及其谱性质的基本概念，这些概念构成了我们所提方法的数学基础。

Qing Xu、Changjiang Bu 和 Jihong Shen 任职于中国哈尔滨市 150001，哈尔滨工程大学数学科学学院（电子邮箱：qinxu191@163.com；buchangjiang@hrbeu.edu.cn；shenjihong@hrbeu.edu.cn）。Chunmeng Liu 任职于中国长春市 130024，东北师范大学先进跨学科研究院（电子邮箱：liuchunmeng0214@126.com）。通讯作者：Chunmeng Liu。

令 $\mathbb{C}^n$ 表示复数域 $\mathbb{C}$上的 n维向量集合。我们考虑一个 m阶 n维张量 $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$。如果张量 $\mathcal{A}$ 的所有元素均为非负数，则称其为非负张量 。对于向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$，乘积 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个向量，其 i个分量由$\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$给出。若存在非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$，使得.....则称复数 λ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \lambda \mathbf{x}^{[m-1]},$$

其中，$\mathbf{x}^{[m-1]} = (x_1^{m-1}、\ldots、x_n^{m-1})^{\mathrm{T}}$。向量$\mathbf{x}$ 随后被称为与 $\mathcal{A}$ 对应于 λ [11]、[12]的特征向量。 $\mathcal{A}$的谱半径是其特征值的模中的最大值，记为 $\rho(\mathcal{A})$。这些谱概念已广泛应用于谱图论、谱超图理论和网络分析，参见文献 [13]–[20], [23]–[26]。

唯一正特征向量存在的一个关键性质是张量的弱不可约性，这可以通过张量的代表矩阵来刻画。

定义*1*： [27] 设 $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$是一个 m阶 n维张量。$\mathcal{A}$的代表矩阵记为 $M(\mathcal{A}) = (m_{ij})$，定义如下：

$$m_{ij} = \sum_{j \in \{i_2, \ldots, i_m\}} |a_{ii_2\cdots i_m}|.$$

张量 $\mathcal{A}$ 称为弱不可约，当且仅当其代表矩阵 M 不可约 [27]。弱不可约非负张量称为弱本原张量，若其代表矩阵为本原矩阵 [27]。对于弱不可约非负张量，以下 Perron-Frobenius 定理成立。

引理 *1*： [28]若 $\mathcal{A}$ 是非负弱不可约张量，则其谱半径 $\rho(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的唯一正特征值，并且存在唯一的正特征向量$\mathbf{x}$ （相差一个正比例因子），对应于 $\rho(\mathcal{A})$。

我们的工作建立在两步张量这一概念之上，该概念最初在文献 [24] 中被提出如下。

定义 *2*： [24] 设 $G = (V, E)$ 是一个具有n 个节点的简单图。两步张量 $\mathcal{A}(G) =(a_{ijk})$ 是一个三阶n维张量，定义为

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if } \{i,j\} \in E, \{j,k\} \in E, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

谱半径 $\rho(G)$是 $\mathcal{A}(G)$所有特征值中模最大的一个。

图的连通性确保该张量弱不可约，如下述引理所述。

引理*2*： [24] 设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向连通图。则与 G 相关联的两步张量是非负且弱不可约的。

本文通过证明以下结论，进一步加强了引理2：这些张量是弱本原的。

引理*3*： 设 $G = (V, E)$ 是一个简单无向连通图。其对应的两步张量 $\mathcal{A} =(a_{ijk})$ 是弱本原的。

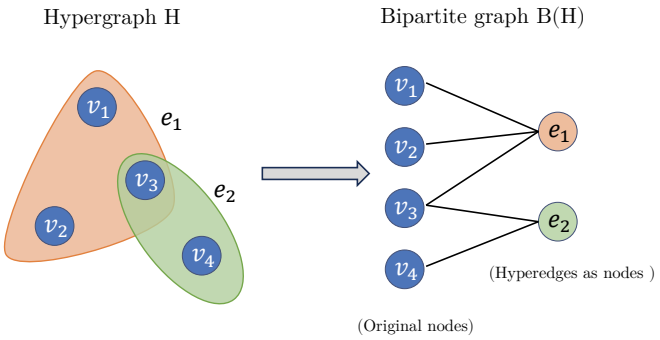


图1. 将超图转换为二分图的示意图。

证明：由引理2可知，张量 $\mathcal{A}$ 是弱不可约的，这意味着其代表矩阵 $M(\mathcal{A})$ 是不可约的。要证明 $\mathcal{A}$ 是弱本原的，只需证明 $M(\mathcal{A})$ 是本原的。

根据代表矩阵的定义，对角线元素为 $m_{ii} = \sum_k($ $a_{iki} + a_{iik})$。由于图中没有孤立节点，每个节点 i 至少有一个邻居 k。这保证了回溯游走 $i \sim k \sim i$的存在，由此可得 $a_{iki} = 1$。因此，对于每个 i，对角线元素满足：

$$m_{ii} \geq a_{iki} = 1 > 0,$$

矩阵理论中的一个经典结果表明，具有严格正对角线的不可约非负矩阵是本原的。由于 $M(\mathcal{A})$满足这些条件，因此它是本原的。因此，张量 $\mathcal{A}$是弱本原的。■

III. 一般超图的两步特征向量中心性

A. 超图两步特征向量中心性（*HTEC*）的定义

本节提出一种新颖的基于张量的中心性度量——超图两步特征向量中心性（HTEC）。

超图 $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$可以用其关联二部图表示，记为 $B(H)$。$B(H)$ 的节点集由原始节点和超边的并集构成。在这种结构中，当且仅当某个节点属于某条超边时，两者之间才有一条无向边，如图1所示。如果 H 是连通的，那么 $B(H)$也是连通的。这一结构性质使我们能够直接应用所提出的两步张量模型来定义超图中的中心性。我们将超图中心性度量定义如下，并称之为超图两步特征向量中心性（HTEC）。

