arXiv:2603.01595v1 [math.LO] 2 Mar 2026

分簇蕴涵逻辑不可判定

NICK GALATOS，美国丹佛大学PETER JIPSEN，美国查普曼大学SØREN BRINCK KNUDSTORP，荷兰阿姆斯特丹大学 ILLC 与哲学系REVANTHA RAMANAYAKE，荷兰格罗宁根大学

O'Hearn 和 Pym（1999年）提出的分簇蕴涵逻辑（BI），凭借其优雅的证明演算、多样的语义以及与分离逻辑命题片段的紧密联系，受到了广泛关注。我们在此通过将王氏铺砖编码到其三元关系语义中，证明 BI 中的可证性不可判定。等价地，这意味着 BI代数的等式理论不可判定。

我们的结果具有更广泛的适用性，适用于更强和更弱逻辑的 {∧、 ∨、 ¬、 −∗} 片段：只需否定具有析取性，乘法合取则不必是交换的（此时 −∗ 分裂为两个除法 \、 /）。因此，我们的结果涵盖了一个范围，其中包括 BI、非交换逻辑 GBI 以及布尔BI（BBI）；后者已知是不可判定的。

这一结果与长期以来认为 BI 可能是可判定的预期相悖。我们还指出了那些声称其可判定的文献中存在的漏洞。

其他关键词和短语：分组蕴涵逻辑、带算子的直觉主义逻辑、剩余格、次结构逻辑、不可判定逻辑、铺砖问题。

1 引言

分簇蕴涵逻辑（BI）由 O'Hearn 和 Pym [23] 于1999年提出，是一种结合加法（直觉主义）与乘法（次结构）联结词的逻辑。具体而言，该逻辑包含两种蕴涵：一种是直觉主义蕴涵，另一种是次结构蕴涵。从证明论的角度来看——也就是其最初的表述——BI 可优雅地定义为直觉主义命题逻辑与乘法直觉主义线性逻辑（MILL）的相继演算的自由组合。

BI 为关于资源的推理提供了一个直觉主义框架 [12]。事实上，BI 及其布尔对应逻辑 BBI 早期受到关注，得益于它们作为分离逻辑断言逻辑的突出作用。分离逻辑扩展了霍尔式推理，用于处理操作指针和可变堆的命令式程序。分离逻辑 [27, 28] 使人们能够推理共享数据结构的使用、堆变更、指针别名以及内存的分配与释放，后来还应用于并发动态内存管理 [2, 3]。在这些解释中，逻辑联结词 ∗ 可用于断言仅在堆的不相交部分上成立的性质，从而能够围绕程序的内存占用进行局部推理 [25]。这种方法大幅简化了对堆操作程序的验证，并通过允许聚焦于局部而非整个堆，将模块化推理扩展到了大型代码库。

分离逻辑在实践中的重要性，在现代自动化验证工具中显而易见：Infer [6, 11],这一部署于 Facebook/Meta 的静态分析工具，使用分离逻辑分析数百万行代码，以查找空指针解引用、内存泄漏及其他错误。这有力地展示了形式逻辑在现实世界的软件可靠性与安全性方面的价值。

作者联系信息：Nick Galatos，丹佛大学，美国科罗拉多州丹佛，ngalatos@du.edu；Peter Jipsen，查普曼大学，美国加利福尼亚州奥兰治，jipsen@chapman.edu；Søren BrinckKnudstorp，ILLC 与哲学，阿姆斯特丹大学，荷兰阿姆斯特丹，s.b.knudstorp@uva.nl；Revantha Ramanayake，格罗宁根大学，荷兰格罗宁根，d.r.s.ramanayake@rug.nl。

在分离逻辑问世后的几十年间，人们对 BI 的兴趣已远远超出了它与分离逻辑之间的联系。这推动了对相关领域中更多逻辑的研究，例如广义 BI [8]（BI 的非交换版本），以及它在经典情形下对应的、带算子的布尔代数 [14, 15]。GBI 逻辑的代数语义由剩余海廷代数给出，即带有海廷蕴涵的有界剩余格（因此其底层格是分配格）。这些代数称为 GBI 代数；如果海廷代数是布尔代数，则称为剩余幺半群代数，简称 rm 代数。相应的逻辑简称为 BGBI，其交换版本为 BBI。

在此背景下，BI 的计算复杂性一直是最受关注的开放问题。鉴于其序列演算表面上十分简单，且其两个组成系统的可证性均属于 PSPACE，人们曾预期 BI 是可判定的——甚至有几篇论文 [8, 10, 16] 发表并声称证明了这一结果。即使 BGBI 和 BBI 的不可判定性（最初于 [20], 得到证明）后来经由 [4, 5, 21]在交换情形下的独立发现而广为人知，这种预期仍未改变。

在这项工作中，我们终于揭示了 BI 的计算复杂性：通过证明许多分簇蕴涵逻辑（包括 BI 和 GBI 及其 {∧、∨、¬、\、/}-约化）均不可判定。证明通过从王氏铺砖问题进行归约来完成；这一证明方法本身也可能具有独立价值，因为相关的证明方法最近已在相关逻辑和模态逻辑中发挥作用 [17, 18]。

本文的组织结构如下。第2 节介绍陈述不可判定性结果并明确其适用范围所需的预备知识。第3 节给出主要论证，说明铺砖问题可以归约到析取分配剩余格类中。第4节指出了先前关于分簇蕴涵逻辑可判定性的论断中存在的漏洞。最后，第5 节详细说明析取分配剩余格的代数语义与框架语义之间的联系。

此外，附录A还给出了分簇蕴涵逻辑不可判定性的另一种证明——从与分支计数器机器（ACM）的接受问题进行归约。

2 预备知识与结果

本节介绍预备知识，陈述主要结果，并说明其如何特别适用于分簇蕴涵逻辑。分簇蕴涵逻辑可以用三种等价方式定义：通过证明论序列演算（见图1）、通过 BI 代数（下文介绍），以及通过其关系语义（稍后讨论相关部分）。

定义 *2.1*（公式、束和相继式）。对于一个可数的命题字母集合 P，BI 的公式由以下文法给出：

$$\varphi ::= p \in P \mid \top \mid \bot \mid 1 \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid \varphi * \varphi \mid \varphi \mathrel{-\!\!*} \varphi.$$

束定义如下：

$$\Gamma ::= \varphi \mid \varnothing_+ \mid \varnothing_\times \mid \Gamma;\Gamma \mid \Gamma,\Gamma.$$

