arXiv:2603.01523v1 [quant-ph] 2 Mar 2026

非线性耦合诱导的反常朗道-齐ener隧穿理论

Wen-YuanWang* 和 Hong-Juan Meng†甘肃省原子与分子物理及功能材料重点实验室，
西北师范大学物理与电子工程学院，中国兰州 730070

我们建立了一个关于双能级系统中朗道-齐ener（LZ）隧穿的一般理论，该系统具有依赖振幅且可反转符号的非线性耦合，这种耦合与传统的位点非线性有着根本区别。通过结合解析方法与相空间分析，我们表明，当相互作用强度超过临界值时，非线性耦合会从根本上重塑绝热能量景观，引入一种具有拓扑扭曲与打结结构的形态。这种结构导致标准 LZ 指数公式完全失效，即使在绝热极限下也不例外。这种反常行为的核心是类黑洞不动点的出现，它充当普适吸引子：所有量子轨迹在穿越临界区域后都会汇聚到该不动点，不可逆地抹去对初态的任何记忆。基于这一不动点图景，我们推导出绝热隧穿概率的精确解析表达式，揭示其对线性耦合强度和非线性耦合强度均具有特征性的幂律依赖。本研究为非线性耦合诱导的反常绝热性破缺建立了典范框架，并为受驱动的量子与波系统中的态控制提供了一种普适机制。

I. 引言

朗道–齐ener模型是量子动力学的基石之一，描述了线性变化的外场作用下两个能级之间的非绝热跃迁 [1, 2]。其著名的指数隧穿公式已在多种物理平台上得到验证，从超导量子比特 [3–6], 、氮-空位中心 [7], 、量子点 [8, 9], 、波导阵列 [10, 11], 到玻色–爱因斯坦凝聚体 [12–29], ，不胜枚举。朗道–齐ener模型已被拓展至非线性区域，此时能级能量取决于态占据数 [12–32]——这一现象源于玻色–爱因斯坦凝聚体、约瑟夫森系统和非线性光子结构中的平均场相互作用。近年来，通过考虑能级衰减和退相干效应 [33–37], 以及非互易耦合 [38–40], 非厄米系统中的朗道-齐ener隧穿拓展也得到了研究。

然而，现有关于非线性 LZ 问题的研究主要聚焦于位点非线性（例如克尔型项），其中相互作用取决于各个位点的局域密度 [12–32]。在这类系统中，能谱会形成环状结构并表现出滞后。对于低于临界值的相互作用强度，隧穿概率虽然有所改变，但在绝热极限下通常仍保持指数形式。一个关键发现是，当非线性参数足够大时，绝热性会显著崩溃，这一现象与能谱中的滞后和燕尾环直接相关 [12, 14, 15, 41]。通过将系统映射为一个等效的经典约瑟夫森哈密顿量，这一机制得到了有效解释：绝热极限下非零的隧穿概率对应于经典正则作用量的跳变 [14, 18, 38]。相比之下，非线性 LZ 问题中一种本质上不同且较少受到探索的非线性类型源于非线性耦合，即子系统之间的相互作用取决于它们的相对振幅或相位 [42–50]。这种非线性形式开启了一个不同的动力学机制。近期在声学和电路系统中的实验表明，非线性耦合能够构造出不同寻常的多稳态和非平凡的态转移路径，揭示了一个丰富但尚未充分探索的动力学机制 [50]。

本文介绍并求解了一个具有可编程非线性耦合的最简朗道-齐ener模型。与位点非线性不同，我们表明，非线性耦合会将绝热能量景观重塑为一种拓扑扭曲的结构，该结构在相空间中支持一条连续的不动点线。这种结构充当类似“黑洞”的吸引子，从根本上改变绝热流，并导致指数隧穿定律彻底失效。我们推导出隧穿概率的精确解析表达式，揭示了临界点附近普适的幂律标度。我们的理论不仅解释了近期在耦合谐振器系统中观察到的反常态转移，还为量子与经典波平台中非绝热跃迁的设计与控制提供了通用框架。

本文结构安排如下。在第II节，我们介绍具有非线性耦合的朗道-齐ener系统物理模型。第III节分析非线性耦合如何从根本上重塑绝热能量景观，并阐明其在驱动相变中的作用。在第IV节，我们研究非线性耦合诱导的反常朗道-齐ener隧穿，尤其关注绝热跟随的失效。第V节将提出一类新的非线性量子绝热定理。最后，第VI节将进行全面讨论并总结全文。

II. 具有非线性耦合的朗道–齐纳模型

我们考虑一个具有振幅依赖耦合的最简双能级系统，其由非线性薛定谔方程($\hbar = 1$)描述：

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = H(\gamma)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \quad H(\gamma) = \begin{pmatrix}\gamma & \alpha+\beta|a|^2\\ \alpha+\beta|a|^2 & -\gamma\end{pmatrix}. \quad (1)$$

* 电子邮箱：wywang@nwnu.edu.cn.
† 电子邮箱：mhjnx@163.com.

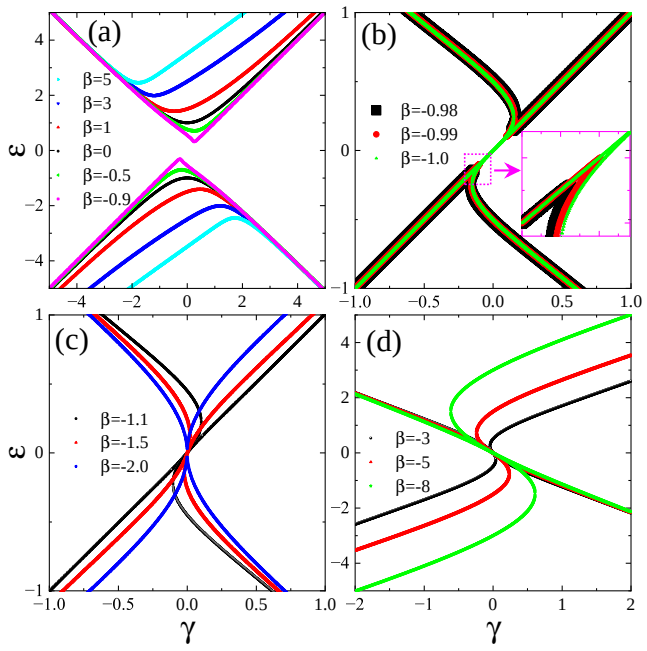

图1.（在线彩色）不同非线性耦合强度区域下，绝热能级 ε 随偏置γ 的变化。非线性耦合定性地改变能级结构，并诱导出四种不同的拓扑类型：(a) I型，当 $\beta \gtrsim -0.9575$时出现常规的避免交叉；(b) II型，当$-1 < \beta \lesssim -0.9575$时出现燕尾结构；(c) III型，当$-2 < \beta < -1$时出现扭结结构A；(d) IV型，当$\beta < -2$时出现扭结结构B。

