arXiv:2603.01551v1 [math.AP] 2 Mar 2026

有限简单剪切变形下类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型的测试

Sergey N. Korobeynikov[1*]，Alexey Yu. Larichkin[1] 和 Patrizio Neff[2]1*俄罗斯科学院西伯利亚分院拉夫连季耶夫水动力学研究所，Lavrentyev av., 15，新西伯利亚，630090，俄罗斯。[2]杜伊斯堡-埃森大学数学学院非线性分析与建模教席，Thea-Leymann Strasse, 9，埃森，D-45127，德国。

*通讯作者。电子邮箱：s.n.korobeynikov@mail.ru；其他作者：larichking@gmail.com；patrizio.neff@uni-due.de；

摘要

我们测试了若干类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型在有限简单剪切变形下的表现（参见 Thiel 等人，Int. J. Non-linear Mech. 112: 57–72，2019年），并表明：(1) 对于任意柯西-格林各向同性弹性材料，在左有限简单剪切（LFSS）变形下，其柯西应力张量分量等于同种材料在右有限简单剪切（RFSS）变形下旋转后的柯西应力张量分量；(2) 对于任意基于对称物理（SP）应变度量的 Hill线性各向同性超弹性材料模型，LFSS 和 RFSS 变形分别产生欧拉纯剪切应力和拉格朗日纯剪切应力；(3) 对于任意基于 SP 应变函数的双幂次Ogden各向同性超弹性材料模型，LFSS 和 RFSS 变形分别产生欧拉纯剪切应力和拉格朗日纯剪切应力；(4) 对于某些本构关系基于共旋应力率的类胡克各向同性次弹性材料，在 LFSS 变形下，柯西应力张量分量随剪切参数变化的行为，在定性上类似于同种材料在简单剪切变形下的表现。此外，我们还确认了 Lin 的结果（Lin R.C. ZAMP, 75: 191，2024年）：对于某些在 RFSS 变形下无初始应力、且本构关系基于共旋应力率的类胡克各向同性次弹性材料，其柯西应力张量分量与 Hencky各向同性超弹性材料的相应分量一致。

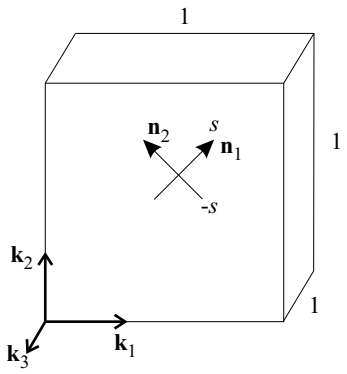


图 1 当前构形中均匀可变形样本的纯剪切应力状态。

关键词：有限简单剪切、各向同性材料、超弹性、次弹性

MSC 分类：74B20

1 引言

我们考虑各向同性材料样本的均匀变形（暂且不论是无穷小变形还是有限变形），其柯西应力张量分量在以 k_1, 、k_2, 和 k_3 为标准正交基向量的笛卡尔坐标系中表示为如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{12}\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 + \sigma_{12}\mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{k}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的特征值（主应力）及其对应的标准正交特征向量具有如下形式（$s \equiv \sigma_{12} = \sigma_{21}$）：

$$\sigma_1 = s, \quad \sigma_2 = -s, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

这种应力张量状态称为纯剪切应力状态（参见图1 ）。

对于线性各向同性弹性材料的无穷小变形，柯西应力张量（1）对应于等容变形（$\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$）[1]，其无穷小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 由公式（1）给出，其中张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量 σ_{12} 由张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$的分量 ε_{12} 替代。这类变形（纯剪切拉伸）如图 2所示，a 该材料的本构关系可简化为

[1]如 [1], 中所述，该条件仅在一阶精度下保持体积。

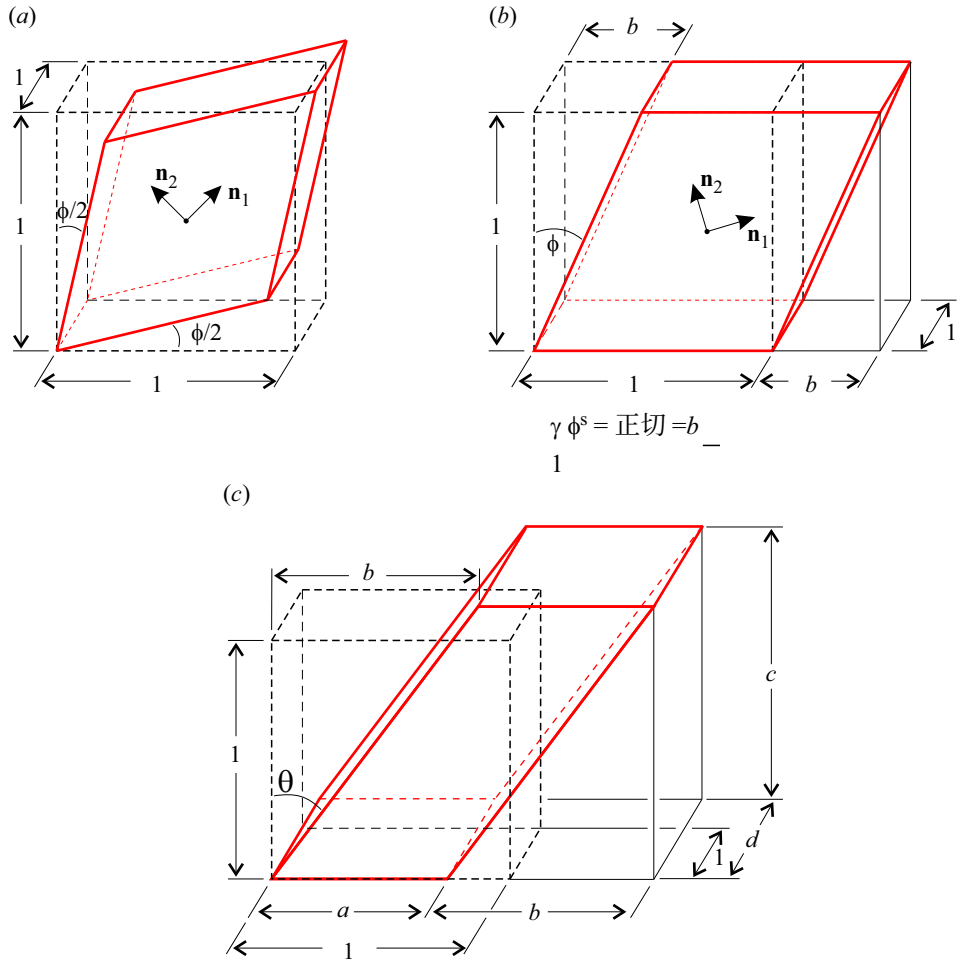


图 2 不同类型的剪切变形：(*a*) 无穷小应变下的纯剪切拉伸；(*b*) 简单剪切；(*c*) 有限应变下的纯剪切拉伸。

其形式

$$\sigma_{12} = 2\mu\,\varepsilon_{12}, \tag{2}$$

其中，$\mu > 0$ 是剪切模量。

Rivlin [2] (另见 [3–18]) 引入了简单剪切变形的定义，其运动学适用于研究固体的剪切变形，运动定律的形式为$\mathbf{x}(\mathbf{X})$，见式（图 2，*b*）

$$x_1(t) = X_1 + \gamma(t)X_2, \qquad x_2(t) = X_2, \qquad x_3(t) = X_3 \qquad (t \in [t_0, \infty]). \tag{3}$$

这里，X_i 和 x_i （$i = 1,2,3$）分别是固体中任意物质点在参考构形和当前构形中的笛卡尔坐标，剪切参数 γ（t）是时间 t （γ（t_0）$= 0$）的给定单调递增函数。我们

关注柯西应力张量分量 σ_{11}、 σ_{22} 以及
σ_{12} 作为剪切程度表征参数 $\gamma(t)$ 的函数。许多
研究人员使用运动定律（3）来检验不同材料。对于无穷小
变形，图 2、a 和 2、b 所示的运动定律是等价的，即
线弹性各向同性固体的运动定律（3）导出本构关系
（2） [1], 因为图 2、a 和 2、b 所示的运动定律仅相差一个旋转，而且
线弹性方程忽略了旋转。因此，在线弹性理论中，
各向同性固体的运动定律（3）对应于如下形式的纯剪切应力
(1）。然而，在有限（柯西/格林）弹性理论中，简单剪切变形
由普适关系 [2] 定义

$$\gamma\,\sigma_{12} = \sigma_{11} - \sigma_{22},$$

因此，对于任何柯西/格林各向同性弹性材料，简单剪切变形都无法导致纯剪切应力状态。

Moon 和 Truesdell [19] 提出了这样一个问题：对于运动定律为（见图 2， c）的变形，是否可能

$$x_1(t) = a(t)X_1 + b(t)X_2, \quad x_2(t) = c(t)X_2, \quad x_3(t) = d(t)X_3 \quad t \in [t_0, \infty] \tag{4}$$

找到 a、 b、 c 和 d 的表达式，使得柯西/格林各向同性弹性固体承受形式为（1）的纯剪切应力状态？已有研究表明 [19] （另见[1, 4, 14, 15, 20–28]），其必要条件是满足以下等式

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{5}$$

此外，已有研究表明 [14, 19] ，当本构关系受到Baker–Ericksen不等式形式的附加约束时，等式（5）也是纯剪切应力状态（1）存在的充分条件，该状态针对所指出材料的试样、在运动定律（4）下的均匀变形中、对于参数的某些取值 a， b， c以及 d。此外，这些研究表明，试样按运动定律（4）发生的变形对应于叠加在三轴拉伸上的简单剪切。此时，变形可能不是等容的，即可能出现Kelvin效应，使试样在纯剪切应力下发生体积变化，并逸出平面（X_1， X_2），即对于 $d \neq 1$。Thi

el et al. [1] 论证 d that the single 常量 int (5) on the 数量 ities a,b, c, 并且 d 极大地使运动定律（4）远离运动定律（3），对于
在各向同性线弹性中会导致简单剪切的简单剪切变形
应力状态（1）。除（5）之外，他们还对.....提出了另外两个约束
运动定律（4）： d（t） $= 1$ （即平面应变变形的要求）以及
$J\,(\equiv \det \partial \mathbf{x}/\partial)\, = 1$ （即等容变形的要求）。这些作者
将符合运动定律（4）的均匀变形定义为具有
上述对量 a、 b、 c 和 d 的约束，称为左有限简单
剪切（LFSS）变形。此外，他们还引入了另一类均匀
对应于运动定律（4）并满足约束 d（t） $= 1$ 和

$J = 1$ 关于 a、 b、 c和 d，但将约束（5）替换为等式

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{6}$$

并将满足上述关于 a、 b、 c 和 d 三个约束的运动定律（4）所对应的这类变形称为右有限简单剪切（*RFSS*）变形。

Thiel 等人 [1] 证明，对于并非所有柯西/Green 弹性各向同性材料，LFSS变形都对应纯剪切应力。具体而言，他们表明，对于新胡克各向同性超弹性材料，LFSS变形并不对应纯剪切应力。这一结果与 Horgan 和 Murphy 的说法一致 [23]（第 88 页）：对于任意单幂次各向同性超弹性 Ogden模型（特别是新胡克超弹性各向同性材料模型），除 Hencky模型外，简单剪切应力仅在 4）满足（5）且 $d > 1$ 时，才对应于运动定律为（ [1] Thiel 等人 还证明，存在一些柯西/Green 弹性各向同性材料，使得 LFSS 和 RFSS变形对应纯剪切应力（对于 RFSS变形，欧拉柯西应力张量取为其旋转后的对应张量）。他们特别指出，这些材料包括 Hencky各向同性超弹性材料（另见 [23]中的式 (3.9)）。

当然，LFSS 和 RFSS 变形不仅适用于测试柯西/格林弹性材料模型，也适用于测试所有其他材料模型。例如，Lin[24] 基于共旋应力率，测试了若干类胡克各向同性次弹性材料模型在 RFSS 变形下的表现，并发现这种变形会使所有这些模型产生相同的拉格朗日纯应力状态。

本研究的主要目标如下：

1. 测试两种单幂次 Ogden 材料模型在 LFSS/RFSS 变形下的表现（其中一种模型对于不可压缩材料与新胡克模型一致 [29]，对于可压缩材料则与 Simo–Pister 模型一致 [30],，另见 [31]）；2. 确定希尔线性各向同性超弹性（HLIH）材料模型 [32] 的一个子族（另见 [33–35]），对于该子族，LFSS 和 RFSS 变形分别对应欧拉和拉格朗日纯应力状态；3. 确定双幂次 Ogden 各向同性超弹性材料模型[36, 37] 的一个子族（另见 [38, 39]），对于该子族，LFSS 和 RFSS 变形分别对应欧拉和拉格朗日纯应力状态；4. 测试若干基于共旋应力率的类胡克各向同性次弹性材料模型在 LFSS/RFSS 变形下的表现。

本研究的首项主要新成果，是识别出两个著名的各向同性超弹性模型族（Hill 模型族和 Ogden 模型族）的若干子族；对于这些子族，LFSS变形和RFSS变形分别对应欧拉和拉格朗日纯应力状态。第二项成果是测试若干著名的类胡克各向同性次弹性材料模型，不仅考察 RFSS变形（如 [24], 中所做），也考察 LFSS变形；这是此类材料模型在均匀变形条件下测试方面的一项新成果。顺便指出，我们的解析

解的求法比 [24] 中的方法更简单。此外，我们还考察了 [24] 中关于材料模型本构关系的一些误导性表述。本研究的其他新成果包括发现：对于基于共旋Zaremba–Jaumann应力率的类胡克（零阶）次弹性材料模型（其四阶刚度张量为常数），在LFSS变形 下会出现应力伪振荡（这与简单剪切问题解的类似行为一致，参见例如 [9, 40, 41]）；对于基于共旋对数应力率且无初始应力的类胡克（零阶）次弹性材料模型，则不会出现此类振荡；而该模型在存在非零初始应力时，LFSS变形下会出现应力伪振荡（这与该材料模型在简单剪切变形下应力的类似行为一致，参见例如 [13, 41]）。还需指出，为提高结果的可靠性，我们通过计算机模拟对所考虑问题的若干解析解进行了验证；模拟所用的受测材料模型分别在商用非线性有限元系统 MSC.Marc [42]和自编的 PIONER [43] 有限元代码中实现。

2 预备知识

本节介绍超弹性/次弹性材料本构关系的建立所需的背景知识。第2.1节介绍张量运算以及对称二阶张量的谱表示。第2.2 节介绍局部体变形和基本运动学的表述，这些内容将在第2.3 节用于推导类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型的本构关系。

2.1 张量运算与对称二阶张量的谱表示

我们定义二阶张量 $\mathrm{H} \in \mathcal{T}^2$ （下文中， $\mathcal{T}^2$ 表示所有二阶张量的集合）。下文中，$\mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$、 $\mathcal{T}^2_{\mathrm{skew}} \subset \mathcal{T}^2$ 分别表示所有对称和反对称二阶张量的集合；$\mathrm{sym}\,\mathrm{A} \equiv (\mathrm{A} + \mathrm{A}^T)/2 \in \mathcal{T}^2{}_{\mathrm{sym}}$和 $\mathrm{skew}\,\mathrm{A} \equiv (\mathrm{A} - \mathrm{A}^T)/2 \in \mathcal{T}^2{}_{\mathrm{skew}}$ 分别表示张量 $\mathrm{A} \in \mathcal{T}^2$的对称和反对称部分。

设 A、$\mathrm{H} \in \mathcal{T}^2$。我们定义张量的双内积（双重缩并）运算：

$$\mathbf{A} : \mathbf{H} = \mathbf{H} : \mathbf{A} \equiv \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}) = \mathrm{tr}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{A}).$$

下文中，上标 T 表示张量的转置，向量和/或张量之间的点表示它们的内积。

令 $\mathrm{S} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$。该张量可表示为经典谱形式

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{3} s_k \, \mathbf{s}_k \otimes \mathbf{s}_k,$$

其中 $s_k \in \mathbb{R}$ 为特征值（下文中，下标 k 取值 1、2 和 3），$\{\mathbf{s}_k\}$ $(k = 1,2,3)$ 为张量 $\mathbf{S}$ 对应的右向标准正交特征向量三元组，而符号 $\otimes$ 表示向量的并矢积。对于多重特征值 s_k，相应的特征向量$\mathbf{s}_k$ 定义存在歧义。可以通过用特征投影表示张量 $\mathbf{S}$ 来消除这一歧义（特征投影 参见例如 [29, 44–49]），其形式为

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{m} s_i \, \mathbf{S}_i .$$

此处 s_i 为张量S的全部互异 m[2] 特征值，$\mathbf{S}_i$ 为相应的特征投影（下文中，下标从1取到 m）。下文中，我们利用西尔维斯特公式引入张量S的特征投影

$$\mathbf{S}_i = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\mathbf{S} - s_j \mathbf{I}}{s_i - s_j} & \text{if } m = 2,3 \\ \mathbf{I} & \text{if } m = 1 \end{cases} , \tag{7}$$

下文中，I表示二阶单位张量。特征投影具有如下性质（参见例如 [48]）：

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = \begin{cases} \mathbf{S}_i, & \text{if } i = j, \\ \mathbf{O}, & \text{if } i \neq j, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{S}_i = \mathbf{I}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{S}_i = m_i .$$

此处 m_i 表示特征值的重数 s_i，且$\mathbf{O} \in \mathcal{T}^2$ 表示零二阶张量。特征投影的定义（7）意味着它们的对称性，即$\mathbf{S}_i \in \mathcal{T}^2_{\text{sym}}$ （$\mathbf{S}_i^T = \mathbf{S}_i$）。

2.2 局部体变形与基本运动学

考虑物体 $\mathfrak{B}$ 在三维欧氏点空间中的运动，并令X和x分别为某质点 $P \in \mathfrak{B}$ 在参考构形（固定于时间 t_0）和当前构形（随时间 t运动）中的位置向量。令$\mathbf{F} \equiv \operatorname{Grad} \mathbf{x} = \partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{X} \in \mathcal{T}^2$ （$J \equiv \det \mathbf{F} > 0$）为变形梯度。张量F可唯一表示为（参见例如 [29, 45, 50–52]）

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\mathbf{U}^T = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^T = \mathbf{V}, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{R} = 1), \tag{8}$$

其中，$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}$ 和 $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T} \in \mathcal{T}^2_{\text{对称}}$ 分别是右（拉格朗日）和左（欧拉）正定伸长张量，而 $\mathbf{R} \in \mathcal{T}^{2+}_{\text{正交}}$ 是旋转张量。[3]