相继式被形如 $\Gamma \vdash_{\mathrm{BI}} \varphi$ 的对，其中 Γ 是一个束，φ 是公式。为简便起见，我们将 $\Gamma \vdash_{\mathrm{BI}} \varphi$ 简写为 $\Gamma \Rightarrow \varphi$。如果相继式 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ 在 BI 的束演算中是可证明的（见图1），并且如果不可证明，则记作 $\nvdash \Gamma \Rightarrow \varphi$。

显然，相继式 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ 在 BI演算中可证明，当且仅当相继式 $\Gamma \Rightarrow \varphi$ 可证明；而这又当且仅当相继式 $\frown\top \Rightarrow \Gamma \to \varphi$ 可证明，其中 Γ 是将逗号替换为 $*$、将分号替换为 $\wedge$、将 $\varnothing_+$ 替换为 $\top$，并将 $\varnothing_\times$ 替换为 1 后，由束 Γ 得到的公式。因此，分簇蕴涵逻辑的可判定性等价于判定形如 $\top \Rightarrow \varphi$ 的相继式。

$$\frac{}{\phi \Rightarrow \phi}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \phi}{\Delta \Rightarrow \phi}\ \Delta \equiv \Gamma \qquad \frac{\Gamma(\Delta) \Rightarrow \phi}{\Gamma(\Delta;\Delta') \Rightarrow \phi}\ \mathrm{w} \qquad \frac{\Gamma(\Delta;\Delta) \Rightarrow \phi}{\Gamma(\Delta) \Rightarrow \phi}\ \mathrm{c} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \phi \qquad \Gamma(\phi) \Rightarrow \psi}{\Gamma(\Delta) \Rightarrow \psi}\ \mathrm{cut}$$

$$\frac{}{\Gamma(\bot) \Rightarrow \phi}\ \bot_L \qquad \frac{\Gamma(\varnothing_\times) \Rightarrow \phi}{\Gamma(1) \Rightarrow \phi}\ 1_L \qquad \frac{}{\varnothing_\times \Rightarrow 1}\ 1_R \qquad \frac{\Gamma(\varnothing_+) \Rightarrow \phi}{\Gamma(\top) \Rightarrow \phi}\ \top_L \qquad \frac{}{\varnothing_+ \Rightarrow \top}\ \top_R$$

$$\frac{\Gamma(\phi,\psi) \Rightarrow \chi}{\Gamma(\phi * \psi) \Rightarrow \chi}\ *_L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma,\Delta \Rightarrow \phi * \psi}\ *_R \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \phi \qquad \Gamma(\psi) \Rightarrow \chi}{\Gamma(\Delta,\ \phi \mathrel{-\!\!*} \psi) \Rightarrow \chi}\ \mathrel{-\!\!*}_L \qquad \frac{\Gamma,\phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \phi \mathrel{-\!\!*} \psi}\ \mathrel{-\!\!*}_R \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \phi_i\ (i=1,2)}{\Gamma \Rightarrow \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{Ri}$$

$$\frac{\Gamma(\phi;\psi) \Rightarrow \chi}{\Gamma(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \chi}\ \wedge_L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \phi \qquad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma;\Delta \Rightarrow \phi \wedge \psi}\ \wedge_R \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \phi \qquad \Gamma(\psi) \Rightarrow \chi}{\Gamma(\Delta;\ \phi \to \psi) \Rightarrow \chi}\ \to_L \qquad \frac{\Gamma;\phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \phi \to \psi}\ \to_R \qquad \frac{\Gamma(\phi) \Rightarrow \chi \qquad \Gamma(\psi) \Rightarrow \chi}{\Gamma(\phi \vee \psi) \Rightarrow \chi}\ \vee_L$$

Fi图 1. LBI 序列演算 [10]。该 ≡ 表示针对子束，和应用的交换幺半群方程； es.

接下来，我们转向 BI 的代数语义。

定义 2.2（BI 代数）。BI 代数是形如 $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \top, \bot, *, \mathrel{-\!\!*}, 1)$ 的代数，其中 $(A, \wedge, \vee, \to \top, \bot)$ 是海廷代数，$(A, *, 1)$ 是交换幺半群，并且 $*$ 关于 $\mathrel{-\!\!*}$ 是剩余的；也就是说，对所有 $x, y, z \in A$，

$$x * y \le z \qquad \text{iff} \qquad y \le x \mathrel{-\!\!*} z,$$

wh其中 $\le$ 是格序。*BBI* 代数是底层海廷代数为布尔代数的 BI 代数 .

注 *2.3*（代数$\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N})^+$）。某个特定的 BI 代数将在我们的证明中发挥核心作用，因为它的等式理论将为一个包含 BI 的不可判定理论区间提供上界。为定义它，令 $\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N}) := \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X\text{为有限集}\}$表示自然数有限集的集合。取其幂集 $\mathrm{P}(\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N}))$，我们通过赋予它如下运算，构造代数 $\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N})^+$：

$$\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})^+ := \big(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})), \cap, \cup, \to, \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}), \varnothing, *, \mathrel{-\!\!*}, \{\varnothing\}\big)$$

其中

- $\to$ 是布尔蕴涵，即 $X \to Y := X^c \cup Y$
- $*$ 是逐点并，即 $X * Y := \{x \cup y \mid x \in X,\ y \in Y\}$
- $\mathrel{-\!\!*}$ 是 $*$ 的剩余，即 $X \mathrel{-\!\!*} Y := \{z \mid \text{对所有 } x \in X\colon\ z \cup x \in Y\}$。

$\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N})^+$ 是一个 BBI 代数，这一点可由以下事实推出：它具有布尔约化，且是交换幺半群的幂集代数，因此满足剩余性质（例如参见 [9] 的定理 3.32）。

众所周知（例如参见 [9]），剩余性质可以用等式刻画，因此，根据伯克霍夫定理，由所有 BI 代数构成的类 BI 是一个簇。参见 [25], ，簇 BI 是 BI 的代数语义，也就是说，对于所有 BI-公式 φ和 ψ，

$$\vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \text{iff} \qquad \mathsf{BI} \vDash \varphi \le \psi.$$

这里，$\mathsf{BI} \vDash \varphi \le \psi$指的是，对于所有 BI 代数$\mathbf{A} \vDash \varphi \le \psi$，均成立；这又意味着，对于从 BI-公式（项）代数到$\mathbf{A}$的所有同态 h，都有 $h(\varphi) \le h(\psi)$。结合先前的观察，我们得到$\vdash_{\mathsf{BI}} \Gamma \Rightarrow \psi$当且仅当 $\mathsf{BI} \vDash \widehat{\Gamma} \le \psi$。