这里，a 和b 是概率振幅（$|a|^2 + |b|^2 = 1$），$\gamma(t) = vt$ 是线性扫描偏置，其中v 是扫描速率，$\alpha > 0$ 是线性耦合，而 β 引入了振幅依赖的符号可逆耦合。这种耦合形式直接反映了近期在声学二聚体和主动超材料中的实验实现[50]。由于哈密顿量可以通过除以 α进行缩放，为方便起见，以下将 $\alpha = 1$设为能量单位。

III. 非线性耦合从根本上重塑绝热能量景观

为理解这一新问题中的朗道-齐ener隧穿，我们首先分析非线性模型中绝热能级的行为。通过求解非线性本征值问题$H(\gamma)\psi = \varepsilon\psi$，可得到绝热本征值 $\varepsilon(\gamma)$。当 $\beta = 0$时，我们恢复标准的避免交叉，其间隙为$\Omega = 2\alpha$。当 $\beta \neq 0$时，强度$I = |a|^2$的方程变为高阶多项式。我们发现本征能量ε 满足以下四次方程：

$$\varepsilon^4 + D\varepsilon^2 + E\varepsilon + F = 0\,, \tag{2}$$

其中 $D = -\frac{1}{4}\left(4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 + 4\gamma^2\right)$、$E = -\frac{1}{4}\left(4\alpha\beta\gamma + 2\beta^2\gamma\right)$和 $F = -\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2$。当 $\delta = 0$ 时，上式简化为 [12, 38]的方程。

根据参数的不同，该四次方程可能有两个或四个实根。在图 1（a）中，对于非线性耦合强度 $\beta \gtrsim -0.9575$ 时，能级结构呈现出常规的避免交叉。在没有非线性耦合（$\beta = 0$）时，上、下能级关于 $\gamma = 0$ 对称，并且在对称点处具有最小间隙 $\Omega = 2\alpha$。在此状态下，随着非线性耦合强度增大，两个能级之间的间隙变宽，关于 $\gamma = 0$ 的对称性被打破。随着非线性耦合强度增加，这种不对称性变得更加明显。我们将这种能级结构称为常规避免交叉（I型）。

当非线性耦合强度处于过渡区间 $-1 < \beta \lesssim -0$时，绝热谱中会出现燕尾结构。9575，如图 1(b) 所示。在燕尾区域内，实能级的数量增加到四个。随着非线性耦合强度增大，燕尾结构会愈发明显。我们将这种模式归类为燕尾结构（II型）。

当非线性耦合强度超过临界值 $\beta = -1$时，上、下绝热能级在 $\gamma = 0$处连接，形成扭结结构 [图 1(c) 和1(d)]。对于处于此区间的给定 β，存在相应的阈值γ_c，使得四个实能级在区间 $-\gamma_c < \gamma < \gamma_c$内共存。$\gamma_c$ 的值β分段变化：

- 对于 $-2 < \beta < -1$，γ_c 从$\beta = -1$ 处的最大值≈ 0.1843减小到 $\beta = -2$处的最小值0。
- 对于 $\beta < -2$，γ_c 随 $|\beta|$的增大而增大；因此，支持四个实根的区域随之扩大。

此外，结点处能级的斜率对 β呈分段依赖：

- 在 $-2 < \beta < -1$范围内，斜率为正。它从$\beta = -1$ 附近的1迅速上升，并随$\beta \to -2$发散。
- 对于 $\beta < -2$，斜率变为负值。从 $\beta = -2$处的$-\infty$开始，其绝对值逐渐减小，并在 β取强负值时渐近趋近于 -1。

为区分这两种区间，我们将区间 $-2 < \beta < -1$ 中的结构称为扭结结构A（III型），并将 $\beta < -2$ 所对应的结构称为扭结结构B（IV型）。为刻画绝热谱具有两个或四个实能级的参数区间，我们在非线性耦合强度 β与偏置 γ所张成的平面内构建了相图。如图2所示，蓝色阴影区域对应于 β 与γ 的组合，此时出现四个实绝热能级；而未着色（橙色）区域则表示仅存在两个实能级。临界区域在 $\beta \sim -1$ 附近的放大图见图2(b)。

相图根据图中识别出的四种不同拓扑类型进行划分。1，相应的标签 I–IV 标注在各自的参数区域中。可以清楚地观察到，在 I型（$\beta < -2$）中，随着 $|\beta|$ 和 $|\gamma|$的增大，支持四个实能级的区域也随之扩大。相反，在 III型（$-2 < \beta < -1$）中，四能级区域被限制在一个狭窄的窗口 $|\gamma| < 0$。25。II型代表一个非常狭窄的过渡区间（$-1 < \beta \lesssim -0$。9575），其中燕尾仅在一小段

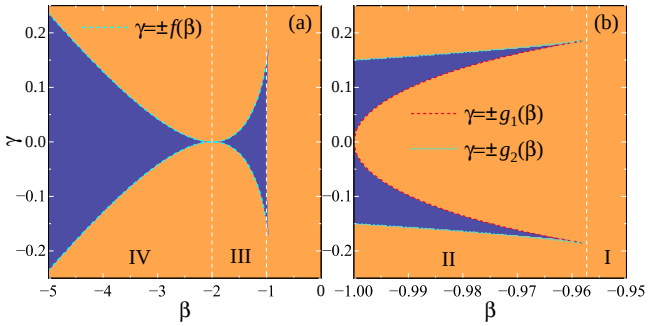

图 2.（网络版彩色）在（β, γ）参数空间中的相图，显示具有两个实绝热能级（橙色）和四个实绝热能级（阴影蓝色）的区域。由正文所述的不动点分析（式（8）和（9））推导出的解析边界 $f(\beta)$, $g_1(\beta)$, 以及 $g_2(\beta)$，均已标出，并且与数值确定的阴影区域高度吻合。标签 I、II、III 和 IV 分别对应图 1中所示的四种不同拓扑类型。

的 β区间内形成。对于 $\beta \lesssim -0.9575$（I型），无论 γ取何值，都只存在两个实能级，对应于传统的避免交叉结构。

数值计算得到的二能级区域与四能级区域之间的边界看起来平滑且清晰。下一节中，我们将通过不动点分析推导该边界的显式解析表达式。所得曲线记为 $f(\beta) = (\beta+2)^2/(8\beta\sqrt{1-(0.5+1/\beta)^2})$、$g_1(\beta) = \sqrt{\kappa\left(1-2\kappa-6\kappa^2\right)}$ 和 $g_2(\beta) = 0.15+0.636\kappa+2.4\kappa^2+40\kappa^3$，其中 $\kappa = \beta+1$；曲线绘于图 2 中，与数值相边界完美吻合。