---

[2]数值 m $(1 \leq m \leq 3)$ 将称为 $eigenindex$。[3]下文中，子集 $\mathcal{T}^{2+}_{\text{正交}} \subset \mathcal{T}^2$ 表示所有正规正交二阶张量的集合（即满足 $\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Psi}^T = \mathbf{I}$ 且 $\det \mathbf{\Psi} = 1$ 的张量 $\mathbf{\Psi}$）。

考虑 欧几里得变换 （ETs）（参见 [51, 53]）

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*, t^*) \equiv \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t), \quad \mathbf{X}^* \equiv \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}_0, \quad t^* = t + a, \tag{9}$$

其中，$\mathsf{Q}(t) \in \mathcal{T}^{2+}$ 正交 是任意张量，$\mathsf{c}(t)$ 是任意向量，而 $a \in \mathbb{R}$ 是任意变量（$\mathsf{Q}_0 \equiv \mathsf{Q}(t_0)$ 和 $\mathsf{c}_0 \equiv \mathsf{c}(t_0)$）。现在我们给出客观张量的定义，依据 [51, 53, 54]。

定义 1。张量 $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ 称为客观张量，如果在 ETs (9)下，它按如下方式变化：[4]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^*(P,t) &= \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{H}(P,t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) \quad \text{Eulerian,} \\ \mathbf{H}^*(P,t) &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{H}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_0^T \qquad \text{Lagrangian.} \end{aligned}$$

设拉格朗日张量 U 和欧拉张量 V 的特征指标为 m。张量 U 和 V 的谱表示形式为

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \, \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{V} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \, \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \mathbf{V}_i \quad (0 < \lambda_i < \infty).$$

以下，λ_k 为张量 U 和 V 的特征值（主伸长），N_k 和 $\mathsf{n}_k (\mathsf{n}_k = \mathsf{R} \cdot \mathsf{N}_k)$（$k = 1$、2、3）为从属特征向量（对应于主方向），而 U_i 和 V_i（$i = 1$、...、m）为这些张量的从属特征投影。

在应用中，可以定义（例如参见 [55]）右、左柯西–格林变形张量

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^T\mathbf{F} =)\, \mathbf{C} \equiv \mathbf{U}^2 &= \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2 \, \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \, \mathbf{U}_i, \\ (\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{B} =)\, \mathbf{c} \equiv \mathbf{V}^2 &= \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2 \, \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \, \mathbf{V}_i. \end{aligned} \tag{10}$$

及其逆张量

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{U}^{-2} &= \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{-2} \, \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-2} \, \mathbf{U}_i, \\ (\mathbf{B}^{-1} =)\, \mathbf{c}^{-1} = \mathbf{V}^{-2} &= \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{-2} \, \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-2} \, \mathbf{V}_i. \end{aligned} \tag{11}$$

[4]此外，为简洁起见，客观欧拉张量和拉格朗日张量将分别简称为欧拉张量和拉格朗日张量。

表 1 属于 Hill 族的一些应变张量 ily

生成 应变尺度函数	客观性 type	无基底 表达式	应变 张量名称
$f^{(2)}(\lambda) \equiv \frac{1}{2}(\lambda^2-1)$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{U}^2-\mathrm{I})$ $\mathrm{e}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{V}^2-\mathrm{I})$	Green–Lagrange 芬格
$f^{(1)}(\lambda) \equiv \lambda-1$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{(1)} \equiv \mathrm{U}-\mathrm{I}$ $\mathrm{e}^{(1)} \equiv \mathrm{V}-\mathrm{I}$	右比奥 左比奥
$f^{(0)}(\lambda) \equiv \log\lambda$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{(0)} \equiv \log\mathrm{U}$ $\mathrm{e}^{(0)} \equiv \log\mathrm{V}$	右 Hencky 左 Hencky
$f^{(-1)}(\lambda) \equiv 1-\lambda^{-1}$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{(-1)} \equiv \mathrm{I}-\mathrm{U}^{-1}$ $\mathrm{e}^{(-1)} \equiv \mathrm{I}-\mathrm{V}^{-1}$	Hill Swainger
$f^{(-2)}(\lambda) \equiv \frac{1}{2}(1-\lambda^{-2})$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{(-2)} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{U}^{-2})$ $\mathrm{e}^{(-2)} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{V}^{-2})$	Karni–Reiner Almansi
$f^{M}(\lambda) \equiv \frac{1}{4}(\lambda^2-\lambda^{-2})$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{M} \equiv \frac{1}{4}(\mathrm{U}^2-\mathrm{U}^{-2})$ $\mathrm{e}^{M} \equiv \frac{1}{4}(\mathrm{V}^2-\mathrm{V}^{-2})$	右 Mooney 左 Mooney
$f^{P}(\lambda) \equiv \frac{1}{2}(\lambda-\lambda^{-1})$	拉格朗日 欧拉	$\mathrm{E}^{P} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{U}^{-1})$ $\mathrm{e}^{P} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{V}-\mathrm{V}^{-1})$	右 Pelzer 左 Pelzer

简单的 [55] 各向同性张量函数

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \sum_{k=1}^{3} f(\lambda_k)\,\mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_k = \sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i)\,\mathbf{U}_i,$$
$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^{3} f(\lambda_k)\,\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k = \sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i)\,\mathbf{V}_i,$$
$$f(\lambda) \in \mathbb{R}: \ f(\lambda) \in C^2, \quad f'(\lambda) > 0 \text{ as } \lambda \in (0,\infty) \text{ and } f(1) = 0,\ f'(1) = 1$$

分别构成 Hill 族应变张量的拉格朗日与欧拉子族（参见 [32, 51]）。

表1 列出了属于 Hill 族的若干应变张量 E 和 e。请注意，表1 中给出的所有应变张量均属于二参数 Curnier–Rakotomanana[55] 和二参数幂 [56, 57] 应变张量族。由尺度函数 $f^{(2)}(\lambda)$、$f^{(-2)}(\lambda)$、$f^{(1)}(\lambda)$、$f^{(-1)}(\lambda)$ 以及 $f^{(0)}(\lambda)$ 生成的应变张量也属于单参数 Doyle–Ericksen [58] 应变张量族。此外，Hencky、Mooney 和 Pelzer 应变张量也属于单参数 Baˇzant– Itskov [45, 59, 60] 和对称物理 [33] 应变张量族。

可以证明，Mooney $\mathbf{E}^M$ 和 $\mathbf{e}^M$ 以及 Pelzer$\mathbf{E}^P$ 和 $\mathbf{e}^P$ 应变张量对 Hencky 应变张量 log **U** 和 log**V** 的近似可达三阶项，而张量 $\mathbf{E}^{(2)}$、$\mathbf{E}^{(-2)}$、$\mathbf{e}^{(2)}$和$\mathbf{e}^{(-2)}$ 对这些张量的近似仅达二阶项。图 3 给出了生成这些应变张量的尺度函数随 λ 变化的曲线。

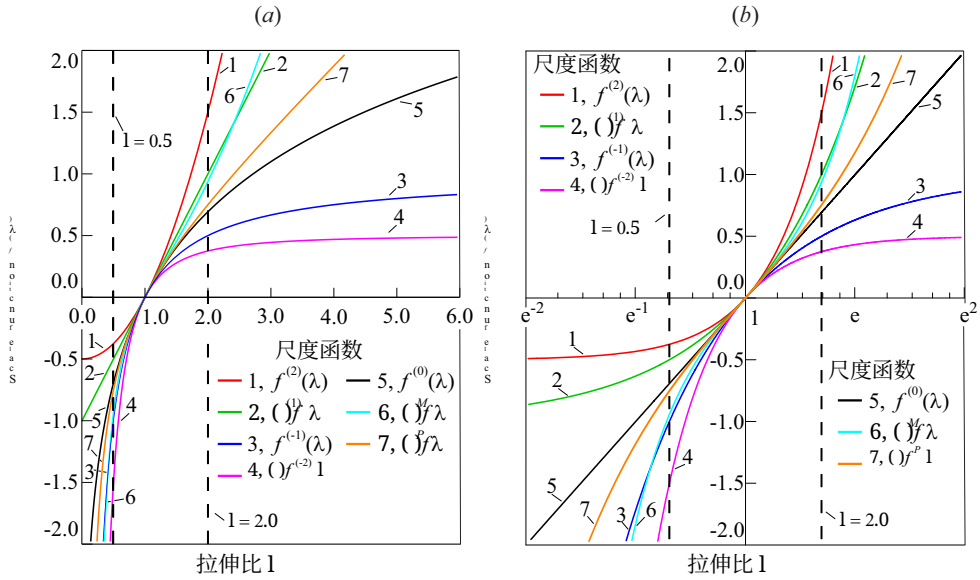


图 3 尺度函数 $f(\lambda)$ 生成表 1 中给出的应变张量，采用 (*a*) 标准尺度和 (*b*) 对数尺度，拉伸为 λ。

现在给出本文所用的两族尺度函数的表达式（这两族函数均属于 Hill 族中生成应变张量的尺度函数子族）：

(i) 单参数 Doyle–Ericksen 族应变张量（参数为 $n \in \mathbb{R}$）通过形式如下的函数 $f(\lambda)$ 构造:[5]

$$f^{(n)}(\lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1), & \text{if } n \neq 0, \\ \log \lambda \ [= \lim_{n \to 0} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1)], & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

(ii) 单参数 Baˇzant–Itskov 族应变张量（参数为 $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$）（另见 [33]）通过形式如下的函数 $f(\lambda)$ 构造

$$f_r(\lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2r}(\lambda^r - \lambda^{-r}), & \text{if } r > 0, \\ \log \lambda \ [= \lim_{r \to 0} \frac{1}{2r}(\lambda^r - \lambda^{-r})], & \text{if } r = 0. \end{cases} \tag{12}$$

请注意，Baˇzant–Itskov 族的应变张量也属于 Curnier–Rakotomanana[55] 族和对称物理（SP） [33] 族。此外，生成左右 Hencky 应变张量的尺度函数 $\log \lambda$ 同时属于这两个族（Doyle–Ericksen 族，其中 $n = 0$；以及 Baˇzant–Itskov 族，其中 $r = 0$），并且每个函数 $f_r(\lambda)$ $(r \neq 0)$ 都是来自.....的两个函数的线性组合

[5]一些作者将这类应变张量称为 *the Seth–Hill family of strain tensors*（例如，参见 [55]）。

Doyle–Ericksen 族[6]

$$f_r(\lambda) = \frac{1}{2}(f^{(r)} + f^{(-r)}).$$

特别是，表达式（12）对于 $r = 1$、2 分别生成 Pelzer 和 Mooney [55] 应变张量（见表 1）。

下文假设所有张量 $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ 都是单调递增参数 t（时间）的充分光滑函数，并定义张量 H 的物质时间导数（物质率）：$\dot{\mathbf{H}} \equiv \partial \mathbf{H}/\partial t$。引入速度向量 v、速度梯度 $\boldsymbol{\ell}$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{\ell} \equiv \operatorname{grad}\mathbf{v} = \mathbf{r}_F \equiv \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \tag{13}$$

欧拉拉伸（应变率）张量 $\mathbf{d} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{sym}}$、涡量（自旋）张量 $\mathbf{w} \in \mathcal{T}^2_{\text{反对称}}$以及极自旋张量 $\boldsymbol{\omega}^R \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{skew}}$[7]

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{d} \equiv \operatorname{sym}\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}^T), \quad \mathbf{w} \equiv \operatorname{skew}\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^T), \quad \boldsymbol{\omega}^R \equiv \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T. \tag{14}$$

引入拉格朗日张量（参见 [53]）

$$\mathbf{r}_U \equiv \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{l} - \boldsymbol{\omega}^R) \cdot \mathbf{R},$$

及其对称部分和反对称部分

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_U = \widehat{\mathbf{D}} + \mathbf{W}, \qquad \widehat{\mathbf{D}} &\equiv \operatorname{sym}\mathbf{r}_U = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}), \\ \mathbf{W} &\equiv \operatorname{skew}\mathbf{r}_U = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}). \end{aligned} \tag{15}$$

我们可以证明这些关系的有效性

$$\mathbf{d} = \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{R}^T, \qquad \mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}^R + \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}^T. \tag{16}$$

欧拉张量 d 的拉格朗日对应量 D 称为旋转拉伸（应变率）张量，而张量 W 称为拉格朗日涡量张量。

我们得到张量 W 的如下表达式（参见公式（117）$_1$，见 [46]）：[8]

$$\mathbf{W} = \sum_{i \neq j = 1}^{m} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \mathbf{U}_i \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_j.$$

[6]基础研究 [61–63] 着重阐述了 Hencky 应变张量的卓越性质，并完全基于微分几何论证推导出了相应的 Hencky 二次能量。[7]由于我们假设 x(X t) $\in C^2$ of t，因此可得 $\boldsymbol{\ell}$、d、w $\boldsymbol{\omega}^R \in C^0$ of t（参见 [64]）。[8]下文中，记号 $\sum_{i \neq j = 1}^{m}$ 表示对 i、$j = 1$、.....、m 和 $i \neq j$ 求和；当 $m = 1$ 时，该求和视为零。

将此表达式代入$\mathbf{W}$ 到（16）$_2$, 中，我们得到自旋张量之间的关系$\mathbf{w}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^R$ （另见公式（117）$_2$ 见 [46]）：

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}^R + \sum_{i\neq j=1}^{m} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{V}_j.$$

设 $\mathbf{h} \in \mathcal{T}^2$ 为一个欧拉张量。我们将作为张量 $\mathbf{h}$ [65, 66] 的上下Oldroyd率的客观欧拉张量定义如下（另见 [67–71]）：

$$\left(\frac{\mathrm{D}^\sharp}{\mathrm{D}t}[\mathbf{h}] = \right) \mathbf{h}^\sharp \equiv \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{l}^T - \mathbf{l} \cdot \mathbf{h}, \qquad \left(\frac{\mathrm{D}^\flat}{\mathrm{D}t}[\mathbf{h}] = \right) \mathbf{h}^\flat \equiv \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{h}.$$

我们将欧拉张量 $\mathbf{h}$ 的欧拉共旋率族引入为如下形式的张量（例如，参见[67–71]）

$$\left(\frac{\mathrm{D}^\circ}{\mathrm{D}t}[\mathbf{h}] = \right) \mathbf{h}^\omega \equiv \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h} \tag{17}$$

它们与属于连续材料自旋张量族[72, 73] 的自旋张量 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{skew}}$ 相关联（另见 [46]）。

表1 中给出的Hill族欧拉应变张量的某些客观欧拉率通过下列等式与伸长张量$\mathbf{d}$ 相关联（例如，参见[9, 74, 75]）：[9]

$$\mathbf{e}^{(2)\,\sharp} = \mathbf{d}, \qquad \mathbf{e}^{(-2)\,\flat} = \mathbf{d}, \qquad \mathbf{e}^{(0)\,\log} = \mathbf{d}.$$

设 $\mathbf{H} \in \mathcal{T}^2$ 为一个拉格朗日张量。我们引入张量 $\mathbf{H}$ 的上下拉格朗日Oldroyd率（例如，参见 [53, 75]）：

$$\mathbf{H}^\sharp \equiv \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_U^T - \mathbf{r}_U \cdot \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}^\flat \equiv \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_U + \mathbf{r}_U^T \cdot \mathbf{H}.$$

我们还将拉格朗日张量 $\mathbf{H}$ 的拉格朗日共旋率族引入为以下形式的张量

$$\mathbf{H}^\Omega \equiv \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}, \tag{18}$$

与自旋张量 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{T}^2_{\mathrm{skew}}$ 相关联，这些自旋张量属于连续材料自旋张量族 [46]。

Hill族的一些拉格朗日应变张量客观率$\widehat{\ }$见表1 与拉格朗日伸长张量$\mathbf{D}$ 的关系如下（例如，参见[75]）：[10]

$$\mathbf{E}^{(2)\,\sharp} = \widehat{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{E}^{(-2)\,\flat} = \widehat{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{E}^{(0)\,\log} = \widehat{\mathbf{D}}.$$

[9]下文将给出与任意欧拉张量 $\mathbf{h}$ 的对数共旋张量率 $\mathbf{h}^{\log}$ 相关联的自旋张量 $\boldsymbol{\omega}^{\log}$ 的表达式。[10]下文将给出与任意拉格朗日张量 $\mathbf{H}$ 的对数共旋张量率 $\mathbf{H}^{\log}$ 相关联的自旋张量 $\boldsymbol{\Omega}^{\log}$ 的表达式。

定义 2。设 h、H $\in \mathcal{T}^2$ 分别为欧拉张量和拉格朗日张量。若这两个张量满足以下等式，我们就称它们互为客观对应张量

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{R}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{h}\cdot\mathbf{R}. \tag{19}$$

命题 1. 设 h、H $\in \mathcal{T}^2$ 分别为欧拉张量和拉格朗日张量，且二者互为客观对应张量。则 Oldroyd 张量率 $\mathrm{h}^\sharp$、$\mathrm{h}^\flat$与 $\mathrm{H}^\sharp$、$\mathrm{H}^\flat$ 互为客观对应张量，即满足以下等式：

$$\mathbf{h}^\sharp = \mathbf{R}\cdot\mathbf{H}^\sharp\cdot\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{h}^\flat = \mathbf{R}\cdot\mathbf{H}^\flat\cdot\mathbf{R}^T, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H}^\sharp = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{h}^\sharp\cdot\mathbf{R}, \quad \mathbf{H}^\flat = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{h}^\flat\cdot\mathbf{R}.$$

命题 2. 设 h、H $\in \mathcal{T}^2$ 分别为欧拉张量和拉格朗日张量，且二者互为客观对应张量。则张量 h 和 H 的共旋率 h^ω 与 H^Ω 互为客观对应张量的充要条件为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^R + \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{R}^T \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^T\cdot(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^R)\cdot\mathbf{R}, \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}$、Ω $\in \mathcal{T}^2_{skew}$ 分别为与共旋张量率 h^ω和 H^Ω相关的自旋张量。[11]

命题 3. 设 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ $\in \mathcal{T}^2$ 分别为欧拉张量和 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ $\in \mathcal{T}^2$ 分别为拉格朗日张量，且二者互为客观对应张量，即（参见定义 2）

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^T, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{R}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{R}.$$

那么，下列等式成立：

$$\mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{a} : \mathbf{b}^{\mathrm{GN}} \quad (\Leftrightarrow \quad \langle A, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[B]\rangle = \langle a, \frac{\mathrm{D}^{\mathrm{GN}}}{\mathrm{D}t}[b]\rangle).$$

接下来，我们以两种不同形式探讨连续材料自旋张量族中的自旋张量 Ω 和 $\boldsymbol{\omega}$（参见例如 [9, 46, 76]）：

(i) r 版本

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Psi}_r(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}), \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^R + \boldsymbol{\Psi}_r(\mathbf{V}, \mathbf{d}). \tag{21}$$

