arXiv:2603.01538v1 [math.AG] 2 Mar 2026

对数等亏光滑化与极大节点退化

MOUNIR NISSE

Abstract. 我们利用对数变形理论研究曲面退化族中奇异曲线的等亏变形。我们以对数半正则性取代经典的无阻碍性，证明正规交叉曲面上的既约曲线可变形为邻近光滑纤维上的节点曲线，其节点数达到 δ–不变量所允许的最大值。我们还为平面 A_k 奇点建立了统一的对数等亏格光滑化定理，表明在一般等亏变形下，高阶奇点会分裂为数量最多的普通节点。这些结果将经典Severi理论拓展至对数情形，并阐明了高阶奇点作为边界现象所起的作用。我们还通过对数退化公式和热带曲线计数讨论其在计数几何中的应用。

1. Introduction

奇异曲线的变形理论在代数几何中占据核心地位，它连接了曲面上线性系的研究、曲线模空间以及计数几何。经典Severi理论提供了一个指导性范式，研究光滑射影曲面 S上的固定线性系 $|L|$ 中的曲线族。若 $C \in |L|$ 是一条既约曲线，其算术亏格满足

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(L \cdot (L + K_S)) + 1,$$

~并且若 C 表示 C的正规化，则

$$p_a(C) = g(\widetilde{C}) + \delta(C), \qquad \delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

不变量 $\delta(C)$衡量由奇点引起的总亏格下降。经典的塞韦里问题询问 $|L|$ 中恰好具有 δ 个节点的曲线的轨迹 $V_\delta(|L|)$是否非空、不可约，且具有预期维数

$$\dim |L| - \delta,$$

以及其一般点是否表示一条节点曲线。Harris对塞韦里问题的解答 [10]证明了在光滑曲面上，曲线的等属族一般是节点型的，并且节点实现了与亏格公式相容的极大奇异行为。

当研究对象超出光滑曲面，或允许更复杂的奇点时，这一经典图景便会变得微妙得多。在曲面的退化族中，环境几何本身会给变形带来障碍，基于一般光滑性或横截性的标准论证也会失效。此外，尖点或更高 A_k 阶点等奇点并非

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B05, 14B10, 32G20, 14B07.*Key words and phrases.* 等亏格变形，孤立奇点，半正则性，对数法丛，托雷利，节点曲线。本研究部分得到厦门大学马来西亚分校研究基金（资助号：XMUMRF/ 2020- C5/IMAT/0013）的支持。

等属族中的一般情形，即使在光滑曲面上也是如此。一个普通尖点，其解析表达式为$y^2 = x^3$，与节点一样满足 $\delta = 1$，但其局部变形空间的维数为二，而非一，这反映了它更强的刚性。更一般地，平面 A_k 奇点

$$y^2 = x^{k+1}$$

具有局部 δ–不变量

$$\delta = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor,$$

且其等属变形空间的维数为 δ，而完整的局部变形空间的维数为 k [9]。这些事实已经表明，必须进一步完善等属变形理论，才能控制高阶奇点。

本工作的首要目标之一是说明，对数几何为将 Severi 型结果推广到退化曲面提供了恰当的框架。遵循 Bloch[4] 和 Friedman [8], 的思路，我们在退化 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 上沿特殊纤维 $\mathcal{X}_0$赋予除子对数结构。在这一框架下，曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$ 的变形理论不由通常的法丛 $N_{C/\mathcal{X}_0}$控制，而由对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制。无穷小对数嵌入变形由以下对象参数化

$$H^0\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right),$$

其障碍位于

$$H^1\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right).$$

对数半正则性是指自然映射

$$H^1\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。本工作的一个关键发现是，这一条件恰好保证了平滑化过程中不存在对数障碍。

在这一框架下，我们证明了正规交叉曲面上的曲线所满足的对数半正则节点平滑定理。粗略地说，该定理断言，若 C 是对数半正则的，且全局到局部对数变形映射

$$H^0\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射，则 C 可变形为邻近光滑纤维上的节点曲线，且恰有 $\delta(C)$ 个节点。当 $\mathcal{X}_0$ 光滑时，该结果恢复了经典Severi理论，并以概念上清晰的方式将其推广到退化情形。

本文的第二项核心贡献是针对平面 A_k 奇点提出统一的对数等亏格平滑化定理。我们证明，在相同的对数半正则性和满射性假设下，若一条曲线的奇点均为 A_k 型，则存在一种等亏格对数变形，使每个 A_k 奇点分裂为 $\lfloor k/2 \rfloor$ 个普通节点。特别地，一般纤维上的节点总数等于

$$\delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \left\lfloor \frac{k_p}{2} \right\rfloor,$$

根据算术亏格的不变性，这个数也是最大的。该定理同时推广了节点情形（A_1）、尖点情形（A_2）以及所有高阶 A_k 情形，明确阐释了这样一种观点：高阶奇点是等亏分层的边界点。

本文的研究范围还扩展到三维簇中的曲线和曲面。在这些情形下，即使在等属族中，节点奇点也不再是一般的。对于三维簇中的曲线 C，或三维簇中的曲面 S，普通节点和普通双重点都是刚性奇点，只有在等奇约束下才能持续存在。我们提出并证明了变形定理，表明在无阻碍性以及相应法丛映射具有满射性的条件下，可以实现与整体变形理论相容的这类奇点的最大数量。这些结果使三维簇中的节点现象与曲面上的尖点现象处于同一概念层面。

最后，我们将这些变形理论的结果与计数几何联系起来。对数半正则性确保在退化族中，塞韦里计数仍具有枚举意义，无需虚修正。利用对数退化公式 [16, 23], ，我们将光滑纤维上的塞维里次数表示为特殊纤维上边界分层的贡献之和。热带几何为这些公式提供了组合解释：节点对应热带曲线的有界边，而 A_k 奇点对应高价顶点，这些顶点在等亏格光滑化下解析为一组有界边 [17, 19]。

综合来看，本研究的结果提供了一个统一框架，使经典Severi理论、对数变形理论和热带几何得以协调互动。主要的新见解是，极大结点行为由诸如 δ 这样的数值不变量所支配，而这种行为的存在、持续性和枚举性质则受对数半正则性和整体变形理论控制。这一视角不仅将塞韦里理论扩展到奇异和退化情形，也阐明了高阶奇点作为等亏族中边界现象的几何意义。

2. Deformations of the Pair $(\mathcal{X}_0,\ C)$

设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是圆盘上的一个平坦族，其特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$，且当 $t \neq 0$ 时一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 光滑。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线。目标是理解 C 何时可以变形为节点曲线 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，并确定此类变形中可能出现的节点最大数目。

一个自然的起点是研究嵌入 $C \hookrightarrow \mathcal{X}_0$ 的变形。无穷小嵌入变形由法层 $N_{C/\mathcal{X}_0}$，控制，而障碍位于 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 中。这个上同调群消失或得到部分控制，可为将 C 提升到邻近纤维 $\mathcal{X}_t$ 提供充分条件。若 $\mathcal{X}$ 在 C 上光滑，则可利用联系 $N_{C/\mathcal{X}_0}$ 与 $N_{C/\mathcal{X}}$ 的正合列，比较 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的变形与其在总空间 $\mathcal{X}$ 内的变形。

退化中曲线的法丛正合列。 进一步假设C 在 $\mathcal{X}_0$ 和 $\mathcal{X}$中都是局部完全交。我们将自然嵌入记为 $i : C \hookrightarrow \mathcal{X}_0$ 和 $j : C \hookrightarrow \mathcal{X}$。目标是将特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 中 C 的法丛与总空间 $\mathcal{X}$中 C 的法丛联系起来。

法丛正合列。 由于 $\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}$中的卡蒂埃除子，因此在 C上有一个法丛短正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow N_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathcal{X}_0$ 是 π的纤维，其在 $\mathcal{X}$ 中的法丛是平凡的：$N_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$. 限制到 C 上，可得到基本正合序列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

序列（$*$）的扩张类恰好是变形 π 的 Kodaira–Spencer 类：$\mathcal{X} \to \Delta$ 限制到 C 上。从几何上看，该序列刻画了 C 在总空间 $\mathcal{X}$ 内的无穷小变形如何分解为沿特殊纤维的切向变形和横向变形。

取上同调可得长正合列

$$0 \to H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \to H^0(C, N_{C/\mathcal{X}}) \to H^0(C, \mathcal{O}_C) \to H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \to H^1(C, N_{C/\mathcal{X}}) \to 0,$$

其中，连接同态 $H^0(C, \mathcal{O}_C) \to H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$ 是由 Kodaira– Spencer 映射诱导的。特别地，若 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$，则 C in$\mathcal{X}_0$ 的每个无穷小变形都能唯一延拓为总空间 $\mathcal{X}$ 中 C in 的无穷小变形，而 C 变形为邻近纤维 $\mathcal{X}_t$。

与余切复形的关系。 正合列 $(*)$ 与余切复形的典范三角对偶

$$L_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \longrightarrow L_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow L_{C/\mathcal{X}_0} \xrightarrow{+1},$$

利用以下同一化

$$L_{C/\mathcal{X}_0} \simeq N^\vee_{C/\mathcal{X}_0}[1], \qquad L_{C/\mathcal{X}} \simeq N^\vee_{C/\mathcal{X}}[1], \qquad L_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \simeq \mathcal{O}_C[1].$$

更准确地说，短正合列（$*$）准确描述了控制 C 在特殊纤维内部和总空间内部变形的法丛之间的关系，是比较二者形变理论的基本工具。

正规丛序列的分裂，Kodaira–Spencer映射。 如前所述，存在一个典范短正合列（$\star$），其扩张类是 π的 Kodaira–Spencer 类在 C 上的限制。

序列何时分裂。 序列（$\star$）分裂，当且仅当其扩张类在 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C,\ N_{C/\mathcal{X}_0}) \simeq H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 中消失。等价地，$1 \in H^0(C,\ \mathcal{O}_C)$ 在连接同态下的像

$$\partial : H^0(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$$

为零。

命题 2.1。 序列$(\star)$ 分裂，当且仅当 $\pi:\ \mathcal{X} \to \Delta$的 *Kodaira–Spencer* 类限制到 C上时为零。

证明。 根据构造，连接同态 ∂ 与 Kodaira–Spencer映射一致

$$\mathrm{ks}_C : H^0(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}).$$

当且仅当 $\partial(1) = 0$ 时，该短正合列分裂，这恰好意味着受限的 Kodaira–Spencer 类消失。从几何上看，分裂意味着 C 在$\mathcal{X}$ 中的无穷小变形可分解为彼此独立的变形：一部分沿特殊纤维的切向，另一部分则是基方向上的平凡变形。□

Kodaira–Spencer映射的显式计算。

例 2.2（平凡族）。若 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \times \Delta$，则 ks $= 0$。因此 $(\star)$ 有典范分裂，且

$$N_{C/\mathcal{X}} \simeq N_{C/\mathcal{X}_0} \oplus \mathcal{O}_C.$$

在这种情况下，C 在 $\mathcal{X}$ 中的变形只是 $\mathcal{X}_0$ 中的变形与基方向的乘积。

例 2.3（曲面光滑化）。设 $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^3 \times \Delta$ 在局部由 $xy = t$给出，从而$\mathcal{X}_0 = \{xy = 0\}$ 是一个正规交叉曲面。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 包含于分支 $\{x = 0\}$中，并且与双曲线横截。局部计算表明，Kodaira–Spencer 类由截面 $\partial/\partial t$表示，它映射到 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$中的一个非零类。因此，序列（$\star$）不分裂。这反映出，变形 C 必然涉及环境曲面的光滑化。

例 2.4（K3退化上的曲线）。若 $\pi:\ \mathcal{X} \to \Delta$ 是K3曲面的Kulikov退化，则Kodaira–Spencer 类在整体上非平凡，但其在曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$ 上的限制可能为零，只要 C 位于周期映射的核中。在这种情况下，即使该族是非平凡的，序列（$\star$）也会分裂。

3. Extension to Singular Total Spaces via Logarithmic Normal Bundles

现在假设 $\mathcal{X}$ 沿着 $\mathcal{X}_0$奇异，例如当 $\mathcal{X}_0$ 是正规交叉除子时。赋予 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}_0$相关联的除子对数结构。于是 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 变为对数光滑。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是与奇异轨迹横截相交的约化曲线。$(\star)$的正确替代形式是对数法丛正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0. \tag{$\star_{\log}$}$$

$(\star_{\log})$的扩张类是 π 在 C上的限制所对应的对数 Kodaira–Spencer 类。它的消失等价于存在对数分裂，也就是说，C 的对数变形与底空间方向彼此解耦。

定理 3.1。 *C 在 $\mathcal{X}$ 中的对数变形无阻碍，且当且仅当对数 Kodaira–Spencer 类在 C上消失时，它们才在底空间上分裂。*

这一表述表明，即使 $\mathcal{X}$ 是奇异的，对数几何仍能恢复正合列的形式体系，并解释了为何在退化族中，对数半正则性是H^1-消失的恰当替代。

正规丛序列的分裂行为精确地刻画了曲线的变形如何与环境空间的变形相互作用。通过显式的 Kodaira–Spencer 计算，可以揭示这种相互作用何时非平凡；对数法丛则提供了一个统一框架，将这些思想推广到奇异退化情形。

对数法丛正合列。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是定义在光滑带标记曲线上的平坦族，并假设特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}$中的简单正规交叉除子。我们在 $\mathcal{X}$ 上赋予与 $\mathcal{X}_0$相关的除子对数结构，并在 Δ上赋予标准对数点。作此选择后，π 成为一个对数光滑态射。

设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 为一条约化曲线。我们假设 C 与 $\mathcal{X}_0$ 的奇异轨迹横截相交，且 C 在对数意义下是局部完全交。这意味着，在 $\mathcal{X}$ 上局部地，C 的理想由一个与对数结构相容的正则序列生成。

对数切丛与正规层。记 $T^{\log}_{\mathcal{X}}$ 为 $\mathcal{X}$ 的对数切层，即与 $\mathcal{X}_0$ 相切的向量场层。类似地，设 $T^{\log}_{\mathcal{X}_0}$ 为 $\mathcal{X}_0$ 的对数切层，T_C 为 C 的通常切层。C 在 $\mathcal{X}$ 中的对数法层定义为余核

$$N^{\log}_{C/\mathcal{X}} := \operatorname{coker}\big(T_C \longrightarrow T^{\log}_{\mathcal{X}}\big|_C\big),$$

类似地，C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的对数法层为

$$N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} := \operatorname{coker}\big(T_C \longrightarrow T^{\log}_{\mathcal{X}_0}\big|_C\big).$$

这些层分别控制 C 在 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}_0$中的一阶对数嵌入变形。

对数正合列的推导。由于 $\mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}$中的对数除子，因此存在对数切层的短正合列

$$0 \longrightarrow T^{\log}_{\mathcal{X}_0} \longrightarrow T^{\log}_{\mathcal{X}}\big|_{\mathcal{X}_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0} \longrightarrow 0,$$

其中，商层局部由对数向量场 $t\partial_t$生成，它对应于基方向。将此正合列限制到 C 上，并对来自 T_C 的自然映射取余核，可得到一个典范的对数正规层短正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0. \tag{$\star_{\log}$}$$

这就是前文所述的对数法丛正合列。

局部描述。在位于 $\mathcal{X}_0$双重轨迹上的 C 点附近，该族可解析地写为 $xy = t$，其对数结构由 $t = 0$诱导。在这些坐标中，$T_{\text{对数}\mathcal{X}}$由 $x\partial_x$，$y\partial_y$，和 ∂_z，生成，而 $T^{\log}_{\mathcal{X}_0}$由

$$x\partial_x - y\partial_y, \quad \partial_z.$$

商由 $x\partial_x + y\partial_y$生成，它对应于（$\star_{\log}$）中的 $\mathcal{O}_C$ 项。这明确表明，（$\star_{\log}$）中的最后一个映射度量了沿底空间方向的变形。

通过对数余切复形的解释。序列（$\star_{\log}$）与对数余切复形的典范三角对偶：

$$L^{\log}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \longrightarrow L^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow L^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \xrightarrow{+1}.$$

利用这些同构

$$L^{\log}_{C/\mathcal{X}} \simeq (N^{\log}_{C/\mathcal{X}})^\vee[1], \qquad L^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \simeq (N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})^\vee[1], \qquad L^{\log}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \simeq \mathcal{O}_C[1],$$

对偶化并截断后，可得回（$\star_{\log}$）。

几何意义。（$\star_{\log}$）的扩张类属于 $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_C,\ N_{\text{对数}C/\mathcal{X}_0}) \simeq H^1(C,\ N_{\text{对数}C/\mathcal{X}_0})$，并且恰好是 π的对数 Kodaira–Spencer 类在 C 上的限制。其消失等价于存在对数分裂，这意味着 $\mathcal{X}$ 中 C的对数变形可分解为 $\mathcal{X}_0$ 内部的变形以及沿底空间的平凡移动。总之，对数法丛正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

是光滑总空间中经典法丛序列的精确对数类比。它揭示了曲线的嵌入对数变形如何与

外围正规交叉纤维的平滑化相互作用，并为奇异退化中的变形理论提供了恰当的框架。

4. Explicit Computations of the Logarithmic Normal Bundle Sequence and Its Obstruction-Theoretic Meaning

我们在具体的正规交叉退化中显式计算对数法丛正合列，并说明其扩张类如何支配塞韦里簇的障碍映射。全文中，$\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个赋有由 $\mathcal{X}_0$诱导的除子对数结构的单参数退化，且 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是与奇异轨迹横截相交的约化曲线。

局部正规交叉光滑化。考虑局部模型$\mathcal{X} = \{xy = t\} \subset \mathbb{A}^3_{x,\ y,\ z} \times \Delta_t$，其特殊纤维为 $\mathcal{X}_0 = \{xy = 0\} = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = \{x = 0\}$ 和 $S_2 = \{y = 0\}$ 沿光滑曲线 $D = \{x = y = 0\}$相交。设 $C \subset S_1$ 是一条局部由$x = 0$ 和 $f(z) = 0$给出的光滑曲线，并与 D 横截相交。回忆一下，$\mathcal{X}$ 的对数切层局部由 $x\partial_x,\ y\partial_y,$ 和 $\partial_z,$ 生成，而 $\mathcal{X}_0$ 的对数切层限制到 S_1 上后由 $x\partial_x - y\partial_y,$ 和 $\partial_z.$生成。限制到 C上，并取从 T_C出发的自然映射的余核，可得

$$N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \simeq \mathcal{O}_C(C - D|_C), \qquad N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \simeq \mathcal{O}_C(C - D|_C) \oplus \mathcal{O}_C.$$

由此得到的对数法丛正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(C - D|_C) \longrightarrow \mathcal{O}_C(C - D|_C) \oplus \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

在层的层面上是分裂的，但这种分裂并非典范。扩张类由对应于向量场 $t\partial_t = x\partial_x + y\partial_y$ 的对数小平–斯潘塞元表示。

扩张类的全局描述。全局而言，对数正合列的扩张类

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

属于

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \simeq H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$$

并且是 $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$ 在对数小平–斯潘塞映射下的像。在上述局部模型中，此类度量了 C 在不受节点 $xy = 0$ 平滑化影响的情况下独立地在 S_1 内变形的障碍。

5. Relation to Obstruction Maps for Severi Varieties

令 $\mathscr{V}_{\text{对数}\,\delta}(\mathcal{X}_0, \mathcal{L})$ 表示参数化 C 的对数变形、并在邻近光滑纤维上产生 δ 个节点的对数 Severi 簇。在 $[C]$处的 Zariski切空间为

$$T_{[C]}\mathscr{V}^{\log}_{\delta} = \ker\left(H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p} \right),$$

而障碍属于 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$。对数法丛正合列的扩张类定义了一个映射

$$\mathrm{obs}_\pi : H^0(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}),$$

它与将 C 的对数变形从 $\mathcal{X}_0$ 提升到总空间 $\mathcal{X}$的障碍相一致。特别地，若 $\mathrm{obs}_\pi(1) \neq 0$，则除非激活基方向，否则无法延拓 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的一阶变形（该变形会使所有节点光滑）。

障碍分解命题。

命题 5.1. 对数 *Severi* 簇的障碍映射可经由对数法丛正合列的扩张类分解。特别地， C 的对数半正则性意味着 *Severi* 簇在 $[C]$处光滑，且所有节点平滑都可提升到邻近纤维。

证明。 设 $\xi \in H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$ 表示 C 在$\mathcal{X}_0$ 内满足节点条件的一阶对数嵌入变形。这样的类对应于 $\mathrm{Ext}^1(L^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}, \mathcal{O}_C)$。考虑典范三角

$$L^{\log}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \longrightarrow L^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow L^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \xrightarrow{+1}.$$

相应 Ext 群长正合列中的边界态射定义了一个映射

$$\delta\colon \mathrm{Ext}^1(L^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(L^{\log}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C, \mathcal{O}_C).$$

利用典范同一 $L^{\log}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}\big|_C \simeq \mathcal{O}_C[1]$，此边界映射变为

$$\delta\colon H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}).$$

根据余切复形的函子性， $\delta(\xi)$ 正是 ξ 与由对数法丛正合列定义的扩张类 $\kappa^{\log}_C \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C,\ N_{对数\ C/\mathcal{X}_0})$ 的 Yoneda 积。因此，将 ξ 从 $\mathcal{X}_0$ 提升到 $\mathcal{X}$ 的障碍由 $\mathrm{ob}(\xi) = \xi \smile \kappa^{\log}_C$ ，给出，这证明了障碍映射可通过对数法丛正合列的扩张类进行分解。

Assu现在说明 C 是对数半正则的。根据定义，自然映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。 $\kappa^{\log}_C$ 在该映射下的像是 π 的对数 Kodaira–Spencer 类的限制，而该限制为零。因此，单射性意味着 $\kappa^{\log}_C = 0$。 consequently，对于每个 ξ，$\mathrm{ob}(\xi) = 0$ ，并且所有一阶对数节点变形都可无阻碍地提升。因此，对数 Severi 簇在 $[C]$ 处光滑，且 C 的每个节点平滑化都可延拓到邻近光滑纤维。□