IV. 非线性耦合诱导的反常朗道-齐ener隧穿

A. 非线性耦合诱导的朗道-齐ener隧穿

绝热谱中燕尾结构和扭曲结状结构的出现，导致了一种显著现象：即使在绝热极限下，绝热演化也会失效。正如非线性格点内相互作用扩展的朗道-齐ener模型 [12–14]，所预测的那样，当非线性参数超过临界值时，系统将无法再绝热地跟随瞬时本征态，因此无论偏置扫描得多慢，都会出现有限的隧穿概率。

为考察这一效应在我们非线性耦合模型中的表现，我们将系统初始化于下绝热分支，对应于 $(a, b)^{\mathrm{T}} = (1, 0)$，如 $\gamma \to -\infty$ 所示。随后线性增加偏置 γ。经过燕尾或扭曲结状区域时，会发生向上分支的非绝热跃迁。隧穿概率定义为扫描结束后转移到上能级的布居，其对非线性耦合强度 β 和扫描速率v十分敏感。

图3 展示了不同 β参数区间的隧穿概率。图(a)显示隧穿概率

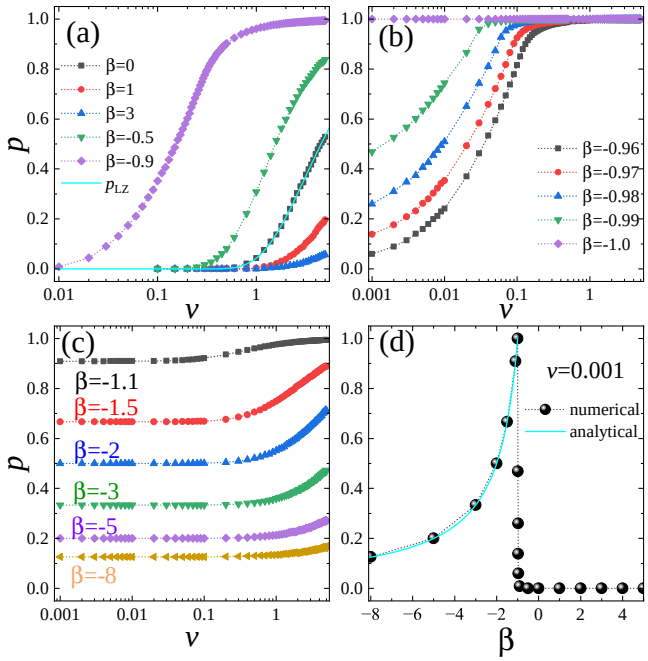

图3.（在线彩图）朗道-齐ener隧穿概率 p 由非线性耦合诱导 β, 作为扫描速率 v的函数绘制，分别对应（a）常规避免交叉能级结构区域（I型）、（b）燕尾能级结构区域（II型）以及（c）扭结能级结构区域（III型和IV型）。为便于比较，分图（a）包含线性情形的标准朗道-齐ener结果（$\beta = 0$）。分图（d）给出绝热隧穿概率随非线性耦合 β 的变化，其中 $v = 0.001$；数值数据以实心符号表示，而实线对应于解析表达式（11），该式由不动点分析得到。

p随扫描速率v 的变化，其中对应的是传统避免交叉结构区间（I型，$\beta > -0.9575$）。在此区间，概率遵循修正指数律。作为参考，图中还给出了标准朗道-齐ener结果 $p_{\mathrm{LZ}} = e^{-\pi\alpha^2/v}$（对应于 $\beta = 0$）；正如预期，当 $\beta = 0$ 时，数值数据与该解析曲线重合。有趣的是，在快速扫描情形下，随着 β 的值从 -0.9 增至 3，非绝热隧穿概率会降低。这种降低与图1(a)所示的避免交叉能隙增宽直接相关，因为对于给定的扫描速率，较大的能隙会抑制朗道-齐ener跃迁；这一趋势与标准朗道-齐ener公式所依据的物理图像一致。

当量子态演化发生在燕尾结构的区域（II型，$-1 < \beta \lesssim -0.9575$）时，如图 3(b) 所示，即使在扫描速度无限慢的极限下，仍会出现有限的绝热隧穿概率。完美绝热跟随的这一失效，根本上源于能级的拓扑重组——具体而言，即燕尾的出现；在定性上，这与早期研究中由位点非线性引起的效应类似 [12–14]。值得注意的是，绝热隧穿概率会随着非线性耦合强度增大而增加（即随着 β 变得更负）。这一趋势可直接追溯至图 1(b) 所示的能级结构演化：非线性耦合越强，两个燕

与上、下分支相关的燕尾结构彼此靠近，有效地降低了二者之间的能量势垒，从而增强了绝热跃迁。在临界值 $\beta = -1$处，燕尾结构在 $\gamma = 0$处相连，导致完全绝热隧穿。同样重要的是，在快速扫描（非绝热）区域，燕尾结构彼此靠近的相同趋势，使得即使在快速扫描下也能获得较高的隧穿概率。这一行为表明，非线性耦合为量子态的高效非绝热控制提供了一条可行途径，并为纯粹的绝热方案提供了互补策略。

最引人注目的是，当量子态演化经过扭结能级结构区域（III型和IV型）时，人们可能会直觉地预期态会经由结点实现完全转移（隧穿概率为 1）。然而，我们的计算揭示了截然不同的图景，如图 3（c）所示。III型（$-2 < \beta < -1$）和 IV 型（$\beta < -2$）在扫描速率趋于零时，均呈现非零的绝热隧穿概率。随着非线性耦合强度增大（即 β 变得更负），该概率会降低，并在接近 $\beta \approx -1$时从 1 开始下降。在此区域，隧穿概率对扫描速率的依赖相对稳健，这与常规的指数行为形成对比。

为阐明绝热隧穿与非线性耦合之间的关系，图 3（d）展示了固定较慢扫描速率下，绝热隧穿概率随 β 的变化$v = 0$。001 的结果清楚地区分了三个典型区域：在 I 型区域，有限能隙完全抑制绝热跃迁，使绝热隧穿概率为零。在狭窄的过渡性 II 型区间，绝热隧穿概率对 β的变化十分敏感，且呈非单调变化。最值得注意的是，在 III 型和 IV 型区域——能级在结点处相连——仍存在有限的绝热隧穿概率，这与绝热过程能够完美通过的朴素预期相矛盾。这种出乎意料的残余隧穿源于相空间不动点的拓扑重排，我们将在下文详细分析。图 3（d）中的实线表示通过不动点分析得到的解析结果 [方程（11）], , 与