定义 *3*： 设 $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个连通超图。设 $B(H) = (V_B, E_B)$ 表示 H 的关联二部图，其节点集 $V_B = \mathcal{V} \cup \mathcal{E}$ 的大小为 $n = |\mathcal{V}| + |\mathcal{E}|$。设 $\mathcal{A}(B)$ 是与 $B(H)$ 相关联的两步张量。超图两步中心性向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 定义为 $\mathcal{A}$ 的唯一正特征向量，满足以下方程：

$$\mathcal{A}(B)\mathbf{x}^2 = \rho(B)\mathbf{x}^{[2]}, \tag{1}$$

其中， $\rho(B)$ 是 $\mathcal{A}(B)$ 的谱半径。

为了阐释这一度量的物理意义，我们将式（1）写成逐元素形式。对于任意节点 $i \in V_B$（代表原始节点或超边），其中心性得分满足：

$$\rho(B)x_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}x_j x_k. \tag{2}$$

对于关联图 $B(H)$，非零张量元素 a_{ijk} =1 对应一条两步游走 $i \sim j \sim k$。由于 $B(H)$的节点集由原始节点 $\mathcal{V}$ 和超边$\mathcal{E}$共同构成，因此对这条游走的解释取决于节点i 代表原始节点还是超边。

情形 1： 如果 i 是一个节点 $v \in \mathcal{V}$，那么两步游走的形式为 $v \sim e \sim u$，其中 $e \in \mathcal{E}$ 是超边，$u \in \mathcal{V}$ 是节点。此时， $a_{veu} = 1$ 表示通过共享超边 e形成的共同隶属关系。将$a_{veu} = 1$ 代入式（2），可知节点 i的影响力由超边和邻居（$x_e x_u$）得分的乘积来量化。因此，节点 v 获得高中心性，不仅是因为它属于许多超边，还因为它与其他有影响力的节点（x_u 较高）共享有影响力的超边（x_e 较高）。例如，在科学合作网络中，研究人员要成为中心，不仅要在顶级期刊上发表论文（超边质量高），还要与杰出学者开展协作（节点质量高）。

情况 2： 对称地，若 i 是超边 $e \in \mathcal{E}$，则两步游走的形式为 $e \sim v \sim f$，其中 $v \in \mathcal{V}$ 是共同节点， $f \in \mathcal{E}$ 是超边。在这种情况下，如果一条超边与其他有影响力的超边共享节点，它就会获得较高的中心性。例如，研究团队的成员若也与其他知名团队合作，该团队的排名就会较高。

自然可以将我们的方法与应用于关联二部图$B(H)$的标准特征向量中心性进行比较。用逐元素形式表示时，节点 i 的标准特征向量中心性由其邻居得分的线性和决定。在超图中，这意味着一个节点的重要性等于它所属超边的重要性之和，而一条超边的重要性则等于其组成节点的重要性之和。相比之下，我们提出的模型 $\rho x_i^2 = \sum_j^n {}_{k=1} a_{ijk}x_j x_k$ 依赖于乘积项，其中每条两步游走的贡献由超边得分与邻居得分的乘积决定。因此，与强调邻居数量的标准特征向量中心性模型不同，所提出的模型强调相连超边与邻居的联合影响。

B. 组合解释：两步扩展树的几何容量

在谱图论中，标准特征向量中心性与游走计数的极限分布相关，这是一项经典结果。类似地，在本部分中，我们为所提出的 HTEC 度量提供组合解释。具体而言，我们证明，HTEC 刻画了两步扩展树的极限几何容量。

我们首先重新审视标准特征向量中心性的组合解释，然后将其扩展到我们的方法。我们定义线性展开树 及其相关的线性容量，因为它们对以下分析十分重要。

定义*4*：设 G 是一个邻接矩阵为 A =(a_{ij}) 的简单图。对于任意节点 i，深度为 t 的线性展开树记作 $\mathcal{L}_t(i)$，并递归定义如下：

1）基础情形（$t = 0$）： $\mathcal{L}_0(i)$ 由一个单节点 i （根）组成。2）递归步骤（$t > 0$）： $\mathcal{L}_t(i)$ 的根为 i。对于与 i 相连的每个邻居 j （即 G 中的每条游走 $i \sim j$），根都以一个子树作为子节点：以节点 j 为根、深度为 $t-1$ 的树 $\mathcal{L}_{t-1}(j)$。

图2中间的面板给出了该线性展开树的示意图。基于这一递归结构，我们定义扩展树的线性容量。

定义*5*： 线性展开树的线性容量记作 $L_t(i)$，是与扩展树 $\mathcal{L}_t(i)$ 相关的定量值。其定义由以下递归公式给出：

$$L_t(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}L_{t-1}(j), \quad \text{for } t > 0, \tag{3}$$

其中，若存在一条边 $i \sim j$ 属于 G，则 $a_{ij} = 1$；否则为 $a_{ij} = 0$。初始条件为：对于所有 i， $L_0(i) = 1$。

我们可以看到，这种关系是线性的：当前节点的值是其邻居值的直接求和。众所周知，当长度 t 趋于无穷时，这些值构成的归一化向量会收敛到非二部图 [29]的标准特征向量中心性。因此，标准特征向量中心性可以视为这种线性容量的极限。

现在，我们将上述思路扩展到我们的方法。正如线性展开树刻画了一步邻居关系，我们需要刻画超图二部表示中的两步邻居关系。具体而言，两步游走 $i \sim j \sim k$ 意味着节点 i 由节点 j 和 k组合确定。由此得到如下两步扩展树的递归定义。图 2 右侧面板给出了该线性展开树的示意图。

定义 *6*：设 $B(H)$ 为关联二部图。对于任意节点 i，深度为 t 的两步扩展树记作 $\mathcal{T}_t(i)$，递归定义如下：

1）基础情形（$t = 0$）： $\mathcal{T}_0(i)$ 由单节点 i （根）组成。2）递归步骤（$t > 0$）： $\mathcal{T}_t(i)$ 的根为 i。对于从节点 i 出发、在 $B(H)$ 中的每条两步游走 $i \sim j \sim k$，根都以两棵子树作为子节点：一棵是以节点 j 为根、深度为 $t-1$ 的左子树 $\mathcal{T}_{t-1}(j)$，另一棵是以节点 k 为根、深度为 $t-1$ 的右子树 $\mathcal{T}_{t-1}(k)$。

