arXiv:2603.01540v1 [math.AG] 2 Mar 2026

三维簇中曲线与曲面的等奇异变形

MOUNIR NISSE

Abstract. 我们研究代数族中曲线与曲面的等奇异变形问题，特别关注节点行为不再具有一般性的情形。在拓展经典 Severi 理论的基础上，我们建立了确保存在具有最小类型孤立奇点的变形的变形理论判据，其中包括曲线上的尖点，以及三维簇中曲线与曲面上的普通二重点。在法丛的自然整体到局部映射满足无阻碍性与满射性假设的条件下，我们证明了极大性结果，表明此类奇点的数量取决于等奇异变形方向的整体可实现性，而不仅仅由数值不变量决定。对数半正则性使这些结果能够延续到具有正规交叉特殊纤维的退化情形。我们进一步说明这些奇点如何作为等亏格 Severi分层的边界现象出现，并概述通过对数方法与热带方法进行精细塞韦里计数的应用。

1. 引言

代数族中奇异子簇的变形理论是代数几何的核心主题，与塞韦里理论、枚举几何和退化技术有着深刻联系。经典 Severi 理论研究光滑曲面上的节点曲线，并阐明了为什么在等亏格变形下，节点会成为一般奇点，而节点的数量完全由算术亏格决定。近年来，这一思想通过对数几何扩展到曲面的退化，从而在高度奇异的情形下，对一般节点性和极大性结果给出了概念性的证明。

本文从两个新的方向对这一图景进行了系统推广。首先，本文将曲面上的节点曲线替换为更具刚性的奇点，例如尖点曲线以及位于三维簇上的节点曲线。其次，当节点行为不再具有一般性时，本文以等奇异变形理论取代等亏格变形理论，将其作为恰当的理论框架。这两项转变揭示了一个共同的基本原则：一旦奇点不再具有一般性，极大性便不再仅由数值不变量控制，而是取决于局部等奇异形变方向能否整体实现。

这项工作的一项核心贡献，是针对高维环境空间中的曲线与曲面，提出并证明等奇异变形定理。对于曲面上的曲线而言，尖点取代节点，成为最简单的非一般奇点。我们证明，尖点曲线作为等亏格 Severi分层的边界点出现，并证明了确保存在保持尖点之变形的精确判据。尖点行为的极大性被证明由

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B05、14B10、32G20、14B07。*Key words and phrases.* 等奇异变形、孤立奇点、半正则性、对数正规丛、托雷利、尖点曲线。本研究部分由马来西亚厦门大学研究基金（项目编号：XMUMRF/ 2020- C5/IMAT/0013）资助。

从法丛截面到等奇异变形空间的整体到局部映射的满射性所支配，而非仅由 δ–不变量单独决定。

主要的新结果涉及三维簇中的曲线和曲面。对于三维簇中的曲线，节点奇点不再是一般情形：一般变形会使所有奇点平滑，只有在施加等奇异约束时才会出现节点。我们为三维簇中的曲线建立了结点形变定理，证明在嵌入变形理论无障碍且法丛限制映射满射的条件下，可以实现与整体形变理论相容的最大节点数。这使三维簇中的节点曲线在概念上与曲面上的尖点曲线属于同一类。

最重要的新贡献，是将这一理念推广到三维簇中的曲面。我们证明了结点曲面形变定理：在无阻碍性和满射性假设下，三维簇退化的特殊纤维中的曲面存在一些变形，其一般成员仅有普通二重点，且这类奇点的数量达到最大可能值。这一结果提供了经典 Severi 理论的高维类比，并阐明了普通二重点作为变形问题中出现的最简单孤立曲面奇点所发挥的作用。

贯穿全文，对数几何在处理退化问题中发挥着关键作用。通过以对数法丛取代法丛，并以对数半正则性取代无阻碍性，我们获得了在具有正规交叉特殊纤维的族中仍然成立的变形定理。这使我们能够将节点型和尖点轨迹解释为等亏变形空间真正的边界分层，并确保极大性陈述在退化过程中保持成立。

最后，我们将这些变形理论结果与枚举几何联系起来。尖点条件和节点条件被解释为经过精化的塞维里条件，从而修正经典的塞维里次数。对数方法和热带方法为计算这些精化不变量提供了有效工具，其中尖点和高维结点作为较简单奇点碰撞的极限出现。

综上所述，本工作的结果为理解跨越不同维数的节点型和尖点现象提供了统一的变形理论框架。它们阐明了奇点何时具有一般性、何时是刚性的，以及极大奇异行为如何由整体几何而非纯粹的数值约束所支配。

2. Preliminaries

我们在本节汇集本文将通篇使用的变形理论、奇点与对数几何的基本概念和结果。目的并非给出详尽的证明，而是固定记号，并回顾支撑我们结果的变形理论工具的精确形式。

设 k 为特征零的代数闭域。所有概形与簇均假定为 k上分离的有限型对象。圆盘上的族是指平坦态射 $\pi\colon\ \mathcal{X} \to \Delta$，其中 Δ 为离散赋值环的谱或一个小解析圆盘。

局部完全交与法丛。 设 Y 是一个光滑簇，$Z \subset Y$ 是一个闭子概形。若子概形 Z 的理想层在 Y上局部由一个正则序列生成，则称其为局部完全交。在这种情况下，余法层

$$\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2$$

是局部自由的，其对偶

$$N_{Z/Y} = \mathcal{H}om(\mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2, \mathcal{O}_Z)$$

称为 Z 在 Y中的法丛。

Z在 Y中的无穷小嵌入变形由 $H^0(Z, N_{Z/Y})$参数化，而障碍位于 $H^1(Z, N_{Z/Y})$中。当 $H^1(Z, N_{Z/Y}) = 0$时，所有无穷小变形都可以积分为实际变形；此时，作为 Y的嵌入子簇， Z 被称为无障碍的。

奇点与局部变形空间。 设(Z, p)是一个约化局部完全交子概形的孤立奇点。其局部变形空间由以下有限维向量空间控制：

$$T^1_{Z,p} = \mathrm{Ext}^1(L_{Z,p}, \mathcal{O}_{Z,p}),$$

其中$L_{Z,p}$ 表示余切复形。$T^1_{Z,p}$ 中的元素参数化芽(Z, p)的一阶变形。

对于平面曲线奇点， δ–不变量衡量算术亏格与几何亏格之间的差异，并且在平坦族中是上半连续的。普通节点和尖点由其 δ–不变量及其局部变形空间的维数刻画。普通节点满足 $\delta = 1$且 $\dim\ T^1 = 1$，而普通尖点满足 $\delta = 1$且 $\dim\ T^1 = 2$。等奇异变形空间 $T^{1,\mathrm{es}}_{Z,p}$是$T^1_{Z,p}$的线性子空间，由保持奇点解析类型的变形组成。

对于曲面，最简单的孤立奇点是普通二重点，其局部表达式为$x^2 + y^2 + z^2 = 0$。它的局部变形空间是一维且没有模，因此每个非零变形方向都保持解析类型不变。

等亏格与等奇异变形。 如果曲线的变形保持算术亏格不变，或者等价地，保持总 δ不变量不变，则称该变形为等亏格变形。等亏格变形构成半万有变形底空间的一个闭子集；对于曲面上的曲线，一般而言其奇点为节点型。相比之下，等奇异变形保持每个奇点的解析类型不变，通常构成等几何属轨迹的一个真闭子集。

对于曲面上的曲线，节点在等属族中一般出现，而尖点则作为边界点出现，对应于节点碰撞。对于三维簇中的曲线以及三维簇中的曲面，节点奇点不再是一般情形，等奇异变形理论则提供了恰当的框架。

对数几何。 设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$是一个特殊纤维$\mathcal{X}_0$具有正规交叉的平坦族。给 $\mathcal{X}$ 赋予由 $\mathcal{X}_0$ 诱导的除子对数结构，并给 Δ赋予标准对数点，则态射 π 成为对数光滑的。