数值数据点，并证实了我们理论描述的可靠性。

B. 非线性耦合导致绝热跟随的破坏

为了深入了解非线性耦合如何支配量子态演化中的绝热跟随及其破坏，我们计算了随时间演化过程中的动力学能量 [12, 29]。对于一个波函数 $\psi(\gamma = \alpha t) = (a(t), b(t))^{\mathrm{T}}$，它满足含哈密顿量的薛定谔方程（1），给定偏置下的动力学能量 γ 定义为瞬时期望值

$$\varepsilon_{\mathrm{dyn}}(\gamma) = \langle \psi(\gamma) | H(\gamma) | \psi(\gamma) \rangle. \qquad (3)$$

根据绝热定理，如果扫描足够慢，动力学能量应紧密跟踪其中之一

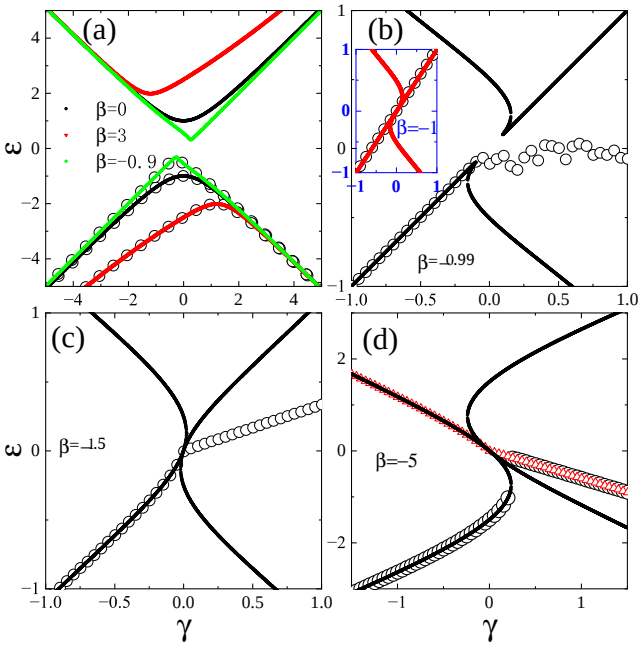

图 4.（在线彩色）非线性耦合导致量子态演化中的绝热跟随及其破坏。比较（a）I型区域、（b）II型区域、（c）III型区域和（d）IV型区域中的动力学能级 $\varepsilon_{\mathrm{dyn}}$（符号）与绝热能级（实线）。在（a）—（d）中，动力学能级（圆圈）是通过从下绝热分支演化得到的。在（d）中，动力学能级（三角形）从上绝热分支演化而来，以展示该区域中的独特行为。所有动力学演化均在绝热极限下以扫描速率 $\alpha = 0.001$ 计算。

绝热本征值。即使在极限 $\alpha \to 0$下，$\varepsilon_{\mathrm{dyn}}$ 持续偏离绝热分支，也标志着绝热性的破坏，并意味着绝热态 [12, 29] 之间存在有限的隧穿概率。

图4 比较了四种特征区域中的动力学能级（符号）与绝热能级（实线）。在 I型区域 [图4（a）], 中，动力学能级几乎完美地沿着下绝热分支演化，呈现出与线性情形（$\beta = 0$） [12]相似的行为。这种紧密跟随是常规避免交叉结构以及分隔两个绝热态的有限能隙直接导致的；在此，非线性耦合仅使能隙重新归一化，而不会破坏绝热性。因此，在该区域中，可以通过增大能隙并进一步抑制非绝热跃迁，利用非线性耦合来保护绝热演化。

在 II型区域，情况发生了定性变化[图4(b)]。虽然动力学能级最初沿着下绝热分支演化，但进入燕尾区域后，它明显偏离了该分支。这种偏离反映了绝热性开始失效，与早期研究中由较大的位点非线性引起的绝热性失效类似 [12, 14, 15,18, 41]。由于 II型区域在参数空间中只占据一个非常狭窄的范围（$-1 < \beta \lesssim -0$。9575），且早期关于燕尾诱导的绝热性失效的研究已充分阐明了其行为，因此此处不再赘述。

对于 III型和 IV型区域，绝热能级在结点处相连。由此自然产生一个问题：当量子态绝热地通过该结点时，它会继续沿着某一条绝热分支演化，还是会分裂成两个分支的叠加态？我们的计算表明，这两种传统情形都不会发生。

如图4(c)所示，其对应于III型区域（结点处斜率为正），动力学能级在到达结点之前紧密跟踪下绝热分支。然而，在穿过结点之后，该态既不停留在单一绝热分支上，也不会分裂为相干叠加态。相反，动力学能级偏离两条绝热曲线，呈现出任何瞬时本征态都无法描述的轨迹。在IV型区域也观察到类似的偏离 [图4(d)]。

为进一步阐明这一行为，我们在图4(d)中不仅考察了从下分支出发的演化（圆圈），也考察了从上绝热分支出发的演化（三角形）。令人惊讶的是，在穿过四实根区域之后，两条动力学轨迹变得无法区分——无论其初始条件如何，它们都收敛到同一条动力学路径。这种最初截然不同的绝热轨迹的不可区分性是非线性耦合诱导的相空间重构的标志，并与仅具有位点非线性的系统的行为形成鲜明对比。

在下文中，我们将对其背后的物理机制进行详细分析。通过对等效经典哈密顿量采用定点描述，我们表明，两条动力学轨迹的趋同源于系统唯一的类黑洞不动点，该不动点有效地抹去了初始绝热分支的记忆。这一机制是非线性耦合所特有的，它同时解释了图4(c)和4(d)中观察到的有限绝热隧穿概率和非传统动力学合并现象。

V. 非线性量子绝热定理

A. 类黑洞不动点

基于给定的矩阵方程1，我们引入布居差异 $s = |b|^2 - |a|^2$ 和相位差异$\theta = \theta_b - \theta_a$。利用概率守恒条件$|a|^2 + |b|^2 = 1$，我们推导出以下正则方程：

$$\dot{s} = -(2\alpha + \beta(1-s))\sqrt{1-s^2}\sin\theta, \tag{4a}$$

$$\dot{\theta} = 2\gamma + (2\alpha + \beta(1-s))\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta. \tag{4b}$$

这些方程（4a）和（4b）相对于非正则泊松括号$\{\theta,s\} = 2\alpha + \beta(1-s)$构成一个经典哈密顿量系统，并满足

$$\dot{s} = \{s, H_c\} = -\{\theta, s\}\frac{\partial H_c}{\partial\theta}, \quad \dot{\theta} = \{\theta, H_c\} = \{\theta, s\}\frac{\partial H_c}{\partial s}. \tag{5}$$