这种树结构展示了根与节点对 j 和 k 相连。基于这种结构，我们定义一种度量来量化其容量。

定义 *7*：两步展开树的几何容量，记为 $C_t(i)$，是与之关联的量化值

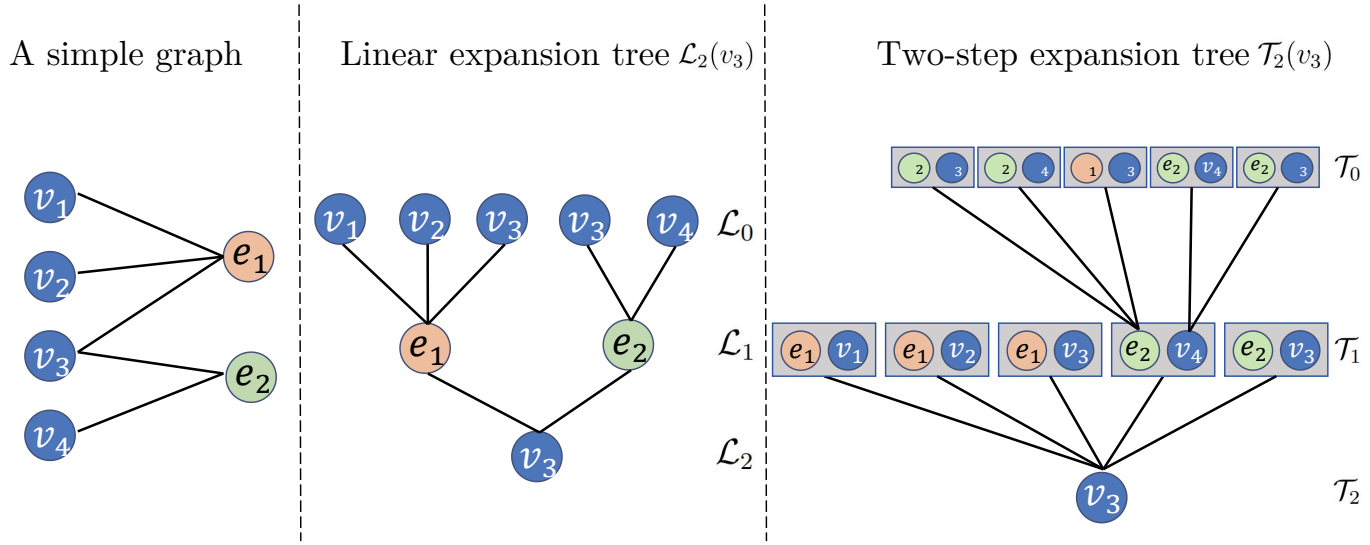


图2. 以节点 v_3 为根、深度为 $t=2$ 的扩展树示意图及比较。左图显示简单图。中图展示线性展开树 $\mathcal{L}_2(v_3)$。右图展示两步扩展树 $\mathcal{T}_2(v_3)$。

与展开树 $\mathcal{T}_t(i)$ 相关。其定义如下递归公式：

$$C_t(i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} C_{t-1}(j) C_{t-1}(k)}, \quad \text{for } t > 0, \tag{4}$$

其中，如果在 $B(H)$ 中存在一条游走 $i \sim j \sim k$，则为 $a_{ijk} = 1$；否则为 $a_{ijk} = 0$。初始条件为：对所有 i，$C_0(i) = 1$。

乘积项 $C_{t-1}(j)C_{t-1}(k)$ 表明，根的容量取决于成对分支的联合贡献。

定义深度为 t 的两步扩展树的几何容量后，自然会产生一个问题：随着树无限增长，这些容量的极限是什么？下面的定理证明，这些容量构成的归一化向量收敛于我们提出的HTEC中心性。

定理1：设 $\mathbf{C}_t = (C_t(1) \ldots, C_t(n))^\top$ 为深度为t的两步扩展树的几何容量向量。设$\mathbf{u}_t$ 为如下给出的归一化容量向量：

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{C}_t}{\|\mathbf{C}_t\|}. \tag{5}$$

假设两步张量 $\mathcal{A}$非负且弱原始。当深度为 $t \to \infty$时，序列 $\{\mathbf{u}_t\}$ 收敛到满足特征值方程 $\mathcal{A}\mathbf{x}^2 = \rho\mathbf{x}^{[2]}$, 的唯一正HTEC 向量$\mathbf{x}$，其中 ρ 是 $\mathcal{A}$的谱半径。

证明：证明的关键在于，建立几何容量的递归定义与用于求张量的佩龙向量的幂迭代法之间的等价关系。

考虑用于计算张量 $\mathcal{A}$ 的谱半径的标准幂迭代算法。设 $\{\mathbf{y}^{(t)}\}$ 为从$\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{1}$开始，由迭代生成的向量序列：

$$y_i^{(t)} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} y_j^{(t-1)} y_k^{(t-1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

我们注意到，这一迭代更新规则在数学上与式（4）中给出的几何容量递推公式完全相同。为正式验证这一点，我们通过数学归纳法证明，对所有 $t \geq 0$，都有$\mathbf{C}_t = \mathbf{y}^{(t)}$。

首先，对于基础情形（$t = 0$），根据定义，对所有 i，$C_0(i) = 1$，且幂迭代以 $y_i^{(0)} = 1$ 初始化。因此，$\mathbf{C}_0 = \mathbf{y}^{(0)}$。接下来，对于归纳步骤，假设 $\mathbf{C}_{t-1} = \mathbf{y}^{(t-1)}$。将其代入递归式可得：

$$\begin{aligned} C_t(i) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} C_{t-1}(j) C_{t-1}(k)} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} y_j^{(t-1)} y_k^{(t-1)}} \\ &= y_i^{(t)}. \end{aligned} \tag{7}$$

这表明几何容量向量$\mathbf{C}_t$ 与迭代向量$\mathbf{y}^{(t)}$相同。

在确立这一等价关系后，我们使用非负张量的Perron-Frobenius理论 [27]。由于 $\mathcal{A}$ 是非负弱本原张量，幂迭代的归一化序列保证收敛到与谱半径 ρ相关联的唯一正特征向量$\mathbf{x}$。因此，归一化容量向量$\mathbf{u}_t$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{u}_t = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{C}_t}{\|\mathbf{C}_t\|} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{y}^{(t)}}{\|\mathbf{y}^{(t)}\|} = \mathbf{x},$$

其中，$\mathbf{x}$ 是满足 $\mathcal{A}\mathbf{x}^2 = \rho\mathbf{x}^{[2]}$ 的唯一 HTEC 向量。 ■