我们感兴趣的是特殊情形（且如前所述，与之等价），即 $\Gamma = \top$。为简洁起见，我们记$\mathbf{A} \nvDash \varphi$当$\mathbf{A} \nvDash \top \le \varphi$时，并称 BI代数$\mathbf{A}$ 反驳公式 φ；若存在某个 BI 代数反驳 φ，则称 BI 反驳 φ，记作 $\mathsf{BI} \nvDash \varphi$。由此可得

$$\nvdash \top \Rightarrow \varphi \qquad \text{iff} \qquad \mathsf{BI} \nvDash \varphi.^{1} \tag{1}$$

我们将证明，给定输入 φ，判定 BI $\nvdash \varphi$ 是否成立是不可判定的——也就是说，BI 具有不可判定等式理论——从而得出 BI演算的可证性具有不可判定性。

然而，范围更为广泛：我们的主定理确立了除分簇蕴涵逻辑之外许多系统——既包括更弱的，也包括更强的——的不可判定性。其中，或许特别值得关注的是 [8, 13],中所研究的分簇蕴涵逻辑的非交换变体，它不假定 $*$的交换性，而改用$\cdot$ 表示，并将一个剩余（$-\!\!*$）换成两个：左除法（$\backslash$）和右除法（$/$）。所得代数称为 GBI 代数（广义捆束蕴涵代数），构成一个簇GBI，定义如下。

定义*2.4*（*GBI* 代数）。一个*GBI*代数是形如$\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \top, \bot, \cdot, \backslash, /, 1)$ 的代数，其中 $(A, \wedge, \vee, \to \top, \bot)$ 是海廷代数，$(A, \cdot, 1)$ 是幺半群，且 $\backslash$、$/$ 是 $\cdot$ 的左除法与右除法；也就是说，对所有 x、y、$z \in A$，

$$x \cdot y \le z \quad \text{iff} \quad y \le x\backslash z \quad \text{iff} \quad x \le z/y.$$

注意，若 $\cdot$ 是交换的，则 $x\backslash y = y/x$，因此，BI代数恰好是交换的 GBI 代数。

对于不可判定性，一个弱得多的设定就足够了。在海廷代数——即 (G)BI-代数的加法部分——中，直觉主义否定定义为 $\neg x := x \to \bot$，并满足伪补的规律，即 $x \wedge y \le \bot$ 当且仅当 $y \le \neg x$。因此，每个海廷代数 $(A, \wedge, \vee, \to, \top, \bot)$ 都是伪补分配格 $(A, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$，但反之不成立：伪补分配格 $(A, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ 未必具有到 $\wedge$ 的剩余 $(\to)$。然而，我们的证明既不需要海廷蕴涵 $(\to)$，也不需要完整的伪补（甚至不需要乘法单位元 1）。只需有一个满足爆炸律的一元运算 $\neg$，即 $x \wedge \neg x \le y$。在这种情况下，$\bot := x \wedge \neg x$ 就成为一个可定义的常量；或者，等价地，我们也可以在语言中加入一个原始常量 $\bot$，并将爆炸方程规定为 $x \wedge \neg x = \bot$。无论哪种情况，爆炸方程都严格弱于伪补运算的要求；例如，在后者的情况下，否定运算还具有反单调性并满足双重否定引入。由于方程 $x \wedge \neg x = \bot$ 对应于一个集合与其补集不交这一事实，我们称之为不交方程。因此，我们所关注的最弱代数如下。

定义 *2.5.* 析取分配剩余格 是如下形式的代数：$(A, \wedge, \vee, \top, \bot, \neg, \cdot, \backslash, /)$，其中 $(A, \wedge, \vee, \top, \bot)$ 是有界分配格，$(A, \cdot)$ 是半群，$\backslash, /$ 是 $\cdot$ 的剩余运算，并且 $\neg$ 是一种析取运算，即对于所有 $x \in A$，

$$x \wedge \neg x = \bot.$$

请注意，(G)BI-代数（或其适当的约化；在不致混淆时，我们将它们视为相同）尤其是析取分配剩余格。具体而言，BI代数 $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})^+$，来自注释 2.3，是一个析取分配剩余格。

最后值得一提的一个推广是：即使在不含 $\cdot$ 的语言片段中，也能得到不可判定性；从代数角度看，这对应于 $\{\cdot\}$-自由约化的等式理论。在 BI 的情形下，参见（1），这意味着，判断 $\vdash \top \Rightarrow \varphi$（或 $\vdash \varnothing_+ \Rightarrow \varphi$）是否成立是不可判定的，其中输入 φ 是语言$\{\top, \bot, \wedge, \vee, \neg, -\!\!*\}$ 中的一个公式（其中 $\neg\alpha := \alpha \to \bot$）。[2]

这说明了我们的不可判定性结果所涉及的一般背景。该结果是通过从王氏铺砖问题归约而得出的，该问题由 [31], 提出，我们现在来定义它。

[1]请注意，我们没有用更简短的 $\Rightarrow \varphi$ 来表示 $\top \Rightarrow \varphi$，因为后者有歧义，既可能指 $\varnothing_+ \Rightarrow \varphi$，也可能指 $\varnothing_\times \Rightarrow \varphi$，分别对应于 $\top \Rightarrow \varphi$ 和 $1 \Rightarrow \varphi$。[2]事实上，我们甚至证明了：对于语言 φ 中不带界限的公式，$\{\wedge, \vee, \neg, -\!\!*\}$，其可判定性也是不可判定的；不过，$\bot$ 在该语言中可定义为 $x \wedge \neg x$，而 $\top$ 可定义为 $\bot -\!\!* \bot$。



（a）{(1, 3,2, 2), (3, 1,2, 2)}　　（b）{(1, 3,2, 2), (1, 1,3, 2)}

图2.（a）能够铺砌 $\mathbb{N}^2$的瓦片示例，以及（b）不能铺砌的瓦片示例。

定义 *2.6*（王氏铺砖）。（王氏）砖块是一个四元组

$$t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{N}^4.$$

我们将 t视为一个正方形瓦片，其上、下、左、右边分别具有“颜色” t_1、 t_2、 t_3、 t_4，并定义 $\mathrm{U}(t) = t_1$、$\mathrm{D}(t) = t_2$、$\mathrm{L}(t) = t_3$、$\mathrm{R}(t) = t_4$。