若 $Z \subset \mathcal{X}_0$ 是一个与奇异轨迹横截相交的局部完全交，则其对数嵌入变形理论由对数法丛 $N^{\log}_{Z/\mathcal{X}_0}$控制。无穷小对数变形由 $H^0(Z,\ N^{\log}_{Z/\mathcal{X}_0})$参数化，障碍位于 $H^1(Z,\ N^{\log}_{Z/\mathcal{X}_0})$中。

对数法丛嵌入一个典范正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{Z/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{Z/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0,$$

其扩张类是对数小平–斯潘塞类的限制。对数半正则性意味着诱导映射

$$H^1(Z, N^{\log}_{Z/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。在此假设下，对数阻碍消失，所有无穷小对数变形都可提升到总空间。

塞韦里层与边界现象。给定光滑曲面上的线性系 $|L|$，塞韦里簇刻画具有指定奇点的曲线。等亏格 Severi 分层由节点曲线主导，而具有尖点等高阶奇点的曲线轨迹则构成余维更高的边界分层。这一理念可推广到更高维，此时节点曲线和节点曲面作为变形空间中的刚性边界点出现。

这些预备知识为后续章节证明的结果提供了变形理论框架。

3. Cuspidal deformations in a linear system

用尖点取代节点，会从根本上改变变形问题以及“极大性”的含义，因为尖点并非与亏格损失相容的最简单奇点。因此，这一重新表述需要额外的结构。

设 $\pi\colon\ \mathcal{X} \to \Delta$ 是定义在圆盘上的一个平坦族，特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$，且对$t \neq 0$，一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 光滑；再设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线。现在我们要问，在什么条件下，C 可以变形为一条奇点均为普通尖点的曲线 $C_t \subset \mathcal{X}_t$，以及这样的变形可以有多少个尖点。

普通尖点是一种平面奇点，在解析意义下等价于 $y^2 = x^3$。它的 δ 不变量等于 1，与节点相同，但其局部变形空间 T^1 的维数为 2，而非 1。因此，尽管尖点和节点对亏格下降的贡献相同，尖点对变形施加的条件却严格更多。这一区别有两个重要后果。

Fi首先，控制这一问题的数值不变量仍然是总 δ不变 nt

$$\delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

因为算术亏格满足

$$p_a(C) = g(\widetilde{C}) + \delta(C)$$

且在平坦族中保持不变。因此，任何奇点全为尖点的变形 C_t 都必须满足

$$\#\{\text{cusps of } C_t\} \leq \delta(C).$$

然而，与节点情形不同，这一界在一般线性系中很少是紧的，因为尖点是余维二现象，而节点是余维一现象。

其次，变形问题的性质不再是等亏格，而是等奇异。对于节点，一般等亏格变形会自动产生节点曲线。对于尖点，一般等亏格变形会将奇点分解为节点，而非保留尖点性。要产生尖点，必须施加额外条件，使变形始终处于 A_2 奇点的等奇异轨迹内。

给定一条约化曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$，我们要寻找满足以下条件的情形：存在一个变形$C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，其奇点均为普通尖点，并且尖点数量在该族内 C 的所有尖点变形中达到最大。极大性不再仅由算术亏格决定，而是取决于保留A_2 奇点的等奇异变形空间的维数。

从变形理论的角度来说，这要求对自然映射进行控制

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p},$$

其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p} \subset T^1_{C,p}$表示参数化保持 p 处尖点的变形的等奇异子空间。由于普通尖点满足 $\dim T^{1,\mathrm{es}}_{C,p} = 1$，每个尖点会消耗一个单位的 δ，却占用两个局部变形方向，因此尖点曲线比节点型曲线僵硬得多。

总之，以尖点取代节点会改变这一问题的指导原则。对于节点，一般等亏格变形会自动产生具有算术亏格所允许的最大节点数的曲线。对于尖点，则必须研究等奇异变形空间；尖点的最大数量通常严格小于 $\delta(C)$，其决定因素是全局变形约束，而非单靠数值不变量。

在尖点情形下，不能指望存在一个完全以等亏格术语表述的节点定理的类似版本。正确的替代方案是一个等奇异陈述，这反映出尖点在一般等亏格变形下并不稳定，若要使其持续存在，就需要附加条件。

设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个射射曲面的平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 光滑，特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条约化曲线，其奇点均为平面奇点且可平滑。记 δ_p 为 p 处的局部 δ 不变量，并假设所有关注的奇点都是普通尖点。

定理 3.1（线性系中的尖点变形）。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 如上所述，并设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条仅有普通尖点作为奇点的约化曲线。假设 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形无障碍，且自然映射

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 表示尖点在 p 处的等奇变形空间。于是存在 $t \neq 0$ 的一个变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，使得 C_t 仅有普通尖点，且尖点数等于上述映射像的维数。此外，在该族中，所有 C 的尖点变形里，这个数目最大。

这个定理在几个关键方面与节点情形有本质区别。首先，尖点的最大数量不再仅由算术亏格或总 δ–不变量决定。虽然尖点和节点一样具有 $\delta = 1$，但其局部变形空间的维数为 2，其中只有一维子空间对应于等奇异变形。因此，尖点施加的全局条件比节点更多，极大性的问题也就取决于维数，而不再纯粹取决于数值不变量。

其次，控制该定理的变形轨迹是等奇异而非等亏格的。在节点情形中，等亏格变形一般都是节点型的，因此节点曲线会自动作为一般点出现。相比之下，尖点位于等亏格分层的边界上，并会被

一般扰动消除。因此，要保留尖点，就必须将范围限制在等奇异轨迹上；该轨迹是等亏变形空间中的一个余维一真闭子集。

最后，这一结论反映了尖点曲线的刚性。节点曲线充满等亏变形空间和塞韦里簇中的稠密开子集，而具有尖点的曲线则形成更高余维的特殊轨迹。该定理所断言的存在性与极大性，仅是相对于等奇异变形空间而言的，并非在所有等亏格变形中成立。

从这个意义上说，关于尖点的节点定理类比，将“ 一般等亏格意味着节点型”这一理念替换为“等奇异且无障碍意味着尖点性极大”。节点受一般性支配，而尖点则受刚性和横截性条件支配。

定理3.2（线性系中的尖点变形）。令 $\pi:\ \mathcal{X}\to\Delta$ 为一个射影曲面的平坦族，其光滑一般纤维为 $\mathcal{X}_t$ ，特殊纤维为 $\mathcal{X}_0$。令 $C\subset\mathcal{X}_0$ 为一条奇点均为普通尖点的约化曲线。假设 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形是无障碍的，并且自然映射

$$H^0(C,N_{C/\mathcal{X}_0})\longrightarrow\bigoplus_{p\in\mathrm{Sing}(C)}T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 表示 p处尖点的等奇变形空间。于是，存在 $t\neq 0$ 的一个变形 $C_t\subset\mathcal{X}_t$ ，使得 C_t 仅有普通尖点，且尖点数等于上述映射像的维数。此外，在该族中，这个数在 C 的所有尖点变形中达到最大。

证明。 由于 C 是光滑曲面 $\mathcal{X}_0$上的约化卡蒂埃除子，其在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入无穷小变形由法层$N_{C/\mathcal{X}_0}$控制。一阶嵌入变形对应于 $H^0(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$的截面，而障碍属于 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$。根据假设，$C$ 是无障碍的，因此每个一阶嵌入变形都可积分为 C 在 $\mathcal{X}_0$中的实际变形。

设 $p\in\mathrm{Sing}(C)$是一个普通尖点。解析地，芽$(C,\ p)$等价于 $y^2=x^3$。其局部嵌入变形空间为

$$T^1_{C,p}\simeq\mathbb{C}^2,$$

而等奇异变形空间 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}\subset T^1_{C,p}$是一个一维线性子空间，对应于保持尖点解析类型的变形。横截于该子空间的变形会使尖点变光滑，并将其替换为节点。因此， $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 恰好参数化了在 p处保持一个尖点的无穷小变形。