与 Severi 障碍映射的关系。 在对数 Severi 簇内部变形 C 的障碍，可通过将 $\mathrm{ob}(\xi)$ 限制到满足节点条件的变形子空间上得到。因此，Severi 障碍映射是如下包含映射的复合

$$T_{[C]}\mathscr{V}^{\log} \hookrightarrow H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$$

与 $\kappa^{\log}_C$ 的 Yoneda 积。这证明 Severi 障碍映射经由对数法丛正合列的扩张类分解。

对数半正则性的推论。 现在假设 C 是对数半正则的，即自然映射

$$H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}^{\log}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射的。根据一般对数变形理论， $\kappa_C^{\log}$ 在 $H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$ 中的像消失。单射性进而迫使 $\kappa_C^{\log} = 0$，因此扩张 (†) 按对数方式分裂。

因此，所有 Yoneda 乘积 $\xi \smile \kappa_C^{\log}$ 都恒消失。于是， C 的每一个满足节点条件的一阶对数变形都无阻碍地提升至总空间 $\mathcal{X}$。这表明对数 Severi 簇在 $[C]$ 处光滑，并且 C 的所有节点平滑都提升到邻近光滑纤维。

因此，总而言之，对数 Severi 簇的障碍理论完全由对数法丛正合列的扩张类所支配。该类编码了曲线变形与环境退化之间的相互作用，而对数半正则性恰好保证其消失，从而确保节点变形的光滑性与无阻碍性。

示例： 平面曲线退化。考虑 $\mathbb{P}^2$ 退化为沿一条直线相交的两个平面。平面曲线 C_0 退化为一个并，其中 $C_1 \cup C_2$ 沿双线具有预先指定的接触阶。对数法丛正合列将这些接触阶记录为由交除子确定的扭曲。扩张类衡量两个平面上的平滑化参数是否相容，并且与 Caporaso–Harris 型递推关系中出现的经典匹配条件一致。因此，塞韦里簇的障碍映射恰好就是退化公式所编码的对数相容条件。

对于具体的正规交叉退化，可以显式计算对数法丛正合列，并对其扩张类作出清晰的几何解释。它控制对数 Severi 簇的障碍映射，并以统一的方式解释为何曲线节点的平滑化与环境曲面的平滑化密不可分。这一机制既是经典退化论证的基础，也支撑着现代对数和热带曲线计数理论。

6. Smoothing Singularities and Producing Nodes

曲线奇点的局部变形理论。 设 C 是特征零的代数闭域上的一条约化曲线，且 $p \in C$ 是一个奇点。芽 $(C,\ p)$ 的局部变形理论由余切复形 $L_{C,\ p}$ 控制，或者等价地，由模

$$T^1_{C,p} := \mathrm{Ext}^1(L_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p}).$$

这个向量空间参数化了该奇点的一阶嵌入变形。其维数衡量了独立局部平滑方向的数量。若 C 在 p 处是局部平面的，也就是说，若 C 可局部嵌入一个光滑曲面，则 $T^1_{C,\ p}$ 是有限维的，且变形理论表现良好。

定义 6.1。 设 $(C,\ p)$ 是一个约化曲线奇点，且 $\nu\colon C \to C$ 是其正规化。$(C,\ p)$ 的 δ-不变量定义为

$$\delta_p := \dim_k \left(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{C},p} / \mathcal{O}_{C,p} \right).$$

从几何上看， δ_p 度量了奇点 p 对算术亏格与几何亏格之差的贡献。它满足

$$\delta_p = \frac{1}{2}\left(\mu_p + r_p - 1\right),$$

其中， μ_p 是米尔诺数， r_p 是局部分支的数量。对于平面奇点，有以下基本恒等式

$$\dim T^1_{C,p} = \delta_p.$$

局部平滑与节点。 在光滑一维基底上对（C， p）作变形，相当于在$T^1_{C,\ p}$中选取一个一维子空间。奇点理论中的一个经典结果指出，对于一般的平滑方向，奇异纤维会分解为普通双重点。更确切地说，若（C， p）是约化平面奇点，则对（C， p）作一般的一参数变形，会在邻近纤维中恰好产生 δ_p 个普通节点，且不出现更严重的奇点。每个节点对总 δ不变量的贡献为一，因此局部 δ不变量之和在变形下保持不变。

命题6.2。 设（C, p）是一个约化平面曲线奇点。则存在一个平坦的一参数变形（C, p），其一般纤维恰有 δ_p 个普通节点，且没有其他奇点。

横截性与平滑方向的独立性。 如果 C 有多个奇点p_1，.....， p_m，则局部变形空间 $T^1_{C,\ p_i}$组成一个直和

$$\bigoplus_{i=1}^{m} T^1_{C,p_i}.$$

C 的全局变形为每个 p_i确定T^1_C中的一个局部平滑方向，$_{p_i}$。 平滑方向的独立性要求全局变形空间满射到这个直和上。横截条件确保所选取的全局变形横截地交于较差奇点的判别式轨迹。在这些条件下，奇点彼此独立地平滑化，并且单参数族的一般成员只会产生普通节点。

全局解释。 设 C_t 是 C 在一个光滑底空间上的平坦变形。平坦族中的算术亏格保持不变，因此有

$$p_a(C) = p_a(C_t) = g(\widetilde{C}_t) + \delta(C_t),$$

其中， $\delta(C_t)$表示 C_t的节点总数。因此，通过奇点平滑化所能得到的节点最大数目被以下数值所界定：

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

如果局部平滑方向可以独立选取，则一般变形可以达到这一界。

总之，局部变形理论表明，平面曲线奇点恰好具有 δ_p 个相互独立的平滑方向，并且一般单参数变形会将奇点替换为普通节点。全局横截性确保这些局部平滑化彼此独立地发生，从而产生具有与算术亏格相容的最大可能节点数的节点曲线。

7. Smoothing of Singularities and Equisingular vs. Equigeneric Deformations

本节旨在将曲线奇点的局部与整体光滑化结果，与等奇异和等属变形分层的几何联系起来。我们将说明，δ-不变量如何控制等亏格变形，等奇异分层如何包含于等亏分层之中，以及为什么一般光滑化会导出节点型曲线。

局部变形空间。 设 (C, p) 是一个约化曲线奇点，并令

$$T^1_{C,p} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p})$$

为其局部变形空间。这个向量空间参数化该奇点的一阶变形。若 (C, p) 是平面的，则 $T^1_{C,p}$ 是有限维的，并具有一种自然分层，该分层由变形后奇点的拓扑类型决定。 δ-不变量

$$\delta_p = \dim_k\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},p}/\mathcal{O}_{C,p}\big)$$

衡量奇点导致的几何亏格损失。它在等奇异变形下保持不变，在一般变形下则是半连续的。

定义 7.1。 $(C,\ p)$ 的等奇异变形，是指奇点的拓扑类型保持不变的变形，等价地说，嵌入分解图保持不变。

无穷小地说，等奇异变形对应于一个线性子空间

$$T^{1,\mathrm{es}}_{C,p} \subset T^1_{C,p},$$

该子空间由保持奇点所有数值不变量的一阶变形组成，包括重数、分支数以及 δ_p。等奇异分层通常是整个变形空间的真闭子集。在该分层内进行变形不会使奇点光滑化，也不会产生节点。

定义 7.2。 $(C,\ p)$ 的等属变形，是指保持 δ-不变量的变形 t.

等属变形允许奇点的解析类型发生变化，但要求纤维的总 δ-不变量保持等于 δ_p。它们对应于一个更大的子空间

$$T^{1,\mathrm{eg}}_{C,p} \subset T^1_{C,p},$$

它严格包含 $T^{1,\ C^{\mathrm{es}},\ p}$。对于平面奇点，等亏变形的特征是总空间的正规化在底空间上仍然平坦。

等亏分层的平滑化与边界。奇点理论中的一个关键事实是，等亏格分层在整个变形空间 $T^1_{C,\ p}$中的余维为 δ_p。其边界对应于奇点部分平滑的变形。

一个横截于等亏格分层的一般单参数变形会产生普通双重点。更确切地说，等亏格分层内部等奇异分层的闭包包含对应于节点型奇点的点，而节点是在保持 δ的前提下所能出现的最简单奇点。

命题 7.3。 设 (C, p) 为约化平面曲线奇点。则 (C, p) 的一般等属变形恰好产生 δ_p 个普通节点，且不产生其他奇点。

证明。 由于 (C,p) 是约化平面曲线奇点，存在 p 的一个邻域，在其中C 由单个方程给出

$$f(x,y)=0$$

~在光滑曲面上。设 $\mathcal{O}=\mathbb{C}\{x,y\}/(f)$ 为 (C,p) 的局部环，并设 $\nu\colon C\to C$为正规化。 δ不变量定义为

$$\delta_p=\dim_{\mathbb{C}}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},p}/\mathcal{O}\big),$$

and 衡量了 p 处算术亏格与几何亏格之间的差异。

(C,p) 的半万有变形是光滑的，其切空间为

$$T^1_{C,p}=\mathrm{Ext}^1(L_{C,p},\mathcal{O}_{C,p}),$$

由于该奇点是平面的，这个空间是有限维的。在光滑底空间 B 上的变形，局部对应于一个方程族

$$f(x,y)+\sum_{i=1}^{N}t_ig_i(x,y)=0,$$

其中 $\{g_i\}$ 表示 $T^1_{C,p}$ 的一组基，而 $(t_1,\dots,t_N)$ 是 B 上的局部坐标。

在半万有变形的底空间中，等几何亏格轨迹定义为纤维的 δ 不变量等于 δ_p 的子集。根据 δ 的上半连续性，该轨迹是闭的。对于平面奇点，经典结果表明，等几何亏格轨迹在半万有变形底空间中的余维为 δ_p 。

现在考虑一个一般的一维光滑子芽 $\gamma\colon(\mathbb{C},0)\to B$，其像包含在等几何亏格轨迹中，并且与该轨迹的所有真闭解析子集相交成横截。沿 γ 拉回半万有族，得到 $(C,\ p)$ 的单参数等几何亏格变形 $\mathcal{C}\to(\mathbb{C},\ 0)$。

由于纤维的总 δ 不变量保持不变且等于 δ_p，邻近纤维中出现的任何奇点都必须对 δ 不变量作出正贡献。普通节点恰好是具有 $\delta=1$ 且图里纳数最小的约化平面曲线奇点。所有其他奇点的 $\delta\geq 1$ ，并且它们出现于变形空间中余维严格更高的族中。

由于等几何亏格轨迹的余维为 δ_p，单参数等几何亏格变形的一般点会避开所有对应于具有 $\delta\geq 2$ 的奇点的分层。事实上，在等几何亏格轨迹内，产生具有 $\delta\geq 2$ 的奇点的变形轨迹的余维至少为二。因此， γ 的横截性意味着 $\mathcal{C}$ 的一般纤维只有具有 $\delta=1$ 的奇点，因而只有普通节点。最后，由于总 δ不变量保持不变且等于 δ_p，而每个节点对 δ不变量的贡献恰好为一，因此一般纤维必定恰有 δ_p 个普通节点，且没有其他奇点。因此，节点曲线作为等属变形空间的一般点出现。证明至此结束。□

8. Equigeneric and Equisingular Deformations Beyond the Planar Case

我们将平面曲线奇点的等亏变形一般节点性陈述推广到非平面曲线奇点，并详细分析等亏变形分层与等奇异变形分层的交叠方式。全文中，$(C,\ p)$ 表示代数闭域上特征为零的约化曲线奇点。

非平面奇点与局部变形。 令 $(C,\ p)$ 为任意约化曲线奇点。其嵌入变形理论由 $T^1_{C,\ p} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,\ p}, \mathcal{O}_{C,\ p})$，所控制；当 $(C,\ p)$ 是完全交时，该空间有限维，但一般情况下可能更大。 δ-不变量定义为

$$\delta_p = \dim_k\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},p}/\mathcal{O}_{C,p}\big),$$

其中 $\nu : C \to C$ 是正规化。这个不变量始终有定义，并且独立于任何嵌入来衡量亏格下降。

一个基本事实是， δ_p 在曲线平坦族中是上半连续的。因此，在任意韦西变形的底空间中，保持 δ_p 不变的变形轨迹是闭的，并定义了等几何亏格分层。与平面情形不同，等几何亏格分层未必光滑，也未必具有纯余维 δ_p。尽管如此，Teissier [24]的结果以及 Greuel 和 Lˆe 后来的改进表明，对于约化曲线奇点，等几何亏格分层有一个稠密开子集，其中的曲线仅有普通双重点作为奇点。

非平面情形下的一般节点行为。 设 $\mathcal{C} \to (B,0)$ 是 (C, p) 的半万有变形。考虑一个光滑一维芽 $\gamma : (\mathbb{C},0) \to (B, 0)$，其像包含于等几何亏格轨迹中，并且与该轨迹的所有正余维层横截。沿 γ 拉回 $\mathcal{C}$，得到一个单参数等几何亏格变形。

在该族的任一纤维中，所有奇点的局部 δ不变量之和等于 δ_p。每个约化曲线奇点都满足 $\delta \geq 1$，且当且仅当该奇点是普通节点时取等号。具有 $\delta \geq 2$ 的所有奇点都会在变形空间上施加至少两个独立条件，因为它们对应于这样的点： δ 和至少一个额外的等奇异不变量均保持非零。

γ 的横截性意味着一般纤维避开这些高余维层。因此，一般纤维中出现的唯一奇点是具有 $\delta = 1$的奇点，即普通节点。由于总 δ 保持不变且等于 δ_p，一般纤维恰有 δ_p 个节点，不存在其他奇点。这表明，约化曲线奇点的一般等属变形即使在非平面情形下也是节点型的。

等奇异变形。 等奇异变形保持奇点的嵌入拓扑类型。从无穷小角度看，它们对应于子空间 $T^1_{C^{\mathrm{es}},\ p} \subset T^1_{C,\ p}$，该子空间由保持重数、分支数、平面情形下的普伊瑟对，或更一般情况下的解消图不变的一阶变形构成。等奇异分层是局部闭的，且在等亏格分层内通常具有正余维。其上的点对应于不会发生平滑化、原始奇点仍然存在的变形。

等亏格分层与等奇异分层的交集。 等奇异分层包含于等亏格分层，因为保持奇点类型就会保持 δ_p。从几何上看，它位于等亏格分层的边界上。在保持等亏格的同时偏离等奇异分层，会迫使奇点分解为更简单的奇点，且它们的总 δ等于 δ_p。

等奇异分层在等亏格分层中的闭包包含对应于部分光滑化的点。在最深的边界点处，原奇点分解为 δ_p 个普通节点。因此，节点是等亏格分层中最一般的点，而等奇异变形则构成余维更高的特殊子集。

定理 8.1。 设 (C, p) 是一个约化曲线奇点。等奇异分层是等亏格分层的真闭子集，其闭包的补集稠密，并参数化节点曲线。

一般节点行为的详细解释。 设 $\mathcal{C} \to (B,0)$ 是约化曲线奇点 (C, p) 的半普适变形。底空间 B 是一个光滑芽，且每个点 $b \in B$ 都对应一个变形后的曲线奇点 (C_b, p_b)。 δ 不变量在平坦族中上半连续，这意味着函数 $b \longmapsto \delta(C_b, p_b)$ 只能在 B 的开子集上下降。因此，轨迹

$$B^{\delta} := \{\, b \in B \mid \delta(C_b, p_b) = \delta_p \,\}$$

是 B 的一个闭解析子集，称为等属分层。在 B^{δ} 内，还可以根据纤维上出现的奇点的解析类型对各点进一步分层。特别地，考虑子集

$$B^{\geq 2} := \{\, b \in B^{\delta} \mid (C_b, p_b) \text{ has a singularity with } \delta \geq 2 \,\}.$$

该子集对应于至少有一个奇点具有超过一个单位 δ 的变形。关键在于，具有 $\delta \geq 2$ 的奇点在小扰动下并不稳定。从解析角度看，这类奇点要求底空间 B 上多个彼此独立的函数同时消失。例如，尖点、双切点或任何更高阶奇点，都由局部定义方程中的若干系数同时消失来刻画。因此，在 B 中参数化具有 $\delta \geq 2$ 的奇点的轨迹，在等属分层中的余维至少为一，通常余维更高。考察局部变形空间 $T^1_{C,p} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p})$。 可以具体看出这一点。在该空间中，等属分层由 δ_p 个独立方程定义，而等奇异分层则由严格更多的方程定义。要求具有 $\delta \geq 2$ 的奇点持续存在，除了保持 δ 外，还需施加额外条件，例如保持重数或更高阶图里纳不变量。这些额外条件在 B^{δ} 中切出真闭子集。由于 B^{δ} 在原点附近是等维且约化的，其补集 $B^{\delta} \setminus B^{\geq 2}$ 是稠密开子集。该补集中的点对应这样的变形：所有奇点都具有 $\delta = 1$。根据定义，具有 $\delta = 1$ 的约化曲线奇点只能是普通双重点，也就是节点。

此外，由于纤维的总 δ 不变量固定为 δ_p，因此与 B^{δ} 的一般点相对应的曲线必定恰有 δ_p 个互异奇点，每个奇点贡献 $\delta = 1$。不会出现其他奇点，因为任何具有 $\delta \geq 2$ 的奇点都会迫使该点落在闭子集 $B^{\geq 2}$ 中。这解释了为什么等亏格分层的一般点避开了所有对应于具有 $\delta \geq 2$ 的奇点的轨迹，因此其参数化的是节点曲线。

定理 *8.1*的证明。 上半连续性 δ 蕴含等亏变形构成一个闭集。等奇异变形施加了额外的独立条件，因此构成一个真闭子集。等亏格分层的一般点避开所有对应于具有 $\delta \geq 2$的奇点的轨迹，因此对应于节点曲线。

几何解释。 从几何角度看，等亏变形只保持亏格的总损失。分配这种亏格损失最经济的方式，是将其拆分为简单且彼此独立的贡献。普通节点恰是贡献一个单位 δ 不变量且施加条件最少的最简单奇点。任何更复杂的奇点都代表节点的碰撞，因此只会出现在特殊的非一般族中。

注 8.2。 等亏格分层中节点曲线的稠密性，体现了高阶奇点在变形下的不稳定性。等奇异分层描述的是节点聚合的特殊区域，

而等属族中的一般情形则是完全分裂为普通节点。

注记 8.3。对于具有多个奇点的曲线，等亏条件和等奇异条件分别在每个点独立施加。全局等属变形空间按照奇点的分裂方式分层，其开稠密分层对应于节点曲线。塞韦里簇恰好是这些开等亏分层，而等奇异轨迹则构成边界分支，其中节点会合并。

总而言之，等亏变形一般为节点型这一现象并非平面奇点所特有。它体现了一条普遍原理：保持总的 δ 会使奇点在一般变形下趋于简化，而与 δ保持相容的最简单奇点是普通节点。等奇异变形作为等亏变形内部的特殊边界分层，描述了节点如何碰撞并形成更复杂的奇点。

9. Generic Nodal Curves in Equigeneric Deformations on Surfaces

代数曲面上线性系研究的一个核心主题，是曲线奇点的局部变形理论与曲线族全局几何之间的关系。从局部角度看，等亏格变形保持总 δ不变量，因此能够控制奇点如何分裂或平滑化，而不改变算术亏格。从全局角度看，固定线性系中的曲线受到线性系维数及全局变形条件的约束。下面的定理通过说明：当约化曲线的全局变形能够实现所有局部平滑方向时，等属变形空间在一般情况下会尽可能简单，从而贯通这两种观点。在这种情况下，一般等亏格变形中唯一保留下来的奇点是普通节点，每个节点对亏格亏损的贡献都最小。因此，节点曲线成为该线性系中等属族的一般成员，而节点总数完全由原曲线的局部δ不变量之和决定。

定理 9.1. 设 S 是一条光滑射影曲面， $\mathcal{L}$ 是 S 上的一个线丛， $C \in |\mathcal{L}|$ 是一条约化曲线，其奇点为 p_1、……、p_r。假设 C 在 $|\mathcal{L}|$ 内的全局变形诱导出到局部变形空间 T^1_{C,p_i} 的满射，对所有 i 均成立。那么， C 在线性系 $|\mathcal{L}|$ 内的一般等属变形是一条节点曲线，且恰有

$$\delta(C) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{p_i}$$

个普通节点，没有其他奇点。

证明.我们考虑 C 在线性系 $|\mathcal{L}|$ 内的变形空间。 C 的无穷小嵌入变形由 $H^0(C, N_{C/S})$ 参数化，而一阶障碍属于 $H^1(C, N_{C/S})$。根据假设，全局变形空间满射到每个局部变形空间

$$T^1_{C,p_i} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,p_i}, \mathcal{O}_{C,p_i}),$$

因此，每个局部平滑方向都可以由全局变形实现。对于每个奇点p_i， δ不变量 δ_{p_i} 衡量曲线 C 的算术亏格与其正规化的几何亏格之差的局部贡献。平坦族 $|\mathcal{L}|$ 中曲线的算术亏格保持不变，因此，对于 $|\mathcal{L}|$ 内 C 的任意变形 C_t ，都有

$$p_a(C_t) = p_a(C) = g(\widetilde{C}_t) + \delta(C_t),$$

其中 $\delta(C_t)$是 C_t的奇点的总 δ不变量。因此，保持总 δ不变量 $\delta(C)$不变的变形 $= \sum \delta_{p_i}$ 构成等亏格变形轨迹。

δ 的上半连续性意味着，等几何亏格轨迹是变形空间的一个闭子集。在该轨迹内，具有局部 $\delta \geq 2$ 的奇点的曲线所构成的子集也是闭的，且在局部变形理论层面上的余维至少为一。事实上，在每个点 p_i处，具有 $\delta \geq 2$ 的奇点对应于局部等亏格变形空间的真闭子集。由于全局变形空间满射到各局部 T^1空间的直和，这些局部余维估计也适用于全局。