给定一个瓦片有限集 W，如果函数 $\tau\colon \mathbb{N}^2 \to \mathrm{W}$（ $\mathbb{N}^2$ 上的铺砌，使用 W） τ为相邻瓦片的公共边指定相匹配的颜色，即对于所有 $(m,\ n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathrm{U}(\tau(m,n)) = \mathrm{D}(\tau(m,n+1)) \quad \text{and} \quad \mathrm{R}(\tau(m,n)) = \mathrm{L}(\tau(m+1,n)).$$

我们称瓦片有限集 $\mathcal{W}$ 是一个 （王氏）铺砌，或者称 $\mathcal{W}$ 铺砌 $\mathbb{N}^2$，如果存在铺砖函数 $\tau\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{W}$ （见图 2）。

（王氏）铺砖问题 以瓦片有限集 W 为输入，并询问 W 是否构成铺砌。

通过为每台图灵机 T指定一个瓦片集 W^T，并证明 T的非终止运行会产生一个由 W^T构成的 $\mathbb{N}^2$ 王氏铺砌，[1] 证明了以下结论。

定理2.7（[1]）。铺砖问题是不可判定的。

我们通过将铺砖问题归约到 BI 的可证性问题，证明 BI 的不可判定性。简言之，我们以可计算的方式为每个有限瓦片集 $\mathcal{W}$ 关联一个公式 $\phi_{\mathcal{W}}$，并证明$\mathcal{W}$ 能够铺砌 $\mathbb{N}^2$ 当且仅当$\mathrm{BI} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$。因此，参见（1），图灵机 T终止当且仅当 $\vdash \top \Rightarrow \phi_{\mathcal{W}^T}$。

在此过程中，我们证明两个关键引理，分别为一个不可判定理论区间给出下界和上界。我们在此陈述它们，以展示它们如何蕴含 BI 的不可判定性；但将证明推迟到下一节。

引理 2.8。设 $\mathcal{W}$ 是一个有限瓦片集，且 A 是一个析取分配剩余格。若 $\mathrm{A} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$，则 $\mathcal{W}$ 能够铺砌 $\mathbb{N}^2$。

引理 2.9。设 $\mathcal{W}$ 是一个有限瓦片集。若 $\mathcal{W}$ 能够铺砌 $\mathbb{N}^2$，则 $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})^+ \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$。

这些引理结合起来，便得出我们的主定理。

定理 2.10。 每个包含 $\mathcal{P}\omega(\mathbb{N})^+$ 的析取分配剩余格的类，都具有不可判定等式理论。

证明。设 K 为该类，W 为王氏瓷砖的一个有限集。根据引理 2.8，如果 $\mathrm{K} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$，那么 W 能铺砌 $\mathbb{N}^2$。反过来，根据引理 2.9，如果 W 能铺砌 $\mathbb{N}^2$，那么 $\mathrm{P}\omega(\mathbb{N})^+ \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$，因此 $\mathrm{K} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$。所以，W 能铺砌 $\mathbb{N}^2$ 当且仅当 $\mathrm{K} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$（也就是说，当且仅当 $\mathrm{K} \nvdash \top \leq \phi_{\mathcal{W}}$），由此铺砖问题可归约为 K 的等式判定问题。□

定理 2.11. 分簇蕴涵逻辑是不可判定的。

证明。 $\mathcal{P}\omega(\mathbb{N})^+$ 是一个分簇蕴涵逻辑代数，而分簇蕴涵逻辑代数尤其是析取分配剩余格。因此，定理 2.10 适用。具体而言，参见（1），给定一个公式 φ，判断相继式 $\top \Rightarrow \varphi$ 是否能在分簇蕴涵逻辑演算中推导出来，是不可判定的。 □

正如我们将看到的，铺砖公式 $\phi_{\mathcal{W}}$ 实际上只使用语言 {∧、 ∨、 ¬、 \、 /}，这对应于{∧、 ∨、 ¬、 −∗} 在交换情形下的语言。 因此，正如我们在引向脚注2的段落中所讨论的，不可判定性已经在这一片段中成立。

此外，由于 GBI代数是不相交分配剩余格，并且 $\mathcal{P}\omega(\mathbb{N})^+$——作为一个 BI代数——是一个 GBI代数，定理 2.10 还推出了 GBI 的等式理论是不可判定的。

定理2.12。 *GBI* 是不可判定的。

同样地，由于 $\mathrm{P}\omega(\mathbb{N})^+$ 是一个 BBI 代数，我们得以证明 BBI（布尔束蕴涵逻辑）是不可判定的，这一结果此前已在 [5, 18, 20, 21] 中得到。

定理2.13。 *BBI* 是不可判定的。

此外， [18] 的论证可以轻易地推广到我们的情形，从而证明 BBI 的许多变体都是不可判定的，尤其是在不含 {∗} 的片段中。

最后，我们想强调定理 2.10的另一个推论。 [19]证明了分配剩余格（包括具有乘法单位元 1的分配剩余格）的簇具有 可判定的 等式理论（因此，不含单位元的子归约类也具有可判定的等式理论）。相比之下，由定理 2.10可知，析取分配剩余格（无论是否具有乘法单位元 1）的簇具有 不可判定的 等式理论。

The定理 2.14。 析取分配剩余格的簇具有不可判定等式理论 .

也就是说, 仅仅是存在一个具有 $x \wedge \neg x = \bot$ 的运算 $\neg$，就足以从可判定跨越到不可判定 .

3 铺砌证明

我们还需要证明引理 2.8和2.9。为此，我们采用对偶的关系结构，称之为析取关联框架，并定义如下。对于熟悉分簇蕴涵逻辑关系语义的读者，我们指出，这些框架推广了向上和向下闭合幺半框架（UDMF），后者构成分簇蕴涵逻辑的完备语义 [7]。

定义 *3.1*（框架与模型）。一个 （析取关联）框架是一个三元组 $\mathfrak{F} = (S, \circ N)$ 其中 $\circ\colon S^2 \to \mathcal{P}(S)$ 是结合的，且 $N\colon \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ 是 析取的，即对所有 $x, y, z \in S$ 和 $X \subseteq S$,

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \qquad \text{and} \qquad X \cap N(X) = \varnothing.$$

这里， $X \circ Z = \bigcup\{x \circ z \mid x \in X, z \in Z\}$、 $X \circ z = X \circ \{z\}$ 以及 $x \circ Z = \{x\} \circ Z$对于 $X, Z \subseteq S$。注意，记法 $z \in x \circ y$ 等价于（并且比其更方便）更为传统的三元关系记法 $R(x, y, z)$。