该定理提供了一种具体的组合解释：HTEC 分量 x_i 表示以节点 i 为根的两步扩展树的极限几何容量，从而衡量节点 i 从其配对邻居聚合影响的能力。

C. 数值示例与算法

上文小节提供了理论解释。现在我们使用幂迭代法考察 HTEC 的计算过程。这种方法揭示了节点与超边相互更新其重要性的强化机制。为便于理解，我们将详细说明每次迭代的过程，以阐释其结构含义。

给定一个连通超图 H 及其两步张量$\mathcal{A}=(a_{ijk})$，中心性向量通过以下迭代计算：

$$x_i^{(t+1)}=\left(\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}x_j^{(t)}x_k^{(t)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从全 1 初始向量$\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{1}$开始，这种非线性更新会基于两步游走的联合影响强化节点得分。由于 $\mathcal{A}$ 是弱本原的，该迭代序列保证收敛到唯一的正佩龙向量。

我们将介绍前两次迭代的细节。首先，从初始向量$\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{1}$开始，这意味着我们假设每个节点和超边具有相同的初始重要性。将$\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{1}$ 代入更新公式后，得到

$$x_i^{(1)}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}x_j^{(0)}x_k^{(0)}}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}\cdot 1\cdot 1}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}}.$$

根据 i 是节点还是超边，这个求和具有结构含义。

情况 1： 对于节点 v，其值 $x_v^{(1)}$ 由该节点 v 所属的所有超边的大小之和决定（数学上表示为 $\sum_{v\in e}|e|$）。换句话说，在第一步中，加入较大群组的节点会获得更高的分数。这反映了一个节点能够接触到的邻居数量。

情况 2： 对于超边 e：其值 $x_e^{(1)}$ 由超边 e 中所有节点的度之和决定（数学上表示为 $\sum_{v\in e}d(v)$）。也就是说，在第一步中，如果一条超边包含的节点属于许多其他群组，那么它就会获得更高的分数。

在第二次迭代中，我们有

$$x_i^{(2)}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n}a_{ijk}x_j^{(1)}x_k^{(1)}}.$$

我们分析节点和超边的具体含义。具体而言，对于节点 $v\in V$：

$$x_v^{(2)}=\sqrt{\sum_{v,u\in e}x_e^{(1)}x_u^{(1)}}.$$

节点 v 的中心性通过结合超边 e和节点 u的重要性进行更新。如果超边 e不重要，或者邻居 u 较弱，乘积就会降低。因此，这表明，只有当节点与其他排名较高的节点和超边相连时，才能获得高分。对称地，超边 e的中心性根据节点 v 和相交超边 f的得分进行更新：

$$x_e^{(2)}=\sqrt{\sum_{v\in e,v\in f}x_v^{(1)}x_f^{(1)}}.$$

该公式表明，只有当超边包含排名靠前的节点 $x_v^{(1)}$，且这些节点也属于其他排名靠前的超边 $x_f^{(1)}$ 时，该超边才能获得高分。因此，该方法依据超边交集的重要性对超边进行排名，而非仅仅依据其大小或所包含的节点数量。

基于上述讨论，我们提出算法1来计算超图两步特征向量中心性。算法1涉及计算张量的谱半径及其对应的特征向量。对此主题感兴趣的读者可参阅文献 [30]–[32]。

算法1 超图两步特征向量中心性（HTEC）

输入： 一个包含 $n_v=|V|$ 个节点和 $n_e=|\mathcal{E}|$ 条超边的连通超图 $H=(V,\mathcal{E})$。

输出：

节点中心性向量 $\mathbf{x}_V\in\mathbb{R}^{n_v}$;

超边中心性向量 $\mathbf{x}_E\in\mathbb{R}^{n_e}$。

步骤 1： 构建关联二部图 $B(H)$，其中节点集为 $V\cup\mathcal{E}$（节点使用前 n_v 个索引，超边使用后续 n_e 个索引）。总维度为$n=n_v+n_e$。

步骤 2： 从 $B(H)$ 构建两步张量 $\mathcal{A}$。

步骤 3： 选择一个初始正向量 $\mathbf{x}^{(0)}\in\mathbb{R}^n$（例如，$\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{1}$）。计算 $\mathbf{y}^{(0)}=\mathcal{A}(\mathbf{x}^{(0)})^2$。设置迭代计数器 $k=1$。

步骤 4： 计算更新后的向量和界限：

$$\mathbf{x}^{(k)}=\frac{(\mathbf{y}^{(k-1)})^{[\frac{1}{2}]}}{\|(\mathbf{y}^{(k-1)})^{[\frac{1}{2}]}\|},\quad \mathbf{y}^{(k)}=\mathcal{A}(\mathbf{x}^{(k)})^2,$$

$$\underline{\lambda}_k=\min_i\frac{y_i^{(k)}}{(x_i^{(k)})^2},\quad \overline{\lambda}_k=\max_i\frac{y_i^{(k)}}{(x_i^{(k)})^2}.$$

步骤 5：

if $\overline{\lambda}_k=\underline{\lambda}_k$ **then**

转到**步骤 6**。

否则

设置 $k\leftarrow k+1$ 并返回**步骤 4**。

结束 if

步骤 6： 对收敛向量 $\mathbf{x}^{(k)}$ 进行划分，以获得最终的中心性：

$$\mathbf{x}_V=\left(x_1^{(k)},\ldots,x_{n_v}^{(k)}\right)^\top,\quad \mathbf{x}_E=\left(x_{n_v+1}^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)^\top.$$

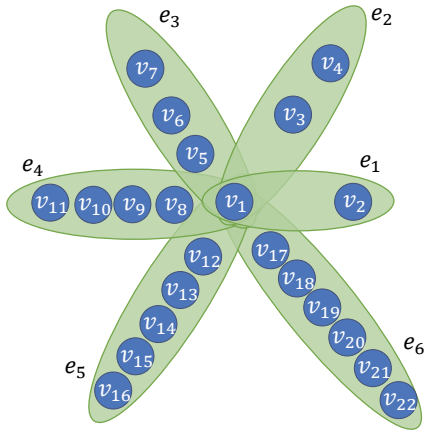


图3. 边大小从2到7的非均匀向日葵超图。

为展示所提出的超图两步中心性的机制，我们构建了一个非均匀向日葵超图，如图 3 所示。该向日葵超图由一个中心枢纽节点 v_1 和与其共享的六条不同超边 $\{e_1, \ldots, e_6\}$ 构成。这些超边的基数逐渐增大，范围从 $|e_1| = 2$ 到 $|e_6| = 7$。除中心枢纽 v_1 外，所有其他节点都是叶节点，且只出现在一条超边中。