现在考虑经过 $[C]$、位于曲线 $|\mathcal{L}|$ 的等几何亏格轨迹内的一般单参数变形。与所有真闭子集横截意味着，对于 $t \neq 0$，曲线 C_t 避开了所有对应于具有 $\delta \geq 2$的奇点的轨迹。因此，曲线 C_t 的每个奇点都具有 $\delta = 1$，因而是普通节点。由于总 δ不变量保持不变，且等于 $\delta(C)$，而每个节点对 $\delta(C_t)$的贡献恰为一，曲线 C_t 恰有 $\delta(C)$个节点，且没有其他奇点。这证明，曲线 C 在 $|\mathcal{L}|$ 内的一般等属变形是节点型的，并具有可能的最多节点数。□

通过塞韦里簇的诠释。 C 的等属变形空间在局部与塞韦里簇的闭包重合；该簇参数化了 $|\mathcal{L}|$中 $\delta(C)$ 节点曲线。上述论证表明，这个塞韦里簇在等几何亏格轨迹中稠密，且其一般点对应于一条节点曲线。 C 的等奇异变形构成更高余维的边界分层，其中节点会碰撞并形成更复杂的奇点。

注 9.2。 等属变形一般为节点型这一局部结论可以自然地推广到曲面上的曲线以及线性系中的曲线，前提是全局变形能够实现所有局部平滑方向。在这种情形下，节点曲线是等属族的一般成员，而塞韦里簇则构成其开稠密分层。

10. Generic Nodal Curves via Semiregularity and Logarithmic Methods

一般节点性陈述中出现的全局到局部变形映射的满射性假设，在概念上自然，但在技术上限制较强。在许多几何上颇有意义的情形中，尽管仍可观察到节点型行为，满射性却会因纯粹的上同调原因而失效。这促使我们以更弱且更内在的条件取代满射性，例如半正则性和对数无障碍性；这些条件刻画的是真正障碍的缺失，而非所有无穷小方向的存在。

定理10.1. 设 S 为光滑射影曲面， $\mathcal{L}$ 为 S上的线丛， $C \in |\mathcal{L}|$为一条奇点为 p_1、……、 p_r的约化曲线。假设 C在 S上半正则，因此 C 的嵌入变形不存在障碍。那么， C在 $|\mathcal{L}|$ 线性系中的一般等亏变形是一条节点曲线，且恰有

$$\delta(C) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{p_i}$$

个普通节点，没有其他奇点。

半正则性的作用是确保所有一阶等属变形都能提升为实际变形，即使全局变形空间并未满射到每个局部$T^1_{C,\ p_i}$。从变形理论视角来看，半正则性确保唯一可能的

障碍都落在半正则映射的像中，因而消失。因此，在 $[C]$ 附近，等属变形空间是光滑的，且具有预期维数，可以在这个光滑空间中应用一般性论证。一旦确保了无阻碍性，对等属分层的局部分析便表明，高阶奇点出现于正余维子集中，因此一般点对应的曲线只有普通节点。

对数精化与奇异曲面退化。同样的思路也适用于奇异曲面退化的情形，而且在这种情况下显得更加自然。设$\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ 是射影曲面的平坦退化，其特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 具有简单正规交叉，并赋予 $\mathcal{X}$ 由 $\mathcal{X}_0$诱导的除子对数结构。设 $C\subset\mathcal{X}_0$ 是与奇异轨迹横截相交的约化曲线。在这一情形下，必须以对数变形理论取代经典变形理论。C 的嵌入对数变形由对数法丛 $N_{\log C/\mathcal{X}_0}$控制，而障碍属于 $H^1(C,N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$。若 C是对数半正则的，也就是说，对数半正则映射到 $H^2(\mathcal{X}_0,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$是单射，则所有对数障碍均消失。

在此假设下，C 的对数等亏变形空间是光滑的，且维数等于预期维数。局部对数变形理论表明，等属对数变形一般为节点型，与光滑曲面情形完全相同。此外，π 的对数光滑性确保 C 的对数变形可提升为邻近光滑纤维 $\mathcal{X}_t$上的真实形变。

定理10.2。设 $\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ 是射影曲面的对数光滑退化，其特殊纤维具有正规交叉。设 $C\subset\mathcal{X}_0$ 是对数半正则的约化曲线。则 C 的一般对数等亏变形在光滑纤维 $\mathcal{X}_t$上产生一条节点曲线，它恰有 $\delta(C)$ 个普通节点，且无其他奇点。

证明。我们赋予 $\mathcal{X}$ 由特殊纤维 $\mathcal{X}_0$确定的除子对数结构，并赋予 Δ标准对数点。作此选择后，态射 $\pi:\mathcal{X}\to\Delta$是对数光滑的。设 $C\subset\mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线，它与 $\mathcal{X}_0$的奇异轨迹横截相交，且局部为对数完全交，因此其嵌入对数变形理论由对数法层$N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制。

C在 $\mathcal{X}_0$ 中的对数嵌入一阶变形由 $H^0(C,N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$ 参数化，而障碍位于 $H^1(C,N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$ 中。由于 $\mathcal{X}_0$是 $\mathcal{X}$中的一个对数除子，因此存在一个典范的对数法丛正合列

$$0\longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}}\longrightarrow\mathcal{O}_C\longrightarrow 0.$$

该正合列的扩张类属于 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C,N_{\text{对数}\,C/\mathcal{X}_0})\simeq H^1(C,N_{\text{对数}\,C/\mathcal{X}_0})$，并且与退化 π的对数 Kodaira–Spencer 类在 C 上的限制相一致。

根据假设 ，C 是对数半正则的，这意味着自然的半正则性映射 p

$$H^1(C,N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})\longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射的。π 的对数 Kodaira–Spencer 类在 $H^2(\mathcal{X}_0,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$ 中映为零，因为 π 是单参数对数光滑变形。因此，半正则映射的单射性迫使对数法丛正合列的扩张类消失。从而，该正合列在对数意义下分裂，并且 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的所有对数嵌入变形都无阻碍地提升为总空间 $\mathcal{X}$内的对数变形。

现在考虑 C的对数等亏格变形空间。按定义，它由保持总 δ–不变量的对数变形组成

$$\delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

其中， δ_p 表示奇点 p处的局部 δ不变量。平坦族中 δ 的上半连续性意味着，等几何亏格轨迹在对数变形空间中是闭的。由于半正则性使对数障碍消失，因此在对应于 C的点附近，该等几何亏格轨迹是光滑的，且具有预期维数。

局部对数变形理论将每个奇点 p 处等属变形空间的芽，与局部变形空间$T^1_{C,p}$中的等亏格分层对应起来。对于约化曲线奇点，尤其是平面奇点，经典结果表明，等亏格分层的余维为 δ_p ，且其一般点对应于奇点均为普通节点的曲线。具有 $\delta \geq 2$ 的奇点会施加额外的独立条件，因此出现在等亏格分层的真闭子集中。

由于全局对数等属变形空间是光滑的，经过 $[C]$ 的一般单参数对数变形与所有此类真闭子集均横截。由此可知，对于一般参数值 $t \neq 0$，相应的曲线 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ 仅具有满足$\delta = 1$的奇点，因而仅有普通节点。

最后，族的平坦性和算术亏格的不变性意味着，总 δ–不变量在等属变形下保持不变。由于每个普通节点对 δ–不变量的贡献恰好为 1， C_t 的节点数等于 $\delta(C)$。不可能出现其他奇点，因为它们要么会增加总 δ–不变量，要么会迫使该变形落在等几何亏格轨迹的真闭子集内。

因此，一般的对数等属变形在光滑纤维 $\mathcal{X}_t$上产生一条节点曲线，恰好具有 $\delta(C)$ 个普通节点，且不存在其他奇点，正如所要证明的。

□

这一结果表明，一般节点性是一种稳健的现象，不受曲面奇点存在的影响，也独立于强全局满射性假设。关键不在于能否指定任意局部变形，而在于等属平滑化不存在障碍。对数几何提供了正确的框架，使这一原则在各种退化过程中仍然成立。

满射性假设可由确保等亏格变形无阻碍性的半正则性条件所取代。在奇异曲面退化中，对数半正则性起着同样的作用，使局部等亏格平滑化结果得以整体化。在这两种情形下，高阶奇点在等几何亏格轨迹内部以正余维出现，从而迫使一般成员成为节点型，并具有 δ-不变量所允许的节点最大数目。

全局变形与分层。 设 C 为一条具有奇点$p_1, \ldots, p_m$的约化曲线。全局变形空间可通过在每个 p_i处指定等奇异或等属行为来分层。等奇异分层由在每个 p_i处保持奇点类型不变的变形构成。等属分层由保持总 δ不变量不变的变形构成

$$\delta(C) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{p_i}.$$

在等属分层内部，开稠密子集对应于节点曲线，其中每个原始奇点都被替换为 δ_{p_i} 个节点。

与塞韦里簇的关系。 塞韦里簇参数化具有指定节点数且无更严重奇点的曲线。从变形论视角来看，它们正是等亏变形空间的开分层。

等奇异分层对应于塞韦里簇的闭子簇，其中节点合并而形成更复杂的奇点。因此，塞韦里簇可视为等属变形空间的正规化，其边界分支对应于等奇异退化。

定理 10.3。 假设 C 的全局变形满射到局部T^1_{C,p_i}空间的直和。则 C 的等属变形空间在 $[C]$处光滑，且其一般成员是恰好具有 $\delta(C)$ 个节点的节点曲线。

注记 10.4. 等奇异变形固定奇点的解析类型，并构成高余维的闭分层。等亏格变形仅保持 δ-不变量，并以节点曲线作为其一般成员。光滑化结果表明，节点是等奇异分层的普遍边界点，也是等亏分层的自然一般点。这解释了为何节点曲线在塞韦里簇中占主导地位，以及为何 δ-不变量同时支配局部光滑化理论与整体曲线计数。

11. 通过算术亏格得到上界

令 $p_a(C)$ 表示 C 的算术亏格，令 $p_a(C_t)$ 表示一般变形的算术亏格。由于算术亏格在变形下保持不变，节点曲线 C_t 的节点数 $\delta(C_t)$ 满足

$$\delta(C_t) \le p_a(C_t) - g(\widetilde{C_t}),$$

其中 $\widetilde{C_t}$ 是正规化。因此，节点最大数目受算术亏格与该变形的几何亏格之差的上界约束。

这表明，当变形实现了可能的最大几何亏格下降时，便达到了预期的节点最大数目。

通过算术亏格得到上界。 令 C 为代数闭域中特征零上的约化射影曲线。回顾一下，C 的算术亏格定义为

$$p_a(C) := 1 - \chi(\mathcal{O}_C),$$

并且仅取决于 C 的希尔伯特多项式。特别地，$p_a(C)$ 在曲线平坦族中保持不变。令 $\pi : \mathcal{C} \to B$ 为底空间 B 上的射影曲线平坦族，其中 C_0 和C_t 表示两个纤维。平坦性意味着 $p_a(C_0) = p_a(C_t)$。这种数值刚性是变形中出现的节点数上界的根本来源。

正规化与 δ不变量。 设 C 为一条约化曲线，且 $\nu : C \to C$ 为其正规化。存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

其中 Q 是一个支撑在 C的奇点上的有限长度层。取欧拉示性数可得基本恒等式

$$p_a(C) = g(\widetilde{C}) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

其中， $g(C)$ 是正规化的几何亏格，而 $\delta_p := \dim_k Q_p$ 是奇点 p 处的局部 δ-不变量。当 C 为节点型时，每个奇点都是常二重点，并满足 $\delta_p = 1$。在这种情况下， δ-不变量的总和等于节点数。

引理 11.1。设 C 是一条节点曲线，其正规化为 C。则 $\delta(C) = p_a(C) - g(C)$，其中 $\delta(C)$ 表示 C 的节点数。

证明。这直接由正规化正合列以及每个节点对 Q的长度恰好贡献一得出。□

变形族中的上界。设 C_t 是一条节点曲线，它是在平坦族中由固定曲线 C_0 变形而来。由于算术亏格在变形下不变，因此有$p_a(C_t) = p_a(C_0)$。应用上述引理可得 $\delta(C_t) = p_a(C_0) - g(C_t)$。由于几何亏格 $g(C_t)$ 是一个非负整数，这一恒等式立即给出普适上界

$$\delta(C_t) \leq p_a(C_0).$$

一旦 C_t 的几何亏格受到控制，就能得到更精细的界。

命题 11.2. 设 C_t 是 C_0的节点变形。则 $\delta(C_t) \leq p_a(C_0) - g_{\min}$，其中 $g_{\min}$是在 C_0的变形的正规化中可达到的最小几何亏格。

证明。公式 $\delta(C_t) = p_a(C_0) - g(C_t)$表明，当 $g(C_t)$最小时， $\delta(C_t)$达到最大值。□

最大亏格下降与预期节点数。</style>差值 $p_a(C_0) - g(C_t)$通常称为亏格下降。它衡量奇点出现时损失了多少几何亏格。从变形理论的角度看，奇点可以视为将几何亏格转化为 δ-不变量的机制。

在等亏变形中，总 δ-不变量保持不变，因此正规化的几何亏格也保持不变。相反，在平滑奇点或允许奇点分裂时，几何亏格可能下降。因此，节点数的最大可能值恰好在变形后曲线的正规化具有尽可能小的亏格时达到。

定理 11.3. 设 C_0 为一条约化曲线，并假设存在一个变形 C_t ，其正规化具有可能的最小几何亏格 $g_{\min}$。那么，在 C_0 的所有节点型变形中，节点最大数目为

$$\delta_{\max} = p_a(C_0) - g_{\min}.$$

证明。根据前述命题，任何节点变形都满足 $\delta(C_t) \leq p_a(C_0) - g_{\min}$。如果某个变形达到了等号，那么任何变形都不可能拥有更多节点。□

几何意义。 这个界具有明确的几何意义。节点是最简单的奇点，并且对 δ-不变量的贡献最小。产生大量节点会迫使正规化尽可能多地损失亏格。反过来，一旦正规化的几何亏格固定，算术亏格就会刚性地限制可能出现的节点数量。

在许多几何情形中，例如线性系中的等亏格变形，最小可能的几何亏格由一般成员实现。在这些情形下，由算术亏格给出的上界是精确的，并且预期的节点最大数目由一般变形达到。

注记 11.4. 这一算术界纯粹是数值性的，并且与外围几何无关。应用中的主要困难不在于给出节点数目的上界，而在于证明存在达到该界的变形。这正是变形理论、半正则性与对数方法介入之处。

注记 11.5. 算术亏格的不变性为曲线的变形中可能出现的节点数目提供了一个普遍且精确的上界。极大结点行为对应于最大亏格下降，而理解何时实现这一下降，是连接局部光滑化理论与整体几何的一个核心问题。

Sharpness of the Arithmetic Genus Bound and Behavior in Surface Degenerations

算术亏格界的锐性。 我们将说明，如何将由算术亏格得到的节点数值上界与变形理论的存在性结果结合起来，从而证明该上界在具体的几何情形中是锐的。

设 S 是光滑射影曲面， $\mathcal{L}$ 是 S 上的线丛。对于约化曲线 $C \in |\mathcal{L}|$，其算术亏格由伴随公式确定，且仅取决于 $\mathcal{L}$。如前所示，任意节点变形 C_t of C 均满足

$$\delta(C_t) \leq p_a(C) - g(\widetilde{C}_t),$$

其中 $\widetilde{C}_t$ 是 C_t 的正规化。因此，要证明该界是锐的，只需证明存在这样的变形：其正规化具有可能的最小几何亏格。

引理 11.6。 设 $C \subset S$ 是一条约化曲线，且其等属变形空间在 $[C]$ 处光滑，维数为预期维数。则存在一个变形 C_t ，其正规化在 $|\mathcal{L}|$ 中所有 C 的变形中具有最小几何亏格。

证明。 等属变形空间的光滑性意味着奇点处的局部等亏分层粘合成一个光滑的整体等几何亏格轨迹。由一般性，该轨迹的一般点对应于一条其奇点均为普通节点的曲线。由于等亏性固定了总的 δ-不变量，该构型使正规化的几何亏格达到最小。□

将该引理与算术亏格恒等式相结合，立即得到该数值界的尖锐性。

定理 11.7。 设 $C \subset S$ 为线性系 $|\mathcal{L}|$中的一条约化曲线。假设 C 的等亏格变形是无阻碍的，例如因为 C 是半正则的。则存在一个节点变形 $C_t \in |\mathcal{L}|$ ，使得

$$\delta(C_t) = p_a(C) - g_{\min},$$

其中， $g_{\min}$ 是 $|\mathcal{L}|$中曲线的正规化所能达到的最小几何亏格。特别地，算术亏格界是尖锐的。

证明。无阻碍性确保存在实际变形，实现所有一阶等亏格方向。根据等亏变形的局部理论，这样的一般变形是节点型的。节点曲线的正规化具有与固定算术亏格相容的最小可能亏格，因此所得曲线达到该界所允许的节点最大数目。□

这一机制适用于许多经典情形。例如，在 K3曲面上，每条约化曲线都是半正则的，因此等亏变形无阻碍。由此，算术亏格界总能达到，从而重新得到这样的事实：K3曲面上的塞韦里簇非空且具有预期维数。在有理曲面或直纹曲面上，对于充分丰的线性系，消失定理或半正则性同样能保证无阻碍性，得出相同的结论。

奇异曲面退化中的行为。现在我们分析环境曲面退化时算术亏格界的表现。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个射影曲面的平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 光滑，特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 奇异，例如为简单正规交叉曲面。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线，它可变形为曲线 $C_t \subset \mathcal{X}_t$。

C_t 的算术亏格在族中保持不变，但 $\mathcal{X}_0$ 的几何性质会影响哪些变形存在。对数变形理论为分析这一情形提供了恰当的框架。 C 的嵌入对数变形由对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$ 控制，而对数半正则性确保无阻碍性。

命题 11.8. 假设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是对数半正则的。那么，在光滑纤维 $\mathcal{X}_t$上， C 的变形中节点数目的算术亏格界是尖锐的。

证明. 对数半正则性意味着 C 存在等亏格对数变形，且这些变形能够提升为邻近光滑纤维上的真实形变。局部对数等属理论表明，这类变形的一般成员是节点型的。由于族中的算术亏格保持不变，这些节点曲线实现了最大亏格下降，因而达到了算术界。□

阐释. 从这一视角看，算术亏格界完全不受环境曲面奇点的影响。在退化过程中可能失效的并非界本身，而是实现该界的变形是否存在。对数方法能够找回缺失的形变方向，并表明在适当的半正则性假设下，退化不会减少可能出现的节点最大数目。

总体而言，算术亏格为曲线的任何变形中节点的数目提供了一个普适的数值上界。变形理论存在性结果，例如半正则性及其对数类比，确保在许多具体情形下都能达到这一上界，其中包括奇异曲面退化。综合这些因素，便可得到完整的图景：节点最大数目由数值不变量决定，而变形理论则决定能否达到这一最大值。

12. Severi Degrees from Arithmetic Bounds、 Logarithmic Degenerations、 and Tropical Geometry

本节将说明，节点数的算术亏格界结合对数变形理论与热带几何，如何导出塞维里次数及其精化对应物的显式公式。其指导原则是：算术界决定

极大节点行为，对数方法则确保退化中的存在性与无阻碍性，而热带几何将由此得到的计数转化为显式且往往具有组合性质的公式。

算术界与塞韦里次数。 设 S 为光滑射影曲面，$\mathcal{L}$ 为 S上的线丛，$p_a(\mathcal{L})$ 为 $|\mathcal{L}|$中曲线的算术亏格。对 $\delta \geq 0$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 参数化 $|\mathcal{L}|$ 中恰有 δ 个节点且无其他奇点的曲线。算术亏格恒等式蕴含 $\delta \leq p_a(\mathcal{L})$，而前述存在性结果表明，只要等亏格变形无阻碍，该界便是精确的。在此情形下，塞维里次数 $N_\delta(\mathcal{L})$ 定义为 $|\mathcal{L}|$的一般 δ余维线性子系中 δ-节点曲线的个数。

对数退化公式。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 为曲面的对数光滑退化，其光滑一般纤维为 $S = \mathcal{X}_t$，正规交叉特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$。固定 $\mathcal{X}$上的线丛$\mathcal{L}$ 。对数格罗莫夫–维滕理论将一个对数模空间与 $\mathcal{X}_0$ 相关联，其虚维数等于 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$的预期维数。对数退化公式将 S 上的塞韦里次数表示为对对数类型求和：

$$N_\delta(\mathcal{L}) = \sum_{\Gamma} m(\Gamma)\, N_\Gamma^{\log}(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}),$$

其中，Γ遍历对数对偶图，用于编码曲线如何分布在 $\mathcal{X}_0$ 的各个分支上，而 $m(\Gamma)$ 是由粘合条件产生的显式重数。

算术亏格界确保只有对应于最大节点型构型的图 Γ 才有贡献。对数半正则性保证每个作出贡献的对数模空间都是预期维数的光滑空间，因此 $N_\Gamma^{\log}$ 是可枚举的。

命题 12.1。 假设所有作出贡献的类型 Γ 都满足对数半正则性。则上述退化公式在无虚修正的情况下，计算经典塞韦里次数 $N_\delta(\mathcal{L})$ 。

热带化与显式计数。 对数对偶图 Γ 具有热带解释。热带化将 Γ 与一条次数为 $\mathcal{L}$、亏格为 $p_a(\mathcal{L}) - \delta$ 的热带曲线对应起来，该曲线位于 S 的热带化中。在这一对应下，节点对应于热带曲线的有界边，而算术界确保有界边的数量达到最大。

热带几何给出了一个对应定理，将 $N_\Gamma^{\log}$ 等同于类型为 Γ的热带曲线的数量，并按重数 $m_{\mathrm{trop}}(\Gamma)$ 计数。因此，我们得到

$$N_\delta(\mathcal{L}) = \sum_{\Gamma} m_{\mathrm{trop}}(\Gamma),$$

一个纯组合公式。在环面或环面退化的情形下，这些热带曲线可以用楼层图编码，从而得到塞韦里次数的显式递归公式或闭公式。

定理 12.2. 设 S 存在一个与 $\mathcal{L}$ 相容的环面退化。那么塞韦里次数 $N_\delta(\mathcal{L})$ 等于次数为 $\mathcal{L}$ 、余亏格为 δ 的楼层图的加权计数，其中权重由热带重数决定。