一个（析取的、结合的）模型是一个二元组 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，其中 $\mathfrak{F} = (S, \circ N)$ 是一个框架，而 V是 S上的一个赋值，即一个函数 $V\colon P \to \mathrm{P}(S)$。

定义 *3.2*（满足与反驳）。对于模型 $\mathfrak{M}=(S,\circ\ N,V)$ 和语言 $\{\wedge,\vee,\neg,\backslash,/\}$ 中的公式 φ，我们递归地定义 φ 的满足集（关于 $\mathfrak{M}$），记作 $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}}$或简记为 $\|\varphi\|$，如下所示。

$$\|p\| := V(p) \qquad \|\neg\varphi\| := N(\|\varphi\|)$$
$$\|\varphi\wedge\psi\| := \|\varphi\|\cap\|\psi\| \qquad \|\varphi\backslash\psi\| := \{s\in S \mid \|\varphi\|\circ s\subseteq\|\psi\|\}$$
$$\|\varphi\vee\psi\| := \|\varphi\|\cup\|\psi\| \qquad \|\psi/\varphi\| := \{s\in S \mid s\circ\|\varphi\|\subseteq\|\psi\|\}.$$

这对应于以下逐点定义的满足关系 $s\in\|\varphi\|$，记作 $\mathfrak{M},\ s\Vdash\varphi$或简称为 $s\Vdash\varphi$。

$s\Vdash p$	iff	$s\in V(p)$
$s\Vdash\neg\varphi$	iff	$s\in N(\|\varphi\|)$
$s\Vdash\varphi\wedge\psi$	iff	$s\Vdash\varphi$ 且 $s\Vdash\psi$
$s\Vdash\varphi\vee\psi$	iff	$s\Vdash\varphi$ 或 $s\Vdash\psi$
$s\Vdash\varphi\backslash\psi$	iff	$\forall x,\ z\in S$：如果 $x\Vdash\varphi$ 且 $z\in x\circ\ s$，那么 $z\Vdash\psi$
$s\Vdash\psi/\varphi$	iff	$\forall y,\ z\in S$：如果 $y\Vdash\varphi$ 且 $z\in s\circ\ y$，那么 $z\Vdash\psi$.

若模型 $\mathfrak{M}$ 使公式 φ 不成立，或称公式 φ 在 中不成立，记作 $\mathfrak{M}\nVdash\varphi$，则当且仅当 $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}}\neq S$，也就是说，存在 $s\in S$使得$\mathfrak{M},\ s\nVdash\varphi$。我们称框架 $\mathfrak{F}$ 使公式 φ不成立，或称公式 φ 在 中不成立，记作 $\mathfrak{F}\nVdash\varphi$，若存在赋值 V使得（$\mathfrak{F},\ V$）$\nVdash\varphi$。

请注意，用不相交运算定义否定，恰好确保 $\mathfrak{M},\ s\Vdash\neg\varphi$ 蕴含$\mathfrak{M},\ s\nVdash\varphi$。

注*3.3*。注意，如果 $\mathfrak{F}=(S,\ \circ\ N)$ 是一个析取关联框架，那么

$$\mathfrak{F}^{+} := \left(\mathcal{P}(S),\cap,\cup,S,\varnothing,\neg,\cdot,\backslash,/\right)$$

它是一个析取分配剩余格，其中 $X\cdot\ Y{:=}X\circ\ Y, X\backslash Y{:=}\{z\mid X\circ\ z\subseteq Y\}$，$Y/X{:=}\{z\mid z\circ\ X\subseteq Y\}$，以及$\neg X{:=}N(X)$（例如参见 [9]的第 3.4.10 节），并且满足集的定义直接反映了这些运算；我们称之为 $\mathfrak{F}$ 的复代数。此外，请注意，框架上的赋值 $V\colon P\to\mathrm{P}(S)$ 与从公式代数到复代数的同态 h 一一对应（给定 V，定义 h使得 $p\mapsto V(p)=\|p\|$；反过来，给定 h，定义 V使得 $p\mapsto h(p)$），并且对于语言 $\{\wedge,\vee,\neg,\backslash,/\}$ 中的所有公式 φ，我们都有 $h(\varphi)=\|\varphi\|$。由此可得 $\mathfrak{F}^{+}\nVdash\varphi$ 当且仅当 $\mathfrak{F}\nVdash\varphi$；也就是说，逐点满足关系 $\Vdash$ 只是反映了复代数的代数满足。

特别地，注 2.3 中的代数 $\mathrm{P}_{\omega}(\mathbb{N})^{+}$ 是析取关联框架 $(\mathrm{P}_{\omega}(\mathbb{N})\ \cup^{c})$ 的复代数，其中 $\circ$ 定义为 $\cup$，而 N是补运算 ^{c}，因此 $u\in s\circ\ t\Longleftrightarrow\ u=s\cup t$，且$N(X)=X^{c}$。因此，要证明引理 2.9，只需证明：若 W 瓦片铺砌 $\mathbb{N}^{2}$，则 $(\mathrm{P}_{\omega}(\mathbb{N})\ \cup^{c})\ \nVdash\phi_{\mathcal{W}}$。我们将在引理3.9中证明这一点（由此得到引理 2.9 的一个等价的关系表述）。[3]

[3]对于熟悉 BI 关系语义的读者，值得注意的是，每个模型 $(\mathcal{P}_{\omega}(\mathbb{N})\ \cup^{c},V)$ 都定义了一个对 BI（以及 BBI）向上和向下封闭的幺半群模型 $(\mathcal{P}_{\omega}(\mathbb{N})\ =,\cup\{\varnothing\}\ V)$。事实上，我们可以据此直接采用关系语义，绕过代数语义，从而给出 BI 不可判定性的另一种证明。因为这样便有 $(\mathcal{P}$ $_{\omega}\ \mathbb{N}\ \cup^{c}\ \nVdash\phi_{\mathcal{W}}$ $_{\omega}\ \mathbb{N}\ =\cup\ \varnothing\ \nVdash(),)$ 蕴涵 $(\mathcal{P}(),,\{\})$ 蕴涵 $\phi_{\mathcal{W}}$ $\nVdash\top\Rightarrow\phi_{\mathcal{W}}$ 3 9, $\mathbb{N}^{2}$ $\nVdash\top\Rightarrow\phi_{\mathcal{W}}$ $\nVdash\top\Rightarrow\phi_{\mathcal{W}}$ 结合引理 ., 这表明若 $\mathcal{W}$ 可铺砖，则 。反过来（若，则 $\mathcal{W}$ 可铺砖 $\mathbb{N}^{2}$），同样可以利用 UDMF 语义而不诉诸代数语义来证明，下面将对此作进一步说明。