这里，$\boldsymbol{\Psi}_r$(U $\widehat{\ }$D) $\in \mathcal{T}^2_{\mathrm{skew}}$ 是关于变量 U 和 $\widehat{\ }$D 的各向同性张量函数，且对 $\widehat{\ }$D 呈线性，[12]

$$\boldsymbol{\Psi}_r(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}) \equiv \sum_{i\neq j=1}^{m} r_{ij}\mathbf{U}_i\cdot\widehat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{U}_j, \tag{22}$$

[11]命题 2 已在 [40] 中提出并证明（参见 [40] 中的命题 2.1）。[12]各向同性张量函数 $\boldsymbol{\Psi}_r$(V, d) 和 $\boldsymbol{\Psi}_g$(V, d) 是通过将拉格朗日张量自变量 U 和 D 分别替换为对应的欧拉张量 V 和 d，从各向同性张量函数 $\widehat{\ }\boldsymbol{\Psi}_r$(U, D) 和 $\widehat{\ }\boldsymbol{\Psi}_g$(U, D) 导出的。

其中我们使用了如下记号

$$r_{ij} \equiv r(\lambda_i, \lambda_j), \qquad r_{ji} = -r_{ij}.$$

函数 $r(x, y)$ 的性质将在 [72, 73] （另见 [46]）中详细讨论。（ii）g 版本

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} + \boldsymbol{\Psi}_g(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}), \qquad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\Psi}_g(\mathbf{V}, \mathbf{d}). \tag{23}$$

这里，$\boldsymbol{\Psi}_g$(U ˆD) $\in \mathcal{T}^2_{\text{skew}}$ 是张量 U 和 ˆD 的各向同性张量函数，ˆ且关于 D 是线性的，

$$\boldsymbol{\Psi}_g(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}) \equiv \sum_{i \neq j=1}^{m} g_{ij} \mathbf{U}_i \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_j, \tag{24}$$

其中我们采用了以下记号

$$g_{ij} \equiv g(\lambda_i, \lambda_j) \equiv r(\lambda_i, \lambda_j) - \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \qquad g_{ji} = -g_{ij}.$$

下面给出由连续材料自旋张量族中的某些自旋张量以及与之相关的经典共旋对称张量率（i、 $j = 1$、.....、 m）所生成的量 g_{ij} 和 r_{ij} 的表达式：

• 与自旋张量 W 和 w 相关的 Zaremba–Jaumann 张量率 HZJ 和 $\left(\text{DZJ Dt}\,[\text{h}] =\right)$ hZJ

$$g^{\text{ZJ}}_{ij} = 0; \qquad r^{\text{ZJ}}_{ij} \equiv \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}. \tag{25}$$

• 与自旋张量 (Ω =)0 和 $\boldsymbol{\omega}^R$相关的物质率 ˙H 和 Green–Naghdi 张量率 $\left(\text{DGN Dt}\,[\right.$ h] $=\Big)$ hGN

$$g^{\text{GN}}_{ij} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_i + \lambda_j}; \qquad r^{\text{GN}}_{ij} = 0. \tag{26}$$

• 分别与拉格朗日和欧拉三元组的旋转张量 ΩGS 和 $\boldsymbol{\omega}$GS 相关联的 Gurtin–Spear 张量率 HGS and $\left(\text{DGS Dt}\,[\text{h}] =\right)$ hGS [77]

$$g^{\text{GS}}_{ij} \equiv \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}; \qquad r^{\text{GS}}_{ij} \equiv \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}. \tag{27}$$

• 对数张量率$\mathbf{H}^{\log}$和 $\left(\text{D}^{\log}\text{Dt}\,[\mathbf{h}] =\right)$ $\mathbf{h}^{\log}$[78, 79] 与自旋张量$\boldsymbol{\Omega}^{\log}$及 $\boldsymbol{\omega}^{\log}$

$$g^{\log}_{ij} \equiv \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{\log \lambda_i - \log \lambda_j}; \qquad r^{\log}_{ij} \equiv \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} + \frac{1}{\log \lambda_i - \log \lambda_j}. \tag{28}$$

注 1. 旋转张量 Ω^{GS} 和 $\boldsymbol{\omega}^{GS}$ 不属于连续材料自旋张量族，因为生成这些张量的标量函数 g_{ij}^{GS}和 r_{ij}^{GS}在主伸长相等处（例如，对于 $\lambda_3 \to \lambda_2$）存在第二类间断，即使运动定律 x(X t) 是关于 t 的足够光滑函数（例如参见 *[46, 64, 72, 73, 80, 81]*）。此外，当主伸长趋于相等时，旋转张量 Ω^{GS} 和 $\boldsymbol{\omega}^{GS}$的表示不再唯一（例如参见 *[46]*）。然而，对于本文所考虑的运动定律 x(X t)，不等式 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ 对 $t > t_0$成立，即特征指标$m = 3$，因此排除了主伸长相等的情况。与此同时，旋转张量 Ω^{GS} 和 $\boldsymbol{\omega}^{GS}$ 属于连续材料自旋张量族的其余条件（详见 *[72, 73, 81]* 和 *[46]* ）均得到满足。因此，对于本文所考虑的运动定律，我们能够将旋转张量 Ω^{GS} 和 $\boldsymbol{\omega}^{GS}$ 纳入连续材料自旋张量族。

注 2. 设张量 h 和 H 互为欧拉和拉格朗日对应量。Xiao 等人 *[72, 73, 81]*构造了如下形式的自旋张量（见 *[72]*中的式（51）和 *[73]*中的式（4.42)）

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L} = \mathbf{w} + \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{V}, \mathbf{d}), \qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{V}, \mathbf{d}) \equiv \sum_{i \neq j = 1}^{m} r_{ij}^{GS} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{V}_j \tag{29}$$

该张量与欧拉张量 h 的欧拉共旋率相关；根据 *[72, 73, 81],* ，后者是与拉格朗日三元组 Ω^{GS}的旋转张量相关的拉格朗日张量 H 的拉格朗日共旋率的欧拉对应量。对张量 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L}$ 的这种解释错误，源于使用了形如式（20）的自旋张量关系，但将极自旋张量 $\boldsymbol{\omega}^{R}$替换成了涡量张量 w（见 *[73]*中的式（4.45））。按照式（20）中张量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 Ω 之间的关系，将 *[73]* 式（4.45）中的涡量张量 w 替换为极自旋张量 $\boldsymbol{\omega}^{R}$后，在左侧的式（20）中，我们得到的不是机械意义上无意义的张量$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L}$，而是预期的欧拉三元组 $\boldsymbol{\omega}^{GS}$ 的旋转张量[1]。这种对自旋张量 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L}$ *[72, 73, 81]* 的误解，已被其他作者在基于共旋应力率的亚弹性模型的均匀变形问题测试中引用甚至采用（例如，见 *[10–12, 24, 82]*）。此外，在使用上述与张量 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L}$相关的共旋应力率亚弹性模型时，Lin *[24]* 甚至省略了式（29）右侧的涡量张量 w[1] （见 *[24]*中的式（15）[3] ），这导致基于该张量 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{L}$表达式的应力率不具备客观性。

2.3 类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型

考虑希尔线性各向同性超弹性（HLIH）材料模型族，其本构关系形式为 [32] （另见 [33]）

$$\mathbf{S} = 2\mu\,\mathbf{E} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{E})\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s} = 2\mu\,\mathbf{e} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{e})\,\mathbf{I}$$

表 2 Hill的线性各向同性超弹性材料模型

模型的name	应变张量	本构关系 拉格朗日形式	欧拉形式
HLIH-H	Hencky	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\,\mathrm{E}^{(0)} + \lambda(\mathrm{tr}\,\mathrm{E}^{(0)})\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathrm{e}^{(0)} + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{(0)})\,\mathrm{I}$
HLIH-P	Pelzer	$\mathbf{S}^P = 2\mu\,\mathrm{E}^P + \lambda(\mathrm{tr}\,\mathrm{E}^P)\,\mathrm{I}$	$\mathbf{s}^P = 2\mu\,\mathrm{e}^P + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^P)\,\mathrm{I}$
HLIH-M	Mooney	$\mathrm{S}^M = 2\mu\,\mathrm{E}^M + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{E}^M)\,\mathrm{I}$	$\mathrm{s}^M = 2\mu\,\mathrm{e}^M + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^M)\,\mathrm{I}$

分别对应拉格朗日和欧拉描述形式。下文中，λ 和 μ 是拉梅´参数，$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{e}$ 是 Hill 族中的任意拉格朗日和欧拉应变张量，而$\mathbf{S}$ 和$\mathbf{s}$ 是功共轭应力张量，因此满足以下等式 [32] （另见 [81, 83] 和命题3）：

$$w = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad \Leftrightarrow \quad w = \mathbf{s} : \mathbf{e}^{\mathrm{GN}}.$$

此处，$w \equiv \boldsymbol{\tau} : \mathrm{d} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathrm{D}$ 表示可变形体 $\mathfrak{B}$ 在参考构形中单位体积的应力功率（客观标量）；$\boldsymbol{\tau}$和 $\bar{\boldsymbol{\tau}}$分别为对称的欧拉 Kirchhoff 应力张量和拉格朗日旋转 Kirchhoff 应力张量

$$\boldsymbol{\tau} \equiv J\boldsymbol{\sigma}, \qquad \bar{\boldsymbol{\tau}} \equiv \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R},$$

且 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示对称的欧拉柯西（真实）应力张量。

在 [33], 中，这些材料的拉格朗日 $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 和欧拉 $\boldsymbol{\tau}$ 应力张量表示为

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i=1}^{m} g_i f'(\lambda_i)\lambda_i \mathbf{U}_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{m} g_i f'(\lambda_i)\lambda_i \mathbf{V}_i, \tag{30}$$

其中，$f(\lambda)$ 是任意一个尺度函数，可由 Hill 族生成应变张量 E 和 e,

$$g_i \equiv \lambda(f_1 + f_2 + f_3) + 2\mu f_i, \quad f_i \equiv f(\lambda_i), \quad f'(\lambda_i) \equiv \frac{\partial f(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, \ldots m). \tag{31}$$

HLIH 族中若干模型的本构关系列于表 2。该表介绍了 Pelzer 和 Mooney 的拉格朗日$\mathbf{S}^P$ 和 $\mathbf{S}^M$ 以及欧拉 $\mathbf{s}^P$ 和 $\mathbf{s}^M$ 应力张量。这些张量的一般无基表达式见 [33]。对于本文所讨论的超弹性材料模型，这些一般表达式可进一步简化，因为在这些模型中，所有与拉格朗日（或欧拉）应变张量功共轭的拉格朗日（或欧拉）应力张量，均与右（或左）伸长张量 $\mathbf{U}$ （或 $\mathbf{V}$）共轴。所考虑的应力张量的简化表达式具有以下形式（m 是 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 张量的特征指标）：

$$\mathbf{S}^P \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\lambda_i + \lambda_i^{-1}} \mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}^P \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\lambda_i + \lambda_i^{-1}} \mathbf{V}_i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_i,$$

表3 单　　项 Ogden 可压缩各向同性超弹性材料　　模型

模型 name	应变张量	本构关系 拉格朗日形式	欧拉形式
Ogden-A	$\mathrm{E}^{(2)}$, $\mathrm{e}^{(2)}$	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\mathrm{E}^{(2)} + \lambda\,(\text{对数 } J)\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathrm{e}^{(2)} + \lambda\,(\log\ J)\,\mathrm{I}$
Ogden-B	$\mathrm{E}^{(-2)}$, $\mathrm{e}^{(-2)}$	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\mathrm{E}^{(-2)} + \lambda\,(\text{对数 } J)\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathrm{e}^{(-2)} + \lambda\,(\text{对数 } J)\,\mathrm{I}$

$$\mathbf{S}^M \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\lambda_i^2 + \lambda_i^{-2}} \mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}^M \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{\lambda_i^2 + \lambda_i^{-2}} \mathbf{V}_i \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_i.$$

特别是，对于 HLIH-H（或简称 Hencky）材料模型，本构关系可以写成简洁优雅的形式：

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\,\mathbf{E}^{(0)} + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} = 2\mu\,\log\mathbf{U} + \lambda\,\mathrm{tr}(\log\mathbf{U})\,\mathbf{I} \\ \Leftrightarrow\quad &\boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathbf{e}^{(0)} + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} = 2\mu\,\log\mathbf{V} + \lambda\,\mathrm{tr}(\log\mathbf{V})\,\mathbf{I}. \end{aligned} \tag{32}$$

现在我们引入另一族类胡克Ogden型各向同性超弹性材料模型，采用各向同性超弹性不可压缩材料本构关系的无基表达式[39]，该表达式通过对著名的Ogden模型的本构关系进行推广而得到 [36]。然而，为了更具一般性，我们考虑该模型本构关系的一种混合形式（参见[31]），其中计入了材料可压缩性 [38]，其原型是可压缩各向同性超弹性材料模型的Ogden本构关系 [37]（另见 [84]）。接下来，我们仅限于两种典型的单幂模型，然后考虑一类特殊形式的双幂Ogden型模型。

本文所讨论的单幂Ogden模型的本构关系列于表3。这两个模型都是混合型可压缩各向同性超弹性Mooney–Rivlin材料模型的特例（见附录A）。此外，Ogden-A材料模型也称为混合型可压缩各向同性超弹性新胡克模型 [31] 或Simo–Pister模型 [30]。

我们构造了一族双幂Ogden型模型，其针对可压缩各向同性超弹性材料的本构关系如下：

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\,\mathbf{E}_r + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathbf{e}_r + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I}. \tag{33}$$

此处$\mathbf{E}_r$ 和$\mathbf{e}_r$ 是Baˇzant–Itskov族中的应变张量，由形式为（12）的尺度函数生成。对于 $r = 0$，该模型即Hencky各向同性超弹性材料模型（或HLIH-H模型），其本构关系为（32）。[13] 对于 $r > 0$，利用表达式（12），我们可以将本构关系（33）改写为

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mu\,\mathbf{E}^{(r)} + \mu\,\mathbf{E}^{(-r)} + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \mu\,\mathbf{e}^{(r)} + \mu\,\mathbf{e}^{(-r)} + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I}. \tag{34}$$

本构关系（33）可以改写为（34）的形式，这正是“ 双幂Ogden型模型族”这一术语的由来。本文所考虑的

[13]请注意，Hencky模型是广义Ogden模型的一种特殊情况 [38, 39]。

表4 Ogden 的　　基于 Ba˘zant–Itskov 应变张量的各向同性超弹性材料　　材料模型

模型的name	应变张量	本构关系 拉格朗日形式	欧拉形式
OBI-H	Hencky	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \log \mathrm{U} + \lambda(\log J)\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu$ 对数 $\mathrm{V} + \lambda$(对数 J) I
OBI-P	Pelzer	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mu(\mathrm{U} + \mathrm{U}^{-1}) + \lambda(\log J)\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = \mu(\mathrm{V} + \mathrm{V}^{-1}) + \lambda(\log J)\,\mathrm{I}$
OBI-M	Mooney	$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mu}{2}(\mathrm{C} + \mathrm{C}^{-1}) + \lambda(\log J)\,\mathrm{I}$	$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mu}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}^{-1}) + \lambda$(对数 J) I

双幂Ogden模型见表4。请注意，OBI-M模型是一种混合型可压缩（各向同性超弹性）Mooney–Rivlin材料模型，其参数值为 $\mu_1 = \mu_2 = \mu/2$ （参见附录A）。

除了测试上述类胡克各向同性超弹性材料模型外，我们还将测试类胡克各向同性亚弹性模型（例如，参见[9, 40, 41, 67, 75, 78, 85–88]）。前两个模型采用上、下Oldroyd应力率作为客观应力率，其本构关系如下：

- 对于上Oldroyd应力率，

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\sharp} = 2\mu\,\widehat{\mathbf{D}} + \lambda\,(\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{D}})\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^{\sharp} = 2\mu\,\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}; \tag{35}$$

- 对于下Oldroyd应力率，

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\flat} = 2\mu\,\widehat{\mathbf{D}} + \lambda\,(\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{D}})\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^{\flat} = 2\mu\,\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}. \tag{36}$$

对于类胡克各向同性次弹性的其他本构关系，作为客观应力率，我们采用与材料自旋张量族中的自旋张量相关联的共旋应力率[14]

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\Omega} = 2\mu\,\widehat{\mathbf{D}} + \lambda\,(\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{D}})\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{D}^{\circ}}{\mathrm{D}t}[\boldsymbol{\tau}] = \right) \boldsymbol{\tau}^{\omega} = 2\mu\,\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}. \tag{37}$$

请注意，对于 $\lambda = 0$ 或 $J = 1$ 没有初始应力的情形，具有本构关系（35）和（36）的次弹性材料模型，是表 3 [75]中所列超弹性材料模型的率形式。然而，在具有本构关系（37）的整个亚弹性模型族中，只有一种基于对数应力率的模型，在无初始应力时适用于任意类型的变形，并且是 Hencky各向同性超弹性材料模型的率形式 [78, 86–88] （另见 [9, 75]）。

客观应力率的显式表达式，以及将所考虑的各向同性类胡克次弹性模型与具有以下形式本构关系的模型相对应

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\nabla} = 2\mu\,\widehat{\mathbf{D}} + \lambda\,(\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{D}})\,\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^{\nabla} = 2\mu\,\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}.$$

见表5。

[14]请注意，通过选取$\mathrm{D}^{\circ}{}_{\mathrm{D}t}[\boldsymbol{\tau}] = {}_{\mathrm{D}\log\mathrm{D}t}[\boldsymbol{\tau}] = 2\mu\,\mathrm{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathrm{d})\mathrm{I}$ [87, 88]，Hencky模型也包含在率形式（37）2中。

表5 客观应力率的显式表达式及各向同性胡克型次弹性模型的识别

模型 name	应力率的定义 拉格朗日形式（$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\nabla}$）	欧拉形式（$\boldsymbol{\tau}^{\nabla}$）
Hypo-A	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\sharp} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{r}_U^T - \mathbf{r}_U \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\sharp} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\ell}^T - \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\tau}$
Hypo-B	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\flat} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{r}_U + \mathbf{r}_U^T \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\flat} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}^T \cdot \boldsymbol{\tau}$
Hypo-ZJ	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{ZJ}} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}$
Hypo-GN	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\nabla} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{GN}} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^R - \boldsymbol{\omega}^R \cdot \boldsymbol{\tau}$
Hypo-GS	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{GS}} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \Omega^{\mathrm{GS}} - \Omega^{\mathrm{GS}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{GS}} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{GS}} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{GS}} \cdot \boldsymbol{\tau}$
Hypo-log	$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\log} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \Omega^{\log} - \Omega^{\log} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\log} \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}^{\log} - \boldsymbol{\omega}^{\log} \cdot \boldsymbol{\tau}$