相应的经典哈密顿量可表示为：

$$H_c(s,\theta) = -\sqrt{1-s^2}\cos\theta - \frac{2\gamma}{\beta}\ln|2\alpha + \beta(1-s)|. \tag{6}$$

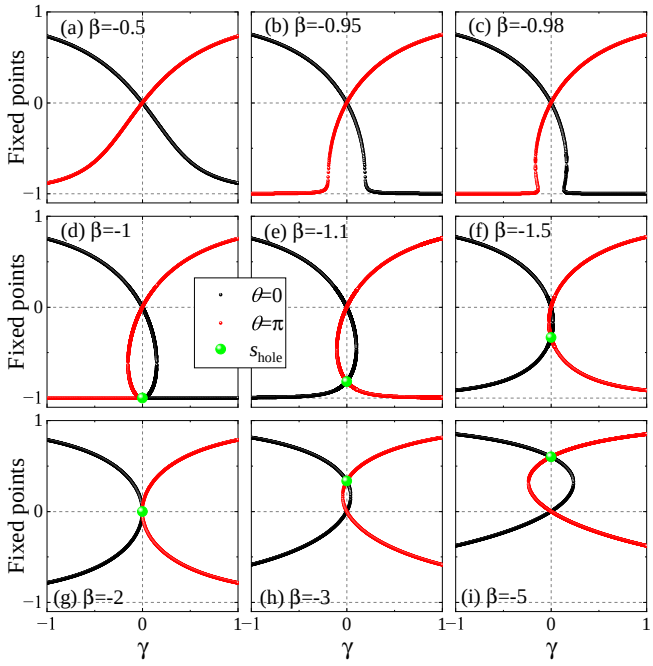

图 5. 不同非线性耦合强度 β 下，不动点 s_f 随偏置 γ 的变化。非线性耦合定性地改变了不动点拓扑和数量。绿色符号标示类黑洞不动点。

若改用标准泊松括号 $\{\theta,s\}$ =1，则该系统对 $\beta \neq 0$并不取标准哈密顿形式。仅在线性极限 $\beta = 0$ 下，哈密顿量才约化为 [51–53] $H_c = 2\gamma s - 2\alpha\sqrt{1-s^2}\cos\theta$，此时它满足标准正则关系 $\dot{s} = -\partial H_c/\partial\theta$ 和$\dot{\theta} = \partial H_c/\partial s$。

由正则方程 (4a) 和 (4b) 描述的系统，其不动点由以下条件确定：$\dot{s} = 0$ 和 $\dot{\theta} = 0$。（**i**）当 $\gamma = 0$ 时，始终存在两个孤立的不动点：$(s = 0, \theta = 0)$ 和 $(s = 0, \theta = \pi)$，以及一条满足 $\beta < -1$ 的不动点连续曲线：$s_{\rm hole} = 1 + 2\alpha/\beta$，其中 θ 可取任意值。这是由非线性耦合产生的独特不动点，在位点非线性系统中从未被发现。（下文将其称为类黑洞不动点。）（**ii**）当 $\gamma \neq 0$时，不动点满足以下方程

$$(2\alpha + \beta(1-s))\frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = -\frac{2\gamma}{\sigma}, \tag{7}$$

其中 $\sigma = \cos\theta = \pm 1$ ($\sigma = 1$ 对于 $\theta = 0$；$\sigma = -1$ 对于 $\theta = \pi$)。定义 $h(s) = (2\alpha + \beta(1-s))s/\sqrt{1-s^2}$, 后，该式变为$h(s) = -2\gamma/\sigma$。对于每个 σ，该方程对于 $s \in (-1, 1)$ 可能有 0 个、1 个或 2 个实解，每个实解分别对应一个不动点 (θ,s)。不动点的数量和性质对 α、β、γ 高度敏感，因此必须逐一分析各种情况。

图 5 展示了不动点的结构和数量如何随偏置变化 γ，对于不同的非线性耦合强度 β。在区域 $\beta > -0$。9575 [图 5(a) 和 5(b)], 在偏置的整个范围内都只有两个不动点 γ。当 $-1 < \beta < -0$。9575 时，偏置中会出现一个窗口 γ，在该窗口内，不动点数量增至四个。

类似的四不动点窗口再次出现于 $\beta < -1$。该图清楚地表明，位于 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$分支上的不动点数量可通过非线性耦合强度有效控制。

事实上，不动点数量的变化与图中所示绝热能量方程实根数量的变化完全遵循相同的规律。1这种对应关系反映了不动点拓扑与绝热谱实解结构之间的深刻联系。下文将详细分析不动点方程（7），以推导图 2所示这些转变的精确条件。

当且仅当满足以下条件时，不动点方程（7）才有四个不同的实根，其中 $\beta < -1$（详细推导见附录 A1 ）：

$$|\gamma| < \gamma_c(\beta) = f(\beta) = -\frac{(\beta+2)^2}{8\beta\sqrt{1-s_v^2}}, \tag{8}$$

其中 $s_v = 1/2 + 1/\beta$。

对于 $-1 < \beta < -0.9575$这一参数区间，支持四个不同实根的区域由两条独立曲线界定，其渐近展开式为（推导见附录 A2）

$$\gamma_{c1}(\beta) = g_1(\beta) = \sqrt{\eta}\left(1 - 2\eta - 6\eta^2 - 50\eta^3 + O(\eta^4)\right), \tag{9}$$

$$\gamma_{c2}(\beta) = g_2(\beta) = \kappa_0 + \kappa_1\eta + \kappa_2\eta^2 + \kappa_3\eta^3 + O(\eta^4), \tag{10}$$

其中 $\eta = \beta + 1$，系数为 $\kappa_0 \approx 0.150$，$\kappa_1 \approx 0.34$，$\kappa_2 \approx 1.5$，且 $\kappa_3 \approx 5.0$。这些解析边界与数值求得的相区一同绘于图 2，二者吻合得非常好。

B. 非线性量子绝热定理

我们的计算表明，在非线性耦合诱导的朗道-齐ener隧穿过程中，绝热演化受一个类黑洞不动点支配。这个对象在塑造系统的动力学路径方面起着关键作用，并导致临界点附近出现奇异行为。接下来，我们将阐明它对绝热动力学的决定性影响，并在此基础上推导出绝热隧穿概率的解析表达式。

图 6(a) 展示了绝热极限下动力学能量 $\varepsilon_{dyn}(\gamma)$（左纵坐标）以及不动点 s_f（右纵坐标）随偏置 t 的变化（以 $v = 0.0001$ 为例）。不动点分支清楚地划定了四个实能级共存的区间——阴影区域（$-\gamma_c, \gamma_c$）。图中展示了两条动力学能量轨迹，分别对应两个不同的初始条件（a、b）$^T = (1,0)^T$（黑色虚线）和 $(0,1)^T$（黑色实线）。值得注意的是，穿过阴影区域后，这两条轨迹
在穿过这一区域时，两者彼此重合，表明初态的所有记忆都被彻底抹去。