我们计算了超图两步中心性向量**x**，并在表I中总结了数值结果。分析结果揭示了一种基数强化机制。首先，正如预期，中心枢纽 v_1 由于在所有群组中具有全局连通性，获得了最高的中心性得分（0.3489）。虽然所有叶节点的度均为1，但其得分会根据所属超边的大小而显著不同。具体而言，最小超边（$|e_1| = 2$）中的节点 v_2 得分最低（0.0941），而最大边（$|e_6| = 7$）中的节点 $v_{17} - v_{22}$则获得最高的叶节点得分（0.1953）。同样，超边也按大小排序，其中最大的超边 e_6 被认定为最重要（0.2749），而最小的超边 e_1 排名最低（0.2192）。这一机制很直接：较大的群组能提供更多连接。在我们的张量模型中，超边中的每个成员都会通过两步游走（$v_i \to e \to v_j$）为节点得分作出贡献。例如，在最大边（$|e| = 7$）中，一个节点会获得其他6个成员的贡献；相比之下，在最小边（$|e| = 2$）中，它只会获得其他1个成员的贡献。由于算法会将这些贡献累加，参与较大规模协作的节点自然会累积更高的得分。

IV. 真实世界超图实验

本节将所提出的超图两步特征向量中心性模型（HTEC）应用于两个真实世界的超图进行分析：*Math-StackExchange* 共标签数据集 [33]和 *Walmart-Trips*数据集 [34]。这两个数据集可在 https://github.com/ftudisco/node-edge-hypergraph-centrality 获取。Math-StackExchange 共标签数据集捕捉了数学问题在 math.stackexchange.com 上的高阶共标签结构。节点表示标签，超边由应用于同一问题的一组标签构成。Walmart-Trips 数据集源自描述客户购买行为的交易数据。在该超图中，节点表示特定产品，而每条超边对应一次出行中共同购买的一组商品。这两个数据集的基本统计数据汇总于表II。

表 I 非均匀向日葵超图中的中心性得分。

超边编号	超边得分 (x_e)	节点 ID	节点得分 (x_v)
-	-	v_1	**0.3489**
e_1	0.2192	v_2	0.0941
e_2	0.2249	$v_3,\ v_4$	0.1076
e_3	0.2324	$v_5 - v_7$	0.1235
e_4	0.2425	$v_8 - v_{11}$	0.1426
e_5	0.2560	$v_{12} - v_{16}$	0.1659
e_6	**0.2749**	$v_{17} - v_{22}$	0.1953

为分析所提出的超图两步特征向量中心性（HTEC）的表现，我们将其排名结果与三种超图中心性模型进行比较：Linear、Max 和 Log-Exp 模型中心性 [20]。这些中心性度量将在后文介绍。图4分别展示了 Walmart 和 Math-StackExchange 数据集上节点与超边中心性的散点图。横轴表示所提出的 HTEC，纵轴表示其他中心性度量。每个点代表一个独立的节点或超边。

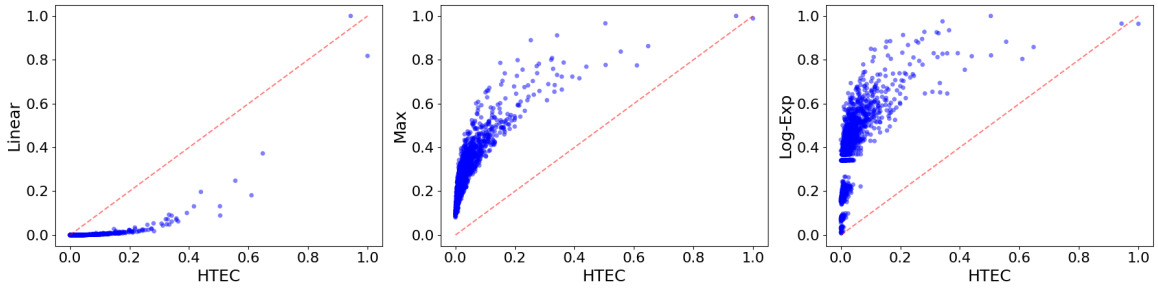
Linear 中心性模型对应于将标准特征向量中心性应用于输入超图经团扩展后得到的图和线图 [20]。将其与我们的 HTEC 方法进行比较，可以看到超边和节点呈现出不同的模式，见图4左列。对于超边，数据点紧密分布在对角线附近，表明这两种方法对超边的排名高度一致。相比之下，节点中心性图中的点分布更为分散。值得注意的是，在 Walmart 出行超图中，有一簇节点在 Linear 模型中的得分较低，但在 HTEC 模型中却被赋予了较高的值。

在最大值中心性模型中，节点的重要性并非由其连接之和决定，而主要取决于它所属的单一最重要超边 [20]。与最大值中心性模型的比较表明，两种方法在重要性排序上具有很强的一致性。如图4中间一列所示，数据点表明两种模型以相似的顺序识别节点。由于最大值模型根据节点单一最重要的关联超边来赋予其重要性，这种相似性表明所提出的HTEC 方法也显著受到节点所属最突出超边的影响。这一行为与相互强化机制一致，即节点的得分因其与有影响力的群体相关联而得到提升。

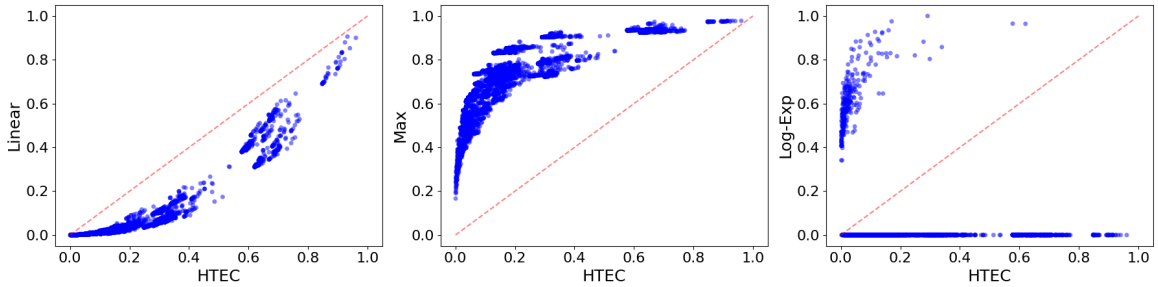
对数-指数中心性模型利用对数映射和指数映射，将均匀超图的Z-特征向量中心性推广到非均匀超图 [20]。该rela-