3 有限简单剪切变形的运动学

我们考虑空间中材料试样在运动定律（4）下的均匀变形。正如第1节所述，Thiel 等人 [1] 提出在运动参数 a、 b、 c和 d 的约束（5）之外，再增加两个约束

$$a\,c = 1, \quad d = 1, \tag{38}$$

从而确保试样的变形既是平面的（$d = 1$），又是等容的（$J = a\,c\,d = 1$）。

仅受约束（38），左、右柯西–格林变形张量（10）取如下形式

$$\mathbf{c}_{3D} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & b\,c & 0 \\ b\,c & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{3D} = \begin{bmatrix} a^2 & a\,b & 0 \\ a\,b & b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

由于在线弹性理论中，各向同性材料的胡克定律将共轴的柯西应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与无穷小应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$联系起来，因此对于此类（线弹性）材料，纯剪切应力状态与纯剪切应变状态会同时出现（参见，例如，[1]）。在有限应变理论中，任意变形下应力张量与应变张量的共轴性仅对各向同性柯西/格林弹性材料才能得到保证（参见，例如，[51]）。在这种情况下，柯西 $\boldsymbol{\sigma}$ 与基尔霍夫 $\boldsymbol{\tau}$ 应力张量与左柯西–格林变形张量 $\mathbf{c}$ 共轴，而旋转后的柯西 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$与基尔霍夫 $\bar{\boldsymbol{\tau}} \equiv \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}^T$ 应力张量与右柯西-格林变形张量 $\mathbf{C}$ 共轴。

此外，在考虑欧拉纯剪切应力（1）的同时，我们还将考虑拉格朗日纯剪切应力

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\sigma}_{12}\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 + \bar{\sigma}_{12}\mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{k}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{12} & 0 \\ \bar{\sigma}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

由于应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 通过旋转操作相关联，运动定律（4）对于某种材料试样可导致欧拉纯剪切应力（1），通常并不会使该试样产生拉格朗日纯剪切应力（40），反之亦然。这意味着，在有限应变的一般情形下，欧拉纯剪切应力与拉格朗日纯剪切应力（如果它们对于运动定律（4）在约束（38）下根本有可能实现）是在运动定律（4）下以不同的参数组 a、 b和 c 针对 $d = 1$达到的。

如果能够达到欧拉纯剪切应力 (1)，则张量 c 与张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的共轴性条件要求 (39) 中的分量 $c_{11}^{3D} = c_{22}^{3D}$相等$_1$ [19], ，这意味着参数 a、 b 和 c 需满足约束(5)。类似地，如果能够达到拉格朗日纯剪切应力 (40)，则张量 C 与张量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 的共轴性要求 (39) 中的分量 $C_{11}^{3D} = C_{22}^{3D}$相等$_2$ [24]，这意味着参数 a、 b 和 c 需满足约束 (6)。

总而言之，Thiel 等人 [1] 对运动定律 (4) 中的四个参数 a、 b、 c 和 d 施加了两个共同约束 (38)，以及两个不同的约束 (5) 或 (6)。对四个参数 a、 b、 c 和 d采用约束 (38) 和 (5) 后，各向同性柯西/格林弹性材料的运动定律 (4) 允许出现欧拉纯剪切应力 (1)。类似地，对四个参数 a、 b、 c 和 d采用约束 (38) 和 (6) 后，各向同性柯西/格林弹性材料的运动定律 (4) 允许出现拉格朗日纯剪切应力 (40)。

请注意，带有约束集（4）以及（38）和（5），或（38）和（6）的两条运动定律中的每一条，都是一参数定律。Thiel 等人 [1] 提出了一个无量纲参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 作为该参数，并给出了以下关于量 a、 b 和 c （$d = 1$）的表达式：

(i) 在约束（38）$_1$ 和（5）下，

$$a(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}}, \qquad b(\alpha) := \frac{\sinh(2\alpha)}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}}, \qquad c(\alpha) := \sqrt{\cosh(2\alpha)}; \tag{41}$$

(ii) 在约束（38）$_1$ 和（6）下，

$$a(\alpha) := \sqrt{\cosh(2\alpha)}, \qquad b(\alpha) := \frac{\sinh(2\alpha)}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}}, \qquad c(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}}. \tag{42}$$

以下 [1], 按照运动定律（4）进行的试样均匀变形$d = 1$ 以及参数组 a， b和 c （41）和（42）将分别称为左有限简单剪切（LFSS）和右有限简单剪切（RFSS）变形。初始边长为 1 的立方体试样在 $\alpha = 0.5$ 平面应变条件下以这种方式变形后的构型见图4。初始边长为 1 的立方体试样在平面应变条件下的 LFSS 和 RFSS 变形（ $\alpha = 0.5$，1。0，1。5）见图5。我们确定剪切角 θ^* 和 θ （见

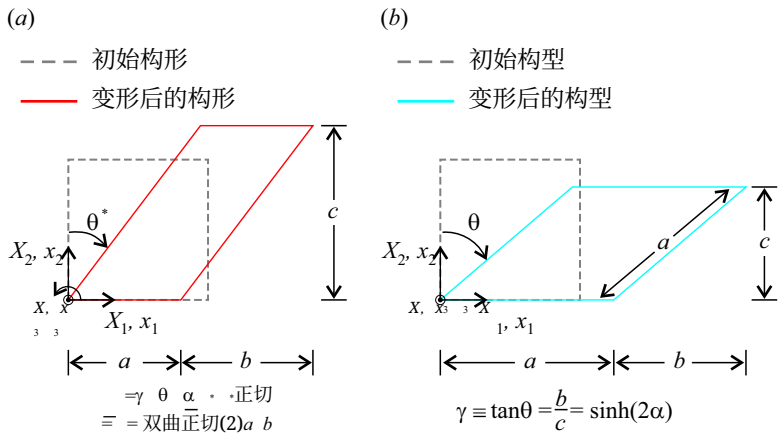


图 4 在平面应变条件下，初始边长为 1 的立方体试样在 $\alpha = 0.5$ 下的 LFSS（a）和 RFSS（b）变形。

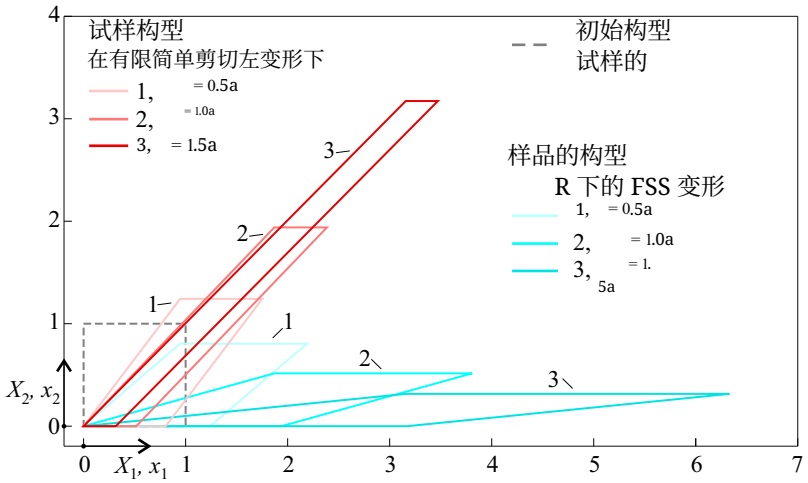


图 5 初始边长为 1 的立方体试样在平面应变条件下、 $\alpha = 0.5$、1.0、1.5 时的 LFSS（a）和 RFSS（b）变形

图4）及其对应的标准剪切参数 γ^* 和 γ

$$\gamma^* \equiv \tan\theta^* = \frac{b}{c} = \tanh(2\alpha), \qquad \gamma \equiv \tan\theta = \frac{b}{c} = \sinh(2\alpha).$$

参数的取值 a， b和 c、剪切角 θ^* 和 θ 及其对应的标准剪切参数 γ^* 和 γ 见表6 和7。

由于对参数的任意取值均有 $\cosh(2\alpha) \geq 1$， α由 (41) 和 (42) 可知，不等式 $a \leq 1$ 和 $c \geq 1$ 对 LFSS变形成立，而不等式 $a \geq 1$ 和 $c \leq 1$ 对 RFSS变形成立，这与表 6 和 7 中给出的数据相符。此外，剪切角 θ^* 和 θ 及其

表6 LFSS变形的参数 a、 b 和 c 的值、剪切角度 θ^* 及其对应的标准剪切参数 γ^*

α [-]	θ^* [度。]	γ^* [-]	a [-]	b [-]	c [-]
0.5	37.29	0.7616	0.8050	0.9461	1.2422
1.0	43.95	0.9640	0.5156	1.8699	1.9396
1.5	44.86	0.9951	0.3152	3.1573	3.1730

表7 RFSS变形中参数 a、 b 和 c 的取值、剪切角度 θ 及其对应的标准剪切参数γ

α [-]	θ [度.]	γ [-]	a [-]	b [-]	c [-]
0.5	49.61	1.1752	1.2422	0.9461	0.8050
1.0	74.59	3.6269	1.9396	1.8699	0.5156
1.5	84.30	10.018	3.1730	3.1573	0.3152

相应的标准剪切参数 γ^* 和 γ 具有如下极限值:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\theta^*(\alpha)=45^\circ,\quad \lim_{\alpha\to\infty}\gamma^*(\alpha)=1,\quad \lim_{\alpha\to\infty}\theta(\alpha)=90^\circ,\quad \lim_{\alpha\to\infty}\gamma(\alpha)=\infty. \tag{43}$$

请注意，对于简单剪切变形，使用量 $\gamma^s\equiv\tan\theta$ 作为剪切参数较为方便（见图 2，b），该量的变化方式与 RFSS 变形中的参数 γ类似。遗憾的是，对于 LFSS变形，在相同的变化范围内，量 γ^* 不能用作剪切参数（见表 6 和式（43）$_2$）。本文选择参数 $\alpha\in[0,\infty)$作为剪切参数，并且只使用其非负值，因为负值不会带来任何本质上全新的解。为了使有限简单剪切和简单剪切变形试样测试流程保持一致，我们选择参数 $\alpha\in[0,1.5]$的主要取值范围，因为对于 $\alpha=1.5$，RFSS变形的参数 $\gamma\approx10$ 的值为.....（见表 7）。在此前的研究中，我们在简单剪切变形条件下测试试样时，也采用了参数 $\gamma^s\in[0,10]$ 的类似取值（例如，参见 [40, 41]）。

运动定律（4） $d=1$ 对应于二维平面应变变形。由于满足表达式（41）和（42）的这一运动定律对应于等容变形，因此，对于所考虑的运动定律所规定的完整运动学，即使材料试样由可压缩材料制成，其柯西应力张量分量的确定方式也与不可压缩材料试样相同，精确到该张量的任意球形成分。为唯一确定柯西应力张量分量，需要通过指定样品表面某些区域的柯西应力张量法向分量这一额外边界条件，来确定该分量。例如，对于样品的简单剪切变形，假定除满足平面应变条件外，样品中还存在平面应力状态，或者指定样品侧面的法向压力（参见，例如， [7]）。本研究仅使用满足以下条件的材料模型

其中，等容平面应变变形同时满足平面应力条件，即

$$\sigma_{33} = \bar{\sigma}_{33} = 0.$$

利用这些条件，我们得到了所考虑的有限简单剪切变形下柯西应力张量各分量的唯一值。因此，以下仅考虑二维平面应变，这将大大简化后续计算。

根据 [1], ，利用表达式（41）和（42），我们得到 LFSS 和 RFSS 变形的变形梯度 F 的两个表达式

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}} \begin{bmatrix} 1 & \sinh(2\alpha) \\ 0 & \cosh(2\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_R = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}} \begin{bmatrix} \cosh(2\alpha) & \sinh(2\alpha) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

利用极分解（8），可将其表示为（参见 [50]）

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{R}, \qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}_R, \tag{45}$$

其中，$\mathbf{V}_L$ 和 $\mathbf{U}_R$ 分别是 LFSS 和 RFSS 变形对应的对称正定左（欧拉）伸长张量和右（拉格朗日）伸长张量，而 $\mathbf{R}$ 是极旋转张量，对于两种分解均相同（45）。这些张量的表达式见 [1]

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{U}_R = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}} \begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{46}$$

由于对于有限简单剪切变形，当 $\alpha \neq 0$ 时，两个主伸长不同，因此伸长张量 V$_L$ 和 U$_R$ 可用经典谱形式表示，且特征向量（对应于主方向）的选取是唯一的

$$\mathbf{V}_L = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2, \qquad \mathbf{U}_R = \lambda_1 \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 + \lambda_2 \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_2,$$

其中，λ_1 和 λ_2 是特征值（主伸长），$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 和 $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ 分别是张量 V$_L$ 和 U$_R$的从属特征向量 [1, 24]

$$\lambda_1 = \mathrm{e}^{\alpha}, \qquad \lambda_2 = \mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

类似地，伸长张量 V$_L$ 和 U$_R$ 可利用这些张量的特征投影表示为无基谱形式

$$\mathbf{V}_L = \lambda_1 \mathbf{V}_1^L + \lambda_2 \mathbf{V}_2^L, \qquad \mathbf{U}_R = \lambda_1 \mathbf{U}_1^R + \lambda_2 \mathbf{U}_2^R, \tag{48}$$

其中，特征值 λ_1 和 λ_2 由式（47）给出，从属特征投影的形式为

$$\mathbf{V}_1^L = \mathbf{U}_1^R = \mathbf{n}_1\mathbf{n}_1^T = \mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2^L = \mathbf{U}_2^R = \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2^T = \mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

当然，特征投影的相同表达式也可以利用西尔维斯特公式（7）推导得到。

下文中，我们将寻找能使有限简单剪切变形产生欧拉或拉格朗日纯剪切应力的材料模型。以下两个命题简化了对这些材料模型的搜寻。

命题4. 若任意材料试样的 LFSS（RFSS）变形导致形式为 （1） （（40））的欧拉（拉格朗日）纯剪切应力，则同一变形不能导致形式为 （40） （（1））的拉格朗日（欧拉）纯应力。

证明。 我们针对 LFSS变形证明该命题；对于 RFSS变形，该命题可类似地证明。设 LFSS变形的柯西应力张量具有形式（1），或者在二维表示中具有如下形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

旋转后的柯西应力张量由下式给出

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}.$$

利用表达式（46）$_2$ 表示张量 $\mathbf{R}$ 以及三角恒等式

$$2\sinh(\alpha)\cosh(\alpha) = \sinh(2\alpha), \qquad \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1,$$

我们得到如下表达式

$$\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \frac{\sigma_{12}}{\cosh(2\alpha)}\begin{bmatrix} -\sinh(2\alpha) & 1 \\ 1 & \sinh(2\alpha) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

由于 $\alpha > 0$，我们有 $\sinh(2\alpha) > 0$，由（50）可知，对于对应于欧拉纯剪切应力的 LFSS变形，当 $\alpha > 0$ 时，以下不等式成立：

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \neq \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{12} & 0 \end{bmatrix};$$

因此，命题得证。 □

命题5. 对任何各向同性柯西-格林弹性材料样本的有限简单剪切变形，等式

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_L) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}_R) \tag{51}$$

对任意 $\alpha > 0$ 均成立。

证明。 对于命题中所考虑的材料，等式成立（例如，参见 [51]）

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{V}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) \tag{52}$$

其中 $\mathbf{f}$ 是其张量自变量的各向同性张量函数。由于对于任意α，表达式(46)$_1$ 均成立，因此由等式(52)可知，等式(51)也成立。

□

推论 6. 如果对于任意各向同性柯西-格林弹性材料模型，LFSS（RFSS）变形导致欧拉（拉格朗日）纯剪切应力状态，那么在满足等式的条件下，RFSS（LFSS）变形将导致拉格朗日（欧拉）纯剪切应力状态

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_L) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}_R) = \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}, \tag{53}$$

其中 $s \equiv \sigma_{12} = \bar{\sigma}_{12}$。

4 若干各向同性超弹性/次弹性材料模型的测试

本节中，我们将采用第 2.3 节给出的本构关系，对第 3节定义的 LFSS/RFSS 变形下的类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型进行测试。第 4.1节测试若干 Hill 线性各向同性超弹性材料模型，第 4.2节测试若干单幂或双幂Ogden模型。最后，第 4.3节测试若干类胡克各向同性次弹性材料模型。

4.1 基于SP应变函数对若干HLIH材料模型的测试

命题7. 对于 HLIH 族中任一基于 SP 应变张量的材料模型，其尺度函数为 $f(\lambda)$，LFSS 与 RFSS 变形分别导致欧拉与拉格朗日纯剪切应力，形式为 (53)，其中

$$s(\alpha) = 2\mu f(\lambda_1) f'(\lambda_1)\lambda_1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{e}^{\alpha}. \tag{54}$$

证明。由于对于有限简单剪切变形，等式 $\lambda_1 = \mathrm{e}^{\alpha}$, $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ 成立，任一 SP应变函数的定义（参见 [33]）导致

$$f(\lambda_2) = -f(\lambda_1), \qquad f(\lambda_3) = 0, \tag{55}$$

由此可知，等式右侧的第一项（31）$_1$ 为零。将表达式（31）$_1$ 代入（30）$_2$ 并考虑到（55），我们得到 LFSS 变形下柯西应力张量的二维等式（$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}$ 适用于所用的等容变形）：

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu[f(\lambda_1)f'(\lambda_1)\lambda_1 \mathbf{V}_1^L + f(\lambda_2)f'(\lambda_2)\lambda_2 \mathbf{V}_2^L]. \tag{56}$$

使用 [33] 中的等式（6）

$$f'(\lambda_1)\lambda_1 = f'(\lambda_2)\lambda_2,$$

该式对本材料模型成立，并由等式（55）$_1$，从（56）我们得到 $\boldsymbol{\sigma}$的如下表达式:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu f(\lambda_1)f'(\lambda_1)\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

这里我们使用了等式

$$\mathbf{V}_1^L - \mathbf{V}_2^L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

考虑到 λ_1 在（47）中的表达式$_1$，并将表达式（57）与表达式（53）的欧拉形式进行比较，我们得到等式（54）。（53）中拉格朗日形式的表达式由推论6得出。 □

我们考虑三个基于SP 应变张量（Hencky、Pelzer和Mooney）、由尺度函数 $f^{(0)}(\lambda)$、$f^P(\lambda)$ 和 $f^M(\lambda)$ 生成的HLIH 模型（见表1）。按照 [33], ，我们将 HLIH 族中相应的模型称为H、P和M 材料模型。函数 $s(\alpha)$ 定义如下:

- 用于H模型（Hencky各向同性超弹性材料模型）。

$$s(\alpha) = 2\mu\,\alpha, \tag{59}$$

,

- 用于P模型（Pelzer 各向同性超弹性材料模型），

$$s(\alpha) = \frac{\mu}{2}(\mathrm{e}^{2\alpha} - \mathrm{e}^{-2\alpha}), \tag{60}$$

,

- 对于 M 模型（Mooney 各向同性超弹性材料模型），

$$s(\alpha) = \frac{\mu}{4}(\mathrm{e}^{4\alpha} - \mathrm{e}^{-4\alpha}). \tag{61}$$

.