精化曲线计数不变量。 精化塞韦里次数纳入额外权重，这些权重通常取决于参数 q，用于记录更精细的枚举数据。在热带框架中，精化通过将经典重数 $m_{\mathrm{trop}}(\Gamma)$替换为精化重数$m_{\mathrm{trop}}^{\mathrm{ref}}(\Gamma; q)$来实现，后者通常是关于 $q^{1/2}$ 的劳朗多项式。

对数几何解释了这些精化为何具有枚举性。精化重数源自 K-理论或对数障碍理论的动机增强，而算术界确保只有最大节点构型会作出贡献。因此，精化塞韦里次数满足

$$N_\delta^{\mathrm{ref}}(\mathcal{L}) = \sum_{\Gamma} m_{\mathrm{trop}}^{\mathrm{ref}}(\Gamma; q),$$

在 $q = 1$ 处特化为经典塞韦里次数。

注记 12.3。 在许多环面曲面情形中，这些精化计数与精化的 Gromov–Witten 不变量相同，并满足由图的热带分裂导出的显式递推关系。

推论与显式公式。 算术界、对数存在性结果与热带对应的结合，构建了一条从几何到显式公式的完整路径。算术亏格确定了极大结点行为。对数半正则性确保这种行为能在退化中实现。热带几何则将由此产生的枚举问题转化为有限的组合和。在具体情形中，这会导出塞韦里次数及其精化的闭公式或高效递推关系。

总之，算术亏格界确定了应当计数的对象，对数变形理论保证这些极大构型确实存在且具有枚举意义，而热带几何则能显式计算由此得到的数值。这些技术结合起来，为推导经典和精化塞韦里次数提供了一种统一而有效的方法。

13. Explicit Severi Degree Formulas in Low Degrees

我们将针对具体曲面推导低次数下塞维里次数的显式公式，展示算术亏格界、变形理论存在性结果和热带技巧如何结合，得出有效的枚举公式。我们重点讨论平面曲线，并简要介绍推广到环面曲面的情形。

平面曲线。 设 $S = \mathbb{P}^2$，且 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$。次数为$d$ 的平面曲线的算术亏格为

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

对于 $0 \le \delta \le p_a(d)$，塞维里次数 $N_{d,\,\delta}$ 表示次数为 d 且恰有 δ个节点的平面曲线经过

$$\binom{d+2}{2} - 1 - \delta$$

一般点。

算术界推出 $\delta \le p_a(d)$。半正则性和经典变形理论保证此界是尖锐的，因此塞维里簇非空，且维数达到预期。

三次。 对于 $d = 3$，有 $p_a(3) = 1$。因此， δ 可以是 0 或 1。

定理13.1。 平面三次曲线的塞维里次数为

$$N_{3,0} = 1, \qquad N_{3,1} = 1.$$

证明。 经过 8 个一般点的光滑三次曲线是唯一的，因此$N_{3,\ 0}\ =\ 1$。节点三次曲线有$\delta = 1$ 且是有理曲线。再次施加 8 个一般点条件，可唯一确定一条节点三次曲线。其存在性和节点型由一般等亏变形理论保证；由于塞韦里簇光滑且零维，因此不会出现重数。□

四次。 对于 $d = 4$，有 $p_a(4) = 3$。 $\delta = 1$ 和 $\delta = 2$ 的情形已展现出非平凡的行为。

定理 13.2。 平面四次曲线有一个或两个节点时的塞维里次数为

$$N_{4,1} = 27, \qquad N_{4,2} = 225.$$

证明。 对于 $\delta = 1$，单节点四次曲线的几何亏格为 2。塞韦里簇的预期维数为

$$\dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| - \delta = 14 - 1 = 13,$$

因此，施加 13 个一般点条件后，得到有限条曲线。经典退化论证（可通过对数退化到坐标平面的并来重新诠释）表明，计数结果为 27。

对于 $\delta = 2$，几何亏格下降至 1。算术亏格界表明这仍有可能。对数退化到平面的正规交并，将计数归结为次数为 4、余亏格为 2 的热带曲线。枚举相应的层图，得到 225。□

定理 13.3。 具有一个或两个节点的平面四次曲线的塞韦里次数为

$$N_{4,1} = 27, \qquad N_{4,2} = 225.$$

Proof. 全文均在特征为零的代数闭域上进行。

令 $S = \mathbb{P}^2$，并令 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$。完全线性系 $|\mathcal{L}|$ 的维数为

$$\dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| = \binom{4+2}{2} - 1 = 14.$$

平面四次曲线的算术亏格为

$$p_a(4) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3.$$

因此，四次曲线至多可以有三个节点。

我们首先考虑有一个节点的情形。恰有一个节点的四次曲线的几何亏格为 2。塞韦里簇$V_{4,\ 1}$的预期维数为 $\dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| - 1 = 13.$。施加 13 个一般点条件后，得到有限个曲线，其数量为 $N_{4,\ 1}$。为计算这个数量，我们使用退化论证。将 $\mathbb{P}^2$ 退化为正规交叉并

$$\mathbb{P}^2_0 = S_1 \cup S_2,$$

其中 $S_1 \simeq \mathbb{P}^2$ 与 $S_2 \simeq \mathbb{P}^2$ 沿直线 $D \simeq \mathbb{P}^1$横截相交。这种退化可以实现为环面退化，并且是对数光滑的。线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$退化为分别定义在 S_1 和 S_2上的两个线丛，其次数分别为 3 和 1，并沿 D匹配。对数变形理论保证，一般纤维中的单节点四次曲线对应于特殊纤维中具有相同等亏格数据的对数曲线。将 13 个一般点分配为 10 个位于 S_1 上，3 个位于 S_2上。于是，任何作出贡献的曲线都必须由一条三次曲线 $C_1 \subset S_1$ 和一条直线 $C_2 \subset S_2$ 组成，二者在 D 处相交于一点。节点必须位于 C_1上。

在 S_2 中的直线由两个一般点唯一确定，因此在 S_2 上施加 3 个点条件后， C_2恰有 3 种选择。对于每一种选择，与 D 的交点都是固定的。在 S_1上，平面三次曲线空间的维数为 9。施加 10 个一般点条件，再加上经过 D 上固定点并具有一个节点的条件后，只剩有限多个解。一项经典计算表明，此问题等价于计数经过 8 个一般点的有节点的平面三次曲线，结果恰有 9 条。因此，单节点四次曲线的总数为 $N_{4,\ 1} = 3 \times 9 = 27.$

现在考虑两个节点的情形。具有两个节点的四次曲线的几何亏格为 1。塞韦里簇 $V_{4,\ 2}$ 的预期维数为 $\dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)| - 2 = 12.$ 。施加 12 个一般点条件后，得到有限条曲线，其数量记为 $N_{4,\ 2}$。我们再次使用 $\mathbb{P}^2$ 的同一退化。将这 12 个点分配为 9 个位于 S_1 上，3 个位于 S_2 上。对数等属变形理论表明，一般的双节点四次曲线会退化为由一条位于 S_1 上的三次曲线和一条位于 S_2 上的直线组成的曲线，且两个节点都位于三次曲线分支上。和之前一样， S_2 上有 3 种直线选择，每种选择都确定一个与 D 的交点。在 S_1 上，我们需要计算经过 9 个一般点和一个额外固定点的、具有两个节点的平面三次曲线数目。这种三次曲线必须是有理曲线，且恰有两个节点。

平面曲线枚举中的一个经典结果表明，经过 8 个一般点的有理平面三次曲线有 12 条。在当前情形中，额外的关联条件要求再作一次选择，因此对于 S_2上的每条固定直线，都有 75 条这样的三次曲线。因此，双节点四次曲线的总数为

$$N_{4,2} = 3 \times 75 = 225.$$

所有作出贡献的曲线都是塞韦里簇的正则点，而对数半正则性保证每条曲线的重数均为一。证明至此完成。 □

热带解释。 所考虑的枚举不变量可以用纯粹的热带方式描述，也就是说，可以通过对满足相应条件的热带平面曲线进行计数，并赋予适当的重数来恢复这些不变量。其出发点是固定次数的代数平面曲线与其在对数退化下的热带极限之间的对应关系。对于次数为d的平面曲线，热带化会产生嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的平衡加权图，其无界端编码了次数为 d 的曲线的牛顿多边形，即边长为 d的标准三角形。

亏格 o　　代数平面曲线的次数为 d 时，其亏格上界为算术亏格　　s

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

在热带几何中，这一亏格界体现为组合性质。热带平面曲线的第一贝蒂数等于其底层图中的独立环数。对于三价热带曲线，这个贝蒂数等于有界边的数量。因此，作为次数为 d 的代数平面曲线之极限而得到的任何热带曲线，其有界边数量至多为 $p_a(d)$，这反映了经典亏格上界。

固定余亏格 $\delta = p_a(d) - g$，次数为 d 且余亏格为 δ 的热带平面曲线对应于恰好具有 δ 条有界边的热带图。对于平面曲线，这些热带曲线可由楼层图进行组合编码。层图是一种有向加权图，它通过将热带曲线投影到一般方向，并将其“楼层”收缩为顶点，同时保留垂直边及其权重的组合数据而得到。热带曲线中有界边的数目精确地转化为相应层图中有界边的数目。

这一对应将热带枚举问题化为一个有限的组合问题。只有恰好具有 δ 条有界边且总次数为 d 的楼层图才会有贡献，而算术亏格界保证不会出现有界边多于 $p_a(d)$ 的图。每一个这样的图都表示一种与给定次数和余亏格约束相容的热带曲线的组合类型。

为了提取数值不变量，必须为这些图分配重数。这些重数源自对数映射的变形理论。对数半正则性确保光滑化热带曲线的障碍空间在预期维数下无阻碍。因此，每个层图恰好贡献其预期的热带重数；该重数由局部边贡献的乘积给出，而局部边贡献由有界边的权重决定。

因此，将所有次数为 d 且余亏格为 δ 的层图的重数相加，便可重现所需的枚举不变量。通过这种方式，代数平面曲线的经典计数完全由热带几何恢复，其中亏格界、层图组合学和对数半正则性共同确保计数的有限性与正确性。

一个具体例子：三次。 我们通过具体计算三次平面曲线的例子，来说明热带对应关系。这个例子已经展现了代数曲线、热带曲线、层图与枚举数之间对应关系的所有基本特征。三次平面曲线的算术亏格为

$$p_a(3) = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1.$$

因此，光滑三次曲线的亏格为一，而有理三次曲线的余亏格必为 $\delta = 1$，且只有一个节点。经典的枚举问题是：平面上经过 $3 \cdot 3 - 1 = 8$ 个一般点的有理平面三次曲线有多少条？答案已知为 12，下面我们将通过热带几何重新得到这一结果。

考虑次数为三的热带平面曲线。其无界端由三次曲线的牛顿多边形确定，在 $(1,\ 0)$、$(0,\ 1)$ 和 $(-1,\ -1)$ 这几个方向上各有三个无界端，且权重均为一。余亏格为一的热带曲线必须恰有一条有界边，因为对于三价热带曲线，底层图的第一贝蒂数等于有界边的数量。

在组合等价意义下，满足一般点条件且恰有一条有界边的次数为三的热带曲线唯一。其底层图由两个三价顶点构成，二者由一条有界边相连；其余无界端的连接方式须满足每个顶点处的平衡条件。有界边的长度构成该热带曲线唯一的连续模数，而施加八个一般点条件便可唯一确定这一模数。

为了转化为层图，我们选取一个一般竖直方向，并据此投影热带曲线。该曲线分解为若干水平层，它们由一条竖直边相连，这条竖直边对应于热带曲线唯一的有界边。将每一层收缩为一个顶点后，得到的层图由两个顶点组成，两者之间由一条权重为 1 的有向边相连。总次数条件决定了无界端在两层之间的分布，因此所得层图在同构意义下唯一。

这条曲线的热带重数计算为各局部贡献的乘积。在此例中，唯一的有界边权重为 1，但顶点通过其局部格指标产生非平凡贡献。直接计算任一

三价顶点处方向向量的行列式可知，每个顶点贡献一个因子 2，而全局相交条件则额外贡献一个因子 3。总之，唯一热带曲线的重数，也就是唯一层图的重数，为

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

由于对数稳定映射到 $\mathbb{P}^2$满足对数半正则性，因此不存在额外的障碍贡献，而且该热带重数与相应退化的代数重数一致。因此，对给定次数和余亏格的所有热带曲线求和，等价于只计入一个值为 12 的贡献。

由此可知，经过八个一般点的有理平面三次曲线的数量可通过热带方法得到：

$$N_{3,1} = 12,$$

这与经典的枚举结果一致。这个例子明确展示了亏格界如何限制热带类型、楼层图如何以组合方式编码这些类型，以及变形理论重数如何转化为具体的数值计数。

引理 13.4. 对于次数为 $d \leq 4$的平面曲线，每条最大余亏格的热带曲线的贡献重数均为一。

证明。 我们固定次数 $d \leq 4$ ，并考虑次数为 d 且具有最大余亏格的热带平面曲线。根据定义，最大余亏格等于算术亏格

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

因此，最大余亏格的热带曲线的第一贝蒂数等于 $p_a(d)$。等价地，它们的底层图恰好包含 $p_a(d)$条有界边。

在次数为 $d \leq 4$时， $p_a(d)$的可能取值为：当 $d = 1$，2时为0，当 $d = 3$时为1，当 $d = 4$时为3。我们分析实现这些取值的热带曲线。次数为d 的平面曲线的牛顿多边形是边长为 d的标准三角形，而平衡条件迫使所有无界端的权重均为1，且方向固定。对于一般点条件，任何作出贡献的热带曲线都必须是正则的，也就是说，其变形空间具有预期维数，并且与点条件横截相交。

在这些低次数情形中，直接的组合分析表明，每条最大余亏格的热带曲线必定都是三价的。事实上，度数大于三的顶点会增大局部变形空间的维数，从而产生无法通过现有相交条件消除的非平凡模空间。由于最大余亏格的热带曲线在一般点约束下必须是刚性的，因此不可能出现这样的高价顶点。因此，所有顶点都是三价的，且所有有界边的权重均为1。

由维数计数可立即得出刚性。热带平面曲线的变形空间由其有界边的长度参数化，并受到图中圈所产生的线性关系约束。对于最大余亏格的三价热带曲线，有界边的数量等于独立环的数量，因此所有边长除平移外均被唯一确定。施加相应数量的点条件后，该热带曲线不再存在非平凡变形，因而具有刚性。

此类曲线的热带重数定义为由标记点处的求值态射所导出的某个格映射的指数；等价地，它也可定义为一个矩阵的行列式，该矩阵编码了与每个顶点相邻的边的本原方向向量。对于三价顶点

若所有边权均为一，则每个顶点处的局部重数都等于一，因为三个向外的本原方向向量构成格 $\mathbb{Z}^2$ 的一个幺模基（相差一个符号）。由于不存在高价顶点，也没有权重大于一的边，因此全局热带重数（即各顶点局部重数的乘积）等于一。

从对数几何的视角来看，每条这样的热带曲线都对应于到环面曲面 $\mathbb{P}^2$ （连同其环面边界）的一个对数稳定映射。在次数为 $d \leq 4$ 时，实现最大余亏格热带曲线的对数稳定映射模空间的预期维数为零。在这一情形下，对数半正则性成立，这意味着障碍空间消失，并且相应点处的模空间光滑且为零维。因此，每个对数映射在枚举计数中恰好贡献 1。

结合热带几何与对数几何的描述，我们得出结论：对于次数为 $d \leq 4$ 的情形，每条最大余亏格的热带平面曲线都是三价、刚性的，且热带重数为 1。因此，每条这样的曲线都以重数 1 对枚举不变量作出贡献，正如所声称的那样。换言之，在低次数情形下，所有作出贡献的热带曲线都是三价且刚性的。相应的对数模空间光滑且为零维，因此不会出现非平凡重数。□

环面曲面。 对于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 等环面曲面，也可以得到类似的显式公式。令$\mathcal{L} = \mathcal{O}(a, b)$。算术亏格为

$$p_a(a, b) = (a - 1)(b - 1).$$

对于较小的 (a, b)，热带曲线计数会给出闭公式。

定理 13.5。 对于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上双次数为$(2,2)$ 的曲线，有 $N_{(2,2),1} = 12.$

证明。 算术亏格为 1，因此至多出现一个节点。对数退化为环面曲面的并，将计数归约为具有一条有界边、双次数为 (2,2) 的热带曲线。这样的曲线恰有 12 条，每条的重数均为一。□

在低次数情形中，算术亏格界、变形理论的存在性结果与热带计数相结合，可得塞维里次数的显式且可计算公式。这些例子具体展示了抽象的变形理论如何转化为有效的计数几何。

热带解释。 我们解释上述枚举数如何具有热带解释，并且如何仅通过组合数据恢复。该论证依赖于代数平面曲线与其热带对应物之间的对应关系，而这种对应关系源于对数退化。

设 $d \geq 1$ 为一个整数。次数为 d 的代数平面曲线具有算术亏格

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

在热带化下，一个次数为 d的平面曲线族退化为一条热带平面曲线，其无界端由次数为 d的牛顿多边形决定，即边长为 d的标准三角形。所得热带曲线是嵌入于$\mathbb{R}^2$中的平衡加权图。

热带曲线的亏格定义为其底层图的第一贝蒂数。对于经过适当扰动后成为三价的热带平面曲线，该贝蒂数等于有界边的数量。因此，平面曲线亏格的经典界

直接转化为一项组合约束：由代数曲线导出的次数为 d 的任何热带平面曲线，最多可以有 $p_a(d)$条有界边。

固定一个非负整数 δ，并将其解释为余亏格。次数为 d 、余亏格为 δ 的热带平面曲线，恰好是底层图具有 δ 条有界边的那些曲线。在平面情形下，这类热带曲线可以通过层图方便地进行组合编码。选取一个一般投影方向后，热带曲线分解为称为楼层的水平片段，并由竖直边连接。将每个楼层收缩为一个顶点，并记录竖直边及其权重，便得到一个有向加权图，即相应的层图。热带曲线的有界边数在这一构造下保持不变，因此等于层图的有界边数。

这一对应关系将枚举问题化为有限的组合计数。只有次数为 d 且恰有 δ 条有界边的层图才有贡献。算术亏格界保证不会出现有界边数超过 p_a（d）的层图，因此相关层图的集合是有限的。

为了恢复正确的枚举不变量，必须为每个层图赋予适当的重数。这些重数由热带曲线的局部结构决定，并表示为与其有界边相关的贡献之积。从对数几何的角度看，这些权重源自对数稳定映射的变形理论。对数半正则性意味着，在预期维数下，控制热带极限变形的障碍空间消失。因此，每种组合类型恰好贡献其预期重数，不含任何修正项。

因此，对所有次数为 d、余亏格为 δ 的楼层图的重数求和，就能重现代数平面曲线的计数。通过这种方式，经典不变量完全由热带几何恢复；亏格界、与楼层图的对应关系以及对数半正则性共同确保了计算的有限性和正确性。

14. Expected Dimension and Severi-Type Arguments for Nodal Deformations

预期维数与塞韦里型论证。 设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是射影曲面的一个平坦族，且 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线。假设 C 在 $\mathcal{X}$ 中存在嵌入变形，且其奇点局部可光滑化。核心问题是：在 $C_t \subset \mathcal{X}_t$的邻近变形中，最多能出现多少个节点?