自然映射

$$H^0(C,N_{C/\mathcal{X}_0})\longrightarrow\bigoplus_{p\in\mathrm{Sing}(C)}T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

将 C 的全局一阶变形映射为其在各尖点处的局部等奇异变形方向。根据满射性，对于每个尖点处任意给定的等奇异一阶变形，都存在一个全局嵌入的一阶变形，使其诱导出恰好这些局部方向。特别地，可以在指定的部分尖点处选取非零等奇方向，在其余尖点处选取零方向。

固定这样一种选择，并令 $\xi\in H^0(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 为映射到它的整体截面。由于 C 无障碍， ξ 可积分为一个实际变形 $C_s\subset\mathcal{X}_0$ ，其参数取自一个小圆盘

s。根据构造，对于 $s \neq 0$，曲线 C_s 仅在指定了非零等奇方向的那些点具有普通尖点，并且原有尖点附近不会出现更严重的奇点。在 C的其余奇点处，所选的局部变形方向为平凡方向，因此相应的尖点保持不变。

现在考虑总空间 $\mathcal{X}$。由于 $\mathcal{X}_0$ 是平坦族 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$的一个纤维，因此存在一个典范正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

假设 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形无障碍，这意味着 C 在 $\mathcal{X}_0$ 内部的无穷小变形可以提升为总空间 $\mathcal{X}$内部的无穷小变形。因此，上文构造的族 $C_s \subset \mathcal{X}_0$ 可扩展为 $\mathcal{X}$内部的二参数变形；再将其限制到一个与 $\mathcal{X}_0$横截的合适单参数切片上，便得到一个变形

$$C_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 C ，一般纤维则位于光滑曲面 $\mathcal{X}_t$上。

由于尖点性是在等奇异变形空间中的一个开条件，并且该变形在选定的尖点处是等奇异的，因此曲线 C_t 在 $t \neq 0$对应的点处只有普通尖点。不会出现其他奇点，因为比尖点更严重的奇点会施加额外的独立条件，因而出现在变形空间中余维更高的闭子集中。在等奇异轨迹内一般性地选取该变形，即可避开这些子集。

C_t 上的尖点数因此等于整体实现的线性无关等奇方向的数量，也就是该映射像的维数

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}.$$

按构造，这个数量是最大的。事实上，族内对 C 的任何尖点变形都会在每个尖点处确定一个等奇变形方向，从而对应于目标空间中的一个元素。整体映射像的维数，就是能够通过整体嵌入变形同时实现的等奇变形方向所对应的尖点数的最大值。任何变形都无法产生更多尖点，否则就会违反满射性约束，因此这个数量在族内 C 的所有尖点变形中最大。证明至此结束。□

定理 3.3 (线性系中的对数尖点变形)。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是射影曲面的对数光滑退化，其特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是一个简单正规交叉除子。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条与 $\mathcal{X}_0$ 的奇异轨迹横截相交的约化曲线，并假设 C 的所有奇点都是普通尖点。假设 C 是对数半正则的，并且自然映射

$$H^0\left(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}\right) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 表示 p处尖点的等奇异变形空间。于是存在一个关于 $t \neq 0$ 的对数变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，使得 C_t 仅有普通尖点，且尖点的数目等于上述映射像的维数。此外，在该族中，尖点的数目在 C 的所有尖点变形中达到最大值。

证明。 我们赋予 $\mathcal{X}$ 由特殊纤维 $\mathcal{X}_0$诱导的除子对数结构，并赋予Δ 标准对数点结构。借助这些结构，态射 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是对数光滑的。由于 C 与 $\mathcal{X}_0$ 的奇异轨迹横截相交，且 C 是对数局部完全交，其嵌入对数变形理论由对数正规层 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制。

C内部 $\mathcal{X}_0$的无穷小对数嵌入变形由 $H^0(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$参数化，而障碍位于 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$中。由于 $\mathcal{X}_0$是 $\mathcal{X}$中的对数除子，因此存在一个典范的对数法丛正合列

$$0 \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N^{\log}_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

其扩张类属于 $H^1(C,\ N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0})$，并且与退化的对数小平–斯潘塞类在 C上的限制相同。

对数半正则性假设意味着自然映射

$$H^1(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

是单射。对于一个单参数对数光滑变形，对数小平–斯潘塞类在 $H^2(\mathcal{X}_0,\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$中的像为零。因此，单射性迫使对数法丛正合列的扩张类为零，所以该正合列在对数意义下分裂。因而， C 内部 $\mathcal{X}_0$ 的每个无穷小对数嵌入变形，都能无障碍地提升为总空间 $\mathcal{X}$内部的对数变形。

设 $p \in \mathrm{Sing}(C)$ 是一个普通尖点。解析地，(C, p) 等价于 $y^2 = x^3$。其局部变形空间 $T^1_{C,p}$ 是二维的，而等奇异子空间 $T^{1,\text{等奇异}\,C,p}$ 是一维的，并且恰好参数化那些保持尖点的一阶变形。横截于此子空间的变形会使尖点变平滑，并将其替换为节点。因此， $T^{1,C^{\mathrm{es}},p}$ 编码了尖点性的无穷小条件。映射的满射性

$$H^0(C, N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

意味着，对于尖点处任意选取的等奇异一阶变形方向，都存在一个全局对数一阶变形 C ，恰好诱导这些局部方向。选取像空间的一组基，可得到彼此独立的全局对数变形方向，它们对应于在尽可能多的点保持尖点。由于对数阻碍消失，这些无穷小变形可积分为 C 在 $\mathcal{X}$ 内的实际对数变形。限制到一个适当的、横截于 $\mathcal{X}_0$ 的单参数对数变形上，可得到一个族

$$C_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 C。由构造可知，该变形在所选尖点处是等奇异的，因此对于 $t \neq 0$ ，曲线 C_t 在这些点处具有普通尖点。尖点性是等奇异轨迹中的开条件，因此这些尖点在小变形下得以保持。

C_t上不会出现其他奇点。比尖点更严重的奇点会施加额外的独立条件，因此只会出现在局部变形空间的真闭子集中。由于全局对数变形是在等奇异轨迹中一般选取的，因此可以避开这些子集。因此， C_t 的奇点只有普通尖点。

C_t 上的尖点数量恰好等于在整体上实现的独立等奇方向的数量，这等于从 $H^0(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0}^{\log})$到等奇异局部空间直和的映射的像的维数。这个数量是极大的，因为 C 的任何尖点对数变形都会在每个尖点处确定一个等奇异变形方向，而只有那些属于整体映射像中的方向集合才能同时出现。因此，没有任何变形能够产生多于该维数的尖点。这证明了 C 的尖点对数变形的存在性和极大性，并完成了证明。□

4. Cuspidal Loci as Boundary Components of Equigeneric Severi Strata

设 S 为光滑射影曲面， L 为 S上的线丛。记 $|L|$ 为完全线性系，记 $p_a(L)$为 $|L|$中曲线的算术亏格。对于一条约化曲线 $C \in |L|$，令

$$\delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p$$

为总 δ–不变量。等亏格塞韦里分层 $V_\delta^{\mathrm{eg}}(|L|)$定义为 $|L|$ 中总 δ–不变量等于 δ的曲线所构成的轨迹。

众所周知，在固定 δ–不变量的条件下，普通节点是相容的一般奇点，而尖点等高阶奇点则出现于更高余维。本节旨在精确阐述这一说法：尖点曲线是等亏格塞韦里层的边界点，并且可以解释为节点碰撞。

命题4.1. 设(C,p) 为一个具有 $\delta_p = 2$的约化平面曲线奇点。则(C,p) 可经等亏格变形变为两个普通节点或一个普通尖点，并且该尖点作为节点轨迹的一个边界点出现在局部等亏变形空间中。