因此，LFSS变形下欧拉纯剪切应力状态的柯西应力张量分量为

$$\sigma_{12}(\alpha) = s(\alpha), \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0,$$

对于 RFSS 变形下的拉格朗日纯剪切应力状态，旋转后的柯西应力张量分量也可类似地写为:

$$\bar{\sigma}_{12}(\alpha) = s(\alpha), \qquad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = 0. \tag{62}$$

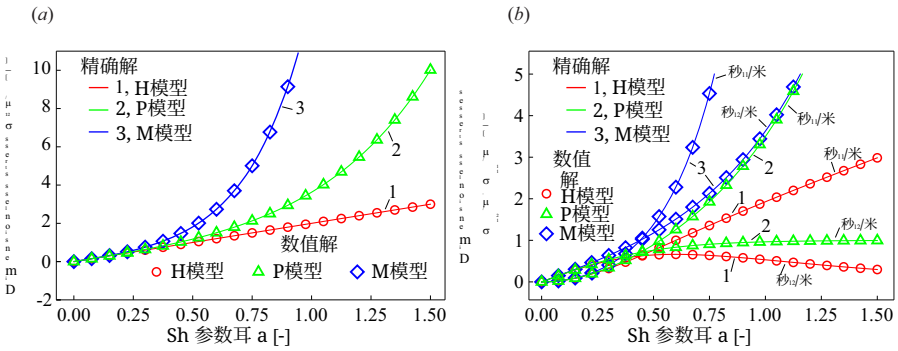


图6 LFSS 变形下的柯西应力张量分量 $\sigma_{12}(\alpha)$ 以及 RFSS 变形下柯西应力张量的分量 $\sigma_{12}(\alpha)$ 和 $\sigma_{11}(\alpha)$（bH、P 和 M 模型，见表 2）。

要获得这种变形的柯西应力张量分量，需要旋转应力张量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha) \cdot \mathbf{R}^T(\alpha).$$

利用张量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha)$ 在 (53) 中的表达式以及 $\mathbf{R}(\alpha)$ 在 (46)$_2$，可得 RFSS 变形的柯西应力张量分量

$$\sigma_{12}(\alpha) = \frac{s(\alpha)}{\cosh(2\alpha)}, \qquad \sigma_{11}(\alpha) = s(\alpha)\tanh(2\alpha), \qquad \sigma_{22} = -\sigma_{11}, \tag{63}$$

其中，函数 $s(\alpha)$ 对于每个模型（H、P 和 M）分别由式 (59)-(61) 确定。

图示 $\sigma_{12}(\alpha)$，为H、P和M模型在LFSS变形下所得结果，见图6，a；以及图示 $\sigma_{12}(\alpha)$和 $\sigma_{11}(\alpha)$，为同一模型在RFSS变形下所得结果，见图6，b。图中标记显示了使用商用有限元系统MSC.Marc对两类变形进行计算机模拟的结果，我们通过Hypela2用户子程序以全拉格朗日 formulation实现了这三种材料模型（详情见 [34, 35]）。

4.2 单幂次与双幂次Ogden模型

我们考虑广义Ogden模型[38] 的本构关系，该模型考虑了材料可压缩性；这些关系是通过将不可压缩材料模型 [39] 的本构关系中的项 $-q\mathbf{I}$（q 为拉格朗日乘子）替换为项 $\lambda\log\ J\mathbf{I}$而得到的。由于对于等容变形，$\log\ J = 0$，因此可以通过令项 $-q\mathbf{I}$等于零张量，形式上从不可压缩材料的本构关系推导出该变形下可压缩材料的本构关系；要做到这一点，可以假设等容变形同时满足平面应力和平面应变条件。对于本文所考虑的材料模型，后者成立，因为对于这些模型，等式 $\lambda_3 = 1$（平面应变条件）会导出等式 $\sigma_{33} = 0$（平面

应力条件）。鉴于上述内容，以及等容变形的柯西应力张量和Kirchhoff 应力张量满足 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\sigma}$ 且 $\bar{\boldsymbol{\tau}}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，其中 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}\equiv\mathbf{R}^{T}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{R}$。因此，对于有限简单剪切变形，单幂Ogden模型的本构关系（见表3）可写为：

（Ogden-A模型）对于 Ogden-A模型，

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=2\mu\,\mathbf{E}^{(2)}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\sigma}=2\mu\,\mathbf{e}^{(2)}. \tag{64}$$

（Ogden-B模型）对于 Ogden-B模型，

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=2\mu\,\mathbf{E}^{(-2)}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\sigma}=2\mu\,\mathbf{e}^{(-2)}. \tag{65}$$

下文中，$\mathbf{E}^{(2)}$ 和$\mathbf{E}^{(-2)}$ 为拉格朗日应变张量，而$\mathbf{e}^{(2)}$ 和$\mathbf{e}^{(-2)}$ 为欧拉应变张量（见表1）。

我们首先使用本构关系的欧拉形式，在 LFSS变形下检验这些模型。表$\mathbf{e}^{(2)}$ 和$\mathbf{e}^{(-2)}$ 中给出的张量1的表达式导出以下等式

$$\mathbf{e}^{(2)}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{I}),\qquad\mathbf{e}^{(-2)}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{c}^{-1}), \tag{66}$$

其中，张量$\mathbf{c}$ 和$\mathbf{c}^{-1}$ 定义见（10）$_2$ 和（11）$_2$。

我们利用式（$\mathbf{c}$ 中张量$\mathbf{V}_L$ 的特征投影表达式定义张量49）

$$\mathbf{c}=\mathbf{V}_L^2=\lambda_1^2\,\mathbf{V}_1^L+\lambda_2^2\,\mathbf{V}_2^L=\frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$

or

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\cosh(2\alpha)&\sinh(2\alpha)\\\sinh(2\alpha)&\cosh(2\alpha)\end{bmatrix}. \tag{67}$$

同理，我们得到

$$\mathbf{c}^{-1}=\mathbf{V}_L^{-2}=\lambda_1^{-2}\,\mathbf{V}_1^L+\lambda_2^{-2}\,\mathbf{V}_2^L=\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$

or

$$\mathbf{c}^{-1}=\begin{bmatrix}\cosh(2\alpha)&-\sinh(2\alpha)\\-\sinh(2\alpha)&\cosh(2\alpha)\end{bmatrix}. \tag{68}$$

利用等式（66）、（67）和（68），根据（64）和（65），可得受测材料模型在 LFSS 变形下柯西应力张量各分量的以下表达式：

（Ogden-A模型）对于Ogden-A模型，

$$\sigma_{12}(\alpha)=\mu\sinh(2\alpha),\qquad\sigma_{11}(\alpha)=\sigma_{22}(\alpha)=\mu[\cosh(2\alpha)-1]; \tag{69}$$

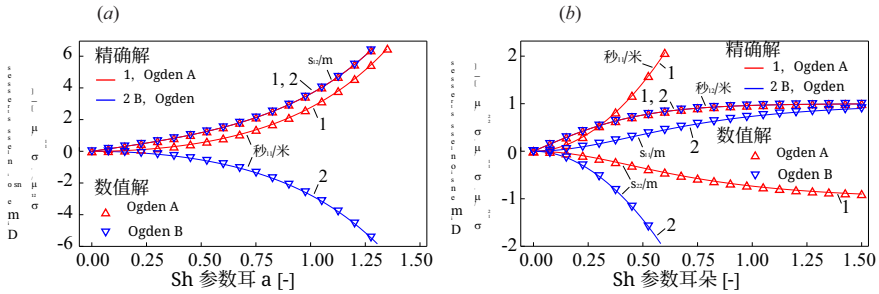


图 7 Ogden-A、B 模型的柯西应力张量分量图（见表 3），对应 LFSS（a）和 RFSS（b）变形。

（Ogden-B模型）对于Ogden-B模型,

$$\sigma_{12}(\alpha) = \mu \sinh(2\alpha), \qquad \sigma_{11}(\alpha) = \sigma_{22}(\alpha) = \mu[1 - \cosh(2\alpha)]. \tag{70}$$

这些材料模型在 RFSS 变形下的分量 $\bar{\sigma}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ 是根据命题5的陈述得到的,

$$\bar{\sigma}_{ij}(\alpha) = \sigma_{ij}(\alpha) \ (i, j = 1, 2),$$

其中各量的表达式σ_{ij} （i、 $j = 1$、2）见（69）、（70）。应用旋转变换，可得到 Ogden-A 和 Ogden-B 材料模型在 RFSS变形下的柯西应力张量分量σ_{ij} （i、 $j = 1$、2）：

（Ogden-A模型）Ogden-A模型,

$$\sigma_{12}(\alpha) = \mu \tanh(2\alpha), \quad \sigma_{11}(\alpha) = \mu \left[\frac{\cosh(4\alpha)}{\cosh(2\alpha)} - 1\right], \quad \sigma_{22}(\alpha) = \mu \left[\frac{1}{\cosh(2\alpha)} - 1\right];$$

（Ogden-B模型）Ogden-B模型,

$$\sigma_{12}(\alpha) = \mu \tanh(2\alpha), \quad \sigma_{11}(\alpha) = \mu \left[1 - \frac{1}{\cosh(2\alpha)}\right], \quad \sigma_{22}(\alpha) = \mu \left[1 - \frac{\cosh(4\alpha)}{\cosh(2\alpha)}\right].$$

在 LFSS变形下，Ogden-A、B 模型得到的 σ_{12}（α）和 σ_{11}（α） $= \sigma_{22}$（α）曲线如图7（a）所示；相同模型在 RFSS变形下得到的 σ_{12}（α）、 σ_{11}（α）和 σ_{22}（α）曲线如图7（b）所示。

根据所得的 LFSS 和 RFSS 变形下 Ogden-A、B 模型柯西应力张量分量表达式，可以得出结论：对于这些模型，有限简单剪切变形既不会产生欧拉纯剪切应力，也不会产生拉格朗日纯剪切应力。关于 Ogden-A（新胡克）模型的这一论断，与文献 [1] 中针对同一材料模型提出的类似论断一致。显然，本文针对两种单幂奥格登类型模型提出的论断，也适用于此类所有材料模型，但亨基各向同性材料模型除外（即这些模型中参数为 $n \neq 0$ 的任意模型）。

考虑以下双幂 Ogden模型（注意，对于等容 LFSS 和 RFSS 变形，项 $\lambda(\log J)\mathbf{I} = 0$）：对于 $n \neq 0$（见表4）：

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mu\,(\mathbf{E}^{(n)} + \mathbf{E}^{(-n)}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mu\,(\mathbf{e}^{(n)} + \mathbf{e}^{(-n)}). \tag{71}$$

由于（71）右侧括号中的表达式，只不过是由尺度函数（12）生成、属于 SP 应变张量族的 Ba$\check{}$zant–Itskov 应变张量表达式的两倍，因此本构关系（71）可改写为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\,\mathbf{E}_n \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\mathbf{e}_n, \tag{72}$$

其中

$$\mathbf{E}_n \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{(n)} + \mathbf{E}^{(-n)}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_n \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{(n)} + \mathbf{e}^{(-n)}).$$

我们首先使用本构关系的欧拉形式，测试 OBI 模型在 LFSS变形下的表现。根据应变张量 $\mathbf{e}_n$ 及其尺度函数（12）的表达式，可得（$f_n(\lambda_3) = 0$）

$$\mathbf{e}_n = f_n(\lambda_1)\,\mathbf{V}_1^L + f_n(\lambda_2)\,\mathbf{V}_2^L.$$

等式（55）$_1$ 和（58）给出如下表达式

$$\mathbf{e}_n = f_n(\lambda_1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{73}$$

利用表达式（72）和（73），可知对于 OBI 模型，LFSS变形会产生欧拉纯剪切应力（53），其中（$n \neq 0$）

$$s(\alpha) = 2\mu\ f_n(\lambda_1) = \frac{\mu}{n}(\mathrm{e}^{\alpha n} - \mathrm{e}^{-\alpha n}). \tag{74}$$

特别地，我们得到以下模型中量 $s(\alpha)$ 的表达式：

- 对于 OBI-P 模型（参数为 $n = 1$）

$$s(\alpha) = \mu(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha});$$

- 对于 OBI-M 模型（参数为 $n = 2$）

$$s(\alpha) = \frac{\mu}{2}(\mathrm{e}^{2\alpha} - \mathrm{e}^{-2\alpha}). \tag{75}$$

注意，量 $s(\alpha)$ 在 (75) 中针对 OBI-M 模型的表达式与 HLIH 族中 Pelzer 模型的表达式 (60) 相同。

这些材料模型在 RFSS变形下进行测试时，其柯西应力张量分量的形式为（63），其中量 $s(\alpha)$ 定义于（74）中。

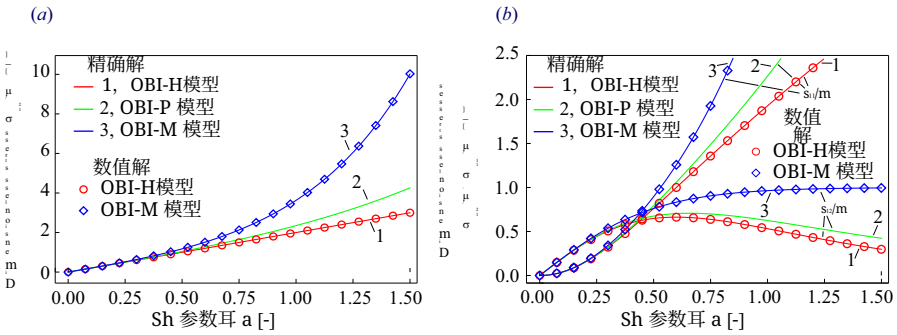


图 8 Hencky（OBI-H）、OBI-P 和 OBI-M 模型的柯西应力张量分量曲线（见表 4），在 LFSS（a）和 RFSS（b）变形下。

图 $\sigma_{12}(\alpha)$ 展示了 Hencky、OBI-P 和 OBI-M 模型在 LFSS变形下的结果；同一模型在 RFSS变形下得到的图 $\sigma_{12}(\alpha)$ 和 $\sigma_{11}(\alpha)$ 展示于图 8，b。

图 7 和 8 中的标记显示了采用自制的 Pio-ner 有限元系统进行计算机模拟得到的 Ogden-A、B 模型（图 7）和 OBI-M 模型（图 8）结果。该有限元系统采用基于 Biezeno–Hencky 应力率的更新拉格朗日公式，并使用可压缩 Mooney–Rivlin 材料模型（见附录 A）。图 8 中 Hencky（OBI-H）模型的标记与图 6 相同（即这些标记对应于使用商用 MSC.Marc 有限元系统进行的计算机模拟）。

4.3 类胡克各向同性次弹性材料模型

由于基于上、下奥尔德罗伊德应力率的 Hypo-A 和 Hypo-B 次弹性材料模型（见表 5）在无初始应力的等容变形下，其本构关系（35）和（36）分别是本构关系为（64）和（65）的超弹性材料模型的率形式（参见 [75]），且已在上文第 4.2 节中进行了测试，因此我们不再重复这些问题的求解，而是着重测试基于共旋应力率的类胡克各向同性亚弹性材料模型 Hypo-ZJ、Hypo-GN、Hypo-GS 和 Hypo-log（见表 5）。

对于次弹性材料，与超弹性模型不同，命题 5 中的断言在本节并不成立；因此，我们在 LFSS 变形下测试次弹性材料本构关系的欧拉形式，随后在 RFSS 变形下测试其拉格朗日形式。

在等容变形下，类胡克各向同性亚弹性材料模型的本构关系（37）可化简为本构关系

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Omega} = 2\mu\,\widehat{\mathbf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{\omega} = 2\mu\,\mathbf{d} \tag{76}$$

分别采用拉格朗日形式和欧拉形式。其中，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{\omega}$ 是拉格朗日张量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 和欧拉张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的共旋率，它们通过旋转相互关联

形式的运算（19），因此（见（17）和（18））

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Omega} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \qquad \left(\frac{\mathrm{D}^{\circ}}{\mathrm{D}t}[\boldsymbol{\sigma}] = \right) \boldsymbol{\sigma}^{\omega} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \tag{77}$$

此外，自旋张量 Ω 和 $\boldsymbol{\omega}$ 通过变换相关联（20）。

我们为 LFSS 变形指定本构关系（77）$_2$。考虑自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$ 的表示形式（23）$_2$。由于对于此类变形，张量 $\mathbf{V}_L$ 的所有主伸长在 $t > t_0$ （$\lambda_1 = \mathrm{e}^{\alpha}$， $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\alpha}$）下均不相同，因此，考虑到等式 $g_{21} = -g_{12}$，二维版本中的表达式（24）可简化为

$$\boldsymbol{\Psi}_g(\mathbf{V}, \mathbf{d}) = g_{12}(\mathbf{V}_1^L \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{V}_2^L - \mathbf{V}_2^L \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{V}_1^L), \qquad g_{12} \equiv g(\lambda_1, \lambda_2). \tag{78}$$

我们求得 LFSS 变形的拉伸张量和涡量张量的表达式。张量 $\mathbf{F}_L^{-1}$ 由（44）$_1$得出：

$$\mathbf{F}_L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha)}} \begin{bmatrix} \cosh(2\alpha) & -\sinh(2\alpha) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

速度梯度张量由表达式（13）$_2$得出。一系列等式推导得到以下表达式

$$\boldsymbol{\ell} = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\gamma & 2 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \tag{79}$$

其中

$$\gamma \equiv \tanh(2\alpha).$$

利用张量 $\boldsymbol{\ell}$ 分解为对称部分和反对称部分的分解式（14）$_1$，我们由（79）得到拉伸张量和涡量张量的表达式：

$$\mathbf{d} = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\gamma & 1 \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{80}$$

利用表达式（80）$_1$ 表示伸长张量 $\mathbf{d}$，并利用表达式（49）表示特征投影 $\mathbf{V}_1^L$ 和 $\mathbf{V}_2^L$，由（78）$_1$ 可得张量的如下表达式$\boldsymbol{\Psi}_g$：

$$\boldsymbol{\Psi}_g = \dot{\alpha}\, g_{12}\, \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{81}$$