图6(b) 展示了相应的布居差异（左侧纵轴）随 γ 在相同绝热条件下的变化。两条曲线分别对应初始不平衡量 $s(\gamma \to -\infty) = -1$ （黑色虚线）和 $s(\gamma \to -\infty) = 1$ （黑色实线）。当

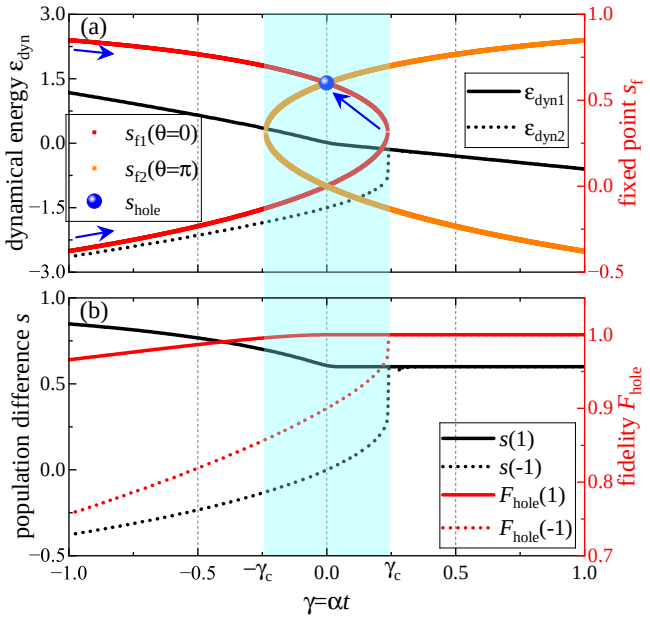

图 6. 类黑洞不动点在绝热量子动力学中的关键作用。本图采用双纵坐标轴。(a) 绝热极限下（即 v = 0.0001），动力学能量 $\varepsilon_{dyn}(\gamma)$（左纵坐标）和不动点 s_f（右纵坐标）随能级偏置 $\gamma = \alpha$ t 的变化。蓝点标出类黑洞不动点 s_{hole}。两条动力学能量曲线对应两个不同的初态：$(a(\gamma \to -\infty), b(\gamma \to -\infty))^T = (1, 0)^T$（黑色虚线）和 $(a(\gamma \to -\infty), b(\gamma \to -\infty))^T = (0, 1)^T$（黑色实线）。蓝色箭头表示量子态演化的方向。(b) 绝热极限下（即 v = 0.0001），布居差 s（左纵坐标）和绝热保真度 F_{hole}（右纵坐标）随能级偏置 $\gamma = \alpha$t 的变化。两条布居差曲线对应初始布居不平衡：$s(\gamma \to -\infty) = -1$（黑色虚线）和 $s(\gamma \to -\infty) = 1$（黑色实线）。两条绝热保真度曲线对应与 (a) 中相同的初态：$(a, b)^T = (1, 0)^T$（红色虚线）和 $(a, b)^T = (0, 1)^T$（红色实线）。

穿越阴影区域时，它们也变得无法区分。一个引人注目的现象是，从 $s = 1$出发的曲线遇到类黑洞不动点s_{hole}，此后便锁定在一个常数值上——恰好就是s_{hole} 本身的值。从 $s = -1$ 出发的曲线到达边界 γ_c；它没有沿着$\theta = \pi$分支继续绝热演化，而是被吸引到s_{hole}的吸引域中，随后保持在同一个常数值上。这一行为引出一个大胆的猜想：只要绝热路径上存在类黑洞不动点，穿越后的渐近态就仅由该不动点决定，完全独立于初始条件。

为证实这一猜想，我们计算绝热保真度 $F_{hole}(\gamma)$，其定义为在绝热极限下，演化中的量子态投影到类黑洞不动点上的结果：$F_{hole}(\gamma) = \lim_{v\to 0}\left|\langle\psi(\gamma)|\psi_{hole}(\gamma)\rangle\right|^2$。结果叠加显示于图 6(b)（红色曲线）。对于初态 $(a, b)^T = (0,1)^T$（红色实线），系统经过 s_{hole} 后，F_{hole} 立即升至 1。对于初态 $(1, 0)^T$（红色虚线），F_{hole} 在越过γ_c时跃升至 1。因此，在所有情况下，系统都被完美投影

到s_{hole} 上；一旦离开阴影区域，这便直接验证了我们的猜想。

图4的绝热跟随分析与图6(a)所示的定点视角相结合，揭示了一种此前未曾认识到的绝热输运情形。如图6(a)所示，上方的定点分支s_{fl} 随 γ 绝热演化，直至与类黑洞不动点s_{hole}相撞。相撞后，它被困在s_{hole} 处，不再继续演化；关于其先前演化的所有信息——初始条件和路径——都被彻底抹去。与此同时，下方的定点分支s_{fl} 继续沿绝热轨迹前进，直至到达边界 γ_c。此时，沿 $\theta = 0$流形不存在连续的绝热路径。系统不会跳转至另一分支（$\theta = \pi$），而是被吸引到s_{hole} 的吸引域中，并渐近地稳定于此。同样，其起源的任何痕迹都被抹去。由于这种完全吸收的特性，我们将这个特殊定点称为类黑洞不动点。

类黑洞不动点的存在，为剩余绝热隧穿概率提供了物理机制。将渐近态投影到瞬时本征基上，并利用系统通过临界区域后会被钉扎在s_{hole}这一事实，即可直接读出最终布居分布。结合关系$s = |b|^2 - |a|^2$ 以及概率守恒关系 $|a|^2 + |b|^2 = 1$，绝热隧穿概率——定义为转移至上绝热分支的布居——可直接写为

$$p_{\mathrm{ad}} = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad (\beta < -1). \tag{11}$$

值得注意的是，这个简洁的表达式仅取决于耦合参数之比，并且在整个超临界区域内都成立。该推导仅基于定点坐标，无需详细了解完整的时间演化，凸显了类黑洞不动点图像的预测能力。如图3(d)所示，式（11）的解析结果与数值模拟完全吻合，适用于所有 $\beta < -1$，这既证实了基本假设的有效性，也凸显了类黑洞不动点在支配绝热动力学方面发挥的关键作用。

VI. 结论

我们建立了一个关于双能级系统中具有振幅依赖非线性耦合的 LZ 隧穿的综合理论——这是一种不同于传统现场非线性的机制。通过详细的不动点分析，我们完整刻画了绝热能量景观，并确定了燕尾结构和扭结结构出现的精确条件。我们解析绘制了 (β, γ) 平面中的相图，并以闭式形式推导出区分双能级区间与四能级区间的临界边界，结果与数值模拟完全一致。