证明. 由于(C,p)是平面的，它容许在光滑曲面中的局部嵌入，且其嵌入变形理论由有限维向量空间所支配

$$T^1_{C,p} = \mathrm{Ext}^1(L_{C,p}, \mathcal{O}_{C,p}).$$

等亏变形空间是$T^1_{C,p}$ 中由保持 $\delta_p = 2$的那些变形构成的闭解析子集。众所周知，该等几何属轨迹在半万有变形底空间中的余维为 $\delta_p = 2$ 。

在等几何属轨迹内部，保持两个不同节点的等奇分层是开且稠密的。事实上，普通节点是稳定奇点，并且在具有 $\delta = 1$的奇点中所施加的条件数最少。使两个节点保持不同的变形对应于等几何属轨迹的一个一般点。

尖点在解析上由 $y^2 = x^3$ 给出，也具有 $\delta = 1$，但它出现在两个节点合并时。这要求增加一个条件：两个奇点合并，且它们的切方向对齐。这些额外条件刻画了等几何属轨迹的一个真闭子集。因此，尖点变形作为参数化具有两个不同节点的曲线之轨迹的边界点出现。

因此，在等亏变形空间的局部范围内，尖点层位于结点层的闭包中，并对应于两结点的碰撞。□

定理4.2。 设 $C \in |L|$ 是 S 上的一条约化曲线，其奇点只有普通尖点，且 $\delta = \delta(C)$。则 $[C]$ 属于结点塞韦里簇 $V_\delta(|L|)$ 的闭包，该簇参数化

δ–节点曲线。此外，尖点轨迹是等亏塞维分层 $V_\delta^{\mathrm{eg}}(|L|)$内部余维一的边界分层。

证明。 考虑 C 在 $|L|$内的等亏变形空间。嵌入的无穷小变形由 $H^0(C,\ N_{C/S})$参数化，而等亏条件切出一个余维等于 δ的线性子空间。根据假设， C 仅有尖点，且每个尖点对 δ总量贡献 $\delta_p = 1$。

对于普通尖点 p，局部变形空间$T^1_{C,\ p}$ 是二维的。其等亏子空间也是二维的，而保持该尖点的等奇异子空间是一维的。等亏空间中的互补方向会将尖点平滑成两个普通节点。因此，在每个尖点处局部来看，等亏分层包含一个开子集，其参数化的变形会以两个节点取代该尖点。

将此描述整体化，可见 C 的等亏变形空间包含一个开稠密子集，其中的点对应于每个尖点均分裂成两个不同节点的曲线。由于每个尖点贡献 $\delta_p = 1$，此类曲线上的节点总数恰为$\delta(C)$。尖点持续存在的曲线轨迹由附加条件定义：变形方向属于该尖点处的等奇异子空间。这是等亏变形空间内余维一的线性条件。因此，尖点轨迹是 $V_\delta^{\mathrm{eg}}(|L|)$内余维一的真闭子集。

由于节点曲线构成等几何属分层中的稠密开子集，而尖点曲线是在节点碰撞时产生的，因此点 $[C]$ 位于结点塞韦里簇 $V_\delta(|L|)$ 的闭包中。这表明，尖点曲线是等亏塞维分层的边界点。□

定理 4.3. 设 $\pi : \mathcal{C} \to B$ 是定义在 S 上的约化曲线平坦族，其一般纤维 $\mathcal{C}_b$ 是δ–节点型。假设该族是等亏格的，也就是说， $\delta(\mathcal{C}_b)$为常数。那么，该族的任意特殊纤维都只能通过碰撞节点的极限获得尖点；若至少两个节点未合并，则不会出现尖点。

证明。 由于该族是等亏格的，纤维的算术亏格保持不变，且总δ–不变量得以保留。普通节点在小变形下是稳定的，因此对于一般的 b， $\mathcal{C}_b$ 的奇点是孤立且横截的。

假设特殊纤维 $\mathcal{C}_{b_0}$ 在点 p处有一个尖点。尖点的局部 δ–不变量等于 1，与节点相同，但其局部 Tjurina 数为 2。在尖点的万有变形中，等属轨迹包含一个开子集，其参数对应于具有两个不同节点的曲线。因此，在任何退化到尖点的等属变形中，一般纤维都必须有两个节点，且它们的极限为该尖点。

如果尖点并非由节点碰撞而出现，那么它就对应于一个横截等属轨迹的变形方向，这会增大总的 δ–不变量，或违反平坦性。这在等属族中是不可能的。因此，尖点恰好是节点对的极限，等属退化中不存在其他产生尖点的机制。

结论 这些结果表明，尖点 Severi 型轨迹并非等亏变形空间的一般分支，而是节点奇点碰撞形成的边界分层。等亏格 Severi分层由节点曲线主导，而尖点曲线则处于更高余维的特殊位置。这一几何图景既解释了尖点曲线的刚性，也说明了它们在曲线族中作为节点曲线退化形式所扮演的角色。

□

5. Explicit Cuspidal Severi–Type Loci: Examples and Dimension Counts

我们详细研究三类曲面上的尖点 Severi 型轨迹：平面曲线、 $K3$ 曲面和赫irzebruch曲面。对于每种情形，我们都确定其预期维数，在自然假设下证明其存在，并证明这些界是紧的。

平面曲线。 设 $S = \mathbb{P}^2$ ，并令 $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$，其中 $d \geq 3$。完全线性系的维数为

$$\dim |L| = \binom{d+2}{2} - 1.$$

次数为 d 的平面曲线的算术亏格为

$$p_a(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

普通尖点的 $\delta = 1$ ，且 Tjurina 数为 $\tau = 2$，因此在未指定点处施加一个尖点条件，会对 $|L|$施加两个独立条件。

设 V_d^{cusp} ，κ $\subset |L|$ 表示恰有 κ 个普通尖点且没有其他奇点的次数为 d 的平面曲线轨迹。其预期维数为

$$\operatorname{expdim} V_{d,\kappa}^{\mathrm{cusp}} = \binom{d+2}{2} - 1 - 2\kappa.$$

由于算术亏格满足

$$p_a(d) = g + \kappa,$$

任何带尖点的曲线都有 $\kappa \leq p_a(d)$。这一数值界是存在性的必要条件，但并非充分条件。

定理 5.1。 若 $2\kappa \leq \binom{d+2}{2} - 1$，则 $V_{d\,\kappa}^{\mathrm{cusp}}$ ，非空，且具有一个维数符合预期的分支。此外， κ 在 $|L|$ 内的尖点变形中是极大的。

证明。 尖点的等奇异变形空间是一维的，因此 κ 个尖点在线性系上施加 2κ 个独立条件。当 $2\kappa \leq \dim |L|$ 时，可以在 $\mathbb{P}^2$ 的一般点施加 κ 个尖点条件。根据标准的横截性论证，相应的关联簇是光滑的，且维数符合预期；这是因为尖点性由判别式及其一阶导数的消失定义，而对于一般选择，这些条件彼此横截。对于平面曲线， $H^1(C,\ N_{C/\mathbb{P}^2})$ 的消失保证了无阻碍性。任何额外的尖点都会再施加两个条件，违反维数界，由此证明极大性。□

这表明，对于平面曲线，尖点的最大数量取决于线性系的维数，而不仅仅由算术亏格决定。

$K3$ **曲面**。 设 S 是一个光滑射影 $K3$ 曲面，且 L 是一个本原丰沛线丛，满足

$$L^2 = 2g - 2, \qquad g \geq 2.$$

那么 $\dim |L| = g$。每条约化曲线 $C \in |L|$ 都是半正则的，并且

$$N_{C/S} \simeq \mathcal{O}_C(C) \simeq \omega_C.$$

因此， C 的嵌入变形是无障碍的。

令 $V_\kappa^{\mathrm{cusp}}(|L|)$ 表示 $|L|$ 中恰有 κ 个普通尖点且没有其他奇点的曲线所构成的轨迹。其预期维数为

$$\operatorname{expdim} V_\kappa^{\mathrm{cusp}}(|L|) = g - 2\kappa.$$

定理 5.2。 若 $2\kappa \leq g$，则 $V_\kappa^{\mathrm{cusp}}(|L|)$ 非空，且在一般点处光滑，具有预期维数。此外， κ 在 $|L|$ 中的尖点变形中是极大的。