表II Math-StackExchange 共标签和 Walmart-Trips 数据集的统计信息。

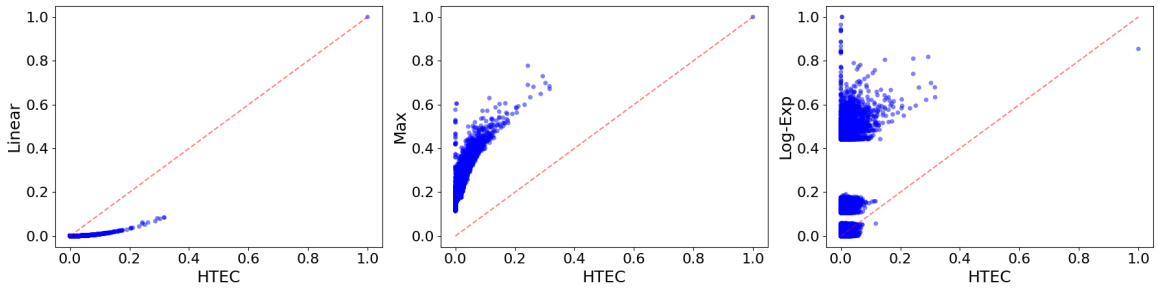
数据集	数量 节点	数量 超边	平均超边 基数	最大超边 基数
Math-StackExchange	1,629	170,476	3.48	5
Walmart-Trips	88,860	65,979	6.86	25



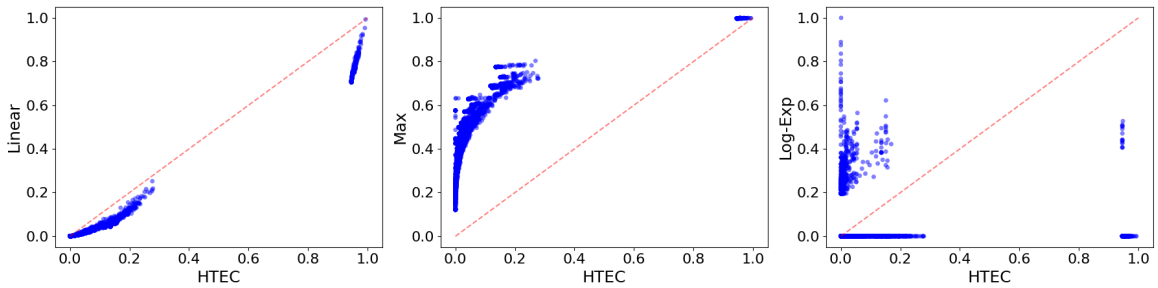
(a) Math-StackExchange 共标签数据集节点中心性



(b) Math-StackExchange 共标签数据集超边中心性



(c) 沃尔玛出行数据集节点中心性



(d) 沃尔玛出行数据集超边中心性

图4. HTEC、线性、最大值和对数指数模型中心性的节点与边中心性散点图。

表III 数学Stack Exchange共标签超图中排名前10的节点。

线性 [20]	最大值 [20]	对数-指数 [20]	HTEC
微积分	微积分	线性代数	实分析
实分析	实分析	概率论	微积分
积分	线性代数	微积分	积分
数列与级数	概率论	实分析	分析
极限	抽象代数	复分析	数列与级数
分析	积分	代数预备微积分	泛函分析
导数	数列与级数	一般拓扑学	线性代数
线性代数	矩阵	微分方程	极限
多元微积分	一般拓扑学	组合学	导数
定积分	组合学	几何学	多变量微积分

HTEC 与对数-指数模型之间的相关性在所有方法中最弱。如图4右列所示，许多节点的对数-指数得分较低，但 HTEC 得分各不相同。这是因为对数-指数模型会将邻居的得分相乘。在这一过程中，即使其他节点很重要，一个排名靠后的节点也会拉低整个超边的得分。相比之下，HTEC 方法通过累加两步游走来计算得分。这意味着最终得分反映了所有邻居的总贡献。因此，即使超边中包含一个排名靠后的节点，其他排名靠前的节点也能使该超边保持较高得分。

为具体展示排名结果，表III列出了每种方法识别出的前10个标签。HTEC、线性和最大值方法的结果高度一致。这三种方法都将“微积分”和“实分析”等基础主题排在前列。这证实了 HTEC 与其他中心性度量类似，能够有效识别最重要的节点。相比之下，对数-指数模型得出的列表有所不同。例如，它将“概率论”的排名大幅提前（第2位），并纳入“代数预备微积分”等其他列表中没有出现的独特标签。

接下来，我们分析前k 名排序的一致性。由于实际应用通常更关注排名靠前的元素，而非完整列表，我们计算 HTEC 方法与另外三种方法——线性、最大值和对数-指数中心性模型 [20]——之间的 Kendall 和 Spearman 相关系数。Walmart 出行数据集和 Math-StackExchange 共同标签数据集的结果如图5所示。

对于节点中心性，图5(a)和(c)中的相关性趋势表明，在所有 k 取值下，线性模型与 HTEC 的相关性最高（蓝线）。这种高度一致性表明，HTEC 与线性模型具有一个关键特征：两种方法都会给具有大量连接的节点较高排名。相比之下，对数-指数模型（橙线）的相关性最低，明显低于其他模型。这种差异源于其特定的“先乘后加”机制：与 HTEC 不同，对数-指数模型会先将每条超边内各节点的分数相乘，因此单个低分节点就会形成严格惩罚，大幅降低该超边的贡献。最后，最大值模型（绿线）居于中间。原因在于，最大值中心性模型只考察最佳的单个连接，而忽略其余连接。