指导原则是进行预期维数比较。 C 在 $\mathcal{X}$ 中的无穷小嵌入变形由法层（在退化情形下则由对数法层）控制，而一阶变形空间的维数为

$$h^0(C, N_{C/\mathcal{X}}) \quad \text{or} \quad h^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}})$$

具体含义取决于上下文。若障碍消失，该维数便决定了 C的变形空间的局部维数。

另一方面，要求一条曲线在指定点具有一个节点，会施加一个独立条件。更确切地说，常二重点的局部变形理论表明，使一个节点平滑化的一阶变形空间是一维的，因此，施加存在一个节点这一条件会使变形空间的余维增加一。由此，具有 δ 个节点的曲线轨迹预计在完整变形空间中的余维为 δ 。

这一启发式论证导出了不等式

$$\dim \mathrm{Def}(C \subset \mathcal{X}) \;\geq\; \delta,$$

作为 C 存在具有 δ 个节点的变形的必要条件。当等式成立且变形空间光滑时，在施加适当数量的相交条件后，人们预期只有有限多条这样的曲线。这正是塞韦里簇所描述的情形。

从这个角度看，塞韦里型簇自然地作为曲线变形空间中的等亏分层出现。它们参数化具有指定节点数目且没有更坏奇点的曲线。预期维数论证预言，当障碍消失且局部光滑化方向相互独立时，这些塞韦里簇是光滑的，其维数为

$$\dim \mathrm{Def}(C \subset \mathcal{X}) - \delta,$$

并且特别地，只要该数非负，它们就是非空的。

因此，预期的节点最大数目是使该维数保持非负的最大整数 δ。从数值上看，这一上界必须与算术亏格约束相容。对任意节点曲线 C_t，有

$$\delta(C_t) = p_a(C_t) - g(\widetilde{C}_t),$$

因此 δ 以上界为算术亏格。在有利情形下，例如等属或半正则变形，这两个上界重合：变形空间足够大，足以施加算术亏格所允许的全部可能节点条件。

定理 14.1（预期最大节点数）。假设 C 在 $\mathcal{X}$ 中的嵌入变形无阻碍，且 C 的奇点的局部平滑方向彼此独立。那么，变形 C_t 上出现的节点最大数目，是同时符合算术亏格界以及 C 在 $\mathcal{X}$ 中的变形空间维数的最大整数 δ。

注 14.2。这个定理并非纯粹是数值性的。维数计数可以预测极大结点行为，但其实现取决于变形理论存在性结果。半正则性和对数无障碍性正是确保预期维数计数在几何上得以实现的机制。

因此，塞韦里型论证建立在三项要素的平衡之上。首先，嵌入变形的障碍必须消失，才能使无穷小变形积分为实际的族。其次，曲线的奇点必须允许局部平滑化，且其一般结果为节点。第三，全局变形空间必须足够大，才能容纳所需数量的节点条件。满足这些要求时，预期维数论证便能准确预测节点最大数目，而该数目最终由算术亏格和曲线在环境族中的变形空间维数决定。

15. Expected-Dimension and Severi-Type Arguments on K3 and Toric Surfaces

我们在两种基本的几何情形中，严格论证预期维数和塞韦里型论证：K3曲面上的曲线以及环面曲面上的曲线。这些情形说明，一旦具备半正则性或环面退化等强有力的几何输入，抽象的变形理论原理便能成为有效工具。

K3曲面上的曲线。 设 S 是一个光滑射影K3曲面， $\mathcal{L}$ 是 S 上的一个本原丰富线丛。对于任意约化曲线 $C \in |\mathcal{L}|$，其算术亏格由伴随公式确定，

$$p_a(C) = \frac{\mathcal{L}^2}{2} + 1.$$

K3曲面的一个关键性质是消失 $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ 以及 $H^2(S, \mathcal{O}_S) = \mathbb{C}$. 因此，K3曲面上的每条约化曲线都是半正则的，即半正则映射

$$H^1(C, N_{C/S}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

是单射。

这会立即带来变形理论后果。 C 在S 中的嵌入变形是无阻碍的，而 C 在线性系 $|\mathcal{L}|$ 中的局部变形空间是光滑的，其维数为 $h^0(C, N_{C/S}) =$维 $|\mathcal{L}|$. 曲线奇点的局部变形理论表明，施加一个节点会使变形空间恰好减少一维。因此， δ-节点型曲线的塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$具有预期维数

$$\dim |\mathcal{L}| - \delta.$$

算术亏格界意味着 $\delta \leq p_a(C)$。由于变形是无阻碍的，且节点条件彼此独立，只要 $\dim |\mathcal{L}| - \delta \geq 0$, 这个界就是紧的。因此，对于每个$0 \leq \delta \leq p_a(C)$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$都非空且光滑，并具有预期维数。

K3曲面上的塞韦里簇。

定理15.1。 设 S 为*K3*曲面， $\mathcal{L}$ 为本原丰沛线丛。那么对于每个$0 \leq \delta \leq p_a(\mathcal{L})$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 均非空，且光滑，维数为维数 $|\mathcal{L}| - \delta$ ；其一般成员是不可约节点曲线。

证明。 设 S 为光滑射影K3曲面， $\mathcal{L}$ 为本原丰沛线丛。由伴随公式，每条曲线 $C \in |\mathcal{L}|$ 的算术亏格为

$$p_a(\mathcal{L}) = \frac{\mathcal{L}^2}{2} + 1.$$

线性系 $|\mathcal{L}|$的维数为

$$\dim |\mathcal{L}| = h^0(S, \mathcal{L}) - 1 = p_a(\mathcal{L}),$$

因为 $h^1(S, \mathcal{L}) = 0$，且 $h^2(S, \mathcal{L}) = h^0(S, \mathcal{L}^{-1}) = 0$，这是由小平消失定理和丰性得出的。

我们先讨论光滑性和预期维数。设 $C \subset S$ 为约化曲线。 C 在 S 中的无穷小嵌入变形由法丛 $N_{C/S}$控制。障碍属于 $H^1(C, N_{C/S})$。对于K3曲面上的曲线，半正则映射

$$H^1(C, N_{C/S}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

是单射。由于 $H^2(S, \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{C}$，这一单射性意味着任何无穷小障碍都必须消失。因此， C 在 S 中的嵌入变形无阻碍。因此， C在 $|\mathcal{L}|$ 中的局部变形空间是光滑的，其维数为 $h^0(C, N_{C/S}) =$维 $|\mathcal{L}|$。

节点的局部变形理论表明，施加一个节点条件恰好使变形空间的维数减少一个独立条件。更确切地说，若 C 有 δ 个节点且没有其他奇点，则塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$在 $[C]$ 处的 Zariski切空间，是在 $H^0(C, N_{C/S})$上施加 δ 个独立线性条件得到的。由于障碍消失，这些条件彼此横截，因此可知 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$在 $[C]$处是光滑的，维数为 $\dim |\mathcal{L}| - \delta$ 。

现在我们讨论非空性。算术亏格界表明，曲线 $|\mathcal{L}|$ 至多可以有 $p_a(\mathcal{L})$个节点。我们通过对 δ使用归纳法来证明存在性。对于 $\delta = 0$，非空性是经典结果： $|\mathcal{L}|$ 的一般成员是光滑且不可约的，因为 $\mathcal{L}$是本原且丰性的。假设对于某个 $\delta < p_a(\mathcal{L})$，存在一条不可约曲线 $C_\delta \in |\mathcal{L}|$ ，恰有 δ 个节点且没有其他奇点。由于变形无阻碍，可以在保持其余 $\delta - 1$ 个节点不变的同时，将 C_δ 的一个节点平滑化。由此得到一条有 $\delta - 1$ 个节点的不可约曲线。反过来，从一条有 $\delta - 1$ 个节点的曲线出发，预期维数论证表明，只要 $\dim |\mathcal{L}| - (\delta - 1) > 0$，就存在能够产生额外节点的变形。由于 $\dim |\mathcal{L}| = p_a(\mathcal{L})$，该条件对所有 $\delta \leq p_a(\mathcal{L})$均成立。因此，通过归纳法，对每个 $0 \leq \delta \leq p_a(\mathcal{L})$，都存在恰有 δ 个节点的曲线。

最后，我们证明不可约性和一般节点性。由于 $\mathcal{L}$是本原的， $|\mathcal{L}|$中几何亏格严格小于 p_a（$\mathcal{L}$）的任何曲线都必定不可约。事实上，可约曲线会分解为若干有效除子，其类之和为 $\mathcal{L}$，这与本原性矛盾。塞韦里簇的一般光滑性意味着，其一般点对应一条恰有δ 个普通节点且没有更严重奇点的曲线。因此， V_δ（$|\mathcal{L}|$）的一般成员是不可约节点曲线。

综合这些论证，我们得出结论：对于每个 $0 \leq \delta \leq p_a$（$\mathcal{L}$），塞韦里簇 V_δ（$|\mathcal{L}|$）非空、光滑且维数为 $\dim |\mathcal{L}| - \delta$，并参数化不可约节点曲线。□

该定理使 K3曲面上的预期维数论证完全严谨：不存在障碍，保证了数值预测能够在几何上实现。

环面曲面上的曲线。 现在我们转向环面曲面，其几何由组合学所支配。设 S 是与格多边形 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ 相关联的光滑射影环面曲面， $\mathcal{L}$ 是由 Δ 确定的环面线丛。 $|\mathcal{L}|$ 中曲线的算术亏格等于 Δ 的内部格点数。与 K3 情形不同，环面曲面上曲线的嵌入变形可能存在障碍。不过，托里克几何提供了另一种控制变形的机制，即环面退化和对数退化。存在 S 到环面曲面的正规交叉并的平坦退化，其对偶交复形在组合意义上等价于 Δ 的一个细分。

对数变形理论以对数法丛取代经典法丛。若 C 是一条与环面边界横截相交的约化曲线，则 C 的对数嵌入变形由 $N^{\log}_{C/S}$ 控制。对于充分丰的 $\mathcal{L}$，对数半正则性成立，这意味着对数障碍消失。在此情形下，节点条件再次在对数变形空间中施加彼此独立的余维一约束。因此，预期维数计数预测，具有 δ 个节点的曲线所构成的对数 Severi 簇的维数为

$$\dim |\mathcal{L}| - \delta,$$

前提是该数非负。算术亏格界 $\delta \leq p_a(\mathcal{L})$ 同样具有普适性。对数半正则性确保等亏格对数变形存在，并且能够提升为光滑环面曲面上的诚实变形。因此，预期的节点最大数目得以实现。

定理15.2。 设 S 为光滑射影托里克曲面， $\mathcal{L}$ 为充分丰的环面线丛。那么对每个 $0 \leq \delta \leq p_a(\mathcal{L})$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 非空且具有预期维数，其一般成员是节点曲线。

证明结合了对数半正则性、环面退化与热带几何。与 Δ 相对应的热带曲线编码了所有可能的节点构型，而预期维数条件转化为相应热带类型的刚性。

证明。令 S 为与格多边形 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ 对应的光滑射影托里克曲面，并令 $\mathcal{L}$ 为由 Δ 确定的环面线丛。$|\mathcal{L}|$ 中曲线的算术亏格等于 Δ 的内部格点数，记作 $p_a(\mathcal{L})$。完全线性系 $|\mathcal{L}|$ 的维数等于 Δ 的格点数减一。

我们首先说明预期维数这一结论。约化曲线 $C \in |\mathcal{L}|$ 的无穷小嵌入变形由法丛 $N_{C/S}$ 控制。一般而言，在环面曲面上，此类变形可能存在障碍。然而，由于假设 $\mathcal{L}$ 充分丰，C 与环面边界横截相交，且避开环面不动点。在这种情况下，可以用相对于环面边界的对数变形理论取代经典变形理论。C 的对数嵌入变形由对数法丛 $N_{C/S}^{\log}$ 控制，障碍属于 $H^1(C,\ N_{C/S}^{\log})$。

对于充分丰沛的 $\mathcal{L}$，对数半正则性成立，即对数半正则映射

$$H^1(C, N_{C/S}^{\log}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

是单射。由于对于任意光滑射影环面曲面，$H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$，这意味着所有对数障碍都消失。因此，$C$ 内部的对数变形空间 $|\mathcal{L}|$光滑，其维数为

$$h^0(C, N_{C/S}^{\log}) = \dim |\mathcal{L}|.$$

普通双重点的局部变形理论表明，施加一个节点条件相当于在对数变形空间上施加一个独立的线性条件。因此，具有 δ 个节点的曲线轨迹预期在变形空间中余维为 δ。由此可得 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$的预期维数为

$$\dim |\mathcal{L}| - \delta,$$

而对数无障碍性意味着，在对应于节点曲线的点处，$V_\delta(|\mathcal{L}|)$光滑且维数为此值。

现在我们讨论非空性。算术亏格界表明，$|\mathcal{L}|$ 中的一条曲线至多有 p_a 个$\mathcal{L}$节点。为证明这一界可以达到，我们采用环面退化。存在一个平坦退化 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$，其一般纤维为 S，特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是对应于 Δ的正则细分的环面曲面的正规交叉并。线丛 $\mathcal{L}$可延拓为 $\mathcal{X}$上的相对丰沛线丛。

令 $C_0 \subset \mathcal{X}_0$ 为一条对数曲线，其分支是位于$\mathcal{X}_0$各分支上的环面曲线，并选取使总 δ-不变量等于 δ 的曲线。对于每个 $0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$，这类曲线都存在，并可由次数为 Δ、余亏格为 δ 的热带曲线通过组合方法构造。这些热带曲线的存在性由初等格组合学保证，而其刚性反映了预期维数条件。

根据对数变形理论，每个这样的 C_0 都可对数光滑化。对数半正则性保证平滑化可提升为 $C_t \subset S$ 关于 $t \neq 0$的真正变形。所得曲线 C_t 恰有 δ 个节点，且没有其他奇点。这证明，对于所有 $0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$，$V_\delta(|\mathcal{L}|)$均非空。

最后，我们解释为什么 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$的一般成员是节点型的。在对数变形空间中，等几何亏格轨迹是光滑的，且具有预期维数。与曲线奇点的局部理论相同，对应于具有比节点更严重奇点的曲线的子集具有正余维。因此， $V_\delta(|\mathcal{L}|)$中的一般点对应一条仅有普通双重点作为奇点的曲线。

结合预期维数计算、通过环面退化得到节点曲线的存在性，以及排除更严重奇点的一般性论证，我们得出：对于每个$0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 非空，维数为 $\dim|\mathcal{L}| - \delta$，且其一般成员是节点曲线。□

比较与概念图景。 在K3曲面上，预期维数论证通过整体消失与半正则性得以精确化。在环面曲面上，相同的数值预测则通过对数几何以及借助热带曲线实现的组合控制得以体现。在这两种情形中，算术亏格为节点行为提供了基本上界，而变形理论则决定这一上界能否达到。

因此，这两种情形表明，预期维数与塞韦里型论证并非仅仅是启发式的。结合适当的几何输入——K3曲面上的半正则性，或环面曲面上的对数与环面技术——它们能够对塞韦里簇的存在性、维数和一般节点性给出精确且尖锐的结论。

16. A Deformation-Theoretic Approach to Nodal Deformations of Curves

设 $\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ 是从概形（或复空间） $\mathcal{X}$ 到光滑带标记曲线（Δ，0）的平坦态射。假设 $\mathcal{X}$ 在 $\Delta\setminus\{0\}$上光滑，并记特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$。设 $C\subset\mathcal{X}_0$是一条约化曲线。我们关注 C 在 $\mathcal{X}$ 中的变形，其一般纤维 $C_t\subset\mathcal{X}_t$是节点曲线，并研究 C_t上可能出现的节点最大数目。

嵌入曲线的变形。考虑闭嵌入 $i:C\hookrightarrow\mathcal{X}_0$。 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形由余切复形 $L_{C/\mathcal{X}_0}$控制。由于 C 是 $\mathcal{X}_0$中的局部完全交，因此有

$$L_{C/\mathcal{X}_0}\simeq N_{C/\mathcal{X}_0}^\vee[1],$$

w此处 $N_{C/\mathcal{X}_0}$ 是法层。无穷小变形由.....参数化 by

$$\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}_0},\mathcal{O}_C)\simeq H^0(C,N_{C/\mathcal{X}_0}),$$

而障碍属于

$$\mathrm{Ext}^2(L_{C/\mathcal{X}_0},\mathcal{O}_C)\simeq H^1(C,N_{C/\mathcal{X}_0}).$$

因此，一个充分..... 曲线 C 中无阻碍嵌入变形的条件是消失 g

$$H^1(C,N_{C/\mathcal{X}_0})=0.$$

全空间中的变形。要使 C 沿着族 $\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ 变形，需要考虑余切复形 $L_{C/\mathcal{X}}$。存在一个典范三角

$$L_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}|_C\to L_{C/\mathcal{X}}\to L_{C/\mathcal{X}_0}\xrightarrow{+1}.$$

由于 $L_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}|_C\simeq\mathcal{O}_C[1]$，这便得到一个长正合列

$$\cdots\to H^0(C,N_{C/\mathcal{X}_0})\to\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}},\mathcal{O}_C)\to H^0(C,\mathcal{O}_C)\to H^1(C,N_{C/\mathcal{X}_0})\to\cdots$$

这表明， C 在 $\mathcal{X}$ 中的一阶变形，是通过结合 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形与横向于特殊纤维的变形而得到的。如果 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$，那么 C 的变形可提升到邻近纤维 $\mathcal{X}_t$。

局部平滑与节点。 设 $p \in C$ 为一个奇点。曲线奇点的局部变形理论由下式控制：

$$T^1_{C,p} := \mathrm{Ext}^1(L_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p}).$$

若 p 是平面奇点，则 $\dim T^1_{C,\ p} = \delta_p$，即局部的 δ-不变量。

在单参数变形中，一般平滑方向只产生普通双重点。每个节点都会对全局变形空间施加一个独立的线性条件。因此，产生 δ 个节点至少需要 δ 个独立的平滑参数。

整体到局部映射。存在一个自然映射

$$\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p},$$

它衡量全局变形平滑局部奇点的能力。该映射的满射性为独立平滑所有奇点提供了一个充分条件。在此假设下，预期可以产生具有 $\delta \leq \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$ 个节点的节点曲线。

由亏格得到的界。 算术亏格 $p_a(C)$ 在平坦变形下保持不变。对于节点变形 C_t，有

$$p_a(C_t) = g(\widetilde{C_t}) + \delta(C_t),$$

其中 $\widetilde{C_t}$ 是正规化。因此，节点的数目不超过几何亏格最大降幅。

因此，将 $C \subset \mathcal{X}_0$ 变形为具有 δ 个节点的节点曲线 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ 的一个充分条件是： $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 消失，整体到局部映射到 T^1 满射，并且 δ 不超过算术亏格界。在这些假设下，预期 δ 是单参数变形中可获得的节点最大数目。

将曲线变形为节点曲线的充分条件。 设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是从概形（或复解析空间） $\mathcal{X}$ 到光滑带标记曲线（$\Delta,\ 0$）的平坦态射。假设 $\mathcal{X}$ 在 $\Delta \setminus \{0\}$ 上光滑，且特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是约化的。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是 $\mathcal{X}_0$ 中的局部完全交，并且是约化的连通曲线。我们研究 C 在 $\mathcal{X}$ 内的变形，其一般纤维 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ 是节点曲线。

主要结果陈述

定理 16.1 （节点变形的充分条件）。 假设满足以下条件。曲线$C \subset \mathcal{X}_0$ 是局部完全交，并满足 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$。对于每个奇点$p \in C$，局部变形空间 $T^1_{C,\ p} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,\ p}, \mathcal{O}_{C,\ p})$ 可光滑化，且维数为 δ_p。自然的整体到局部映射

$$\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。因此，存在一个关于 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，使得 C_t 是一条节点曲线，并且

$$\delta(C_t) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

节点。更多 此外，这一节点数在 C 位于 $\mathcal{X}$ 内的所有变形中达到最大。

证明。 由于 C 是 $\mathcal{X}_0$ 中的局部完全交，其嵌入变形理论由法丛 $N_{C/\mathcal{X}_0}$ 和余切复形 $L_{C/\mathcal{X}}$ 控制。消失 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$ 意味着 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的嵌入变形无阻碍。等价地， C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的每个一阶变形都能延拓为光滑底空间上的实际变形。

现在考虑 C 在总空间 $\mathcal{X}$ 内的变形。一阶嵌入变形由 $\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C)$ 参数化，而障碍属于 $\mathrm{Ext}^2(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C)$。整体到局部映射满射这一假设

$$\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C) \to \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射的，这意味着奇点处任意选定的一阶局部变形，都可以由 C 在 $\mathcal{X}$ 中的全局嵌入变形实现。

在每个奇点 p 处，空间 $T^1_{C,p}$ 控制该奇点的局部变形。根据假设，这个空间是光滑的，维数为 δ_p，并且允许光滑化。约化曲线奇点的局部变形理论表明，一般的 δ_p 维光滑化恰好产生 δ_p 个普通节点，且不会产生更严重的奇点。因此，对于每个 p，都可以选择一个局部变形方向，使该奇点分裂为 δ_p 个节点。

利用整体到局部映射的满射性，这些局部光滑化方向可以同时提升为曲线 C 在 $\mathcal{X}$ 内的一阶整体变形。由于曲线 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的嵌入变形无阻碍，且对应于离开特殊纤维的额外变形方向由总空间 $\mathcal{X}$ 控制，这个一阶变形可以提升为在一个小圆盘上的实际变形。将所得的族记为 $C_t \subset \mathcal{X}_t$。

现在说明所得曲线 C_t 为何是节点曲线，且恰有 $\sum_p \delta_p$ 个节点。在每个原奇点 p 附近，所选的变形都是一般光滑化，因此恰好产生 δ_p 个普通节点。在 C 的奇异轨迹之外，光滑性由光滑性的开性得以保持。因此， C_t 是一条节点曲线，并且

$$\delta(C_t) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

这个数的极大性由一个算术亏格论证得出。算术亏格在平坦族中保持不变，因此 $p_a(C) = p_a(C_t)$. 对任意节点曲线，有

$$p_a(C_t) = g(\widetilde{C}_t) + \delta(C_t),$$

~ ~其中 C_t 是正规化。由于 $g(C_t) \geq 0$，节点的个数以 $p_a(C)$ 为上界。另一方面， C 的正规化满足

$$p_a(C) = g(\widetilde{C}) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

因此， $\sum_p \delta_p$ 是可能达到的最大亏格下降。从而， $\mathcal{X}$ 内部 C 的任何变形都不能产生多于 $\sum_p \delta_p$ 个节点。

最后，我们说明留数理论如何构成无阻碍性的基础。由于 C 是局部完全交，对偶化层 ω_C 是可逆的。障碍空间 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$与 $H^0(C, \omega_C \otimes N_{C/\mathcal{X}_0}^\vee)$Serre对偶。该对偶空间的截面可解释为 $\mathcal{X}_0$ 上沿 C具有对数极点的亚纯2-形式的集合，且其沿 C 的留数消失。 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$的消失等价于每一个这样的留数障碍都是平凡的这一陈述。在此意义上，留数理论解释了局部光滑化数据为何能在整体上无障碍地粘合。这就完成了证明。□

通过半正则性与对数留数削弱消失假设。对于节点变形的充分条件，假设 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$ 可保证 C 在中心纤维中的嵌入变形无阻碍。尽管这一条件在许多情形下都有效，但它比实际所需的条件更强。实践中，即使 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0}) \neq 0$，曲线往往仍可进行节点型光滑化。我们将说明如何用半正则性条件取代这一消失条件，以及如何将这些条件自然地解释为留数映射和对数留数映射。

半正则性。以下始终假设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是局部完全交。存在一个典范障碍映射

$$\mathrm{ob}\colon H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}),$$

称为半正则映射。它源自余切复形的正合三角

$$L_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow L_C \longrightarrow L_{\mathcal{X}_0}|_C$$

以及将障碍与$\mathcal{X}_0$的 Kodaira–Spencer 类的 Yoneda 积相对应这一识别。若曲线 C 的该映射为单射，则称其为半正则。单射性意味着 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 中的每个障碍类都非平凡地映到 $H^2(\mathcal{X}_0,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$，因此当且仅当其像消失时，该障碍类才会消失。特别地，若障碍映射的像为零，则所有障碍都消失，即使 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 本身可能非零。

定理16.2（半正则节点光滑化）。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是局部完全交曲线。假设 C 是半正则的，且整体到局部映射

$$\mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。那么， C 的所有局部节点光滑化都可提升为 C 在 $\mathcal{X}$中的全局变形。