利用方程（23）$_2$，（80）$_2$，和（81），可得任意自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$：

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\,(1 + g_{12}\,\gamma) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{82}$$

鉴于表达式（77）$_2$，（80）$_1$，和（82），本构关系（76）$_2$ 可改写为分量形式

$$\dot{\sigma}_{11} - 2\dot{\alpha}\,(1 + g_{12}\,\gamma)\,\sigma_{12} = -2\mu\,\dot{\alpha}\,\gamma, \tag{83}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{22}+2\dot{\alpha}\,(1+g_{12}\,\gamma)\,\sigma_{12} &= \;2\mu\,\dot{\alpha}\,\gamma,\\ \dot{\sigma}_{12}+\dot{\alpha}\,(1+g_{12}\,\gamma)\,(\sigma_{11}-\sigma_{22}) &= \;2\mu\,\dot{\alpha}.\end{aligned}$$

令 $\sigma_{ij}=0$ （$i,\;\; j=1,\;2$）当 $t=t_0$时，由（83）$_{1,2}$ 可得等式

$$\sigma_{22}=-\sigma_{11} \tag{84}$$

利用这一关系，常微分方程组（83）可化简为以下由两个一阶常微分方程组成的方程组:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11}-2\dot{\alpha}\,(1+g_{12}\,\gamma)\,\sigma_{12} &=-2\mu\,\dot{\alpha}\,\gamma,\\ \dot{\sigma}_{12}+2\dot{\alpha}\,(1+g_{12}\,\gamma)\,\sigma_{11} &= \;2\mu\,\dot{\alpha}.\end{aligned} \tag{85}$$

将剪切参数 α 视为单调递增的变形参数 t （即，令 $\dot{\alpha}=1$），我们将常微分方程组（85）改写为标准形式

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\alpha}+\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{X}=\mathbf{G}(\alpha) \tag{86}$$

初始条件为

$$\mathbf{X}=\mathbf{0}\quad\text{at}\quad\alpha=0. \tag{87}$$

这里引入记号

$$\mathbf{X}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}(\alpha)\equiv 2k(\alpha)\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}(\alpha)\equiv 2\mu\begin{bmatrix}\gamma(\alpha)\\1\end{bmatrix},\quad k(\alpha)\equiv 1+g_{12}(\alpha)\gamma(\alpha). \tag{88}$$

为求解带有初始条件（86（87）的常微分方程组，我们需要使用表达式（25）–（28），为本文考察的每种亚弹性模型指定量 g_{12}（α）：

- 对于基于 Zaremba–Jaumann应力率的 Hypo-ZJ 模型,

$$g_{12}^{\mathrm{ZJ}}=0\quad\Rightarrow\quad k^{\mathrm{ZJ}}(\alpha)=1, \tag{89}$$

- 对于基于 Green–Naghdi 应力率的 Hypo-GN 模型,

$$g_{12}^{\mathrm{GN}}=-\tanh(\alpha)\quad\Rightarrow\quad k^{\mathrm{GN}}(\alpha)=\cosh^{-1}(2\alpha), \tag{90}$$

- 对于基于与欧拉三元组旋转张量相关的 Gurtin–Spear应力率的 Hypo-GS模型,

$$g_{12}^{\mathrm{GS}}=-\coth(2\alpha)\quad\Rightarrow\quad k^{\mathrm{GS}}(\alpha)=0, \tag{91}$$

- 对于基于对数应力率的 Hypo-log 模型,

$$g_{12}^{\log}=\frac{1}{2\alpha}\quad\Rightarrow\quad k^{\log}(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\tanh(2\alpha). \tag{92}$$

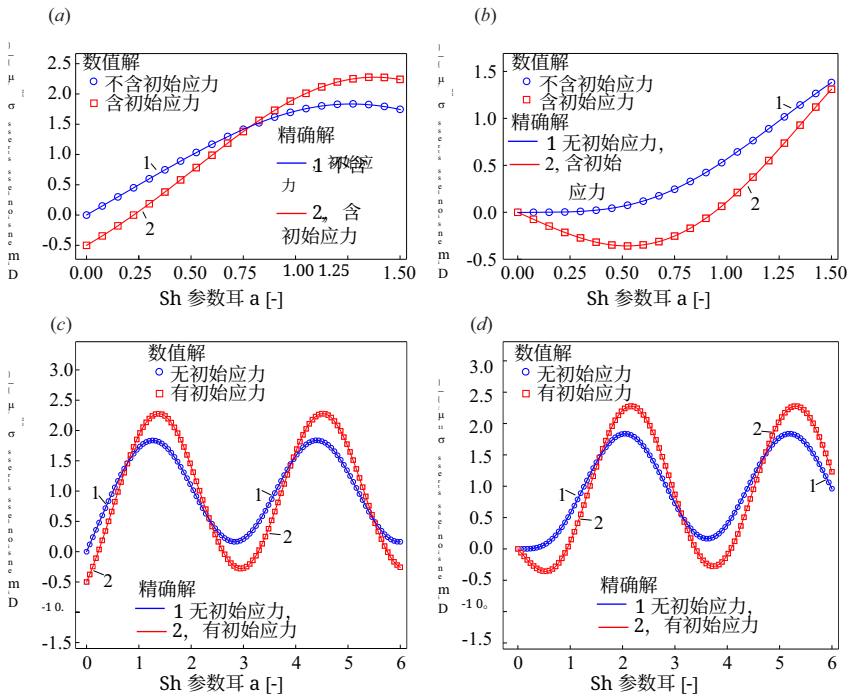


图 9 LFSS变形下 Hypo-ZJ 模型（见表 5）在剪切参数 α $[0, 1.5]$ $(a,$ b c d $)$ 和 $[0, 6]$ $($,) 范围内的柯西应力张量分量 $\sigma_{12}(\alpha)$ $(a,\ c)$ 以及 $\sigma_{11}(\alpha)$ $(b,\ d$

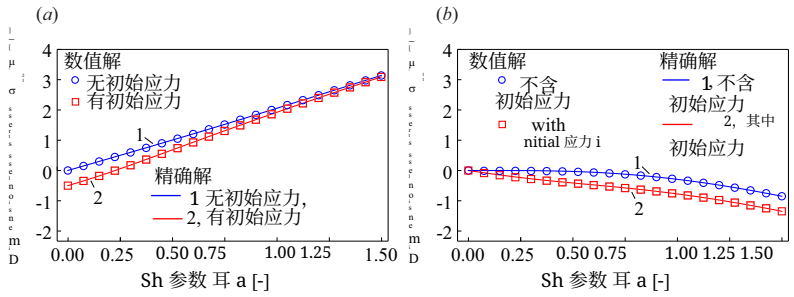


图 10 Hypo-GN 模型（见表 $\sigma_{12}(\alpha)$ (a) 和 $\sigma_{11}(\alpha)$ (b) 在 LFSS变形下的柯西应力张量分量曲线。5)

对于 Hypo-ZJ 和 Hypo-GN 模型，使用 Wolfram Mathematica 系统求解了常微分方程组 (86) 及其初始条件 (87)。尽管方程组 (86) 表面上看起来相当简单，但所得解相当繁琐，因此此处不予列出。图 $\sigma_{12}(\alpha)$ 和 $\sigma_{11}(\alpha)$ 分别展示了 Hypo-ZJ 和 Hypo-GN 模型在 LFSS 变形下得到的结果。由于在剪切参数的标准取值范围内，Hypo-ZJ 模型的柯西应力张量分量的振荡行为并未充分显现

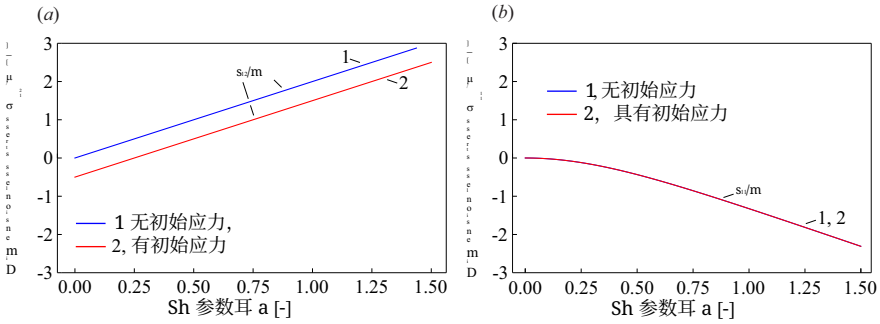


图 11 Hypo-GS 模型（见表 σ_{12}）α（a）和 σ_{11}（α）b（5）在 LFSS 变形下的柯西应力张量分量图。

$\alpha \in [0, 1.5]$（见图 9，a、b），在更大的参数范围内重复了模拟 $\alpha \in [0, 6]$（见图 9，c、d），此时柯西应力张量分量中已出现明显且在力学上毫无意义的振荡。请注意，这种剪切变形下的振荡是这种零阶材料模型的典型特征。[15] 尤其是，在求解 Hypo-ZJ（零阶）模型的简单剪切问题时，也观察到了应力率分量的类似振荡行为（参见例如 [3–8、10–18]）。与此同时，Hypo-GN 模型在 LFSS 变形下得到的柯西应力张量分量，与简单剪切问题的解（参见例如 [5, 6]）一样，并未出现任何振荡（见图 10）。

对于基于 Gurtin–Spear 应力率的次弹性模型，在 LFSS 变形下，由（91）可知，常微分方程组（85）可分解为关于量 σ_{12}（α）和 σ_{11}（α）的两个互不耦合的方程。满足初始条件（87）的这些方程的解如图 11所示。由解可知，在 LFSS 变形下，Hypo-GS 模型所得的柯西应力张量分量与 Hypo-GN 模型在同一问题中的解一样，不会出现振荡。

求带初始应力的Hypo-log模型的柯西应力张量分量（87）在LFSS变形下并不需要对常微分方程组进行积分（86），因为在这种情况下，该类胡克（零阶）次弹性模型等价于Hencky各向同性超弹性材料模型 [78, 86–88]，且该材料模型在LFSS变形下得到的（无振荡的）柯西应力张量分量图已在图6中给出。尽管如此，我们仍在图12中展示这些图，因为我们将进一步把该问题的解与非零初始应力情形下得到的解进行比较。已知（参见 [13],另见 [41]），Hypo-log模型在简单剪切变形下会使柯西应力张量分量作为剪切参数的函数呈现出如下行为

[15]当然，如果我们不采用当前考虑的模型（该模型基于共旋Zaremba–Jaumann应力率与伸长张量之间的线性依赖关系，即 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{DZJ}}{}_{\mathrm{D}t} = 2\mu\,\mathbf{d} + \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}$），而改用更复杂的模型，使该共旋应力率~~与伸~~长张量之间呈拟线性依赖关系，即 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{\mathrm{DZJ}}{}_{\mathrm{D}t} = \mathbb{H}(\boldsymbol{\tau}) : \mathbf{d}$（$\mathbb{H}$ 为某个四阶张量），例如，当这些本构关系是超弹性关系的率形式时，就可以完全避免此类应力伪振荡。

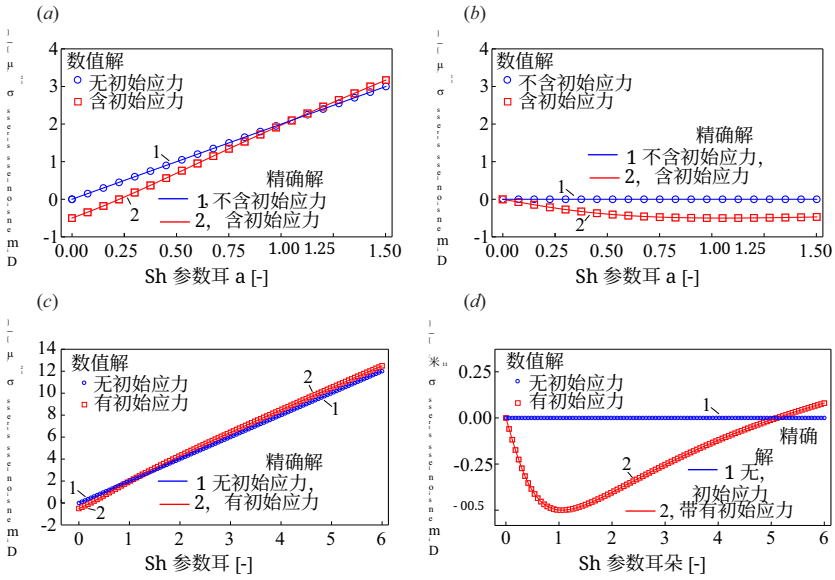


图 12 LFSS变形下 Hypo- log 模型（见表 5的柯西应力张量分量图，剪切参数范围为 $\sigma_{12}(\alpha)\,(a,\,c)$ 和 $\sigma_{11}(\alpha)\,(b,\,d)$。 α [0, 1。 5] $(a), (b)$ 和 [0, 6] $(c), (d)$。

在零初始应力情况下无振荡，而在非零初始应力情况下则出现（力学上无意义的）振荡。对于所考虑的具有非零初始应力的材料模型，在LFSS变形下，柯西应力张量分量作为剪切参数的函数的行为中是否存在这些特征必须加以验证，下文将进行这一验证。

我们得到了在存在非零初始应力时，基于所考虑的共旋应力率的亚弹性模型在 LFSS 变形下的柯西应力张量分量表达式。按照 [41], ，我们将问题（76）$_2$ 的柯西应力张量解表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b,$$

其中， $\boldsymbol{\sigma}_a$ 是具有非零初始条件的齐次柯西问题的解

$$\boldsymbol{\sigma}_a^{\omega} = \mathbf{O}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma}^0 \text{ at } t = 0, \tag{93}$$

而 $\boldsymbol{\sigma}_b$ 是具有零初始条件的非齐次柯西问题的解

$$\boldsymbol{\sigma}_b^{\omega} = 2\mu\,\mathbf{d}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{O} \text{ at } t = 0. \tag{94}$$

本文上文已求得基于关联自旋张量的所有次弹性模型的问题（94）的解。

基于任意自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$ 的次弹性模型问题（93）的解可写为 [41]

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{Q}_{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{Q}_{\omega}^T,$$

对于二维分析，旋转张量 $\mathrm{Q}_\omega \in \mathcal{T}^{2+}{}_{\mathrm{orth}}$ 可写为

$$\mathbf{Q}_\omega = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{95}$$

其中 θ 是与自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$相关联的轴的旋转角。

在本文中，我们对二维问题中的初始应力采用以下取值：

$$\sigma^0_{11} = \sigma^0_{22} = 0, \qquad \sigma^0_{12} = -\mu/2. \tag{96}$$

于是，[41]（第18页）中给出的表达式可导出柯西应力张量各分量的如下表达式：

$$\sigma^a_{11} = \sigma^0_{12}\sin 2\theta, \qquad \sigma^a_{22} = -\sigma^0_{12}\sin 2\theta, \qquad \sigma^a_{12} = \sigma^0_{12}\cos 2\theta.$$

注意，对于形式为（96）的初始应力，等式（84）成立；因此，下文我们仅给出 σ_{11} 和 σ_{12} 这两个柯西应力张量分量的解。

为完成LFSS变形问题的求解，我们需要针对每一种材料模型，通过求解该问题（参见 [41]中的式（31））， 将角度 θ 用剪切参数 α 表示。

$$\dot{\mathbf{Q}}_\omega = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{Q}_\omega, \qquad \mathbf{Q}_\omega = \mathbf{I} \text{ at } t = t_0. \tag{97}$$

将（95）代入（97）$_1$ 可得自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$的如下表达式

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

另一方面，自旋张量 $\boldsymbol{\omega}$ 对于LFSS变形具有形式（82），由此得到关于 θ的如下方程：

$$\dot{\theta} = \dot{\alpha}[1 + g_{12}(\alpha)\,\gamma(\alpha)]. \tag{98}$$

令 $\alpha \equiv t - t_0$ 并采用记号（88）$_4$，由（98）得到柯西问题

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = k(\alpha), \qquad \theta = 0 \text{ at } \alpha = 0 \text{ (i.e., at } t = t_0).$$

利用参数 $k(\alpha)$ 在（89）–（92）中针对所考虑的亚弹性模型的表达式，我们得到角度 θ 在这些模型中各自的如下表达式：

- 对于 Zaremba–Jaumann应力率，

$$\theta(\alpha) = \alpha.$$

- 对于 Green–Naghdi 应力率（该表达式是使用 Wolfram Mathematica 系统推导得到的），

$$\theta(\alpha) = \operatorname{arc}\tanh(\alpha),$$

即，$\theta = \theta^*$ （见图4，a）。
- 对于与欧拉三元组旋转张量相关的 Gurtin–Spear应力率，

$$\theta(\alpha) = 0.$$

由于对于此材料模型，角度 θ 对应于主轴的旋转角，而这些轴并不旋转，因此其旋转角为零。
- 对于对数应力率，角度 θ 由下式给出

$$\theta(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\tanh(2\beta)}{2\beta}\, d\beta.$$

使用 Wolfram Mathematica 系统无法得到该积分的精确表达式；因此，将使用同一软件数值计算此材料模型的角度 θ。

含有初始应力时受测材料模型得到的解如图所示。9–12。我们看到，与初始应力为零时的解相比，只有 Hypo-log 模型的解发生了定性变化：非零初始应力的存在会导致柯西应力张量分量出现振荡（尤其是力学上没有意义的分量 σ_{11}）。在 [13] 中的简单剪切问题也观察到了类似的定性变化（另见 [41]）：初始应力为零时，柯西应力张量分量与该问题中 Hencky 各向同性超弹性材料的解一致，且没有振荡；而非零初始应力的存在则会导致柯西应力张量分量出现力学上没有意义的振荡。

为了提高所考虑亚弹性材料模型所得解的可靠性，我们使用自制的 Pioner 有限元系统 [43], 对这些材料的 LFSS 变形进行了计算机模拟，其中实现了类胡克 Hypo-ZJ、Hypo-GN 和 Hypo-log 模型。为对任意亚弹性模型的本构关系进行积分，我们采用了 Rubinstein–Atluri 弱增量客观算法，其精度为二阶 [89] （另见 [40, 41]）。所得柯西应力张量分量的数值以标记点表示于图9、10和12中。精确解与计算机模拟所得解吻合极佳。