我们工作的一项核心发现是识别出一个类黑洞不动点，该不动点支配着绝热演化，处于超临界区间。该不动点充当一个普适吸引子：无论初态如何，动力学轨迹在穿越临界区域时都会收敛到它。关于初始条件以及详细路径的全部信息被完全抹去——这一效应在仅具有位点非线性的系统中没有对应物。渐近态由该不动点的坐标唯一确定，从而给出绝热隧穿概率的一个极为简洁的表达式，$p_{\mathrm{ad}} = \alpha/\beta (\beta < -1)$，我们已对其进行了数值验证。

我们的结果表明，非线性耦合会诱导相空间发生拓扑重组，从根本上改变绝热定理。即使在扫描速度无限慢的极限下，仍会存在有限的隧穿概率；而且，从不同绝热分支出发的动力学轨迹在经过四能级窗口后变得无法区分。这种“不可区分性”反映了绝热跟随的失效，并生动展示了非线性相互作用如何突破线性绝热动力学的约束。

本文建立的框架具有普适性，适用于任何具有状态依赖耦合的驱动双模系统——从声学谐振器和光子波导到光学晶格中的超冷原子——并可扩展至时间调制、非厄米或多位点构型。我们的研究成果为有意设计绝热转移、制定信息擦除协议以及控制非线性波系统中的多稳态动力学开辟了新途径。更广泛地说，这些成果确立了非线性耦合是一种强大而灵活的工具，可用于塑造量子与经典绝热性，并有望应用于拓扑态制备、原子电子学和可编程模拟量子模拟。

致谢

本研究得到了中国国家自然科学基金（项目编号：12005173和12365004）以及甘肃省自然科学基金（项目编号：20JR10RA082）的资助。

数据可用性

支撑本文研究结果的数据未公开。经合理请求，可向作者获取这些数据。

附录 A：实固定点数量的边界条件

1. 边界（$\beta < -1$）

令 $\alpha = 1$后，不动点方程（7）化简为

$$2|\gamma|\sqrt{1 - s^2} = \left|s[\beta s - (\beta + 2)]\right|, \qquad s \in [-1, 1].$$

定义$g(s) = \beta s^2 - (\beta + 2)s$。该方程描述了曲线$L(s) = 2|\gamma|\sqrt{1 - s^2}$ 与 $|g(s)|$的交点。

通过分析这两个函数在区间$[-1,1]$上的形状，我们可以得到实根个数的条件。令

$$M_1 = |g(s_v)| = g(s_v) = -\frac{(\beta+2)^2}{4\beta} \qquad \text{(positive because } \beta < 0),$$

以及 $L(s_v) = 2|\gamma|\sqrt{1-s_v^2}$，其中 $s_v = 1/2 + 1/\beta$。当且仅当.....时，出现四个互不相同的实根。

$$|\gamma| < \gamma_c(\beta) \equiv -\frac{(\beta+2)^2}{8\beta\sqrt{1-s_v^2}},$$

分母中的平方根始终为正。

当 $|\gamma| = \gamma_c(\beta)$ 时，方程有三个互不相同的实根（一个单根和一个二重根）；当 $|\gamma| > \gamma_c(\beta)$ 时，仅剩两个互不相同的实根。

2. 区间 $(-1 < \beta < -0.9575)$（$-1 < \beta < -0.9575$）的边界

对于 $\beta \in (-1, -0.9575)$，方程 (7) 的实根个数由两个临界值 $\gamma_{c1}(\beta)$ 和 $\gamma_{c2}(\beta)$ 决定，其中 $0 < \gamma_{c1} < \gamma_{c2}$。这些阈值对应于区间 $s \in (-1,0)$ 内出现二重根（相切），由以下方程组给出

$$\begin{cases} \beta s^2 - (\beta+2)s = 2|\gamma|\sqrt{1-s^2}, \\ 2\beta s - (\beta+2) = -\dfrac{2|\gamma|\, s}{\sqrt{1-s^2}}. \end{cases}$$

消去 $|\gamma|$ 后，得到关于s的三次方程，

$$\beta s^3 - 2\beta s + (\beta+2) = 0,$$

该方程有两个实根$s_1, s_2 \in (-1,0)$。将它们代回可得 $\gamma_{c1} = |\gamma(s_1)|$ 和 $\gamma_{c2} = |\gamma(s_2)|$。

在 $\beta = -1$ 附近进行摄动展开（将 $\beta = -1 + \eta$ 写成含有小量 $\eta > 0$ 的形式），可得到显式近似。

对于下边界 γ_{c1} （对应于$s \approx -1$附近的相切）：

$$\gamma_{c1} = \sqrt{\eta}\left(1 - 2\eta - 6\eta^2 - 50\eta^3 - \tfrac{6927}{4}\eta^4 + O(\eta^5)\right), \qquad \eta = \beta + 1.$$

对于上边界 γ_{c2} （对应于$s_2 \approx \varphi \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$附近）：

$$\gamma_{c2} = \kappa_0 + \kappa_1\eta + \kappa_2\eta^2 + \kappa_3\eta^3 + O(\eta^4),$$

with

$$\kappa_0 = \frac{(2\varphi+1)\sqrt{-\varphi}}{2\varphi} \approx 0.150, \qquad \kappa_1 \approx 0.34,\ \ \kappa_2 \approx 1.5,\ \ \kappa_3 \approx 5.0.$$

继续展开即可得到高阶系数；上述结果足以满足 $\eta \ll 1$ 的需要。

该区域（$-1 < \beta < -0.9575$）内根的数目汇总：

- 当$|\gamma| < \gamma_{c1}$ 或$|\gamma| > \gamma_{c2}$时，有两个实根。
- 当 $\gamma_{c1} < |\gamma| < \gamma_{c2}$ 时有四个实根。
- 当$|\gamma| = \gamma_{c1}$ 或$|\gamma| = \gamma_{c2}$时有三个实根（其中一个为二重根）。

随着 η增大（即 β从 -1开始增长），γ_{c1} 与 γ_{c2} 彼此靠近；它们在 $\beta \approx -0.9575$ 处合并，此后四根区域消失。