反过来，可以从每个析取分配剩余格定义一个析取关联框架，并证明一个完备性结果。我们将在下一个引理中进行此项工作，并将其证明留到第 5 节。

引理 3.4. 如果语言 $\{\wedge, \vee, \neg, \backslash, /\}$ 中的某个公式被某个析取分配剩余格反驳，则它在某个析取关联框架中不成立。

为方便熟悉分簇蕴涵逻辑的 UDMF 语义的读者，我们指出：就证明分簇蕴涵逻辑的不可判定性而言，下述对引理 3.4 的特化即已足够；我们在第 5节中也给出了它的一个证明。

引理 3.5. 如果语言 $\{\wedge, \vee, \neg, -\!\!*\}$ 中的某个公式被某个*BI*代数反驳，则它在某个析取关联框架中不成立。

因此，要证明引理 2.8，只需表明：对每一个瓦片集 $\mathcal{W}$，若 $\phi_{\mathcal{W}}$ 在某个析取关联框架中不成立，则 $\mathcal{W}$ 铺砌 $\mathbb{N}^2$。这正是我们后文引理 3.7的内容。

我们继续给出在给定有限瓦片集 W 的情况下 $\phi_{\mathcal{W}}$ 的定义。我们约定 $\neg$ 具有最高的结合力，其次是 $\backslash, /$，然后是 $\wedge, \vee$。

定义 *3.6*（铺砖公式）。 给定有限瓦片集 W，令 $\{1, \ldots, k\}$ 为所涉及颜色的有限集，其中$k \in \mathbb{Z}^+$，并引入命题字母 $u_1, \ldots, u_k, d_1, \ldots, d_k, l_1, \ldots, l_k, r_1, \ldots, r_k$。对于砖块 $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$，通过滥用记号，我们也用 t 表示如下相应的文字合取：

$$\left(u_{t_1} \wedge \bigwedge_{j \neq t_1} \neg u_j\right) \wedge \left(d_{t_2} \wedge \bigwedge_{j \neq t_2} \neg d_j\right) \wedge \left(l_{t_3} \wedge \bigwedge_{j \neq t_3} \neg l_j\right) \wedge \left(r_{t_4} \wedge \bigwedge_{j \neq t_4} \neg r_j\right).$$

此外，我们将纳入以下命题字母：

- x，用于编码元素，其复合可使 x坐标递增，从 (m, n) 到 $(m+1, n) \in \mathbb{N}^2$。
- y，用于类似地编码沿 y轴递增的元素。
- c，用作一种构件，通过结合性将模型中任意长的元素序列与初始元素关联起来。

- ee，oe、oo 和 eo，分别可直观理解为“偶数个 x 与偶数个 y 的组合”、.....、“偶数个 x 与奇数个 y 的组合”。

利用这些命题字母，我们记作：

- $\mathrm{x}_{\prime} := \mathrm{x} \wedge \mathrm{c} \wedge \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$
- $\mathrm{y}_{\prime} := \mathrm{y} \wedge \mathrm{c} \wedge \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$
- $\mathrm{ee}^c := \mathrm{oe} \vee \mathrm{oo} \vee \mathrm{eo}$
- $\mathrm{oe}^c := \mathrm{ee} \vee \mathrm{oo} \vee \mathrm{eo}$
- $\mathrm{oo}^c := \mathrm{ee} \vee \mathrm{oe} \vee \mathrm{eo}$
- $\mathrm{eo}^c := \mathrm{ee} \vee \mathrm{oe} \vee \mathrm{oo}$

此处，添加的上标 ^{c} 是记号“补”的简写。我们进一步缩写为：

$$\alpha_{\mathrm{EE}} := \mathrm{EE} \wedge \neg \mathrm{OE} \wedge \neg \mathrm{OO} \wedge \neg \mathrm{EO} \wedge \neg(\mathrm{X}'\backslash \mathrm{OE}^c) \wedge \bigvee_{t \in \mathcal{W}} \left(t \wedge \mathrm{X} \backslash \left[\mathrm{EE} \vee \left(\mathrm{OE} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t' \right) \right] \wedge \left[\mathrm{EE} \vee \left(\mathrm{EO} \wedge \bigvee_{t'' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{U}(t)=\mathrm{D}(t'')} t'' \right) \right] / \mathrm{Y} \right)$$

$$\alpha_{\mathrm{OE}} := \mathrm{OE} \wedge \neg \mathrm{OO} \wedge \neg \mathrm{EO} \wedge \neg \mathrm{EE} \wedge \neg(\mathrm{OO}^c / \mathrm{Y}') \wedge \bigvee_{t \in \mathcal{W}} \left(t \wedge \mathrm{X} \backslash \left[\mathrm{OE} \vee \left(\mathrm{EE} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t' \right) \right] \wedge \left[\mathrm{OE} \vee \left(\mathrm{OO} \wedge \bigvee_{t'' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{U}(t)=\mathrm{D}(t'')} t'' \right) \right] / \mathrm{Y} \right)$$

$$\alpha_{\mathrm{OO}} := \mathrm{OO} \wedge \neg \mathrm{EO} \wedge \neg \mathrm{EE} \wedge \neg \mathrm{OE} \wedge \neg(\mathrm{X}'\backslash \mathrm{EO}^c) \wedge \bigvee_{t \in \mathcal{W}} \left(t \wedge \mathrm{X} \backslash \left[\mathrm{OO} \vee \left(\mathrm{EO} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t' \right) \right] \wedge \left[\mathrm{OO} \vee \left(\mathrm{OE} \wedge \bigvee_{t'' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{U}(t)=\mathrm{D}(t'')} t'' \right) \right] / \mathrm{Y} \right)$$

$$\alpha_{\mathrm{EO}} := \mathrm{EO} \wedge \neg \mathrm{EE} \wedge \neg \mathrm{OE} \wedge \neg \mathrm{OO} \wedge \neg(\mathrm{EE}^c / \mathrm{Y}') \wedge \bigvee_{t \in \mathcal{W}} \left(t \wedge \mathrm{X} \backslash \left[\mathrm{EO} \vee \left(\mathrm{OO} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t' \right) \right] \wedge \left[\mathrm{EO} \vee \left(\mathrm{EE} \wedge \bigvee_{t'' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{U}(t)=\mathrm{D}(t'')} t'' \right) \right] / \mathrm{Y} \right)$$