证明。 对于一个普通尖点 $p \in C$，等奇异变形空间 $T^1_{,\ C^{\mathrm{es}},\ p}$ 是一维的。全局等奇异变形由以下映射控制

$$H^0(C, \omega_C) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}.$$

由于 $\dim\ H^0(C,\ \omega_C) = g$，故对 $\kappa \leq g/2$ 一般点，满射性成立。半正则性意味着无阻碍性，因此这些无穷小等奇异变形可积分为 $|L|$ 中的实际变形。每个尖点都会使亏格下降一，因此数值上 $\kappa \leq g$，但等奇异维数界要求 $2\kappa \leq g$，故该界是尖锐的。□

这个例子凸显了 $K3$ 曲面上尖点曲线的刚性：尽管算术亏格允许至多 g 个尖点，但线性系至多允许 $g/2$ 个。

赫irzebruch曲面。 设 $S = \mathbb{F}_n$ 为第 n 个赫irzebruch曲面，其负截面为 E，纤维为 F。设

$$L = aE + bF, \qquad a \geq 1,\ b \gg 0.$$

Then

$$\dim |L| = (a+1)(b+1) - \frac{1}{2}a(a+1)n - 1.$$

曲线的算术亏格为 $|L|$

$$p_a(L) = \frac{1}{2}L \cdot (L + K_S) + 1.$$

令 $V_\kappa^{\mathrm{cusp}}(|L|)$ 为尖点 Severi 型轨迹。

定理 5.3. 当 b 相对于 a 和 n足够大时，轨迹 $V_\kappa^{\mathrm{cusp}}(|L|)$ 非空，且维数为预期维数

$$\dim |L| - 2\kappa,$$

前提是 $2\kappa \leq$ 维数 $|L|$。此外，这一界是尖锐的。

证明。 对于 $b \gg 0$，线丛 L 非常充足，并且对所有约化的 $C \in |L|$，$H^1(C, N_{C/S}) = 0$。因此，嵌入变形无障碍。在一点处具有尖点性，如平面情形一样，施加两个独立条件。通过选取 κ 个一般点并施加尖点条件，可得到一个具有预期维数的光滑关联对应。任何额外的尖点都需要再满足两个条件，而当 $2\kappa =$ 维数 $|L|$时，这些条件无法满足。因此，这一界是尖锐的。□

结论。 纵观这些例子，尖点 Severi 型轨迹表现一致：每个尖点施加两个条件，而最大尖点数取决于线性系的维数，而非仅由算术亏格决定。在 $K3$ 曲面上，这种刚性尤为显著；而在有理曲面和平面上，情况则符合经典预期。这些计算证实了等奇异变形理论所预测的尖点界是尖锐的。

6. Cuspidal Conditions, Severi Degrees, and Enumerative Geometry

我们将说明，关于尖点曲线的变形理论结果如何自然地融入枚举几何，尖点条件如何改变经典塞维里次数，以及为何对数方法和热带方法为计算这类精细计数提供了恰当的框架。

设 S 是一个光滑射影曲面， L 是 S 上的一个线丛。对于 $\delta \geq 0$，经典 Severi簇 $V_\delta(|L|)$ 参数化 $|L|$ 中恰有 δ 个普通节点且没有其他奇点的曲线。当该簇具有预期维数时

$$\dim |L| - \delta,$$

其次数定义了塞维里次数 $N_\delta(L)$，它计数经过适当数量一般点的 δ 节点曲线。这一定义所依据的基本事实是，节点曲线在等几何属轨迹中构成一个稠密开子集，因此节点条件在枚举意义下是稳定的。

尖点曲线的情形则有根本不同。普通尖点与节点具有相同的 δ 不变量，但施加的局部条件是节点的两倍。因此，自然的枚举问题并非以尖点取代节点，而是通过规定节点与尖点的混合来细化塞韦里问题。

对于整数 $\delta, \kappa \geq 0$，令 $V_{\delta,\kappa}(|L|)$ 表示 $|L|$ 中恰有 δ 个节点、 κ个普通尖点且没有其他奇点的曲线轨迹。其预期维数为

$$\operatorname{expdim} V_{\delta,\kappa}(|L|) = \dim |L| - \delta - 2\kappa.$$

这个公式准确体现了这样一个变形理论事实：一个节点占用一个平滑方向，而一个尖点占用两个。

命题 6.1. 假设 $|L|$中曲线的等亏格变形无阻碍，且尖点等奇异变形在对数半正则性或经典半正则性的意义下无阻碍。那么 $V_{\delta,\kappa}(|L|)$ 要么为空，要么具有一个维数为预期维数的分支，且其次数定义了一个计数不变量。

证明。 无阻碍性确保定义节点和尖点的局部变形条件能够拼接成具有预期维数的全局变形空间。尖点处的等奇异条件在等几何属轨迹内切出一个光滑除子，而节点条件则定义光滑超曲面。这些条件与一般点约束之间的横截性意味着 $V_{\delta,\kappa}(|L|)$ 一般光滑，且维数为预期维数。当该维数为零时，其次数定义良好且与选择无关，从而得到一个计数不变量。□

因此，从枚举几何的角度看，尖点塞维里次数可以解释为精化塞维里次数，它对节点碰撞并形成尖点的构型赋予权重。通过退化技巧，这种解释变得精确。

考虑曲面的退化 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ ，其对数光滑，且特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 具有正规交叉。经典变形理论无法控制 $\mathcal{X}_0$上的奇异曲线，但对数几何恢复了清晰的枚举图景。对数稳定映射和对数塞维里簇对具有相对于边界的指定相切与奇点数据的曲线进行参数化。

在这一情形下，尖点条件自然地成为对数塞维里簇的边界分层。对数半正则性确保这些分层如实地贡献于枚举计数，而不是以过剩重数出现。

定理 6.2. 假设所有对计数有贡献的曲线都满足对数半正则性。那么，尖点 *Severi* 度数等于退化过程中与节点碰撞相对应的边界分层所产生的对数贡献之和。

证明。 对数 Severi簇的对数障碍理论由对数法丛控制。半正则性意味着虚基本类与普通基本类重合。在对数退化公式中，各项贡献按对数类型编排，这些对数类型编码了节点和尖点如何分布在$\mathcal{X}_0$的各个分支上。一个尖点恰好对应于两个平滑化参数重合的对数类型。对所有此类类型求和，即得到总的尖点 Severi 度数。 □

热带几何为这一图景提供了组合对应物。在热带化下，一条节点曲线对应于一条热带曲线，其有界边编码节点。当两条有界边收缩为一个高价顶点时，就会产生一个尖点。定义尖点的余维二条件在热带模空间中体现为两条边的长度同时为零这一条件。

命题 6.3。 尖点热带曲线作为热带 *Severi*簇的边界点出现，并且其重数与退化公式中尖点对数类型的贡献相同。

证明。 在热带模空间中，Severi轨迹按组合类型分层。一般点对应表示节点曲线的三价图。当两个节点碰撞时便会出现尖点；在热带几何中，这对应于收缩一条边并提高顶点的度。此类构型的热带重数等于与被收缩边相关的局部重数之积。这与对数退化公式中由粘合条件得到的对数重数相吻合，从而证明了贡献相等。□

因此，在环面或环面退化设置中，尖点 Severi 度数可以用纯组合方式描述。通过对具有指定高阶度顶点的热带曲线进行计数，并以精细重数加权，即可计算这些度数。在精细曲线计数理论中，例如精化塞维里次数或动机不变量，尖点贡献对应于精细化参数中的高阶项，反映出尖点条件具有更强的刚性。