我们的下一个目标是测试类胡克各向同性次弹性模型在 RFSS变形下的表现。由于这类变形适用于本构关系的拉格朗日形式，我们进一步采用类胡克各向同性次弹性模型的拉格朗日形式（76）$_1$，其基于共旋应力率（77）$_1$，与自旋张量 Ω 相关联；自旋张量由适用于二维分析的表达式（21）$_1$ 和（22）确定，形式如下：

$$\mathbf{\Psi}_r(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}) = r_{12}(\mathbf{U}_1^R \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_2^R - \mathbf{U}_2^R \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_1^R), \qquad r_{12} \equiv r(\lambda_1, \lambda_2), \tag{99}$$

其中，特征投影$\mathbf{U}_1^R$和 $\mathbf{U}_2^R$定义见（49）。

注3. 拉格朗日三元组的旋转张量也属于所考虑的材料自旋张量 Ω 这一类，因为对于RFSS变形，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 在 $t > t_0$，因此可以唯一确定该自旋张量（例如参见 *[46]*）。

拉格朗日伸长张量由表达式 (15)$_2$确定

$$\widehat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}_R \cdot \mathbf{U}_R^{-1} + \mathbf{U}_R^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}_R). \tag{100}$$

这里，张量 $\mathbf{U}_R$ 和 $\mathbf{U}_R^{-1}$ 由以下表达式确定（见方程 (48)$_2$)

$$\mathbf{U}_R = \lambda_1 \mathbf{U}_1^R + \lambda_2 \mathbf{U}_2^R, \qquad \mathbf{U}_R^{-1} = \lambda_1^{-1} \mathbf{U}_1^R + \lambda_2^{-1} \mathbf{U}_2^R, \tag{101}$$

其中 λ_1 和 λ_2 在 (47)$_{1,2}$中定义。这些表达式得出

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha}, \qquad \dot{\lambda}_2 = -\dot{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \lambda_1^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha}, \qquad \lambda_2^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha}. \tag{102}$$

由于特征投影 $\mathbf{U}_1^R$ 和 $\mathbf{U}_2^R$ 不依赖于时间 t，张量 $\dot{\mathbf{U}}_R$ 由下式给出

$$\dot{\mathbf{U}}_R = \dot{\lambda}_1 \mathbf{U}_1^R + \dot{\lambda}_2 \mathbf{U}_2^R. \tag{103}$$

利用等式 (101)–(103)，由 (100)可得 RFSS变形下拉格朗日伸长张量的如下表达式：

$$\widehat{\mathbf{D}} = \dot{\alpha}(\mathbf{U}_1^R - \mathbf{U}_2^R) = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

利用$\mathbf{U}_1^R$和$\mathbf{U}_2^R$在（49）中的表达式，以及 $\widehat{\mathbf{D}}$ 在（104）中的张量表达式，可得以下等式

$$\mathbf{U}_1^R \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_2^R = \mathbf{U}_2^R \cdot \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{U}_1^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

并且由（99）可知，对于任意可容许的 r_{12} 以及任意 $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}^+$，下列等式成立：

$$\boldsymbol{\Psi}_r(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{D}}) = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{O} \quad \forall\, t > t_0.$$

于是由（77）$_1$ 可知，所有满足本构关系（76）$_1$ 的次弹性模型，在 RFSS 变形下均归结为一个具有以下本构关系的模型

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\, \widehat{\mathbf{D}}. \tag{105}$$

将表达式（105）两边写成矩阵形式，并使用表达式（104），可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{12} & \dot{\sigma}_{22} \end{bmatrix} = 2\mu\, \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{106}$$

假设在初始时间 t_0,

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = 0,$$

并令 $t - t_0 = \alpha$，我们得到常微分方程组（106）的如下形式解:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = 0, \qquad \bar{\sigma}_{12} = 2\mu\alpha. \tag{107}$$

我们已经证明，对于所考虑的所有次弹性材料模型，RFSS变形都会产生拉格朗日纯剪切应力。将解（107）与测试 Hencky各向同性超弹性材料模型所得的解进行比较，后者见表达式（59）和（62），可知二者完全相同。这与解（107）独立于变形路径这一事实相符；此外，在基于共旋应力率的类胡克次弹性模型系列中，只有基于对数应力率的类胡克（零阶）模型（Hypo-log模型），其本构关系才是超弹性本构关系的率形式；当参考构形为无应力构形时，其本构关系也是 Hencky超弹性材料模型本构关系的率形式 [86–88]。由于 Hencky模型在RFSS变形下的柯西应力由（63）给出，并满足（59），因此，对于此处考虑的所有次弹性模型，RFSS变形下的柯西应力张量均可由所示表达式确定。

请注意，对于所考虑的亚弹性模型，在 RFSS 变形下，使用本构关系的拉格朗日形式确定柯西应力张量分量的方法，比 Lin 提出的方法简单得多 [24]。Lin 使用本构关系的欧拉形式，并针对每种材料模型（分别基于 Zaremba–Jaumann、Green–Naghdi、Gurtin–Spears 和对数应力率）进行积分；而我们已证明，在这种变形下，所有材料模型的本构关系都可归结为 Hencky 材料模型的率形式。由于我们采用参数 α （其记法见 [1]）作为剪切参数，而在 [24] 中，仅在 RFSS 变形下测试亚弹性模型，且将剪切参数取为角度 $\theta \equiv \arctan(\sinh(2\alpha))$，在 [24] 中该角度记作 α，因此很难直接比较我们针对这类本构关系所得的解与 Lin 得到的解。不过，可以证明，Lin 在式（26）中给出的柯西应力张量分量解 [24] 与我们的解（63）一致，而 Lin 在表达式（28）中得到的旋转后的柯西应力张量 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 解 [24] 与我们的解（107）一致。

5 结论

我们已在有限简单剪切变形下测试了若干类胡克各向同性超弹性/次弹性材料模型，并表明如下:

1. 任意各向同性柯西-格林弹性材料在左有限简单剪切（LFSS）变形下的柯西应力张量分量，等于同一材料在右有限简单剪切（RFSS）变形下旋转后的柯西应力张量的分量；2. 对于任何基于对称物理（SP）应变函数的HLIH材料模型，LFSS变形与RFSS变形分别导致欧拉纯剪切应力和拉格朗日纯剪切应力；3. 对于任何基于SP应变函数的双指数Ogden各向同性超弹性材料模型，LFSS变形与RFSS变形分别导致欧拉纯剪切应力和拉格朗日纯剪切应力；4. 对于某些本构关系基于共旋应力率的各向同性类胡克 hypoelastic材料，在LFSS变形下，柯西应力张量分量作为剪切参数的函数的演化，与同一材料在简单剪切变形下的演化在定性上相似。

此外，我们已确认 Lin 的结果 [24]：在 RFSS 变形下，对于本构关系基于任意随动应力率且无初始应力的各向同性类胡克 hypoelastic材料，其柯西应力张量分量与 Hencky各向同性超弹性材料的柯西应力张量分量一致。

可压缩各向同性超弹性Mooney-Rivlin材料模型的本构关系

不可压缩各向同性超弹性Mooney-Rivlin材料模型可视为不可压缩各向同性超弹性Ogden模型的一个特例 [36]，即弹性能项对应指数 $n = \pm 2$的双幂Ogden模型。Ogden [37] 将其模型推广，以考虑材料可压缩性。为此，Ogden 采用混合形式表示弹性能。[16] 沿用这种方法构建可压缩各向同性超弹性Mooney-Rivlin材料的弹性能，并依据 [38]，，我们得到该材料模型的势能为[17]

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{MR}} &\equiv \mu_1(\operatorname{tr}\mathbf{e}^{(2)} - \log J) - \mu_2(\operatorname{tr}\mathbf{e}^{(-2)} - \log J) + \frac{\lambda}{2}(\log J)^2 \qquad \text{(A.1)}\\
&= \frac{\mu_1}{2}\left(\|F\|^2 - 3 - 2\log J\right) + \frac{\mu_2}{2}\left(\|F^{-1}\|^2 - 3 + 2\log J\right) + \frac{\lambda}{2}(\log J)^2.
\end{aligned}
$$

[16]弹性能的混合形式由纯体积部分与混合（体积和等容）部分相加而成；体积能的另一种表示形式是体积-等容形式，即拆分为纯体积部分与等容部分 [31]。[17]在（A.1）中，右侧的前两项对应于混合形式的势能，最后一项 $h(J) \equiv \lambda(\log J)^2/2$ 对应于纯体积变形的势能，但它在 J上并非凸函数。按照 [37]（另见 [31, 90]），我们可以采用该势能的其他表达式，以满足对函数 $h(J)$ 施加的一些约束。

下文中，$\mu_1 \geq 0$ 和 $\mu_2 \geq 0$ 是满足以下等式的模型参数$\mu_1 + \mu_2 = \mu$，λ 而 μ 是 Lam´é 参数，且$\mathbf{e}^{(2)} = (\mathbf{c} - \mathbf{I})/2$ 和$\mathbf{e}^{(-2)} = (\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1})/2$ 分别是芬格应变张量和Almansi 应变张量（见表 1）。

由于对于各向同性柯西/格林弹性材料，Kirchhoff 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 与左伸长张量 V 共轴（参见例如 [51]），因此张量 $\boldsymbol{\tau}$ 可表示为（m 是张量 V 的特征指标）

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \mathbf{V}_i, \tag{A.2}$$

其中，$\mathrm{V}_i\,(i = 1, \ldots, m)$ 是张量 V 的特征投影。分量 $\tau_i (i = 1, \ldots, m)$ 可由下列表达式求得（参见例如 [33], 式（40）$_2$）

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_i} \mathbf{V}_i, \tag{A.3}$$

其中 $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, m)$ 为主伸长。张量的无基表达式$\boldsymbol{\tau}$ 可由（A.1）-（A.3）推导得出:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\tau} = 2\mu_1\, \mathbf{e}^{(2)} + 2\mu_2\, \mathbf{e}^{(-2)} + \lambda\, (\log J)\, \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \\ &\boldsymbol{\tau} = \mu_1\, (\mathbf{c} - \mathbf{I}) + \mu_2\, (\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}) + \lambda\, (\log J)\, \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

为获得弹性张量的显式表达式，我们根据 [91] 中给出的定义，为二阶张量 A 和 H 定义并矢积 A$\otimes$H 和对称张量积 A$\overset{\mathrm{sym}}{\otimes}$H。设 A、B 和 X 为二阶张量；则有以下恒等式:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{X} = \mathbf{A}\, (\mathbf{B} : \mathbf{X}), \quad (\mathbf{A} \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{B}) : \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathrm{sym}\, \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}^T, \quad \mathrm{sym}\, \mathbf{X} \equiv (\mathbf{X} + \mathbf{X}^T)/2.$$

根据为所开发的各向同性超弹性材料模型推导客观本构关系率形式的方法 [39], ，所考虑材料模型的率形式可写为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \mathbf{d} \cdot (\mu_1\, \mathbf{c} + \mu_2\, \mathbf{c}^{-1}) + (\mu_1\, \mathbf{c} + \mu_2\, \mathbf{c}^{-1}) \cdot \mathbf{d} + \lambda\, (\mathrm{tr}\, \mathbf{d})\, \mathbf{I}, \tag{A.5}$$

或写成另一种形式

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \mathbb{C}^{\mathrm{ZJ}}_{\mathrm{MR}} : \mathbf{d}, \tag{A.6}$$

其中 $\mathbb{C}^{\mathrm{ZJ}}_{\mathrm{MR}}$ 是如下形式的四阶弹性张量

$$\mathbb{C}^{\mathrm{ZJ}}_{\mathrm{MR}} \equiv \mathbf{I} \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} (\mu_1\, \mathbf{c} + \mu_2\, \mathbf{c}^{-1}) + (\mu_1\, \mathbf{c} + \mu_2\, \mathbf{c}^{-1}) \overset{\mathrm{sym}}{\otimes} \mathbf{I} + \lambda\, \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

对于超弹性材料，它具有完全对称性（或超对称性）[68]。

我们实现了可压缩各向同性超弹性Mooney-Rivlin材料模型，采用本构关系（A.4）和超对称弹性张量

$$\mathbb{C}^{\mathrm{BH}}_{\mathrm{MR}} \equiv \frac{1}{J}\mathbb{C}^{\mathrm{ZJ}}_{\mathrm{MR}}$$

在自编的Pioner非线性有限元系统中， [43] 采用基于本构关系率形式的更新拉格朗日公式

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{BH}} = \mathbb{C}^{\mathrm{BH}}_{\mathrm{MR}} : \mathbf{d},$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{BH}}$ 为Biezeno–Hencky 应力率 [92]

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{BH}} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{ZJ}} + \boldsymbol{\sigma}(\operatorname{tr}\mathbf{d})$$

与应力率 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}}$ 的关系如下（例如，参见 [31]）：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = J\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{BH}}.$$

接下来，我们考虑三个众所周知的超弹性模型，它们是可压缩各向同性超弹性Mooney-Rivlin材料模型的特例。

(i) 可压缩混合型 新胡克 [31] (或 *Simo–Pister* [30])材料模型，其模型参数满足以下约束： $\mu_1 = \mu$ 以及 $\mu_2 = 0$。在我们的材料模型分类中（见表 3），该模型称为 Ogden-A 各向同性可压缩超弹性材料模型。该材料模型的本构关系由（A.4）$_2$得出：

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\,(\mathbf{c} - \mathbf{I}) + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} \;= \mu\,(B - I) + \lambda\,(\log J)\,I. \tag{A.7}$$

利用客观Zaremba–Jaumann应力率与上Oldroyd应力率之间的关系

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \boldsymbol{\tau}^{\sharp} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\tau},$$

以及本构关系(A.7)，我们得到所考虑材料模型的以下本构关系率形式，它是(A.5)的另一种形式：

$$\boldsymbol{\tau}^{\sharp} = 2(\mu - \lambda\,\log J)\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}.$$

该表述与 [38]中的本构关系率形式 (60)（针对 $n = 2$）以及 [31]中的 (7.4) 一致。

（ii）满足以下模型参数约束的可压缩混合型各向同性超弹性材料模型： $\mu_1 = 0$ 且 $\mu_2 = \mu$。在我们的材料模型分类中（见表 3），该模型称为 Ogden-B 各向同性

可压缩超弹性材料模型。该材料模型的本构关系由（A.4）$_2$:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\,(\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}) + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} \;= \mu\,(I - B^{-1}) + \lambda\,(\log J)\,I. \tag{A.8}$$

利用客观Zaremba–Jaumann应力率与下奥尔德罗伊德应力率之间的关系

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \boldsymbol{\tau}^{\flat} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d} - \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\tau},$$

以及本构关系（A.8），我们得到所考虑材料模型的以下率形式本构关系，它是（A.5）的另一种形式:

$$\boldsymbol{\tau}^{\flat} = 2(\mu + \lambda\,\log J)\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}.$$

该表述与 [38]（对于 $n=-2$）中的本构关系率形式（60）一致。

(iii) 模型参数满足以下约束的可压缩混合型各向同性超弹性材料模型:
$\mu_1 = \mu_2 = \mu/2$。在我们的材料模型分类中（见表 4），该模型称为 OBI-M各向同性可压缩超弹性材料模型。该材料模型的本构关系由（A.4）推导得出$_2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \frac{\mu}{2}\,(\mathbf{c} - \mathbf{c}^{-1}) + \lambda\,(\log J)\,\mathbf{I} \;&= \frac{\mu}{2}\,(B - B^{-1}) + \lambda\,(\log J)\,I \\ &= \frac{\mu}{2}\,(B - B^{-1}) + \frac{\lambda}{2}\,(\log\,\det B)\,I.\end{aligned} \tag{A.9}$$

对于该材料模型，本构关系（A.5）的率形式可简化为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \frac{\mu}{2}\,\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c} + \mathbf{c}^{-1}) + \frac{\mu}{2}\,(\mathbf{c} + \mathbf{c}^{-1})\cdot\mathbf{d} + \lambda\,(\operatorname{tr}\mathbf{d})\,\mathbf{I}, \tag{A.10}$$

或者写成公式（A.6），该公式是公式（A.10）的另一种形式，其中超对称四阶弹性张量为

$$\mathbb{C}^{\mathrm{ZJ}}_{\mathrm{MR}} = \frac{\mu}{2}\,\mathbf{I}\overset{\mathrm{sym}}{\otimes}(\mathbf{c} + \mathbf{c}^{-1}) + \frac{\mu}{2}\,(\mathbf{c} + \mathbf{c}^{-1})\overset{\mathrm{sym}}{\otimes}\mathbf{I} + \lambda\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}.$$

请注意，本文所考虑的超弹性材料模型的本构关系表达式（A.9）和（A.10）与 [93] 该文所考虑的柯西弹性材料模型的本构关系表达式（2.80）和（2.81）不同之处在于，前者在关系式（ $\boldsymbol{\sigma}$ A.9 $\boldsymbol{\tau}$ ）中使用柯西应力张量 而非柯西应力张量（基希霍夫应力）。

根据（A.9），我们可以对率形式（A.10）给出另一种推导。利用共旋率的链式法则性质以及

各向同性张量函数 [76]

$$\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{ZJ}}}{\mathrm{D}\,t}[\tau] = \mathrm{D}_B\,\tau(B).\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{ZJ}}}{\mathrm{D}\,t}[B] \quad (\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{ZJ}} = \frac{\partial\,\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c})}{\partial\,\mathbf{c}} : \mathbf{c}^{\mathrm{ZJ}}).$$

下列等式成立（见 [76] 中的公式 (1.7)：

$$\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{ZJ}}}{\mathrm{D}\,t}[B] = BD + DB \quad (\Leftrightarrow \quad \mathbf{c}^{\mathrm{ZJ}} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{c}).$$

令 $H \in \mathcal{T}^2$ 为任意张量，则对于张量 τ，由（A.9）可得以下表达式（见 [85]中的公式 (3.11)）

$$\mathrm{D}_B\,\tau(B).H = \frac{\mu}{2}\,(H + B^{-1}HB^{-1}) + \frac{\lambda}{2}\langle B^{-1}, H\rangle I$$
$$[\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\,\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c})}{\partial\,\mathbf{c}} : \mathbf{H} = \frac{\mu}{2}\,(\mathbf{H} + \mathbf{c}^{-1}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{c}^{-1}) + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{c}^{-1} : \mathbf{H})\mathbf{I}].$$

将此表达式与 $H = BD + DB$ 结合使用，可得最终等式（见 [85] 中的公式 (3.12)）

$$\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{ZJ}}}{\mathrm{D}\,t}[\tau] = \frac{\mu}{2}\,(BD + DB + B^{-1}D + DB^{-1}) + \lambda\,(\mathrm{tr}\,D)\,I,$$