直观来说，对于模型 $\mathfrak{M}$ 中的特殊“坐标”点 m，n，m，n $\Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$ 表示：(a) m和 n分别对应偶数 x坐标和偶数 y坐标 [，即 ee ¬oe ¬oo ¬eo]，；(b) x坐标可以递增，从而到达（奇数，偶数）[，即 ¬(x'\oe^c)]，；以及 (c) 这里放置了某个砖块 $t \in$ ——根据砖块的定义，这里恰好放置一个砖块——满足：(i) x坐标递增意味着到达（奇数，偶数），那里放置着唯一的砖块 t'，其左边与 t 的右边相匹配；(ii) y坐标递增意味着到达（偶数，奇数），那里有唯一的砖块 t''，其下边与 t 的上边相匹配。

最后，对于任意命题变量 p，我们令 $\alpha := \alpha_{\mathrm{EE}} \vee \alpha_{\mathrm{OE}} \vee \alpha_{\mathrm{OO}} \vee \alpha_{\mathrm{EO}}$ 且

$$\phi_{\mathcal{W}} := \left[\neg(\mathrm{X}'\backslash \mathrm{OE}^c) \wedge \mathrm{C} \backslash \alpha \wedge \mathrm{C} \backslash \alpha / \mathrm{C} \wedge \alpha / \mathrm{C} \right] \backslash p. \tag{2}$$

L引理 3.7. 设 $\mathcal{W}$ 是一个有限瓦片集，且 $\mathfrak{F}$ 是一个析取关联框架。若 $\mathfrak{F} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$，则 $\mathcal{W}$ 瓦片 $\mathbb{N}^2$.

证明。由于 $\mathfrak{F} \nvdash \phi_{\mathcal{W}}$，存在一个赋值 V，它诱导出一个模型 $\mathfrak{M} := (\mathfrak{F}, V)$，以及一个点 s'，使得 t

$$\mathfrak{M}, s' \nVdash \phi_{\mathcal{W}}.$$

根据 \, 的语义，这意味着，特别是存在某个点 s，使得

$$\mathfrak{M}, s \Vdash \neg(\mathrm{X}'\backslash \mathrm{OE}^c) \wedge \mathrm{C} \backslash \alpha \wedge \mathrm{C} \backslash \alpha / \mathrm{C} \wedge \alpha / \mathrm{C}.$$

由此，我们将证明 W 瓦片化 $\mathbb{N}^2$。证明步骤如下：首先，我们识别元素 $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$，它们位于 $\mathfrak{M}$ 中，并利用它们进一步识别出我们称为 $\mathfrak{M}$ 的“阶梯”元素。我们将 $\mathfrak{M}$ 的这些阶梯元素记为

$$\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \ldots, \langle k, k \rangle, \langle k+1, k \rangle, \ldots,$$

并称它们为阶梯元素，是因为它们将满足以下性质（见图 3）：

(阶梯) $1{,}0 \in x_1 \circ s, 1, 1 \in 1, 0 \circ y_1$,
$2, 1 \in x_2 \circ 1{,}1, \ldots k+1, k \in x_{k+1} \circ k, k$,
$k+1, k+1 \in k+1, k \circ y_{k+1}, \ldots$

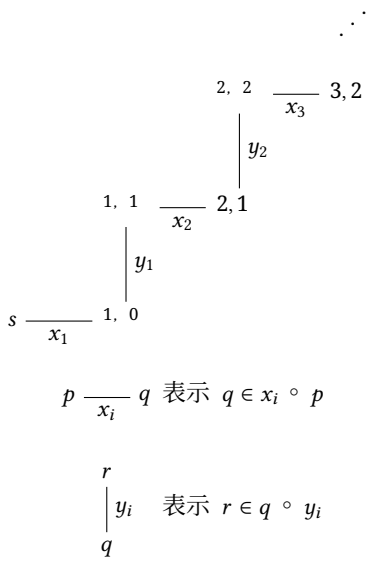


图 3. 网格点阶梯。

接下来，根据阶梯和结合性，我们得到一个完整的元素网格 $m, n \in \mathfrak{M}$，对所有的 $m, n \in \mathbb{N}$ 都成立。[4] 最后，我们将平面上的点 $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ 与对应的网格点 $m, n \in \mathfrak{M}$ 关联起来，并且铺砌 $\mathbb{N}^2$ 由在 $m, n \in \mathfrak{M}$ 处满足的瓦片公式 $t \in \mathrm{W}$ 决定（即 $\mathfrak{M}, m, n \Vdash t$）。

我们先证明上面的“（stair）”命题。我们将对序列进行归纳法

（阶梯）$1{,}0 \in x_1 \circ s1, 1 \in 1, 0 \circ$
$y_1 2{,}1 \in x_2 \circ 1, 1 \ldots k + 1, k \in x_{k+1} \circ$
$k, k\ k + 1, k + 1 \in k + 1, k \circ y_{k+1} \ldots$

同时证明序列中所有点都满足以下性质：

$x_i \Vdash \mathrm{x}'$, $y_i \Vdash \mathrm{y}' 2i$,
$2i \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}} 2i + 1$, $2i$
$\Vdash \alpha_{\mathrm{OE}} 2i + 1$, $2i + 1$
$\Vdash \alpha_{\mathrm{OO}} 2i$, $2i + 1$
$\Vdash \alpha_{\mathrm{EO}} \circ$

[4] 事实上，我们将不定义点 $\langle 0, 0 \rangle$。我们本可以将其纳入其中，方法是让 $\phi_{\mathcal{W}}$ 变得更复杂，或者更改我们的构造/命名约定。无论现在，铺砌除(0,0) 之外的所有区域，显然等价于铺砌整个象限。

g

对于归纳基，由于 $s \Vdash \neg(\mathrm{x}'\backslash \mathrm{oe}^c)$，我们有

$$s \nVdash \mathrm{x}'\backslash \mathrm{oe}^c.$$

这必须由某些点来见证，我们将它们记作 x_1 和 1,0，即，

$$\langle 1,0\rangle \in x_1 \circ s \text{ and } x_1 \Vdash \mathrm{x}', \text{ but } \langle 1,0\rangle \nVdash \mathrm{oe}^c.$$