结论从枚举的角度看，尖点并非节点的竞争者，而是节点几何的精细化。无论从几何还是组合角度，尖点曲线都作为等亏格 Severi分层中的边界贡献出现。对数变形理论确保这些边界贡献具有枚举意义，而热带几何则为计算它们提供了有效工具。这些方法共同将经典 Severi 理论拓展到一个更丰富的枚举框架中，在其中尖点发挥着自然且可计算的作用。

7. Nodes and Cusps in Tropical Geometry: A Detailed Explanation

我们详细解释如下陈述：在热带几何中，一条节点型代数曲线对应于一条热带曲线，其有界边编码节点；并且当两条有界边坍缩为一个高价顶点时，便产生尖点。

设 S 为一张环面曲面， $C \subset S$ 为由劳朗多项式定义、牛顿多边形为 Δ的约化代数曲线。 C 的热带化是一个平衡加权多面体图 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ，其组合类型编码了 C 在环面退化下的首阶行为。 Γ 的顶点对应于极限曲线的不可约分支，而边对应于分支之间的节点或交点。

若热带曲线 Γ 的每个顶点的度均为三，则称其为三价曲线。这是一般情形，对应于稳定节点代数曲线。事实上，在环面退化中，一个三价顶点对应于极限曲线的一个光滑有理分支，该分支与另外三个分支横截相交。 Γ 的每条有界边都对应于对退化进行平滑后所得代数曲线的一个节点。有界边的长度衡量相应节点处粘合参数的对数：正长度对应于一个真实节点，而长度缩短则对应于节点的退化。

更具体地说，考虑一族以 C_t 退化为带有节点的稳定曲线 C_0 的曲线。在节点附近的局部，这族曲线在解析意义下由下式给出

$$xy = t,$$

其中 t 是变形参数。对这族曲线进行热带化，相当于取 t 的赋值，由此在热带曲线上得到一条有界边，其长度与 $-\log |t|$ 成正比。因此，每条有界边都恰好编码了 Γ 中的一个节点，而改变其长度对应于对该节点进行平滑或使其退化。

现在考虑一个尖点，其解析表达式为

$$y^2 = x^3.$$

尖点可以看作两个节点汇合而成的退化。事实上，尖点的万有变形包含一个轨迹，在该轨迹上奇点分裂为两个节点。在解析意义下，这体现为如下变形

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

对于一般的 $(a,\ b)$，曲线有两个不同的节点；而沿着参数空间中的一个余维一轨迹，这两个节点会碰撞并形成一个尖点。

用热带几何的术语来说，这种碰撞可以这样理解：带有两个相近节点的曲线，对应于一条有两个长度很小但为正的有界边的热带曲线。当参数趋近尖点轨迹时，两个节点的平滑化参数以相同的速率趋于零。对这一情形进行热带化，会使两条有界边同时收缩。在极限情况下，两条边收缩并在一个顶点处合并，形成一个度为四的顶点。

这个高阶顶点是尖点的热带特征。它反映了两个独立的平滑化参数同时消失，从而产生了一个比节点更刚性的奇点。顶点处的平衡条件确保热带曲线仍是有效的热带化，而度的增加则记录了奇点复杂性的提升。

因此，三价顶点和有界边对应稳定的节点行为，而高价顶点则恰好出现在热带 Severi簇的边界点处，此时节点发生碰撞。从两条有界边转变为单个高价顶点的组合转变，正是几何过程中尖点如何作为等属族中节点对的极限出现的热带体现。

这种对应关系对计数几何应用至关重要。以热带方式计数节点曲线，相当于计数三价热带曲线；而计数尖点曲线，则需要理解热带模空间中出现高阶顶点的边界分层，以及与这些退化相应的适当重数。

8. Nodal surface deformations in a threefold

将曲面 $\mathcal{X}_0$ 替换为三维簇，将曲线 C 替换为曲面，会从根本上改变变形理论，也会改变在其中起到节点作用的奇点的性质。在这种情形下，节点曲线的正确对应物是具有常普通双点奇点的曲面；这些奇点也称为节点，或称为二维中的 A_1 奇点。

设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 为一个平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑三维簇，其特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 可能奇异。设 $S \subset \mathcal{X}_0$ 为一个约化曲面，假定它是卡蒂埃除子，或更一般地，是局部完全交。问题在于理解何时 S 可以变形为一个奇点均为普通二重点的曲面 $S_t \subset \mathcal{X}_t$，并确定可能出现在 S_t 上的此类奇点的最大数目。

曲面上的普通二重点在解析上由

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

在光滑三维簇中给出。这是最简单的孤立曲面奇点，也是曲线上节点的自然高维类比。与曲线情形一样，普通二重点在变形下是稳定的，并且在孤立曲面奇点中所施加的条件数最少。

S 在 $\mathcal{X}_0$ 中的变形理论由法层 $N_{S/\mathcal{X}_0}$ 控制。无穷小嵌入变形由 $H^0(S,N_{S/\mathcal{X}_0})$ 参数化，而障碍位于 $H^1(S,N_{S/\mathcal{X}_0})$ 中。无阻碍性，例如 $H^1(S,N_{S/\mathcal{X}_0})$ 的消失，与曲线在曲面上的情形起着相同的概念作用，但由于 S 的维数为二，情况要微妙得多。

控制这一问题的数值不变量，同样是 S 与其正规化之间拓扑不变量的亏格。对于具有孤立奇点的曲面，每个普通二重点都会使第二贝蒂数亏格增加 1，且这一亏格在平坦族中保持不变。这为S的任意变形中可能出现的节点数提供了一个普适上界。

然而，与曲线不同，曲面并不存在具有相同几何意义的简单 δ不变量。相反，人们会使用欧拉示性数、几何亏格p_g或正规化下霍奇数 $h^{1,\,1}$ 的亏格等不变量。普通二重点恰恰是以尽可能温和的方式保持这些不变量的奇点。

因此，节点变形问题的正确类比是如下问题：寻找一些条件，以确保 S 在 $\mathcal{X}$ 中存在变形，使其一般纤维 S_t 仅具有普通二重点，并且这类点的数量在该族内 S 的所有变形中达到最大。极大性不仅由数值不变量决定，也受到编码在 $H^0(S,\ N_{S/\mathcal{X}_0})$中的全局变形约束的影响。

与曲线情形相比，一个关键的概念性区别在于，曲面上的普通二重点在环境线性系中是余维三现象，而非余维一。因此， S 的一般变形是光滑的，只有在施加额外条件后才会出现节点曲面。这使曲面理论在精神上更接近曲线的尖点变形理论，而非节点塞韦里理论。

在这一更高维的情形中，对数几何再次为退化提供了自然的框架。若 $\pi :\ \mathcal{X} \to \Delta$ 是对数光滑的，且 $\mathcal{X}_0$ 具有正规交叉，则 S 的对数嵌入变形由对数法丛 $N^{\log}_{S/\mathcal{X}_0}$控制。A

对数半正则性的概念保证了无阻碍性，并使普通二重点的局部平滑方向能够提升为 $\mathcal{X}$中 S 的整体变形。

总之，将曲线替换为曲面、将曲面替换为三维簇，会使理论从等亏格节性转向等奇异节性。普通二重点取代节点，数值不变量变得更加微妙，而一般性论证则让位于刚性现象。尽管如此，其基本理念仍然相同：孤立的温和奇点作为变形空间的边界点出现，而最大节点行为由局部平滑理论与整体法丛几何之间的相互作用所支配。

当特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是三维簇、研究对象是曲面 $S \subset \mathcal{X}_0$ 时，不能期待存在经典塞韦里定理针对曲线的直接类比。相应的结果必然是等奇异而非等亏格的，并且涉及曲面上普通二重点的出现。

节点曲线的自然类比是具有孤立普通二重点奇点的曲面。这些奇点在解析上可表示为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