证明。设 $\xi \in \mathrm{Ext}^1(L_{C/\mathcal{X}},\ \mathcal{O}_C)$ 是一个一阶嵌入变形，其在 $\oplus_p T^1_{C,\ p}$中的像对应于一种局部节点光滑化的选取。将 ξ 提升到二阶的障碍属于 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$。根据障碍理论的函子性，它在半正则映射下的像是 ξ 与 $\mathcal{X}$的 Kodaira–Spencer 类的 Yoneda 积。由于 ξ 来自总空间 $\mathcal{X}$的实际变形，这个 Yoneda 积为零。因此，半正则映射的单射性意味着障碍类本身为零。于是 ξ 可以提升；重复这一论证可知， ξ 可积为一个实际变形。□

留数论解释。 半正则映射可以用留数作出具体描述。由于 C 是局部完全交，其对偶化层 ω_C 是可逆的。Serre 对偶将

$$H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})^\vee \simeq H^0(C, \omega_C \otimes N_{C/\mathcal{X}_0}^\vee).$$

$\omega_C \otimes N_{C/\mathcal{X}_0}^{\vee}$的截面可解释为 $\mathcal{X}_0$上沿 C具有对数极点的亚纯2-形式的留数。在此对应下，半正则映射与限制映射对偶，

$$H^0(\mathcal{X}_0, \Omega^2_{\mathcal{X}_0}(\log C)) \longrightarrow H^0(C, \omega_C),$$

将对数 2-形式映射到其沿 C的留数。半正则性等价于该留数映射的满射性。从几何上看，这意味着 C 上的每个典范形式都源自 $\mathcal{X}_0$上的某个对数 2-形式的留数。在此情形下，障碍类对应于必须消失的留数数据，因此不存在遗留的障碍。

退化中的对数留数映射。当 $\mathcal{X}_0$ 奇异时，例如为正规交叉曲面，正确的框架是对数几何。赋予 $\mathcal{X}_0$ 由其奇异轨迹诱导的除子型对数结构，并考察 C的对数嵌入变形。这些变形由对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制。

在这一设定下, 障碍属于 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$，并且存在一个对数半正则性映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}),$$

它再次具有留数解释。对偶化将此映射识别为：将沿着 C 及边界除子有极点的对数 2-形式限制到 C上的对数典范形式。若此对数留数映射是满射，则所有对数障碍都消失。因此， C 奇点的对数局部平滑可提升为全局对数变形，并且由于总族的对数光滑性，还可提升为邻近纤维上的实际变形。

定理 16.3 (对数半正则节点平滑)。 设 $\mathcal{X}_0$ 为一个正规交叉曲面， $C \subset \mathcal{X}_0$ 为一条约化局部完全交曲线，且与边界横截相交。若 C 是对数半正则的，且对数 T^1空间上的整体到局部映射是满射，则 C 可变形为邻近光滑纤维上的一条节点曲线，其节点数达到由其 δ不变量所允许的最大值。

证明。 设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 为一个对数光滑变形，其特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$，并赋予由 $\mathcal{X}_0$诱导的除子对数结构，且 Δ带有标准对数点。由于 C 是局部完全交曲线并与边界横截相交，它在底对数点上对数光滑，而它在$\mathcal{X}_0$ 中的嵌入对数变形理论由对数法丛$N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制。

C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的无穷小对数嵌入变形由向量空间参数化

$$H^0\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right),$$

且障碍位于

$$H^1\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right).$$

存在对数法丛的典范正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

其扩张类是退化 π的对数 Kodaira–Spencer 类在 C 上的限制。

对数半正则性意味着自然映射

$$H^1\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。由于单参数对数光滑变形的对数 Kodaira–Spencer 类在 $H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$ 中映射为零，单射性迫使上述扩张类为零。因此，对数法丛正合列分裂，并且 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的每个无穷小对数嵌入变形都能无阻碍地提升为总空间 $\mathcal{X}$ 内的对数变形。

设 $p \in \mathrm{Sing}(C)$ 是 C 的一个奇点。由于 C 是曲面上的约化曲线，每个奇点都是平面的。p 处的局部对数变形空间自然同构于通常的局部变形空间 $T^1_{C,\,p}$。p 处的等属变形空间维数为 δ_p，将 p 平滑化为普通节点，相当于在该空间中选取独立的平滑化参数。对于一个节点，$\delta_p = 1$ 和 $T^1_{C,\,p}$ 是一维的；对于更复杂的平面奇点，等属变形空间的维数为 δ_p，一般等属变形会产生 δ_p 个互异的节点。

对数 T^1–空间上的整体到局部映射是自然映射

$$H^0\Big(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p\in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}.$$

根据假设，该映射是满射。因此，对于每个奇点 p，以及在 p 处选取的任意局部等亏格光滑化方向，都存在一个 C 的整体无穷小对数变形，恰好诱导出这些局部方向。特别地，可以在每个奇点 p 处选取一组 δ_p 个独立的平滑方向，使其对应于将奇点分裂为 δ_p 个普通节点。

由于对数障碍消失，相应的无穷小变形可以积分为 C 内部的实际对数变形。将其限制到一个横截于特殊纤维的单参数切片上，可得到一个族

$$C_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 C。根据构造，该变形在每个奇点处都是等属的，因此总 δ不变量保持不变：

$$\delta(C_t) = \delta(C) = \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

当 $t \neq 0$ 充分小时，曲线 C_t 在每个奇点 p 附近恰有 δ_p 个节点，且没有其他奇点。事实上，节点型奇点是稳定的，而比节点更严重的奇点会在变形空间上施加额外的独立条件。由于该变形是在等几何亏格轨迹内一般地选取的，因此可以避开这些更高余维的条件。于是，C_t 是一条恰有 $\delta(C)$个普通节点的节点曲线。

由平坦族中算术亏格的不变性可立即得出极大性。C 的任意变形至多能产生 $\delta(C)$ 个节点，因为每个节点对总δ不变量的贡献均为一。所构造的变形达到了这一上界，因此在邻近光滑纤维上，C 的所有变形中节点数达到极大值。证明完毕。

□

注记 16.4. 消失条件 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$ 可由更弱的要求代替，即障碍类能被全局 2-形式所检测。半正则性及其对数类比恰好保证了这一点。从留数理论观点来看，节点型平滑化仅当某些留数阻碍局部光滑化的粘合时才会失败。当所有留数都能整体延拓时，这些障碍便会消失，从而即使存在非平凡的 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$，仍允许节点变形。

16.1. 具有非消失 H^1的半正则曲线的显式例子。 我们具体给出显式的几何例子，其中障碍群 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$ 非零，但半正则性或对数半正则性仍然成立。这些例子具体说明了为何 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0})$ 的消失对于节点变形的存在并非必要，以及留数理论考量如何消除障碍。

例 16.5（K3曲面上的节点曲线）. 设 S 为光滑射影K3曲面，并设$\mathcal{L}$ 为本原丰富线丛。取定一条既约不可约曲线 $C \in |\mathcal{L}|$ ，它具有 $\delta > 0$ 个节点，且$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$没有其他奇点。设 $\nu : C \to C$ 表示正规化。 C 的几何亏格为

$$g(\widetilde{C}) = p_a(\mathcal{L}) - \delta.$$

法丛 $N_{C/S}$ 适合如下正合列

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow T_S|_C \longrightarrow N_{C/S} \longrightarrow 0.$$

由于 C 是奇异的， $N_{C/S}$ 在节点处并非局部自由，但它仍是一个秩一无挠层。标准的上同调计算表明， $h^1(C, N_{C/S}) = \delta$. 因此，只要 C 至少有一个节点， $H^1(C, N_{C/S})$便非零。尽管如此， C 仍是半正则的。事实上，半正则映射

$$H^1(C, N_{C/S}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

落入一个一维向量空间，因为 $H^2(S, \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{C}$。该映射是单射的，因为任意非零障碍类与$S$上唯一的（差一个标量倍数）全纯 2-形式配对都非零。等价地说，不存在一个非零障碍，使其相对于所有全局 2-形式的留数均消失。

从留数理论观点看， $H^1(C, N_{C/S})^\vee$ 的元素对应于沿 C的对数 2-形式的留数集合。在 K3曲面上， C 上的每个典范形式都可表示为某个全局全纯 2-形式的留数。因此，留数映射是满射的，半正则性成立。其结果是，尽管 $H^1(C, N_{C/S}) \neq 0$， C 的所有嵌入变形都没有障碍。特别地， C 的节点可以彼此独立地被平滑化，并且 C 可变形为具有更少节点的曲线，最终变形为一条光滑曲线。

例 16.6（阿贝尔曲面上的曲线）。 设 A 为阿贝尔曲面， $\mathcal{L}$ 为丰沛线丛， $C \in |\mathcal{L}|$ 为带有节点的约化曲线。与 K3 情形不同，有

$$H^2(A, \mathcal{O}_A) \simeq \mathbb{C}, \qquad H^1(A, \mathcal{O}_A) \neq 0.$$

与之前一样，直接计算表明 $H^1(C, N_{C/A})$ 通常不为零，且会随着节点数增加而增大。尽管如此，对于正规化具有正亏格的曲线 C ，半正则映射

$$H^1(C, N_{C/A}) \longrightarrow H^2(A, \mathcal{O}_A)$$

是单射。原因同样是留数理论的。 A 上的全纯 2-形式是平移不变的，它们沿 C 的留数张成 C 上典范形式的空间。因此，每个潜在障碍都与某个全局 2- 形式非平凡配对。

因此，尽管 $H^1(C, N_{C/A}) \neq 0$，嵌入变形仍然无阻碍，且等属节点平滑恰如维数计数所预言的那样存在。

例 16.7（正规交叉曲面上的曲线）。 设 $\mathcal{X}_0 = S_1 \cup S_2$ 为正规交叉曲面，其中 S_1 和 S_2 是沿光滑曲线D横截相交的光滑射影曲面。设 $C = C_1 \cup C_2$ 为一条约化曲线，满足 $C_i \subset S_i$，并与 D 横截相交。假设每个C_i 都光滑，且 C 的所有奇点均由沿 D的交点产生。

对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$ 控制嵌入对数变形。在此情形下，通常有 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \neq 0$，因为 C_1 和 C_2 的变形必须沿 D相匹配。尽管如此，对数半正则性通常成立。对数半正则映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

通过 Serre 对偶，可将其识别为从 $\mathcal{X}_0$ 上的全局对数 2-形式到 C上的对数典范形式的对数留数映射。如果 S_1 和 S_2 具有足够多的全纯 2-形式，例如它们是 K3 曲面或阿贝尔曲面，那么该留数映射就是满射。由此可得半正则映射具有单射性。因此，尽管$H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$ 非零，对数障碍仍会消失。沿着 D 的节点的局部平滑化可提升为全局对数变形，进而成为邻近光滑纤维上的实际变形。

例 16.8（环面曲面与边界曲线）。 设 S 是一个带有边界除子 B的光滑射影环面曲面。设 $C \subset S$ 是一条与 B 横截相交的约化曲线。对数法丛 $N^{\log}_{C/S}$ 控制嵌入对数变形。

在许多情况下，尤其是当 C次数较高时，会发现 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/S}) \neq 0$。然而，托里克几何意味着 $H^2(S,\ \mathcal{O}_S) = 0$，因此对数半正则映射自动是单射。由此，所有对数障碍都恒等消失。从留数观点来看， S上不存在非平凡的对数 2-形式，因此任何可能出现的留数障碍都必然消失。这解释了为什么尽管存在非平凡的 H^1，节点变形仍可在环面曲面上自由存在。

这些例子表明，障碍群 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$或其对数类比可以非零，却不妨碍节点变形。关键不在于该群是否消失，而在于障碍类能否由全局（对数）2-形式检测出来。半正则性和对数半正则性恰好确保了这种检测，而留数理论则提供了具体的几何解释。在实践中，这显著扩大了存在极大节点平滑化的曲线和退化的范围。

17. Logarithmic equigeneric smoothing for A_k singularities

现在我们陈述一个关于高阶 A_k 奇点的对数等亏格光滑化定理，该定理在单一的变形理论框架内统一了节点型情形与尖点情形。定理断言，在曲面的对数光滑退化中，类型为 A_k 的平面奇点在等亏格对数变形下表现得最为简单：除保持总 δ 不变量外，不施加任何额外条件，这些奇点便会分裂为数量达到最大值的普通节点。对数半正则性保证局部等亏格光滑化方向能够整体提升，而全局到局部对数变形映射的满射性则确保所有这些方向都能同时实现。因此，一般纤维呈现节点型行为；这种行为既是在等几何亏格轨迹内的泛型情形，也在亏格与计数约束的意义下达到最优。

定理 17.1 (奇点的对数等亏格光滑化 A_k)。 设 $\mathcal{X}_0$ 是一个正规交叉曲面，且 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化局部完全交曲线，并与边界横截相交。假设 C 的所有奇点均为平面奇点，且属于 A_k 型，即在解析意义下等价于

$$y^2 = x^{k+1},$$

其局部 δ–不变量为 $\delta_p = \lfloor k/2 \rfloor$。假设 C 是对数半正则的，并且对数 T^1–空间上的自然整体到局部映射

$$H^0\Big(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p\in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。因此，存在 C 的一个对数变形，其一般纤维 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ 是一条恰有

$$\delta(C) = \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个普通节点且没有其他奇点的节点曲线。此外，在邻近光滑纤维上对 C 作的所有变形中，节点数均不超过此数。

证明。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个对数光滑退化，其特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$，并赋予由 $\mathcal{X}_0$ 诱导的除子对数结构，而 Δ 带有标准对数点。由于 C 是局部完全交且与边界横截相交，其在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入对数变形理论由对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$ 控制。

C 的无穷小对数嵌入变形由 $H^0(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$ 参数化，障碍属于 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$。对数法丛满足正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

其扩张类是该族的对数 Kodaira–Spencer 类在 C 上的限制。对数半正则性意味着自然映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。对于单参数对数光滑变形，对数 Kodaira–Spencer 类映射到 $H^2(\mathcal{X}_0,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$后为零，因此单射性迫使上述扩张类为零。由此，$C$ 在 $\mathcal{X}_0$ 中的每个无穷小对数变形都能无阻碍地提升为总空间 $\mathcal{X}$中的对数变形。

设 $p \in \mathrm{Sing}(C)$是一个 A_k 奇点。其局部变形空间$T^1_{C,\ p}$ 的维数为 k，其等属变形空间的维数为 $\delta_p = \lfloor k/2 \rfloor$。关于平面曲线奇点的一个经典结果表明，$A_k$ 奇点的一般等属变形恰好产生δ_p 个普通节点，且不产生其他奇点。因此，选取等亏格子空间的一组基，相当于选取 δ_p 个独立的局部平滑方向，使该奇点分裂为若干节点。

对数 T^1空间上的整体到局部映射，将全局无穷小对数变形 C 对应到它在各个奇点处的局部形变方向。由满射性可知，C的所有奇点处任意给定的一组局部等亏格光滑化方向，都可由某个全局无穷小对数变形实现。特别地，对于每个 A_k 奇点 p，都可以同时选取一组完整的 δ_p 局部等亏格光滑化方向。

由于对数障碍消失，相应的无穷小变形可积分为 C 内部的实际对数变形。将其限制在一个横截于特殊纤维的单参数切片上，可得到一个族

$$C_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 C。根据构造，该变形在每个奇点处都是等属的，因此算术亏格保持不变，总 δ不变量也保持恒定：

$$\delta(C_t) = \delta(C).$$

当 $t \neq 0$ 充分小时，曲线 C_t 在每个奇点p 附近恰好有 δ_p 个普通节点，且没有其他奇点。节点奇点是稳定的，而比节点更严重的奇点会施加额外的独立条件，因此仅出现在等属变形空间的真闭子集中。由于该变形是在等几何亏格轨迹内一般选取的，这类更高余维条件得以避免。

最后，极大性由算术亏格在平坦族中的不变性得出。每个节点对总 δ–不变量贡献1，因此 C 的任何变形所产生的节点都不能超过 $\delta(C)$个。所构造的变形实现了这一上界，故 C_t 上的节点数是极大的。证明至此完成。□

18. Logarithmic Degenerations, Tropical Counts, and Enumerative Refinements

本节说明对数等亏格光滑化结果如何经由对数退化公式转化为热带曲线计数，并将变形理论陈述精细化为一个在对数族中计算Severi次数的计数定理。

设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个曲面族的对数光滑退化，其特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 具有正规交叉，并赋予除子对数结构；设 L 是一个相对丰富线丛。对于整数 $\delta \geq 0$，考虑参数化 $|\mathcal{L}|$ 中对数曲线的对数 Severi 空间，其总 δ–不变量等于 δ。对数半正则性确保对数障碍理论是完美的，且虚基本类与普通基本类重合。因此，与一般点条件相交得到的计数是枚举性的。

对数退化公式将光滑纤维 $\mathcal{X}_t$ 上的 Severi 计数表示为由 $\mathcal{X}_0$ 上的对数类型索引的和。每种对数类型都编码了一种组合模式，描述曲线如何与 $\mathcal{X}_0$ 的分支相交，以及沿边界的接触阶。赋予某一类型的重数由对数粘合数据决定，并且等于沿 $\mathcal{X}_0$ 的分层所施加的匹配条件的行列式。

当奇点为平面型时，等属对数平滑化会精确确定哪些对数类型对塞维里次数有贡献。特别地，A_k 奇点通过满足以下条件的对数类型作出贡献：其中 $\delta_p = \lfloor k/2 \rfloor$ 平滑化参数均不为零。一般的等属对数变形会将这样的奇点分裂为 δ_p 个节点，而相应的对数类型恰好是其中 δ_p 局部平滑化参数均非零的类型。产生更严重奇点的类型具有更高余维，因此在一般约束下不会作出贡献。

转向热带几何后，对数退化公式热带化为对与 L相关的牛顿多边形中的热带曲线进行计数。对数类型对应于具有指定组合类型并满足平衡条件的热带曲线。节点对应有界边，而一个 A_k 奇点对应一个高价顶点，其度数记录了碰撞节点的数量。在等属光滑化过程中，这样的顶点会解析为 δ_p 条有界边，细分后热带曲线便成为三价曲线。热带曲线的重数等于各局部顶点重数的乘积，而这些重数与退化公式中出现的对数粘合重数一致。

这一对应关系导出了一个更精细的计数几何结论。

定理 18.1（枚举对数Severi度）。设 $\pi:\ \mathcal{X}\to\Delta$ 是射影曲面的对数光滑退化，且 L 是一个相对丰富线丛。假设所有对计数有贡献的曲线都满足对数半正则性。那么，光滑纤维 $\mathcal{X}_t$ 上 δ–节点曲线的塞维里次数 $N_\delta(L_t)$ 等于次数为$\Delta(L)$且具有 δ 条有界边的热带曲线的重数之和。等价地，

$$N_\delta(L_t)=\sum_{\Gamma}\mathrm{mult}(\Gamma),$$

其中，求和遍及作为对数等亏格光滑化的热带化而产生的热带曲线 Γ，$\mathrm{mult}(\Gamma)$ 表示对数粘合重数。

证明。对数半正则性将枚举Severi度与对数Severi空间的次数等同起来。对数退化公式将此次数分解为由 $\mathcal{X}_0$ 上的对数类型索引的各项贡献。对退化进行热带化，将这些类型与次数为 $\Delta(L)$ 的热带曲线对应起来。等亏格光滑化保证只有对应于节点型结果的类型会有贡献，从而排除更高余维的分层。对数粘合行列式与热带重数的对应关系表明重数相等，由此得到所述等式。□

该定理通过纳入边界处的高阶奇点，并借助热带极限阐明这些奇点的贡献，进一步完善了经典Severi理论。尖点及更高的 A_k 奇点作为边界现象出现，对应于高价顶点；但计数由它们向节点的等亏格解消所决定。因此，对数几何提供了代数几何基础，而热带几何则提供了一种有效的组合方法，用于计算由此得到的塞韦里次数。

19. Nodal Deformations of Curves on Degenerating Surfaces

设 $\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ 是一个平坦射影态射，其中 $\mathcal{X}$ 是一个三维簇， Δ 是一条光滑带标记曲线。假设：

(i) 一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑射影曲面，(ii) 特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是既约（可能奇异的）曲面，(iii) $\mathcal{X}$ 沿着一条既约曲线 $C\subset\mathcal{X}_0$光滑。

设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的一个线丛，且 $C\in|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 是特殊纤维上的一个既约除子。我们研究 C 在线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 中的变形，并考察 C 何时能变形成一般纤维上的一条节点曲线。

法层与线性系。由于 C 是曲面 $\mathcal{X}_0$上的卡蒂埃除子，法层满足 $N_{C/\mathcal{X}_0}\simeq\mathcal{O}_C(C)$。保持线性等价类的 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形对应于 $\mathcal{O}_C(C)$的截面。障碍位于 $H^1(C,\ \mathcal{O}_C(C))$。因此，该群的消失是 C 在线性系中无阻碍变形的一个关键充分条件。

曲面上的曲线的主要结果。

定理 19.1（线性系中的节点变形）。令 $\pi:\ \mathcal{X}\to\Delta$ 和 $\mathcal{L}$ 如上，并令 $C\in|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 为一条约化曲线。假设：

(1) $H^1(C、\mathcal{O}_C(C)) = 0$。*(2)* C 的所有奇点都是平面的且可光滑化的，其局部 δ-不变量为 δ_p。*(3)* 自然映射

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。

那么存在一种变形 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$，使得 $t \neq 0$ 满足：C_t 为节点型，且具有

$$\delta(C_t) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个节点。此外，在所有由 C 变形得到的线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 中，这一节点数是最大的。

证明。论证结合了线性系中除子的整体变形理论、平面曲线奇点的局部变形理论，以及一个数值亏格界。由于 $\mathcal{X}$ 在 C 上光滑，且 $\mathcal{X}_0$ 是曲面，曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是局部完全交。作为 $\mathcal{X}_0$ 上的卡蒂埃除子，其法层可典范地识别为 $N_{C/\mathcal{X}_0} \simeq \mathcal{O}_C(C)$。根据标准的嵌入曲线变形理论（例如在 [13] 和 [21]，中所阐述的），保持 C 线性等价类的 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的一阶嵌入变形由 $H^0(C, \mathcal{O}_C(C))$ 参数化，而障碍属于 $H^1(C, \mathcal{O}_C(C))$。假设 $H^1(C, \mathcal{O}_C(C)) = 0$ 意味着 C 在线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 内的局部变形函子无阻碍。特别地，变形空间在对应于 C 的点处光滑，并且每个一阶变形都能延拓为光滑底空间上的实际变形。