这等价于公式（A.10）。

参考文献

[1] Thiel, C., Voss, J., Martin, R.J., Neff, P.：纯剪切与简单剪切。《国际非线性力学杂志》**112**，57–72（2019年）https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.10.002 [2] Rivlin, R.S.：各向同性材料的大弹性变形。IV. 一般理论的进一步发展。《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学**241**（845），379–397（1948）https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009[3] Boulanger, P., Hayes, M.：关于有限剪切。《理性力学与分析档案》**151**（2），125–185（2000年）https://doi.org/10.1007/s002050050195[4] Destrade, M., Murphy, J.G., Saccomandi, G.：简单剪切并非那么简单。《国际非线性力学杂志》**47**（2），210–214（2012）https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.05.008[5] Dienes, J.K.：关于变形体中旋转与应力率的分析。《Acta Mechanica》**32**（4），217–232（1979）https://doi.org/10.1007/BF01379008

[6] Dienes, J.K.：关于材料旋转与应力率的讨论。《Acta Mechanica》65(1)，1–11（1987）https://doi.org/10.1007/BF01176868[7]Horgan, C.O., Murphy, J.G.：不可压缩和微可压缩各向同性非线性弹性材料的简单剪切。《弹性学杂志》98(2)，205–221（2010年）https://doi.org/10.1007/s10659-009-9225-1[8] Gambirasio, L., Chiantoni, G., Rizzi, E.：在有限元代码中采用Zaremba–Jaumann客观应力率的后果。《工程计算方法档案》23(1)，39–67（2016年）https://doi.org/10.1007/s11831-014-9130-z[9] Korobeynikov, S.N.：面向有限元公式应用的类胡克各向同性次弹性模型分析。《应用力学档案》90(2)，313–338（2020）https://doi.org/10.1007/s00419-019-01611-3[10] Lin, R.：有限变形下率型本构方程与弹性一致性的数值研究。《国际工程数值方法杂志》55(9)，1053–1077（2002）https://doi.org/10.1002/nme.536[11] Lin, R.：简单剪切过程中的基于次弹性的应力解析解。《应用数学与力学杂志》83(3)，163–171（2003）https://doi.org/10.1002/zamm.200310016[12] Lin, R.C., Schomburg, U., Kletschkowski, T.：使用次弹性公式求解包含拉伸和剪切的闭合变形路径的应力解析解。《欧洲力学杂志——A辑：固体》22(3)，443–461（2003）https://doi.org/10.1016/S0997-7538(03)00031-7[13] Liu, C.S., Hong, H.K.：简单剪切变形下亚弹性模型的非振荡判据。《弹性学杂志》57(3)，201–241（1999年）https://doi.org/ 10.1023/A:1007616117953[14] Mihai, L.A., Goriely, A.：正庞廷效应还是负庞廷效应？超弹性材料中附加不等式的作用。《皇家学会学报A辑：数学、物理与工程科学》467(2136)，3633–3646（2011年）https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0281[15] Mihai, L.A., Goriely, A.：利用有限元法对剪切和庞廷效应进行数值模拟：广义经验不等式在非线性弹性中的应用。《国际非线性力学杂志》49，1–14（2013年）https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.09.001[16] Prager, W.：《连续介质力学导论》。Birkhäuser，巴塞尔、斯图加特（1961）。Prager, W.：《连续介质力学导论》。多佛出版社，纽约州米尼奥拉（2004）

[17] Szab´o, L., Balla, M.: 若干应力率的比较。《国际固体与结构杂志》25(3), 279–297 (1989年) https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90049-8[18] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.: 客观应力率、循环变形路径与残余应力累积。Zeitschrift f¨ur Angewandte Mathematik und Mechanik 86(11), 843–855 (2006年) https://doi.org/10.1002/zamm.200610276[19] Moon, H., Truesdell, C.: 通过纯剪切应力对各向同性弹性固体所产生的效应解释附加不等式。《理性力学与分析档案》55(1), 1–17 (1974年) https://doi.org/10.1007/BF00282431[20] Bˇel´ık, P., Fosdick, R.: 纯剪切状态。《弹性学杂志》52(1), 91–98 (1998年) https://doi.org/10.1023/A:1007500316569[21] Boulanger, P., Hayes, M.: 论纯剪切。《弹性学杂志》77(1), 83–89 (2004年) https://doi.org/10.1007/s10659-005-3193-x[22] Hayes, M., Laffey, T.J.: 纯剪切——一则脚注。《弹性学杂志》92(1), 109–113 (2008年) https://doi.org/10.1007/s10659-007-9150-0[23] Horgan, C.O., Murphy, J.G.: 各向同性不可压缩超弹性材料简单剪切中剪切应力响应的两种不同模式。《弹性学杂志》154(1), 81–90 (2023年) https://doi.org/10.1007/s10659-022-09922-3[24] Lin, R.C.: 右纯剪切变形的解析次弹性应力解。Zeitschrift f¨ur angewandte Mathematik und Physik 75(5), 191 (2024年) https://doi.org/10.1007/s00033-024-02332-6[25] Murphy, J.G., Saccomandi, G., Vitral, E.: 简单剪切的一类倒置Rivlin型普适关系。《国际非线性力学杂志》140, 103911 (2022年) https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103911[26] Rubin, M.B.: 非线性弹性中纯畸变度量的意义——兼论Poynting问题。《弹性学杂志》20(1), 53–64 (1988年) https://doi.org/10.1007/BF00042140[27] Rubin, M.B.: 纯剪切与纯畸变变形并不等价。《弹性学杂志》142(2), 383–393 (2020年) https://doi.org/10.1007/s10659-020-09798-1[28] Ting, T.C.T.: 纯剪切的进一步研究。《弹性学杂志》83(1), 95–104 (2006年) https://doi.org/10.1007/s10659-005-9041-1[29] Bertram, A.: 《大变形弹性与塑性》，第4版。施普林格，Cham (2021年)

[30] Simo, J.C., Pister, K.S.: 关于有限变形问题率型本构方程的评述：计算意义。《应用力学与工程中的计算机方法》46(2), 201–215 (1984年) https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90062-8[31] Korobeynikov, S., Larichkin, A., Neff, P.: 两类可压缩各向同性新胡克材料模型。施普林格，Cham (2026年)。连续介质力学施普林格简报[32] Hill, R.: 固体力学中不变性的若干方面。见：Yih, C.S.（编）《应用力学进展》，第18卷，第1–75页。Academic Press，纽约 (1979年)。https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70264-3[33] Korobeynikov, S.N.: 客观对称物理应变张量、共轭应力张量与Hill线性各向同性超弹性材料模型。《弹性学杂志》136(2), 159–187 (2019年) https://doi.org/10.1007/s10659-018-9699-9[34] Korobeynikov, S.N., Larichkin, A.Y., Rotanova, T.A.: 将胡克定律从小应变至中等应变加以扩展的超弹性模型及其适用范围的实验验证。《国际固体与结构杂志》252, 111815 (2022年) https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111815[35] Korobeynikov, S.N., Larichkin, A.Y., Rotanova, T.A.: 采用Hill线性各向同性超弹性材料模型模拟圆柱扭转。《时间相关材料力学》28(2), 563–593 (2024年) https://doi.org/10.1007/s11043-023-09592-1[36] Ogden, R.W.: 大变形各向同性弹性——不可压缩类橡胶固体理论与实验的关联。《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》326(1567), 565–584 (1972年) https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026[37] Ogden, R.W.: 大变形各向同性弹性：可压缩类橡胶固体理论与实验的关联。《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》328(1575), 567–583 (1972年) https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0096[38] Korobeynikov, S.N.: 类胡克各向同性超弹性材料模型族及其率形式。《应用力学档案》93(10), 3863–3893 (2023年) https://doi.org/10.1007/s00419-023-02466-5[39] Korobeynikov, S.N.: 支持胡克定律形式的广义Ogden不可压缩各向同性超弹性材料模型。《应用力学档案》95(5), 105 (2025年) https://doi.org/10.1007/s00419-025-02815-6[40] Korobeynikov, S., Larichkin, A.: 基于共旋应力率积分次弹性本构关系的客观算法。施普林格，Cham

(2023年). Springer连续介质力学简明丛书

[41] Korobeynikov, S.N., Larichkin, A.Y.：利用基于共旋应力率的类胡克各向同性次弹性模型模拟具有初始应力的物体变形。Zeitschrift f¨ur Angewandte Mathematik und Mechanik 104(2), 202300568 (2024) https://doi.org/10.1002/zamm.202300568[42]MSC软件公司：MARC用户指南。A卷：理论与用户信息。纽波特比奇（加利福尼亚州）（2015）。MSC软件公司[43] Korobeinikov, S.N., Agapov, V.P., Bondarenko, M.I., Soldatkin, A.N.：通用非线性有限元结构分析程序PIONER。载于：Sendov, B., Lazarov, R., Dimov, I.（编），《数值方法与应用国际会议论文集》，第228–233页。保加利亚科学院出版社，索非亚（1989）[44] Hashiguchi, K., Yamakawa, Y.：《连续体弹塑性有限应变理论导论》。威利，霍博肯（2013）[45] Itskov, M.：《工程师用张量代数与张量分析（含连续介质力学应用）》，第5版。施普林格，Cham（2019）[46] Korobeynikov, S.N.：连续自旋张量族及其在连续介质力学中的应用。Acta Mechanica 216(1-4), 301–332 (2011) https://doi.org/10. 1007/s00707-010-0369-7[47]Korobeynikov, S.N.：对Meng和Chen所著《一般无基自旋及其简明证明》的讨论，Acta Mech., https://doi.org/10.1007/s00707- 022-03162-2。Acta Mechanica 234(2), 825–829 (2023) https://doi.org/10.1007/ s00707-022-03402-4[48] Luehr, C.P., Rubin, M.B.：投影算子在对称二阶张量谱表示中的重要性。《应用力学与工程中的计算机方法》84(3), 243–246 (1990) https://doi.org/10.1016/0045- 7825(90)90078-Z[49] Xiao, H.：任意Hill应变的时间率和共轭应力的统一显式无基表达式。《固体与结构国际期刊》32(22), 3327–3340 (1995) https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00307-I[50] Neff, P., Lankeit, J., Madeo, A.：论Grioli极小性质及其与柯西极分解的关系。《国际工程科学杂志》80, 209–217 (2014) https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.026。非线性与非局部问题特刊。为纪念Leonid Zubov教授70岁生日[51] Ogden, R.W.：《非线性弹性变形》。Ellis Horwood，奇切斯特（1984）

[52] Truesdell, C., Noll, W.：《非线性力学场论》。载于：Fl¨ugge, S.（编），《物理学百科全书》第III/3卷，第1–602页。施普林格，柏林、海德堡（1965）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-46015-9[53] Korobeynikov, S.N.：客观张量率及其在超弹性关系构建中的应用。《弹性学杂志》93(2), 105–140 (2008) https://doi. org/10.1007/s10659-008-9166-0[54] Holzapfel, G.A.：《非线性固体力学：工程学的连续体方法》。威利，奇切斯特（2000）[55] Curnier, A., Rakotomanana, L.：广义应变和应力度量：批判性综述与新成果。《工程学汇刊》39(3-4), 461–538 (1991)[56] Darijani, H., Naghdabadi, R.：利用二阶应力-应变关系对有限变形下的固体进行本构建模。《国际工程科学杂志》48(2), 223–236 (2010) https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.08.006[57] Darijani, H., Naghdabadi, R., Kargarnovin, M.H.：采用与应变能公设相一致的应变度量对超弹性材料进行建模。《机械工程师学会会刊C辑：机械工程科学杂志》224(3), 591–602 (2010) https://doi.org/10.1243/ 09544062JMES1590[58] Doyle, T.C., Ericksen, J.L.：非线性弹性。载于：Dryden, H.L., Karman, T.（编），《应用力学进展》第4卷，第53–115页。Academic Press，纽约（1956）。https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70371-5[59] Ba˘zant, Z.P.：易于计算的对称逆张量，用于近似Hencky有限应变及其变化率。《工程材料与技术杂志》120(2), 131–136 (1998) https://doi.org/10.1115/1.2807001[60] Itskov, M.：论广义应变度量加性分解在大应变塑性中的应用。《力学研究通讯》31(5), 507–517 (2004) https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2004.02.006[61] Neff, P., Ghiba, I.D., Lankeit, J.：指数化Hencky对数应变能。第一部分：本构问题与秩一凸性。《弹性学杂志》121(2), 143–234 (2015) https://doi.org/10.1007/s10659-015-9524-7[62] Neff, P., Eidel, B., Martin, R.J.：固体力学中对数应变度量的几何。《理性力学与分析档案》222(2), 507–572 (2016) https://doi.org/10.1007/s00205-016-1007-x[63] Xiao, H.：Hencky应变与Hencky模型：延续历史与传承传统。《材料与结构多学科建模》1(1), 1–52 (2005) https://doi.org/10.1163/1573611054455148

[64] Scheidler, M.：广义应变张量的时间率，第一部分：分量形式。材料力学 11(3)，199–210（1991年）https://doi.org/10.1016/0167- 6636(91)90002-H[65] Oldroyd, J.G.：论流变状态方程的表述。伦敦皇家学会会刊。A辑：数学与物理科学 200(1063)，523–541（1950）https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035[66] Oldroyd, J.G.：某些理想化黏弹性液体稳态运动中的非牛顿效应。伦敦皇家学会会刊。A辑：数学与物理科学 245(1241)，278–297（1958）https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0083[67] Aubram, D.：非线性连续介质力学中的率方程札记。固体数学与力学 30(7)，1527–1589（2025）https://doi.org/10.1177/ 10812865241288526[68] Federico, S., Holthausen, S., Husemann, N.J., Neff, P.：超弹性中Zaremba–Jaumann率与Kirchhoff应力所诱导切线刚度张量的主对称性：两种不同的方法。固体数学与力学 30(12)，2733–2761（2025）https://doi.org/10.1177/10812865241306703[69] Fiala, Z.：有限变形的几何与时间增量分析。《国际非线性力学杂志》81，230–244（2016年）https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.019[70] Fiala, Z.：有限变形的李型演化方程及其时间离散积分。载于：Murphy, C.（编）《演化方程的新兴概念》，第1–30页。Nova Science，纽约（2017）[71] Fiala, Z.：重新审视客观时间导数。《应用数学与物理学杂志》71(1)，4（2020年）https://doi.org/10.1007/s00033-019-1227- 7[72] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：关于客观共旋率及其定义自旋张量。《国际固体与结构杂志》35(30)，4001–4014（1998年）https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00267-9[73] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：应变率与材料自旋。《弹性学杂志》52(1)，1–41（1998年）https://doi.org/10.1023/A:1007570827614[74] Bruhns, O.T., Meyers, A., Xiao, H.：关于Oldroyd型非共旋率及率型本构表述中的相关问题。伦敦皇家学会会刊。A辑：数学、物理与工程科学 460(2043)，909–928（2004年）https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1184[75] Korobeynikov,S.N.：连续应变相容对流张量率族

及其在类胡克各向同性次弹性中的应用。《弹性学杂志》143(1)，147–185（2021年）https://doi.org/10.1007/s10659-020-09808-2[76] Neff, P., Holthausen, S., Korobeynikov,S.N., Ghiba, I.-D., Martin, R.J.：客观共旋率的一项自然要求——论保持结构的共旋率。《Acta Mechanica》236(4)，2657–2689（2025年）https://doi.org/10.1007/ s00707-025-04249-1[77] Gurtin, M.E., Spear, K.：对数应变率与伸长张量之间的关系。《国际固体与结构杂志》19(5)，437–444（1983年）https://doi.org/10.1016/0020-7683(83)90054-9[78] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：对数应变、对数自旋与对数率。《Acta Mechanica》124(1)，89–105（1997年）https://doi.org/10.1007/ BF01213020[79] Zhilin, P.A., Altenbach, H., Ivanova, E.A., Krivtsov, A.：物质应变张量。载于：Altenbach, H., Forest, S., Krivtsov, A.（编）《作为材料模型的广义连续介质》。先进结构材料，第22卷，第321–331页。施普林格，柏林、海德堡（2013年）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-36394-8 19[80] Bruhns, O.T., Xiao, H., Meyers, A.：关于欧拉三元组自旋以及对数自旋和对数率的新结果。《Acta Mechanica》155(1)，95–109（2002年）https://doi.org/10.1007/BF01170842[81] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：客观共旋率以及欧拉应变与拉格朗日应变和应力度量之间统一的功共轭关系。力学档案 50(6)，1015–1045（1998年）[82] Zhou, X., Tamma, K.K.：关于共旋应力率次弹性本构模型的适用性与应力更新表述。分析与设计中的有限元 39(8)，783–816（2003年）https://doi.org/10.1016/S0168-874X(03)00059-3。第14届Robert J. Melosh竞赛[83] Korobeynikov, S.N.：客观应变张量族、其时间率及共轭应力张量的无基表达式。《Acta Mechanica》229(3)，1061–1098（2018年）https://doi.org/10.1007/s00707-017-1972-7[84] Wriggers, P.：《非线性有限元方法》。施普林格，柏林、海德堡（2008年）[85] Neff, P., Holthausen, S., d'Agostino, M.V., Bernardini, D., Sky, A., Ghiba, I.-D., Martin, R.J.：对数应变中的次弹性、柯西弹性、共旋稳定性与单调性。固体力学与物理学报 202，106074（2025年）https://doi.org/10.1016/j.jmps.2025.106074

[86] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：基于对数应力率的次弹性模型。《弹性学杂志》47(1)，51–68（1997年）https://doi.org/10. 1023/A:1007356925912[87] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：可积精确次弹性方程 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{*} = \lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ 的存在性与唯一性及其对有限非弹性的重要意义。Acta Mechanica 138(1)，31–50（1999年）https://doi.org/10.1007/ BF01179540[88] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.：次弹性的一种自然推广及超弹性的欧拉率型表述。《弹性学杂志》56(1)，59–93（1999年）https://doi.org/10.1023/A:1007677619913[89] Rubinstein, R., Atluri, S.N.：计算有限变形分析中有限时间步上增量本构关系的客观性。《应用力学与工程中的计算机方法》36(3)，277–290（1983年）https://doi.org/10. 1016/0045-7825(83)90125-1[90] Hartmann, S., Neff, P.：近不可压缩条件下广义多项式型超弹性应变能函数的多凸性。《国际固体与结构杂志》40(11)，2767–2791（2003年）https://doi.org/10.1016/S0020- 7683(03)00086-6 [91]Curnier, A.：《固体力学计算方法》。Kluwer，多德雷赫特（1994年）[92] Biezeno, C.B., Hencky, H.：论弹性稳定性一般理论。阿姆斯特丹皇家科学院 31，569–592（1928年）[93] Neff, P., Husemann, N.J., Holthausen, S., Gmeineder, F., Blesgen, T.：各向同性柯西弹性表述的率形式平衡。第一部分：建模。《非线性科学杂志》36(1)，8（2026年）https://doi.org/10.1007/s00332-025-10214-y