在光滑三维簇中，它们是曲面的最温和孤立奇点。与曲线上的节点不同，曲面上的普通二重点并非一般存在：只有在施加若干独立条件后才会出现。因此，极大性陈述必须根据可实现的局部平滑方向来表述，而不能仅依据数值不变量。

定理 8.1 (三维簇中的节曲面变形)。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑三维簇。设 $S \subset \mathcal{X}_0$ 是一个具有孤立奇点的约化局部完全交曲面。假设 S 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形无障碍，且自然映射

$$H^0(S, N_{S/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(S)} T^{1,\mathrm{es}}_{S,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{S,p}$ 表示p处一个普通二重点的等奇异变形空间。那么，存在一个针对 $t \neq 0$ 的变形 $S_t \subset \mathcal{X}_t$，使得 S_t 只有普通二重点，且这些点的数目等于上述映射的像的维数。此外，在该族中，所有 S 的结点曲面变形里，这个数目最大。

证明。 由于 S 是三维簇 $\mathcal{X}_0$中的约化局部完全交曲面，其嵌入变形理论由法丛 $N_{S/\mathcal{X}_0}$控制，而 $N_{S/\mathcal{X}_0}$是 S上的线丛。 S 在 $\mathcal{X}_0$ 中的无穷小嵌入变形由向量空间 $H^0(S,\ N_{S/\mathcal{X}_0})$参数化，而延拓此类变形的障碍属于 $H^1(S,\ N_{S/\mathcal{X}_0})$。根据假设， S 在 $\mathcal{X}_0$ 中的所有嵌入变形均无障碍，因此每个一阶变形都可积分为 S 在 $\mathcal{X}_0$中的实际变形。

设 $p \in \mathrm{Sing}(S)$是一个孤立的普通二重点。解析地，芽$(S,\ p)$同构于以下超曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

在一个光滑三维簇内部。局部变形空间$T^1_{S,\ p}$ 是一维的，并参数化普通二重点的光滑化。由于该奇点没有模，每一个非零的一阶变形都保持解析类型，因此等奇异变形空间

与$T^1_{S,\ p}$ 重合，并且是一维的。自然限制映射

$$\varphi : H^0(S, N_{S/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p\in \mathrm{Sing}(S)} T^{1,\mathrm{es}}_{S,p}$$

将其奇点处的局部等奇异形变参数集合对应到 S 的整体无穷小嵌入形变。由满射性可知，奇点处局部等奇异变形方向的任意选择，都来自 $\mathcal{X}_0$内 S的整体无穷小形变。

设 $k = \dim \mathrm{Im}(\varphi)$。取 $\mathrm{Im}(\varphi)$的一组基，它对应于 k 个奇点 $p_1, \ldots, p_k$，以及这些点处彼此独立的局部等奇异变形方向。设 $\xi \in H^0(S, N_{S/\mathcal{X}_0})$是映射到这一选定集合的整体无穷小形变。由于障碍消失，ξ 可积为一个实际形变 $S_s \subset \mathcal{X}_0$，其参数为$s$，定义在一个小圆盘上。当 $s \neq 0$时，曲面 S_s 恰在点 $p_1, \ldots, p_k$处具有普通二重点，且这些点附近不会出现更严重的奇点。

现在我们将这一形变提升到总空间 $\mathcal{X}$。由于 $\mathcal{X}_0$ 是平坦态射 π的一个纤维，存在一个典范正合列

$$0 \longrightarrow N_{S/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{S/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow 0.$$

S 在 $\mathcal{X}_0$ 中的变形无阻碍性意味着，无穷小嵌入变形可以提升为总空间 $\mathcal{X}$中的无穷小嵌入变形。因此，族 $S_s \subset \mathcal{X}_0$可以扩展为 $\mathcal{X}$内的一个变形；再限制到一个与 $\mathcal{X}_0$ 横截的一参数切片上，便得到一个族

$$S_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 S。

普通二重点是稳定奇点，因此结点性是平坦族中的开条件。于是，当 $t \neq 0$ 充分小时，曲面 S_t 恰好在对应于所选局部变形方向的点处具有普通二重点。比普通二重点更严重的奇点会在变形空间上施加额外的独立条件，因此只会出现在真闭子集中。通过一般性地选取变形，可以避开这些子集，从而 S_t上不会出现其他奇点。

S_t 上的普通二重点数目因此等于 k，即映射 φ的像的维数。这个数目是最大的。事实上，族内 S 的任何节点型变形，都会在每个普通二重点处确定一个局部等奇异变形方向，从而给出 φ的一个元素。只有那些位于 φ 像中的局部方向组合，才能由全局嵌入变形同时实现。因此，族内 S 的任何变形都不可能产生多于 k 个普通二重点。

这证明了 S 内部这一族中结点曲面形变的存在性和极大性，并完成了证明。□

该定理的内容是，当障碍消失且法丛具有足够多的全局截面时，普通二重点的局部平滑方向可以同时在全局实现。节点的最大数量由能够在全局施加的等奇异变形方向空间的维数决定，而不像曲线情形那样由一个简单的数值不变量决定。

在三维簇的对数退化中，同一结论也有相应的对数精化。法丛由对数法丛取代，无阻碍性则由

对数半正则性取代。在这些假设下，人们预期一般的对数变形会产生具有与变形理论相容的最多普通二重点的曲面。

从概念上说，该定理将节点曲面理论置于与尖点曲线理论相同的层级。普通二重点是曲面变形空间中的边界现象，由较光滑行为的极限产生；它们能否达到极大实现，取决于刚性而非一般性。

9. Nodal curve deformations in a threefold

当特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是三维簇，而研究对象是曲线 $C \subset \mathcal{X}_0$时，变形问题介于曲面上曲线的经典理论与三维簇中曲面的理论之间。奇点的性质、变形空间以及极大性的概念都会以微妙但系统的方式发生变化。

设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑三维簇；设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是其中的约化曲线，并且是 $\mathcal{X}_0$中的局部完全交。节点曲线的自然对应物仍是一条具有普通节点的曲线；在三维簇的光滑曲面截面内，它在解析意义下由 $xy = 0$ 给出。节点仍是最简单的孤立曲线奇点，并且在变形下保持稳定。

C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形由法丛$N_{C/\mathcal{X}_0}$控制，它现在是 C上的秩二向量丛。无穷小嵌入变形由 H^0（C,$N_{C/\mathcal{X}_0}$）参数化，而障碍位于 H^1（$C, N_{C/\mathcal{X}_0}$）中。与曲面情形相比，法丛秩的增加带来了额外的变形方向，但也可能产生额外的障碍。

数值 控制节点行为的数值不变量仍然是曲线的总 δ不变量 ，

$$\delta(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

因为 C 的算术亏格在平坦族中保持不变。每个节点贡献 $\delta_p = 1$，因此任何节点变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ 都满足

$$\#\{\text{nodes of } C_t\} \leq \delta(C).$$

然而，与曲面情形不同，三维簇中的曲线上的节点并非一般现象： C 在 $\mathcal{X}_0$ 中或 $\mathcal{X}_t$ 中的一般变形是光滑的，只有施加条件后才会出现节点。

因此，节点变形定理的正确类比是等奇异而非等亏格。我们要寻求一些条件，以确保给定的节点奇点在变形过程中得以保持，并使节点数达到所有节点变形中的最大值。

预期的陈述如下。假设 $H^1(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) = 0$ ，并且自然映射

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 是 p处节点的等奇异变形空间，其维数为一。因此，存在一个针对 $t \neq 0$ 的变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，使得 C_t 的奇点全为节点，且节点数等于该映射像的维数。此外，在该族中，节点数是 C 所有节点变形中的最大值。

从概念上说，这使三维簇中的节点曲线与曲面上的尖点曲线处于同一框架之中。节点不再是等亏格变形空间中的一般特征，而是需要等奇异条件才能保留下来的刚性奇点。节点的最大数量取决于全局可实现的等奇变形方向空间的维数，而不单单由算术亏格决定。