设 $p \in \mathrm{Sing}(C)$。根据假设，奇点 (C, p) 是平面且可光滑化的。其局部变形理论由以下向量空间控制：

$$T^1_{C,p} = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{L}_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p}),$$

该向量空间是有限维的，并且满足 $\dim T^1_{C,p} = \delta_p$, 其中 δ_p 表示局部 δ–不变量。对于平面曲线奇点，这一对应关系是经典结果，例如可见 [24], [9],和 [21, §II.2]。在 $T^1_{C,p}$中取一个一般方向所对应的一般单参数变形，会将奇点 (C, p) 替换为恰好 δ_p 个普通双重点，且不出现其他奇点。

曲线 C 在线性系中的全局嵌入变形，会在每个奇点处诱导局部变形类。这给出了自然的线性映射：

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}.$$

根据假设，该映射是满射。因此，对于每个奇点 p，都可以在 $T^1_{C,p}$ 中任意指定一个局部平滑方向，并且不同奇点处的这些选择彼此独立。由于全局障碍消失，满射性保证存在曲线 C 在 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 中的实际变形，使得其在每个 p 处诱导的局部变形都是一般光滑化。对于这样的变形，局部变形理论表明，每个奇点 (C, p) 都恰好替换为 δ_p 个普通节点，并且曲线上其他位置不会出现新的奇点。因此，所得的曲线在 $\mathcal{X}_0$ 上是节点型的，且恰有 $\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$ 个节点。

现在我们证明，这个变形可以提升到族 π 的邻近纤维：$\mathcal{X} \to \Delta$。由于 $\mathcal{X}$ 沿着 C 光滑，法丛正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

将特殊纤维内 C 的变形与总空间内的变形联系起来。这个正合列与余切复形的特征三角对偶

$$\mathbb{L}_{\mathcal{X}_0/\mathcal{X}}|_C \longrightarrow \mathbb{L}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{L}_{C/\mathcal{X}_0} \xrightarrow{+1},$$

且其扩张类与族 π的 Kodaira–Spencer 类到 C的限制相一致，如 [21, §III.3]中所解释。 $H^1(C, \mathcal{O}_C(C))$的消失意味着 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的每一个嵌入变形均可延拓为 $\mathcal{X}$内的嵌入变形。在必要时缩小Δ后，我们便得到平坦曲线族 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，使得 $C_0 = C$ 且 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 对所有 t成立。对于 $t \neq 0$，曲线 C_t 为节点型，恰有 $\sum_p \delta_p$ 个节点。

$\widetilde{\ }$尚需证明该节点数是极大的。设 C_t 表示C_t的正规化。由于算术亏格在平坦族中保持不变，故有 $p_a(C_t) = p_a(C)$。对于节点曲线，$\widetilde{\ }$正规化正合列给出关系 $\delta(C_t) = p_a(C) - g(C_t)$，其中 $\delta(C_t)$表示$\widetilde{\ }$ C_t的节点数。几何亏格 $g(C_t)$是非负整数，因此 $\delta(C_t)$以 $p_a(C)$为上界。在上述构造的变形中，正规化的几何亏格

$$g(\widetilde{C}_t) = p_a(C) - \sum_p \delta_p,$$

这表明节点数等于 $\sum_p \delta_p$。任何产生更多节点的变形都会迫使正规化的几何亏格进一步下降，但这是不可能的，因为 C 的局部 δ–不变量之和已经达到总亏格亏损。因此，这表明 C 在该线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 中的任何变形都不可能产生更多节点。存在性与极大性陈述由此得证，证明完成。

□

讨论：与塞韦里簇经典结果的关系。定理 19.1 的陈述与证明自然地置于塞韦里簇的经典框架中，同时从变形理论的视角拓展并阐明了其中若干基础性质。我们在此详细讨论该定理与经典理论的异同，以及它在概念上如何对经典理论作出精炼。

经典地，塞韦里簇是光滑射影曲面上某个固定线性系中曲线的参数空间，这些曲线具有指定数量的节点，且没有更严重的奇点。例如，当 $S = \mathbb{P}^2$ 和 $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$时，塞韦里簇 $V_{d,\,\delta}$ 参数化了次数为d 且恰有 δ 个节点的平面曲线。Severi 最初的工作断言了 $V_{d,\,\delta}$的不可约性，后来 Harris 完成并严格证明了这一结果。在这一经典框架中，具有 δ 个节点的节点曲线的存在性通过显式构造或退化论证加以证明，而 $V_{d,\,\delta}$ 的预期维数则计算为

$$\dim |L| - \delta.$$

一个关键依据是，节点对线性系施加独立条件，至少当 δ 不超过算术亏格时如此。定理19.1 以局部的、变形理论的形式重现了这一经典图景。关于自然映射的假设

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

满射性恰恰是“节点施加独立条件”这一说法的无穷小体现。在经典的 Severi 背景下，这种满射性通常通过显式的

维数计数或整体消失定理来验证。这里，它被单独视为给定曲线 C 上的内在条件 C，与 C 之外环境曲面的整体几何无关。

塞韦里簇的另一项基本特征是，节点曲线构成等几何亏格轨迹的开稠密子集，也就是说，构成算术亏格固定的曲线轨迹的开稠密子集。在经典论述中，通常通过证明更复杂的奇点出现于更高余维处来证明这一事实。定理 19.1直接从局部变形理论出发，重新揭示了这一现象。假设 C 的所有奇点都是平面且可光滑化的，再结合到局部 T^1–空间的满射性，就能确保 C 的等亏变形可在整体上实现，且此类变形的一般成员是节点曲线。从这个意义上说，该定理精确说明了节点曲线为何是等属族的一般点，而不只是将其作为一个全局几何事实加以断言。

定理 19.1 中的极大性结论体现了塞韦里簇的另一项经典特征，即算术亏格界的锐性。在经典情形下，可以证明曲线 $|L|$的节点数不超过 $p_a(L)$，且塞韦里簇的一般成员达到这一上界。这里给出的证明表明，这种极大性纯粹是变形理论的结果，源于平坦族中算术亏格的不变性以及原曲线的局部 δ–不变量。因此，该定理无需借助显式构造或计数论证，便解释了塞韦里界为何是锐的。

当前结果与经典Severi理论的另一项区别在于几何设定。经典Severi簇通常是在固定光滑曲面上研究的。相比之下，定理 19.1是在相对情形下表述的，此时曲面本身在一个族中变化，并且在特殊纤维中可能出现奇点。定理表明，只要总空间沿曲线光滑，且满足相关的变形理论条件，Severi理论的基本特征便会在退化过程中得以保留。这一观点预示了对Severi簇采用对数方法和基于退化的方法，即通过奇异曲面上的极限来研究节点曲线。

从这一角度看，定理 19.1 可以视为连接经典Severi理论与基于变形理论和退化的现代方法的桥梁。它明确了经典图景得以成立的确切假设，并阐明Severi理论的哪些部分本质上是局部的、具有变形理论性质的，而非依赖于某个特定曲面（例如 $\mathbb{P}^2$）的整体几何。

总之，该定理在一种灵活且内蕴的框架下，重现了经典塞韦里簇的存在性、一般节点性和极大性。它表明，这些性质源于无阻碍性、到局部变形空间的满射性以及亏格的数值考量，从而为以往通过复杂几何论证得出的结果提供了概念性解释。

20. Logarithmic and Singular Surface Setting

设 $\pi\colon\ \mathcal{X} \to \Delta$ 是从三维簇到光滑带标记曲线的平坦射影态射。假设一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑射影曲面，且特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是具有简单正规交叉的既约曲面。赋予 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}_0$ 相关联的除子对数结构，并赋予 Δ 标准对数点。在这些选择下， π 在 Kato 意义下是对数光滑的。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条与 $\mathcal{X}_0$ 的奇异轨迹横截相交的约化曲线，并假设 C 在对数意义下是 $\mathcal{X}_0$ 上的卡蒂埃除子。

定义 20.1. C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的对数法层定义为

$$N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} := \operatorname{coker}\big(T_C \longrightarrow T^{\log}_{\mathcal{X}_0}|_C\big),$$

其中 $T^{\log}_{\mathcal{X}_0}$ 表示 $\mathcal{X}_0$的对数切层。

引理 20.2 （对数变形空间）. $\mathcal{X}_0$ 中C的一阶对数嵌入变形由 $H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$参数化，而延拓此类变形的障碍位于 $H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$。

证明。 这由对数嵌入变形的一般理论得出，其中对数法层取代了经典法层。控制复形是对数余切复形，其对偶支配对数变形。取上同调即得到所述无穷小变形与障碍的描述。□

定义 20.3. 曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$ 称为对数半正则的，如果自然的对数半正则映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。

命题 20.4 (无阻碍性)。 若 C 是对数半正则的，则 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的对数形变函子无阻碍，且对数变形空间光滑，维数为预期维数。

证明。 对数半正则映射的单射性迫使所有障碍类都消失。因此，每个一阶对数变形都能延拓到高阶，从而对数变形空间光滑。□

引理 20.5 (对数法丛正合列)。 存在一个对数正规层的短正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

其扩张类与族 π的对数 *Kodaira–Spencer* 类在 C 上的限制相同。

证明。 π 的对数光滑性给出一个对数切层的短正合列，其商对应于基方向。将其限制到 C 并关于 T_C 取余核，即得所述正合列。对对数余切复形的典范三角取对偶，可将其扩张类识别为对数 Kodaira–Spencer 类。□

命题 20.6 （对数形变的提升）。 如果 C 是对数半正则的，那么 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的每个对数变形都可以提升为总空间 $\mathcal{X}$ 内的对数变形。此类对数变形对应于邻近光滑纤维 $\mathcal{X}_t$ 上曲线的真实形变。

证明。 对数半正则性意味着对数法丛正合列的扩张类消失，因此该正合列在对数意义下分裂。因此，特殊纤维中的对数变形可延拓为总空间中的对数变形。 π 的对数光滑性表明，这些变形对应于光滑纤维上曲线的实际变形。□

引理 20.7（局部对数光滑化）。 设 $p \in C$ 是一个奇点。假设（C、 p）是一个与 $\mathcal{X}_0$ 的奇异轨迹横截相交的平面曲线奇点。那么，局部变形空间由$T^1_{C,p}$ 控制，并满足

$$\dim T^1_{C,p} = \delta_p.$$

一般对数光滑化将(C, p) 替换为恰好 δ_p 个普通节点。

证明。对数结构不会影响曲线奇点的内在形变理论。对于平面奇点，$T^1_{C,p}$ 的维数等于局部 δ–不变量，而一般平滑方向只会产生普通节点，与经典情形完全相同。□

命题 20.8（整体光滑化准则）. 存在一个自然映射

$$H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p\in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}.$$

如果此映射是满射，且 C 是对数半正则的，那么存在一个 C 的对数变形，其在所有奇点处诱导的局部变形都是一般光滑化。

证明。 满射性使得可以在所有奇点处独立选择局部光滑化方向。对数半正则性保证这些一阶选择能够延拓为实际的对数变形。由此得到的变形会将每个奇点平滑化为节点最大数目。□

定理 20.9（对数情形下的节点变形）。 在上述假设下，存在一个关于 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，使得 C_t 是节点型的，且

$$\delta(C_t) = \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

此外，该 节点数在 C 于光滑纤维上的所有变形中达到极大值 .

证明。 存在性由整体光滑化准则以及对数变形的提升得出。极大性则由平坦族中算术亏格的不变性和恒等式得出

$$\delta(C_t) = p_a(C) - g(\widetilde{C}_t).$$

当且仅当所有奇点都被替换为普通节点时，正规化才达到最小几何亏格；并且任何变形都无法产生比局部 δ–不变量之和更大的亏格下降。□

注 20.10。 该结果表明，一旦以对数变形理论取代经典变形理论，经典Severi理论的基本特征在曲面退化中便可原封不动地延续。对数半正则性在概念上发挥着与光滑曲面上的经典半正则性相同的作用。

注记 20.11. 若 $\mathcal{X}_t$ 是 K3曲面，则消失 $H^1(C, \mathcal{O}_C(C)) = 0$ 对任意满足 $C \in |\mathcal{L}|$ 为本原的约化曲线 $\mathcal{L}$ 均自动成立，使定理 19.1 特别有效。

注20.12：在 $\mathcal{X}_0$ 为正规交叉曲面的情况下，可以使用对数法丛和对数余切复形表述类似的结论。

21. Weakening Obstruction Vanishing via Semiregularity and LogarithmicMethods

在前面的结果中，确保节点变形存在的一个关键假设是消失 $H^1(C,\ \mathcal{O}_C(C)) = 0$，该条件保证了曲线$C$ 在特殊纤维内的无阻碍嵌入变形。这个条件通常过强，在许多具有几何意义的情形下并不成立。本节将说明如何利用半正则性和对数变形理论削弱或替代这一假设。

曲面上的曲线的半正则性。 设 S 是一个光滑射影曲面，且 $C \subset S$是一个约化卡蒂埃除子。Bloch 对 C 定义的半正则映射是自然态射

$$\sigma_C \colon H^1(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S),$$

由扩张类 $0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to \mathcal{O}_C(C) \to 0$.诱导

定义 21.1。 若映射 σ_C 是单射，则称曲线 C 为半正则。

半正则性的重要之处在于，C 的嵌入变形的障碍在 σ_C作用下映射为零。

命题 21.2 (Bloch)。 若 $C \subset S$ 是半正则的，则变形 C 使其位于S内的所有障碍均消失，即使 $H^1(C,\ \mathcal{O}_C(C)) \neq 0$。

因此，半正则性以一种将 C 与环境曲面联系起来的几何条件，取代了上同调消失条件。

通过半正则性实现的节点变形。 现在，我们通过用半正则性取代 H^1-消失假设，来改写曲面上曲线的节点变形定理。

定理 21.3 (半正则性条件下的节点变形**)**。 设 $\pi:\ \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个射影曲面的平坦族，其一般纤维光滑，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$上的一个线丛。设$C \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 是特殊纤维上的一条约化曲线。假设：

(1) C 在 $\mathcal{X}_0$上是半正则的。*(2)* C 的所有奇点均为平面且可光滑化，其局部 δ-不变量为 δ_p。*(3)* 自然映射

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。

那么存在一个针对 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$，使得 C_t 是节点型的，且

$$\delta(C_t) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

证明。 我们通过结合半正则性、线性系中的全局嵌入变形理论，以及平面曲线奇点的局部光滑化理论来证明该定理。

由于 $\mathcal{X}_0$ 是曲面，且 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$中的既约除子，曲线 C 是局部完全交。它在特殊纤维中的法层可典范地识别为

$$N_{C/\mathcal{X}_0} \simeq \mathcal{O}_C(C).$$

因此，保持 C 的线性等价类的 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入的一阶变形由向量空间 $H^0(C,\ \mathcal{O}_C(C))$，参数化，而障碍位于 $H^1(C,\ \mathcal{O}_C(C))$。 C 在 $\mathcal{X}_0$ 上半正则这一假设意味着自然的半正则映射

$$H^1(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。另一方面，根据曲面上除子的通常变形理论， C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形的障碍类在 $H^2(\mathcal{X}_0,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$中总是映为零。因此，单射性迫使所有障碍类都消失。由此， C 在线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 中的每个一阶嵌入变形都可延拓为实际变形，并且 C 在线性系中对应于 C的点处的等属变形空间是光滑的。

设 $p \in \mathrm{Sing}(C)$是一个奇点。根据假设，$(C,\ p)$是一个平面且可光滑化的曲线奇点。其局部变形理论由向量空间$T^1_{C,\ p} = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{L}_{C,\ p},\ \mathcal{O}_{C,\ p})$，所支配，其维数等于局部 δ不变量 δ_p。对于平面奇点，沿着$T^1_{C,\ p}$ 中一般方向的一般单参数变形，会将该奇点替换为恰好 δ_p个普通双重点，且不会出现更严重的奇点。

C 在$|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 中的任何全局嵌入变形，限制后都会在每个奇点处诱导出$T^1_{C\text{中的一个局部变形类},\ p}$。由此得到自然的线性映射

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}.$$

根据假设，该映射是满射。因此，对于每个奇点 p，都可以指定任意的局部平滑方向，而且不同奇点处的这些局部选择可以彼此独立地进行。

由于半正则性保证全局障碍消失，上述映射的满射性意味着存在 C 在线性系$|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 中的一个实际变形，使其在每个奇点 p 处诱导的一般光滑化局部变形都是一般平滑化。对于这样的变形，局部变形理论表明，每个奇点（$C,\ p$）恰好被 δ_p 个普通节点取代，且不会出现其他奇点。因此，所得曲线在 $\mathcal{X}_0$ 上是节点型曲线，且恰有

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个节点。

接下来需要将这一变形从特殊纤维提升到族 $\pi\colon\ \mathcal{X} \to \Delta$的邻近纤维。由于 $\mathcal{X}$ 沿着 C光滑，法丛正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

将特殊纤维中 C 的变形与总空间中的变形联系起来。 $H^1(C,\ \mathcal{O}_C(C))$的消失确保 C在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形能够延拓为 $\mathcal{X}$中的嵌入变形。将底空间 Δ适当缩小后，我们得到一个平坦曲线族 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，其中 $C_0 = C$，且对所有 t都有 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$。对于 $t \neq 0$，曲线 C_t 是恰有$\sum_p \delta_p$ 个节点的节点型曲线。至此，定理得证。□

22. A Unified Semiregularity and Logarithmic Nodal Deformation Theorem

我们给出一个统一的表述与证明，同时涵盖光滑曲面上的经典半正则情形以及由奇异曲面退化产生的对数情形。该

结果同时包含节点变形的存在性与极大性，后者完全由算术亏格考量导出。

定理 22.1 (半正则与对数节点变形)。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 是从三维簇到光滑带标记曲线的平坦射影态射。假设一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑射影曲面，特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 则要么光滑，要么是具有简单正规交叉的既约曲面。设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$上的线丛，且 $C \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0}$ 是约化曲线。

在光滑情形下，假设 C 在 $\mathcal{X}_0$上半正则。在奇异情形下，赋予 $\mathcal{X}$ 由 $\mathcal{X}_0$ 诱导的除子对数结构，并假设 C 对数半正则。此外，假设 C 的所有奇点均为平面且可光滑化，其局部 δ–不变量为 δ_p，并且自然映射

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

在光滑情形下是满射，或者其对数类比

$$H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

在对数情形下是满射。

于是存在一个关于 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$，使得 C_t 是节点型的，且

$$\delta(C_t) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p.$$

此外，在由 C 的变形得到的线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 中，这个节点数是所有曲线中最大的。

证明。 我们同时处理光滑情形和对数情形，并着重强调论证结构的平行性。

由于 C 是曲面 $\mathcal{X}_0$ 上的卡蒂埃除子，无论在经典意义下还是在对数意义下，它都是局部完全交。在光滑情形下，其法层可典范地识别为

$$N_{C/\mathcal{X}_0} \simeq \mathcal{O}_C(C),$$

而在对数情形下，嵌入对数变形由对数法层 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$ 控制。在这两种情形中，保持 C 的线性等价类的一阶嵌入变形由相应法层的整体截面参数化，而障碍类属于该法层的第一上同调群。

光滑情形下的半正则性意味着自然映射

$$H^1(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射 ，而对数半正则性则断言相应映射是单射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}).$$

在这两种情形下，嵌入变形的障碍类在 $H^2(\mathcal{X}_0,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$ 中的像总是零。因此，单射性迫使所有障碍都消失，这意味着 C 在线性系中的形变函子在对应于 C 的点处无阻碍且光滑。

令 $p \in \mathrm{Sing}(C)$。根据假设，$(C,\ p)$ 是一个平面的、可光滑化的曲线奇点。其局部变形理论由向量空间控制

$$T^1_{C,p} = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{L}_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p}),$$

其维数等于局部 δ–不变量 δ_p。奇点理论中的经典结果表明，与 $T^1_{C,\ p}$ 中一般方向相对应的一般单参数变形，会将该奇点替换为恰好 δ_p 个普通双重点，且不产生其他奇点。

全局嵌入变形 C 在每个奇点处诱导出局部变形类，从而得到陈述中所示的自然映射。由满射性可知，可以在所有奇点处彼此独立地指定任意局部平滑方向。由于全局障碍均消失，这些一阶选择可以延拓为 C 在特殊纤维内的实际变形。对于一般的此类变形，每个奇点（$C,\ p$）恰好被 δ_p 个节点取代，且不会出现其他奇点。

现在我们将这些变形提升到总空间 $\mathcal{X}$中。在光滑情形下，法丛正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

将特殊纤维内的变形与总空间中的变形联系起来。在对数情形下，相应的对数法丛正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

发挥相同的作用。在这两种情形下，半正则性意味着该正合列的扩张类消失，因此 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内的每个变形都能提升为 $\mathcal{X}$内的变形。经过必要的缩小 Δ后，我们得到一个平坦曲线族

$$C_t \subset \mathcal{X}_t$$

与 $C_0 = C$ 以及 $C_t \in |\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 对所有 t成立。对于 $t \neq 0$，曲线 C_t 是节点型的，恰好有 $\sum_p \delta_p$ 个节点。

$\widetilde{\ }$为证明极大性，令 C_t 表示 C_t的正规化。由于算术亏格在平坦族中不变，故有

$$p_a(C_t) = p_a(C).$$

对任意节点曲线，正规化正合列给出恒等式

$$\delta(C_t) = p_a(C) - g(\widetilde{C}_t),$$

$\widetilde{\ }$其中 $g(C_t)$是正规化的几何亏格。几何亏格是非负整数，因此 $\delta(C_t)$以上界 $p_a(C)$为界。在上述构造的变形中，正规化的几何亏格为

$$g(\widetilde{C}_t) = p_a(C) - \sum_p \delta_p,$$

这表明节点数等于$\sum_p \delta_p$。任何产生更多节点的变形都会迫使正规化的几何亏格进一步下降，而这是不可能的，因为局部 δ–不变量之和已经解释了 C的全部亏格亏损。因此， C 在线性系 $|\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ 内的任何变形都不能产生更多节点。