就超边中心性而言，相关曲线呈现出更为复杂的模式，各条曲线经常相交。起初（当 k 较小时），相关值较低。这表明，对于排名靠前的节点，每种方法识别出的超边集合各不相同。随着纳入更多超边（当 k 变大时），与线性模型的相关性上升，并最终高于其他方法。这一上升趋势表明，尽管列表最顶端的具体超边在HTEC与线性之间有所不同，但随着列表扩大，所选超边的整体集合越来越一致。换言之，分歧集中在排名靠前的部分，而对于更长的列表，这两种方法往往纳入相似的超边组。

V. 结论

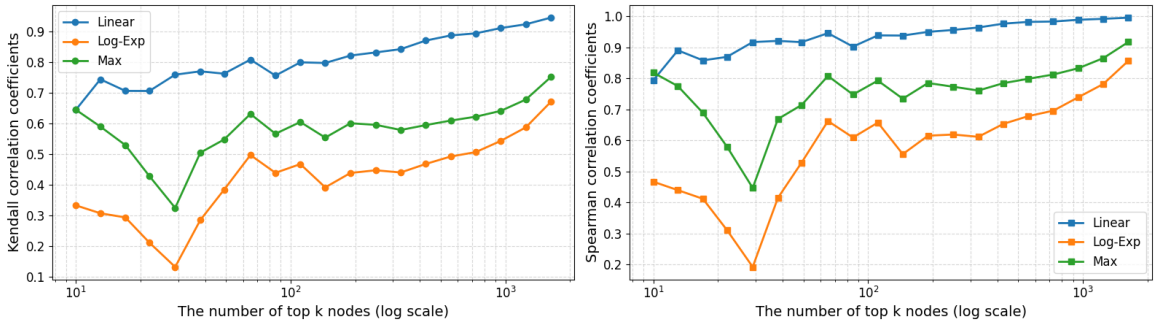
本文提出了一种适用于一般超图的新型中心性度量，即超图两步特征向量中心性（HTEC）。通过将超图转换为其关联二部图，并构建三阶张量来编码两步游走，我们借助佩龙-弗罗贝尼乌斯定理推导出了一个保证存在且唯一的中心性向量。此外，我们还为该度量提供了组合解释：我们证明，中心性向量表示两步扩展树的极限几何容量，用于衡量节点的结构重要性。所提出的HTEC度量通过非线性更新规则捕捉高阶相互强化机制。不同于标准的特征向量中心性——后者对邻居分数进行线性求和——HTEC要求连接超边与邻居节点同时具备足够的强度。在两个真实世界超图上的实验结果证实，HTEC能够识别重要的节点和超边，为一般超图的结构分析提供了有效工具。未来的工作将重点放在把所提出的张量框架扩展到多层网络，以结合不同层的连接来量化节点中心性。

致谢

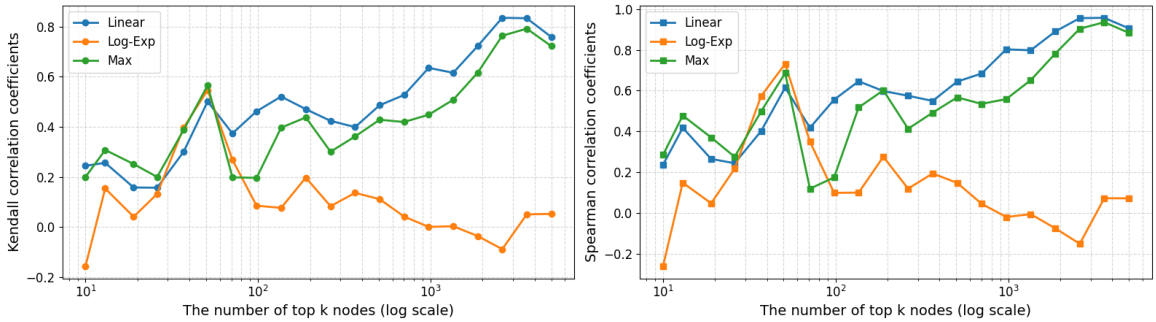
本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12071097、12371344）、黑龙江省优秀青年人才自然科学基金（项目编号：YQ2024A009）以及中央高校基本科研业务费（项目编号：2412025QD038）的资助。

参考文献

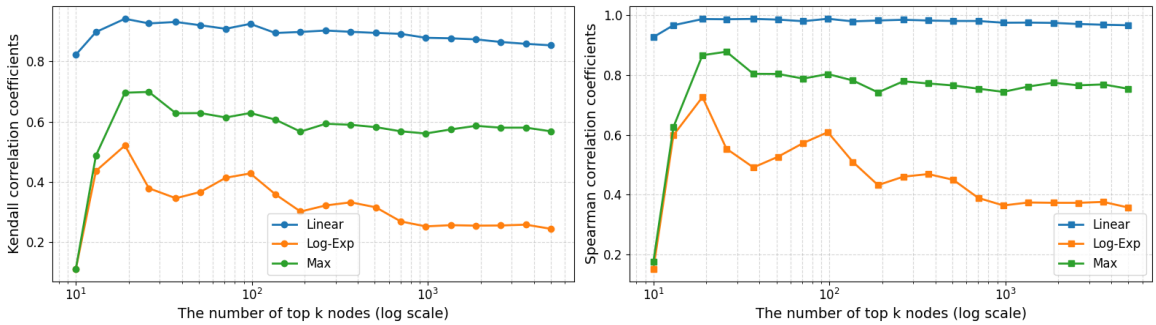
[1] C. Berge, 《超图：有限集的组合学》, 爱思唯尔 45 (1984). [2] L. L¨u, D. Chen, X. L. Ren, Q. M. Zhang, Y. C. Zang, T. Zhou, 《复杂网络中的关键节点识别》, Phys. Rep. 650 (2016) 1–63. [3] E. Estrada, J. A. Rodr´ıguez-Vel´azquez.《复杂网络中的子图中心性》。《物理评论E》, 71 (2005) 056103. [4] E. Estrada, J. A. Rodr´ıguez-Vel´azquez.《复杂超网络中的子图中心性与聚类》。《物理学A辑：统计力学及其应用》364 (2006) 581–594. [5] P. Bonacich, 《权力与中心性：一类度量》, Am. J. Sociol. 92 (5) (1987) 1170–1182. [6] P. Bonacich, 《特征向量中心性的一些独特性质》, Social Networks, 29 (4) (2007) 555–564. [7] D. Chen, J. Chen, X. Zhang, Q. Jia, X. Liu, Y. Sun, L. L¨u, W. Yu, 《复杂网络中的关键节点识别：综述》, Complex Eng. Syst. 2025, 5, 11.