[1] 朗道, 苏联物理学杂志 2, 46 (1932年). [2] 齐纳, 伦敦皇家学会会刊, Ser. A 137, 696 (1932年). [3] M. Sillanp¨a¨a, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, 和 P. Hakonen, 物理评论快报 96, 187002 (2006年). [4] S. Ashhab, J. R. Johansson, 和 F. Nori, Physical Review A 74, 052330 2006年( ). [5] D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, 和 T. P. Orlando, 《自然》 455, 51 (2008年). [6] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, 和 F. Nori, 《物理报告》 995, 1 (2023年), 非绝热朗道-齐纳-施图克尔贝格-马约拉纳跃迁、动力学与干涉. [7] G. D. Fuchs, V. V. Dobrovitski, D. M. Toyli, F. J. Heremans, 和 D. D. Awschalom, 科学 326, 1520 (2009年). [8] H. Ribeiro 和 G. Burkard, 物理评论快报 102, 216802 (2009年). [9] J. R. Petta, H. Lu, 和 A. C. Gossard, 科学 327, 669 (2010年). [10] R. Khomeriki 和 S. Ruffo, 物理评论快报 94, 113904 (2005年). [11] Z.-G. Chen, W. Tang, R.-Y. Zhang, Z. Chen, 和 G. Ma, 物理评论快报 126, 054301 (2021年). [12] B. Wu 和 Q. Niu, Physical Review A 61, 023402 (2000年). [13] O. Zobay 和 B. M. Garraway, Physical Review A 61, 033603 (2000年). [14] J. Liu, L. Fu, B.-Y. Ou, S.-G. Chen, D.-I. Choi, B. Wu, 和

Q. Niu, Physical Review A 66, 023404 (2002). [15] E. J. Mueller, Physical Review A 66, 063603 (2002). [16] O. Morsch, J. H. M¨uller, M. Cristiani, D. Ciampini, 和 E. Arimondo, 物理评论快报 87, 140402 (2001). [17] M. Cristiani, O. Morsch, J. H. M¨uller, D. Ciampini, 和 E. Arimondo, Physical Review A 65, 063612 (2002). [18] J. Liu, B. Wu, 和 Q. Niu, 物理评论快报 90, 170404 (2003). [19] M. Jona-Lasinio, O. Morsch, M. Cristiani, N. Malossi, J. H. M¨uller, E. Courtade, M. Anderlini, 和 E. Arimondo, 物理评论快报 91, 230406 (2003). [20] D. Witthaut, E. M. Graefe, 和 H. J. Korsch, Physical Review A 73, 063609 2006年( ). [21] B. Wu 和 J. Liu, 物理评论快报 96, 020405 (2006 年). [22] K. Smith-Mannschott, M. Chuchem, M. Hiller, T. Kottos, 和 D. Cohen, 物理评论快报 102, 230401 (2009年). [23] A. Zenesini, C. Sias, H. Lignier, Y. Singh, D. Ciampini, O. Morsch, R. Mannella, E. Arimondo, A. Tomadin, 和 S. Wimberger, 《新物理学杂志》 10, 053038 (2008年). [24] A. Zenesini, H. Lignier, G. Tayebirad, J. Radogostowicz, D. Ciampini, R. Mannella, S. Wimberger, O. Morsch, 和 E. Arimondo, 物理评论快报 103, 090403 (2009年). [25] Y.-A. Chen, S. D. Huber, S. Trotzky, I. Bloch, 和 E. Altman, 物理评论快报 7, 61 (2011).

[26] C. Kasztelan, S. Trotzky, Y.-A. Chen, I. Bloch, I. P. McCulloch, U. Schollw¨ock, 和 G. Orso, 物理评论快报 106, 155302 (2011). [27] F. A. An, E. J. Meier, J. Ang'ong'a, 和 B. Gadway, 物理评论快报 120, 040407 (2018). [28] Y. Zhang, Z. Gui, 和 Y. Chen, Physical Review A 99, 023616 (2019). [29] Q. Guan, M. K. H. Ome, T. M. Bersano, S. Mossman, P. Engels, 和 D. Blume, 物理评论快报 125, 213401 (2020). [30] S. Ashhab, O. A. Ilinskaya, 和 S. N. Shevchenko, Physical Review A 106, 062613 (2022). [31] Y. Cao 和 T. F. Xu, Physical Review A 107, 032420 (2023年). [32] Z. Gui, J. Su, H. Lyu, 和 Y. Zhang, Physical Review A 110, 043314 (2024). [33] Y. Gefen, E. Ben-Jacob, 和 A. O. Caldeira, Physical Review B 36, 2770 1987( ). [34] V. M. Akulin 和 W. P. Schleich, Physical Review A 46, 4110 (1992). [35] Y. Avishai 和 Y. B. Band, Physical Review A 90, 032116 (2014). [36] C. He 和 R. R. Jones, Physical Review A 104, 013111 (2021年). [37] Y. Cao 和 T. F. Xu, Physical Review A 109, 012622 (2024). [38] W.-Y. Wang, B. Sun, 和 J. Liu, Physical Review A 106, 063708 (2022). [39] J. Dong, X.-L. Li, F.-Q. Dou, 和 W.-Y. Wang, Physical Review A 108, 063506 (2023年). [40] R. K. Malla, J. Cen, W. J. M. Kort-Kamp, 和 A. Saxena, Physical Review A 108, 062217 (2023年). [41] S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, 和 G. K. Campbell, 《自然》 506, 200 (2014).

[42] Y. Hadad, A. B. Khanikaev, and A. Al ` u, Physical Review B ( ) **93**, 155112 2016. [43] F. Zangeneh-Nejad and R. Fleury, 物理评论快报 123, 053902 (2019). [44] Y. Hadad, J. C. Soric, A. B. Khanikaev, and A. Al`u, 自然·电子学 1, 178 (2018). [45] L. J. Maczewsky, M. Heinrich, M. Kremer, S. K. Ivanov, M. Ehrhardt, F. Martinez, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, L. Torner, D. Bauer, and A. Szameit, 科学 370, 701 (2020). [46] D. Zhou, D. Z. Rocklin, M. Leamy, and Y. Yao, 自然·通讯 13, 3379 (2022). [47] K. Sone, M. Ezawa, Y. Ashida, N. Yoshioka, and T. Sagawa, 自然·物理 20, 1164 (2024). [48] K. Sone, M. Ezawa, Z. Gong, T. Sawada, N. Yoshioka, and T. Sagawa, 自然·通讯 16, 422 (2025). [49] J. Wu, R.-C. Shen, L. Zhang, F. Chen, B. Wang, H. Chen, Y. Yang, and H. Xue, "非厄米非线性趋肤效应中的局域化反转与谐波产生", (2025), arXiv:2505.09179。 [50] Z.-X. Chen, Y. Ru, G.-C. He, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, Y.-Q. Lu, and Z.-G. Chen, 物理评论快报 136, 037202 (2026). [51] P. W. Anderson, 载于《第五届国际物理春季学校》, E. R. Caianello 编（Academic, 纽约, 1964）。 [52] E. Shi mshoni, Y. Gefen, and S. Fishman, Physical Review B 40, 2158 (1989). [53] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, 物理评论快报 79, 4950 (1997)。