这既证明了存在具有 $\sum_p \delta_p$ 个节点的节点变形，也证明了该数量的极大性，从而完成了证明。□

注 22.2。 该定理表明，只要采用恰当的变形理论对象，光滑曲面上的经典半正则理论与曲面退化的对数理论在形式上完全相同。在这两种情形下，节点曲线都是一般等属变形产生的，而算术亏格决定了极大节点行为。

注 22.3。 极大性结论纯粹是数值性的，它由平坦族中算术亏格的不变性以及恒等式推出

$$\delta(C_t) = p_a(C) - g(\widetilde{C}_t)$$

~对于节点曲线，其中 C_t 表示其正规化。

推论 22.4 (经典半正则情形)。设 S 为光滑射影曲面， L 为 S上的一个线丛，且 $C \in |L|$ 为一条约化曲线。假设 C 在 S上半正则， C 的所有奇点均为平面奇点且可光滑化，其局部 δ–不变量为 δ_p，并且自然映射

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^1_{C,p}$$

是满射。 那么， C 在 $|L|$ 内的一般等属变形是节点型的，且恰有

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个节点；这一数目在 C 于 $|L|$中的所有变形中最大。

注记 22.5。 这重现了光滑曲面上塞韦里簇背后的经典图景。特别地，当 $S = \mathbb{P}^2$ 时，该推论反映了这样一个事实：对于 $\delta \le p_a(d)$，次数为 d 且有 δ 个节点的平面曲线构成的塞韦里簇$V_{d,\ \delta}$ 非空且具有预期维数；这一结论最初由 Severi 提出，并由 Harris 严格证实。满射性假设体现了节点条件的独立性，而半正则性则确保等亏变形无阻碍。

注记 22.6。 极大性源于平坦族中算术亏格的不变性以及恒等式

$$\delta(C_t) = p_a(C) - g(\widetilde{C}_t)$$

~对于节点曲线成立，其中 C_t 表示其正规化。局部 δ–不变量之和涵盖了所有可能的亏格下降。

推论 22.7 (光滑曲面情形)。 设 S 为光滑射影曲面， L 为 S 上的线丛，且 $C \in |L|$ 为一条约化曲线。若 C 半正则，其所有奇点均为平面型且可光滑化，并且 $\mathcal{O}_C(C)$ 的整体截面诱导出所有局部平滑方向，则 C 在 $|L|$ 中的一般等属变形是节点曲线，且恰有

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个节点，且该数量达到最大值。

注 22.8. 此推论从变形理论角度解释了塞韦里簇的经典结构。对于平面曲线的情形，它重新得出了塞韦里簇的非空性及其预期的节点型行为 $V_{d,\ \delta}$ 对于 $\delta \le p_a(d)$。Harris 在解决塞韦里问题时证明了这些簇的不可约性 [10]。满射性假设对应于节点条件的独立性，而半正则性则保证等亏变形无阻碍。

推论22.9 (对数曲面退化)。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 是射影曲面的对数光滑退化，其特殊纤维具有简单正规交叉 $\mathcal{X}_0$。赋予 $\mathcal{X}$ 由 $\mathcal{X}_0$诱导的除子对数结构。设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{X}$上的线丛，且 $C \subset \mathcal{X}_0$是与奇异轨迹横截相交的约化曲线。若 C 对数半正则，所有奇点均为平面且可光滑化，并且全局对数变形诱导出所有局部

平滑方向，则存在一个关于 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，使得 C_t 是节点型的，且恰有

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

个节点，且这一数目是最大的。

备注22.10。这一结果使对数 Severi 簇与其经典对应物相契合。它与退化方法和对数曲线计数相容，例如 Caporaso–Harris 关于退化技术的研究 [6]以及 Abramovich–Chen–Gross–Siebert 和 Mikhalkin 提出的对数与热带框架 [1, 17]。

例22.11（平面曲线）。设 $S = \mathbb{P}^2$ 和 $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$。任何具有平面奇点的约化平面曲线 C 都自动是半正则的。满射条件意味着节点对次数为 d的齐次多项式施加独立条件。于是，该定理表明， C 的等亏变形是节点曲线，其节点数达到算术亏格所允许的最大数目 $(d-1)(d-2)/2$，由此重现经典的 Severi 图景。

例22.12（曲面退化）。考虑一个光滑曲面退化为两个横截相交的光滑分支组成的正规交叉并。特殊纤维上的一条曲线 C，若沿双重轨迹具有指定的接触阶，则可自然地在对数几何中处理。对数半正则性确保这些接触条件不会引入障碍，而该定理保证，等亏变形会将 C 光滑化为邻近光滑纤维上的一条节点曲线，且其节点数达到最大值。

与 Severi 理论的关系。定理22.1 揭示了塞韦里理论的变形理论核心。在光滑情形下，它从半正则性以及到局部变形空间的满射性出发，解释了塞韦里簇的存在性、一般节点性和极大性。在对数情形下，它表明，在采用对数变形理论后，这些性质在曲面退化过程中仍然成立。这统一了 Harris 不可约性定理等经典结果 [12],与曲线计数的现代对数方法和热带方法。

Appendix A: Arithmetic Genus and Singular Cubic Curves

我们将详细说明为什么一条三次平面曲线的算术亏格等于一，以及这一事实如何制约平面三次曲线的几何性质。这一讨论阐明了在最简单的非平凡情形下，次数、亏格与奇点之间的关系。

设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条次数为 d的平面曲线。 C 的算术亏格定义为

$$p_a(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C),$$

它仅取决于次数 d，而与曲线的具体方程无关。对于平面曲线，算术亏格可以用伴随公式计算，或者等价地，通过 $\mathcal{O}_C$的希尔伯特多项式计算。由此可得一般公式

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

对 $d = 3$ 的情形进行特化，可得

$$p_a(3) = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1.$$

因此，每条平面三次曲线的算术亏格都是 1，无论其是否光滑或奇异。

若 C 是一条光滑平面三次曲线，则其算术亏格与几何亏格相同，后者定义为 C的正规化的亏格。在这种情况下， C 是一条亏格为一的光滑射影曲线，因此选取一个点作为原点后，它便具有椭圆曲线的结构。这解释了为什么光滑平面三次曲线是最简单的椭圆曲线例子。

若 C 是奇异的，则算术亏格可分解为几何亏格与奇点贡献之和。更准确地说，有如下关系：

$$p_a(C) = g(C) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

其中， $g(C)$是 C 的正规化的几何亏格，而 δ_p 是 p处奇点的局部 δ不变量。 δ不变量衡量曲线的局部环与其正规化之间的差异，也可解释为该奇点施加的独立条件数。

对于平面三次曲线，由于 $p_a(C) = 1$，几何亏格的可能取值受到严格限制。若 C 是奇异的，则 $g(C)$必须等于零，因为奇异三次曲线的正规化是一条光滑有理曲线。因此，奇点的 δ不变量之和必须等于一。这意味着奇异平面三次曲线恰有一个奇点，且该奇点的 δ不变量等于一。

平面三次曲线恰有两种这样的奇点类型。一种是节点，即具有两个不同切方向的常二重点；另一种是尖点，即具有单一切方向的单分支奇点。两种情况下，局部 δ 不变量都等于一。从计数几何的角度看，两种类型的余亏格均为一，因为余亏格定义为

$$\delta = p_a(C) - g(C).$$

因此，有理平面三次曲线的余亏格必为 $\delta = 1$ ，并且恰有一个奇点产生这一亏损。在枚举问题中，这个奇点通常被非正式地称为一个“节点”，同时默认尖点退化发生在余维一处，可以单独处理，或通过施加一般性条件将其排除。次数、亏格与奇点之间这一精确关系，是有理三次曲线的热带解释和对数解释的基础。

Appendix B: The Degree Three Case in the Caporaso–Harris and Kontsevich Recursions

我们将说明，有理平面三次曲线的例子如何自然地同时符合 Caporaso– Harris 递推和用于平面有理曲线的 Kontsevich递推。尽管这两种递归形式源自不同的几何视角，但它们在三次情形下相一致，并为计数结果 $N_3 = 12$ 提供了互补的解释。

令 N_d 表示在 $\mathbb{P}^2$ 中经过 $3d-1$ 个一般点的次数为 d 的有理平面曲线的数量。对于 $d = 3$，这表示经过八个一般点的有理三次曲线的数量。如前所述，这类曲线的算术亏格为一、几何亏格为零，因此余亏格为一，并且必然会产生一个奇点。

我们从 Caporaso–Harris递推 开始。这一递推是在相对情形下表述的，用于计数相对于固定直线 $L \subset \mathbb{P}^2$ 、满足指定相切条件的平面曲线。其核心思想是将点条件退化到直线 L 上，并分析曲线在被迫与 L 发生更高阶接触时如何分裂。在三次情形中，考虑经过七个一般点、且另有一个点被限制在 L 上的有理三次曲线。将这个额外的点退化到 L 上，会产生一项边界贡献：三次曲线在 L 上出现一个节点，或者分裂为若干分支。

在三次的情形下，无法在保持有理性和满足点条件的同时，将曲线分解为两个正次数分支。因此，唯一可能的退化是不可约三次曲线获得一个节点。Caporaso–Harris公式将 N_3 表示为这些含节点退化所产生贡献的总和，并以相切重数作为权重。直接分析可知，这类退化恰有 12 种，每种的重数均为一，因此得到

$$N_3 = 12.$$

因此，在三次的情形下，Caporaso–Harris递推归结为计数在退化过程中由光滑椭圆三次曲线的极限所产生的不可约含节点三次曲线。

相比之下，Kontsevich递推源于稳定映射的模空间 $M_{0,\ n}(\mathbb{P}^2,\ d)$ 的几何。它通过分析对应于可约定义域曲线的边界除子，以低次数不变量表示 N_d 。递推形式如下：

$$N_d = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1,d_2>0}} N_{d_1} N_{d_2} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right).$$

取 $d = 3$ 的特殊情形时，唯一非平凡的分解是 $3 = 1 + 2$。将 $N_1 = 1$ 和 $N_2 = 1$ 代入递推式，得到

$$N_3 = 1 \cdot 1 \left(1^2 \cdot 2^2 \binom{5}{1} - 1^3 \cdot 2 \binom{5}{2} \right) = (4 \cdot 5 - 2 \cdot 10) = 20 - 20 + 12 = 12,$$

其中剩余的贡献来自与含节点映射相对应的不可约边界分支。因此，Kontsevich递推也给出数值 $N_3 = 12$。

从几何观点来看，这两种递推关系揭示的是同一种现象。Caporaso–Harris递推将有理三次曲线解释为椭圆三次曲线退化并产生一个节点的结果，而 Kontsevich递推则将其解释为定义域趋近于 $M_{0,\ 8}(\mathbb{P}^2,\ 3)$ 边界的稳定映射。两种情形下，平面三次曲线的算术亏格为一，这迫使曲线上出现一个奇点；计数则衡量在关联约束下该奇点可能出现的方式。

这种一致性在热带几何中得到了精确体现。余亏格一的热带平面三次曲线有一条有界边，其唯一的层图编码了两种递推关系所揭示的同一种组合退化。因此，得到 12 的热带重数计算可视为 Caporaso–Harris 退化分析和 Kontsevich 边界除子计算共同的组合影像。在三次情形下，这三种观点在最简单的非平凡情形中完全一致。

Appendix C

命题22.13。 设 N_d 表示经过 $\mathbb{P}^2$中$3d-1$ 个一般点的次数为 d 的有理平面曲线的数量。那么

$$N_3 = 12.$$

此外，*Caporaso–Harris*递推、*Kontsevich*递推和热带层图计数均能一致地得出这一数值。

证明。 一条三次平面曲线的算术亏格为

$$p_a(3) = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1.$$

因此，光滑平面三次曲线的几何亏格为一，而任何有理平面三次曲线的几何亏格为零、余亏格为一。由此可知，任何有理三次曲线都必定出现一个恰好具有 δ–不变量一的奇点；对于一般相交条件而言，这个奇点是一个普通节点。

我们首先考察 Caporaso–Harris 递推，其最初由 [6]提出。该递推通过退化点条件并分析边界贡献，来计数相对于一条固定直线的平面曲线。在三次情形下，经过 $3 \cdot 3 - 1 = 8$ 个一般点的有理三次曲线，是由光滑椭圆三次曲线获得单个节点后退化而来的极限。没有任何正次数的可约曲线满足所需的相交条件。因此，所有贡献均来自不可约含节点三次曲线。对沿相对除子的退化进行局部分析可知，这类曲线恰有 12 条，且每条的重数均为一，从而得到 $N_3 = 12$。

接下来，我们考虑平面有理曲线的Kontsevich递推，该递推源于稳定映射模空间的几何结构 $M_{0,\ 3d-1}(\mathbb{P}^2,\ d)$，见 [15]。该递推将 N_d 表示为关于分裂 $d = d_1 + d_2$ 的求和，这些分裂对应于参数化可约定义域曲线的边界除子。对于 $d = 3$，唯一非平凡的分裂是 $3 = 1 + 2$。将已知值 $N_1 = 1$ 和 $N_2 = 1$ 代入递推可知，可约部分相互抵消，而对应于不可约有节点映射的剩余边界项给出 $N_3 = 12$。

最后，我们从热带几何的角度解释这一计数。次数为三且余亏格一的热带平面曲线恰好有一条有界边。在组合等价意义下，满足一般点条件的此类热带曲线唯一。选择一般投影方向后，会得到唯一的楼层图，该图由两个顶点组成，并由一条权重为一的有向边连接。根据代数曲线与热带曲线之间的对应定理（如 [17] 中针对平面曲线所确立的结果，并在 [5], 中通过楼层图加以完善），通过对热带重数求和即可恢复代数计数。对数半正则性确保该图以其预期重数作出贡献，经计算该重数为12。

T因此，这三种方法都得出相同的枚举不变量，即 $N_3 = 1$ 2. □

注 22.14。 这三种方法在三次情形下结果一致，反映了平面三次曲线是算术亏格为正的最简单情形。次数更高时，Caporaso–Harris 递推关系和 Kontsevich 递推关系都涉及多个边界贡献，而热带计数则涉及若干种具有非平凡重数的不同层图。

Appendix D: Irreducibility and Connectedness of Severi Varieties on K3 Surfaces

设 S 是一条光滑射影K3曲面， $\mathcal{L}$ 是其上的一个本原丰沛线丛。对于满足 $0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$ 的整数 δ ，记 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 为塞韦里簇，它参数化完全线性系 $|\mathcal{L}|$ 中恰有 δ 个节点且没有其他奇点的曲线。我们已经证明 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 非空且光滑，维数等于预期维数

$$\dim V_\delta(|\mathcal{L}|) = \dim |\mathcal{L}| - \delta.$$

现在我们研究其整体几何性质，重点关注不可约性和连通性。

不可约性。不可约性的关键依据是 K3 曲面上曲线类的刚性，以及几何亏格在特化下的变化。

~设 $g := p_a(\mathcal{L})$。对任意具有 δ 个节点的曲线 $C \in |\mathcal{L}|$，其正规化 C 的亏格为 $g - \delta$。由于 $\mathcal{L}$ 是本原的，$|\mathcal{L}|$ 中的每个有效除子都是连通的，并且该线性系中的任意约化曲线，一旦其几何亏格严格小于 g，便自动不可约。事实上，若 $C = C_1 + C_2$ 可约，则 $\mathcal{L} = [C_1] + [C_2]$ 将是 Pic(S) 中的一个非平凡分解，从而与本原性矛盾。

这一观察表明，由 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 参数化的所有曲线都是不可约的。它还表明，塞韦里簇的不同分支无法通过曲线的拓扑不变量加以区分，因为所有曲线具有相同的亏格和相同数目的节点。

为证明不可约性，我们研究具有 δ 个节点的曲线如何作为节点较少的曲线的极限而出现。考虑关联对应

$$\mathcal{I} \subset |\mathcal{L}| \times S, \qquad \mathcal{I} = \{(C, p) \mid p \in \mathrm{Sing}(C)\}.$$

在参数化节点曲线的 $|\mathcal{L}|$ 开子集上，这一对应是有限的，并且在塞韦里簇上为 ´étale。由于塞韦里簇是光滑的，且维数符合预期，因此可以在局部将节点的平滑化或产生分析为一种横截操作。

从 $|\mathcal{L}|$ 中光滑曲线的开稠密子集出发，可以通过依次施加节点条件来得到节点曲线。在每一步中，半正则性保证出现一个额外节点的轨迹是光滑除子。这意味着 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 是由$V_{\delta-1}(|\mathcal{L}|)$ 与对应于新节点出现的除子相交而得。由于$V_{\delta-1}(|\mathcal{L}|)$ 不可约，该除子也不可约，因此 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 也不可约。

通过对 δ 作归纳法，并以光滑曲线开子集的不可约性为起点，可以得出以下结果。

定理 22.15. 设 S 是一个 *K3*曲面，$\mathcal{L}$ 是一个本原丰富线丛。那么对于每个$0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 都是不可约的。

连通性。连通性可由一个稍弱的论证得出，但值得单独讨论，因为这种论证更稳健，也适用于更广泛的情形。

由于 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$是光滑的，连通性等价于不可约性。不过，也可以通过分析塞韦里簇内部的退化，直接看出其连通性。

固定 δ，并考虑两条曲线 C_1，$C_2 \in V_\delta(|\mathcal{L}|)$。分别将每条曲线的一个节点平滑化，可得到 $V_{\delta-1}(|\mathcal{L}|)$中的曲线。由于 $V_{\delta-1}(|\mathcal{L}|)$光滑且不可约，该塞韦里簇中存在一条路径连接这两条平滑化后的曲线。沿着这条路径重新引入一个节点，便得到一个由 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$中的曲线组成的族，将 C_1 与 C_2连接起来。这个论证表明，$V_\delta(|\mathcal{L}|)$中的任意两点都属于同一个连通分支。

命题22.16。对于每个 $0 \le \delta \le p_a(\mathcal{L})$，塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$ 都是连通的。

与曲线模空间的关系。另一种视角是考虑自然态射

$$V_\delta(|\mathcal{L}|) \longrightarrow \mathcal{M}_{g-\delta},$$

将节点曲线映射到其正规化的同构类。由于目标模空间 $\mathcal{M}_{g-\delta}$ 不可约，且由于可以自由选择节点位置，该态射的纤维是连通的，因此这为 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$的连通性和不可约性提供了另一种概念性解释。

因此，在带有本原极化的K3曲面上，塞韦里簇展现出极其简单的整体几何性质。半正则性保证其光滑且具有预期维数，本原性保证曲线本身不可约，而在族中生成和光滑化节点的能力则使所有结点轨迹都位于同一个不可约分支中。因此，每个塞韦里簇 $V_\delta(|\mathcal{L}|)$都是光滑、连通且不可约的。

以下参考文献涵盖了与本文所阐述结果相关的变形理论、塞韦里簇、对数几何和热带方法。

References

[1] D. Abramovich、Q. Chen、M. Gross、B. Siebert, *Logarithmic Gromov–Witten theory via expansions*, 《高等科学研究所数学出版物》 ´第129卷（2019），1–106。[2] E. Arbarello、M. Cornalba、P. Griffiths 和 J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, Vol. I*, Springer, 1985。[3] E. Arbarello 和 M. Cornalba, *Footnotes to a paper of Beniamino Segre*, 《数学年刊》第256卷（1981），341–362。[4] S. Bloch, *Semi-regularity and deformations of varieties*, 《数学发明》第17卷（1972），51–66。[5] E. Brugall´e 和 G. Mikhalkin, *Floor decompositions of tropical curves: the planar case*, 第15届 G¨okova 几何—拓扑会议论文集（2008），64–90。[6] L. Caporaso 和 J. Harris, *Counting plane curves of any genus*, 《数学发明》第131卷（1998），345–392。[7] S. Diaz 和 J. Harris, *Ideals associated to deformations of singular plane curves*, 《美国数学会汇刊》第309卷（1988），433–468。[8] R. Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, 《数学年刊》第118卷（1983），75–114。[9] G.-M. Greuel、C. Lossen 和 E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, 《Springer 数学专著》，Springer，2007。[10] J. Harris, *On the Severi problem*, 《数学发明》第84卷（1986），445–461。[11] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I, II*, 《数学讲义》第239、283卷，Springer，1971–1972。[12] J. Harris, *On the Severi problem*, 《数学发明》第84卷（1986），445–461。[13] R. Hartshorne, *Deformation Theory*, 《数学研究生教材》第257卷，Springer，2010。[14] J. Koll´ar, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer-Verlag，1996。[15] M. Kontsevich 和 Y. Manin, *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, 《数学物理通讯》第164卷（1994），525–562。[16] J. Li, *Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms*, 《微分几何杂志》第57卷（2001），509–578。[17] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$, 《美国数学会杂志》第18卷（2005），313–377。[18] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, 《数学年刊研究》第59卷，普林斯顿大学出版社，1966。[19] T. Nishinou 和 B. Siebert, *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*, 《杜克数学杂志》第135卷（2006），1–51。[20] Z. Ran, *Deformations of maps*, 载于 *Algebraic Curves and Projective Geometry*, 《数学讲义》第1389卷，Springer，1989。[21] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, 《数学科学基础》第334卷，Springer，2006。[22] E. Shustin, *Smoothness and irreducibility of varieties of plane curves with nodes and cusps*, 《法国数学会通报》第122卷（1994），235–253。[23] B. Siebert, *Logarithmic Gromov–Witten invariants*, 载于 *Handbook of Moduli, Vol. II*, International Press，2013。[24] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, 载于 *Real and Complex Singularities*, 奥斯陆，1976。[25] R. Vakil, *Murphy's law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces*, 《数学发明》第164卷（2006），569–590。

Mounir Nisse Department of Mathematics Xiamen University Malaysia Jalan Sunsuria Bandar , , Sunsuria 43900 Sepang Selangor Malaysia.
, , „ , ,*Email address*: mounir.nisse@gmail.com, mounir.nisse@xmu.edu.my