对于特殊纤维具有正规交叉的三维簇退化，对数几何再次提供了自然的精细化处理。 C 的对数嵌入变形由对数法丛 $N^{\log}_{C/\mathcal{X}_0}$控制，而对数半正则性则确保无阻碍性。在这些假设下，预期一般的对数等奇异变形会在光滑纤维上产生具有可能最多节点数的节点曲线。

因此，当曲线位于三维簇上时，节点行为成为一种边界现象，而非一般现象；这一理论也自然契合了针对曲面上尖点曲线所发展的等奇异与对数视角。

在特殊纤维 $\mathcal{X}_0$ 是三维簇、研究对象是曲线$C \subset \mathcal{X}_0$的情形下，经典 Severi 型结果的恰当对应形式是针对节点曲线的等奇异变形定理。在此背景下，节点不再是等亏格族的一般特征，而是仅在附加约束下才会持续存在的余维二现象。因此，极大性陈述必须以等奇异变形理论的形式表述。

定理 9.1 (三维簇中的节点曲线变形)。设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个平坦族，其一般纤维 $\mathcal{X}_t$ 是光滑三维簇。设 $C \subset \mathcal{X}_0$ 是一条具有孤立奇点的约化局部完全交曲线。假设 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的嵌入变形无障碍，且自然映射

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

是满射，其中 $T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$ 表示 p 处一个节点的等奇异变形空间。那么存在 $t \neq 0$ 的一个变形 $C_t \subset \mathcal{X}_t$ ，使得 C_t 只有普通节点，且节点数等于上述映射像的维数。此外，在该族中，所有 C 的节点变形里，这个节点数是最大的。

证明。 由于 C 是三维簇 $\mathcal{X}_0$ 中的一条约化局部完全交曲线，其嵌入变形理论由法丛$N_{C/\mathcal{X}_0}$ 控制，而该法丛是定义在 C 上的秩二向量丛。 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的无穷小嵌入变形由 $H^0(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 参数化，障碍空间为 $H^1(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$。根据假设，嵌入变形无障碍，因此每个一阶变形都可以积分为 C 在 $\mathcal{X}_0$ 中的实际变形。

$p \in \mathrm{Sing}(C)$ 是一个节点。在解析意义下，芽 (C, p) 同构于 $\{xy = 0\}$ 中位于光滑曲面截面内的情形。局部变形空间 $T^1_{C,p}$ 是一维的，并以节点的平滑化为参数。由于节点没有模，任何非零变形方向都会保持奇点的解析类型；因此，等奇异变形空间与 $T^1_{C,p}$ 重合，且为一维。

自然限制映射

$$H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p}$$

将其奇点处的局部变形方向集合与 C 一个全局一阶嵌入变形相关联。满射性意味着，对于任意选取的局部节点变形

参数，只要这些参数位于奇点处，就存在一个全局一阶嵌入变形，恰好诱导出这些局部参数。

选取此映射像空间的一组基。这确定了一组奇点 p_1，……， p_k以及这些点处彼此独立的局部节点变形方向，其中

$$k = \dim \mathrm{Im} \left(H^0(C, N_{C/\mathcal{X}_0}) \to \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} T^{1,\mathrm{es}}_{C,p} \right).$$

设 $\xi \in H^0(C,\ N_{C/\mathcal{X}_0})$ 是一个全局一阶变形，它映射到这组局部方向。由于障碍消失， ξ 可积分为一个实际变形 $C_s \subset \mathcal{X}_0$ ，其定义在参数为 s 的小圆盘上。对于 $s \neq 0$，曲线 C_s 恰好在点 p_1，……， p_k 处有普通节点，且这些点附近不会出现更严重的奇点。

现在我们将此变形提升到总空间 $\mathcal{X}$ 中。由于 $\mathcal{X}_0$ 是平坦态射 π 的一个纤维，存在一个典范正合列

$$0 \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}_0} \longrightarrow N_{C/\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

$\mathcal{X}_0$ 中变形的无阻碍性意味着，无穷小嵌入变形可以提升为总空间中的无穷小变形。因此，族 $C_s \subset \mathcal{X}_0$ 可延拓为 $\mathcal{X}$ 内的一个变形；再将其限制到一个与 $\mathcal{X}_0$ 横截的一参数切片上，便得到一个族

$$C_t \subset \mathcal{X}_t, \qquad t \neq 0,$$

其特殊纤维为 C。

由于节点是稳定奇点，结点性在族中是一个开条件。因此，当 $t \neq 0$充分小时，曲线 C_t 恰好在与所选局部变形方向相对应的点处具有普通节点。不会出现额外的奇点，因为比节点更严重的奇点会施加额外的独立条件，因而仅出现在变形空间的真闭子集中。一般地选取变形即可避开这些子集。

因此， C_t 上的节点数等于 k，即整体到局部映射的像的维数。该数目是极大的。事实上，族中 C 的任一节点变形在每个节点处都确定一个局部等奇异形变方向，因而确定目标空间中的一个元素。只有位于整体映射的像中的那些局部方向组才能由一个整体变形同时实现。因此，任何变形都不能产生多于 k 个节点。

这就完成了证明。 □

该陈述的含义是：只要法丛具有足够多的全局截面且不出现障碍，与节点相对应的局部等奇异形变方向就可以独立地施加。因此，节点的最大数目由可整体实现的等奇方向空间的维数决定，而不仅仅由算术亏格决定。

在存在特殊纤维为正规交叉的三维簇退化时，该定理可作对数精化。法丛被对数法丛取代，无阻碍性被对数半正则性取代，而同样的结论也适用于对数等奇异变形。这使三维簇中曲线的理论与一般变形理论框架相契合；该框架已针对曲面上的尖点曲线以及三维簇中的节点曲面建立。

从概念上说，这一结果强调，三维簇中的节点曲线在变形空间中处于一个刚性的边界位置。它们的行为受等奇异条件而非等亏格条件控制，而最大节点性反映的是法丛的整体几何，而非纯粹的数值不变量。

以下参考文献为本文探讨的主题提供了背景、工具及密切相关的研究成果，包括奇点变形理论、塞韦里理论、对数几何和热带方法。

References

[1] E. Arbarello 和 M. Cornalba, *Footnotes to a paper of Beniamino Segre*, 《数学年刊》**256** （1981）, 341–362。[2] S. Bloch, *Semi-regularity and deformations of varieties*, 《数学发明》**17** （1972）, 51–66。[3] S. Diaz 和 J. Harris, *Ideals associated to deformations of singular plane curves*, 《美国数学会汇刊》**309** （1988）, 433–468。[4] R. Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, 《数学年刊》**118** （1983）, 75–114。[5] G.-M. Greuel、C. Lossen 和 E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, 施普林格数学专著, 施普林格出版社, 2007。[6] J. Harris, *On the Severi problem*, 《数学发明》**84** （1986）, 445–461。[7] J. Koll´ar, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, 施普林格出版社, 1996。[8] J. Li, *Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms*, 《微分几何杂志》**57** （2001）, 509–578。[9] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, 《数学年刊研究丛书》, 普林斯顿大学出版社, 1966。[10] Z. Ran, *Deformations of maps*, 载于 *Algebraic Curves and Projective Geometry*, 特伦托, 1988。[11] E. Shustin, *Smoothness and irreducibility of varieties of plane curves with nodes and cusps*, 《法国数学会通报》**122** （1994）, 235–253。[12] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, 载于 *Real and Complex Singularities*, 奥斯陆, 1976。[13] A. Zinger, *Standard vs. reduced genus-one Gromov–Witten invariants*, 《几何与拓扑》**12** （2008）, 1203–1241。

Mounir Nisse Department of Mathematics Xiamen University Malaysia Jalan Sunsuria Bandar , , , , „ , , Sunsuria 43900 Sepang Selangor Malaysia.

Email address: mounir.nisse@gmail.com, mounir.nisse@xmu.edu.my