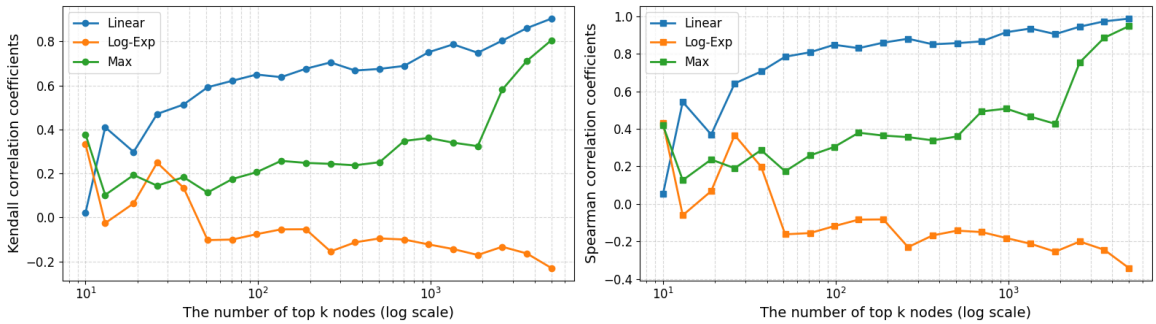
(a) Math-StackExchange 共标签数据集的节点中心性相关性



(b) Math-StackExchange 共标签数据集的超边中心性相关性



(c) 沃尔玛出行数据集的节点中心性相关性



(d) 沃尔玛出行数据集的超边中心性相关性

图5. HTEC、线性、最大值和对数指数模型中心性所得到的排名前 k 的节点和超边的相似性。

[8] M. Fan, Z. Cao, J. Cheng, F. Yang, X. Qi, 《具有结构零点或单位点的度类中心性：何时邻居不是邻居？》Social Networks 63 (2020)38–46.

[9] D. F. Gleich, 《网络之外的 PageRank》, SIAM Rev. 57 (3) (2015) 321–363。[10] A.R.Benson, 《三种超图特征向量中心性》, SIAM J. Math.

Data Sci. 1 (2) (2019) 293–312。[11] L. Qi, 《实对称张量的特征值》, J. Symb. Comput. 40 (2005) 1302-1324。[12] L. H. Lim, 《张量的奇异值与特征值：一种变分方法》, 载于：第一届 IEEE 多传感器自适应处理计算进展国际研讨会，2005，页码 129–132。[13] C. Liu, J. Zhou, C. Bu, 《图的高阶谱及其在图着色和团计数中的应用》, Linear Multilinear Algebra 71 (2023) 2354–2365。[14] A. R. Benson, D. F. Gleich, L. H. Lim, 《空间随机游走：一种用于高阶数据的随机过程》, SIAM Rev. 59 (2) (2017) 321– 345。[15] J. Cooper, A. Dutle, 《均匀超图的谱》, Linear Algebra Appl. 436 (9) (2012) 3268–3292。[16] Y. Chen, L. Qi, X. Zhang, 《超图划分中拉普拉斯张量的 Fiedler 向量》, SIAM J. Sci. Comput. 39 (2017) A2508–A2537。[17] C. Liu, C. Bu, 《谱曼特尔定理的一种推广》, J. Comb. Optim. 46 (2023) 14。[18] C. Liu, J. Zhou, C. Bu, 《图的高阶谱极值结果及其应用》, Discrete Appl. Math. 357 (2024) 209–214。[19] C. Liu, C. Bu, 《张量关于团数的谱界》, Discrete Math. 349 (2026) 114694。[20] F. Tudisco, D. J. Higham, 《超图的节点与边非线性特征向量中心性》, Commun. Phys. 4 (1) (2021) 201。[21] K. Kovalenko, M. Romance, E. Vasilyeva 等, 《超图中的向量中心性》, Chaos Soliton Fract. 162 (2022) 112397。[22] X. Xie, X. Zhan X, Z. Zhang Z 等, 《通过引力模型识别超图中的关键节点》, Chaos, 33 (2023) 1。[23] G. J. Clark, F. Thomaz, A. T. Stepshen, 《比较超图的主特征向量及其影图》, Linear Algebra Appl. 673 (2023) 46–68。[24] Q. Xu, L. Sun, C. Bu, 《复杂网络中的两步特征向量中心性》, Chaos Soliton Fract. 137 (2023) 113753。[25] M. Wu, S. He, Y. Zhang, J. Chen, Y. Sun, Y. Y. Liu, J. Zhang, H. V. Poor, 《用于研究多层网络中特征向量多重中心性的基于张量的框架》, Proc. Natl. Acad. Sci. 116 (31) (2019) 15407–15413。[26] Q. Zhang, L. Sun, C. Bu, 《图的子图特征向量中心性》, arXiv:2411.12409。[27] L, Qi, Z. Luo。《张量分析：谱理论与特殊张量》。工业与应用数学学会，2017。[28] S. Friedland, S. Gaubert, L. Han, 《非负多重线性形式的佩龙-弗罗贝尼乌斯定理及其推广》, Linear Algebra Appl. 438 (2013) 738–749。[29] D. M. Cvetkovi´c , P. Rowlinson, S. Simic, 《图的特征空间》, 剑桥大学出版社，1997。[30] M. Ng, L. Qi, G. Zhou, 《求非负张量的最大特征值》, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 31 (2010) 1090–1099。[31] Y. Liu, G. Zhou, N. F. Ibrahim, 《一种始终收敛的算法，用于求不可约非负张量的最大特征值》, J. Comput. Appl. Math, 235 (2010) 286–292。[32] G. Zhou, L. Qi, S. Y. Wu, 《计算非负张量最大特征值的高效算法》, Front. Math. China, 8 (2013) 155– 168。[33] A. R. Benson, R. Abebe, M. T. Schaub 等, 《单纯复形闭包与高阶链接预测》, 《美国国家科学院院刊》, 115(2018) 11221-11230。[34] I. Amburg, N. Veldt, A. R. Benson。《带有类别型边标签的图与超图聚类》, 《万维网大会论文集》, 2020 706 717-。