由于 $x_1 \Vdash \mathrm{x}'$，特别地，我们有 $x_1 \Vdash \mathrm{c}$。结合 $s \Vdash \mathrm{c}\backslash\alpha$ 和 $1,0 \in x_1 \circ s$，可得

$$\langle 1,0\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{ee}} \vee \alpha_{\mathrm{oe}} \vee \alpha_{\mathrm{oo}} \vee \alpha_{\mathrm{eo}}.$$

但我们已证明 $1,0 \nVdash \mathrm{oe}^c$，因此 $1,0 \nVdash \alpha_{\mathrm{ee}} \vee \alpha_{\mathrm{oo}} \vee \alpha_{\mathrm{eo}}$，所以

$$\langle 1,0\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{oe}},$$

由此完成了归纳基的证明。

归纳步骤分为四种情况，即我们是否假设归纳假设成立 to

(i) $2k+1, 2k \in x_{2k+1} \circ _$
(ii) $2k+1, 2k+1 \in _ \circ y_{2k+1}$
(iii) $2k, 2k-1 \in x_{2k} \circ _$ 或
(iv) $2k, 2k \in _ \circ y_{2k}$.

我们证明第一种情况，其他情况类似。因此，我们假设对于某个 $k \geq 0$，归纳假设对序列成立

$$1,0 \in x_1 \circ s. ..2k+1, 2k$$
$$\in x_{2k+1} \circ 2k, 2k.$$

（如果 $k = 0$，这就只是作归纳基假设）。根据归纳假设，我们有 $2k+1, 2k \Vdash \alpha_{\mathrm{oe}}$, 因此特别有

$$\langle 2k+1, 2k\rangle \Vdash \neg(\mathrm{oo}^c/\mathrm{y}').$$

Th我们，$2k+1, 2k \nVdash \mathrm{oo}^c/\mathrm{y}'$。这必须由某些点作为见证，记为 y_{2k+1}和 $2k+1, 2k+1$，因此

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \in \langle 2k+1, 2k\rangle \circ y_{2k+1} \text{ and } y_{2k+1} \Vdash \mathrm{y}',$$

但 $2k+1, 2k+1 \nVdash \mathrm{oo}^c$。根据归纳假设，

$$\langle 1,0\rangle \in x_1 \circ s$$
$$\langle 1,1\rangle \in \langle 1,0\rangle \circ y_1$$
$$\langle 2,1\rangle \in x_2 \circ \langle 1,1\rangle$$
$$\ldots$$
$$\langle 2k+1, 2k\rangle \in x_{2k+1} \circ \langle 2k, 2k\rangle$$

以及刚刚证明的

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \in \langle 2k+1, 2k\rangle \circ y_{2k+1},$$

通过反复应用结合性，我们推导出

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \in x_{2k+1} \circ \cdots \circ x_2 \circ x_1 \circ s \circ y_1 \circ y_2 \circ \cdots \circ y_{2k+1}.$$

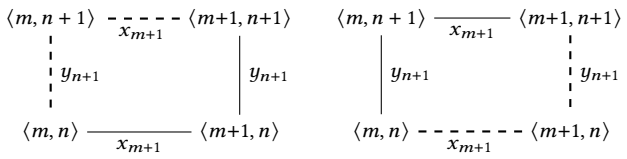


图 4. 新增点： $m \leq n$ （左）和 $m > n$ （右）。

因此，存在点 x 和 y 使得

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \in x \circ s \circ y$$

and

$$x \in x_{2k+1} \circ \cdots \circ x_2 \circ x_1, \quad y \in y_1 \circ y_2 \circ \cdots \circ y_{2k+1}.$$

通过另一次归纳法，利用 $x_i \Vdash \mathsf{c} \wedge \mathsf{c}\backslash\mathsf{c}$ 和 $y_i \Vdash \mathsf{c} \wedge \mathsf{c}\backslash\mathsf{c}$，便可推出

$$x \Vdash \mathsf{c} \text{ and } y \Vdash \mathsf{c}.$$

因此，如同在归纳基中，由 $s \Vdash \mathsf{c}\backslash\alpha/\mathsf{c}$ 和 $2k+1, 2k+1 \in x \circ s \circ y$，我们可推出

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \Vdash \alpha.$$

由于 $2k+1, 2k+1 \nVdash \mathsf{oo}^c$，我们有 $2k+1, 2k+1 \nVdash \alpha_{\mathrm{EE}} \vee \alpha_{\mathrm{OE}} \vee \alpha_{\mathrm{EO}}$，因此

$$\langle 2k+1, 2k+1\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}.$$

至此完成归纳步骤，并确立了阶梯的必要性质。（请注意，并未断言点 m, n 彼此不同；而下文也不需要这一点。）

接下来，我们从阶梯元素出发，沿两个方向构造完整的网格：左上方（阶梯上方）和右下方（阶梯下方）；见图4。

对于 $m \leq n$，若 $m+1, n \in x_{m+1} \circ m, n$ 且 $m+1, n+1 \in m+1, n \circ y_{n+1}$，则 $m+1, n+1 \in (x_{m+1} \circ m, n) \circ y_{n+1}$，因此根据结合性，$m+1, n+1 \in x_{m+1} \circ (m, n \circ y_{n+1})$；也就是说，存在一点，我们记作 $m, n+1$，使得 $m, n+1 \in m, n \circ y_{n+1}$ 且 $m+1, n+1 \in x_{m+1} \circ m, n+1$。

同样，对于 $m > n$，如果 $m, n+1 \in m, n \circ y_{n+1}$ 并且 $m+1, n+1 \in x_{m+1} \circ m, n+1$，那么存在一点，记作 $m+1, n$，使得 $m+1, n \in x_{m+1} \circ m, n$，并且 $m+1, n+1 \in m+1, n \circ y_{n+1}$.

注意，对于网格中的所有点，我们都有：

$$\langle m+1, n\rangle \in x_{m+1} \circ \langle m, n\rangle \text{ and } \langle m, n+1\rangle \in \langle m, n\rangle \circ y_{n+1}.$$

事实上，根据其构造，这在阶梯内部成立；而通过新添加元素的递归构造，这一性质也确保在整个网格中成立。

此外，再次利用反复应用的结合性，通过隐式归纳法，我们得到对于所有网格点 m, n，

$$\langle m, n\rangle \in x_m \circ \cdots \circ x_2 \circ x_1 \circ s \circ y_1 \circ y_2 \circ \cdots \circ y_n,$$

其中对于 $m = 0$ 或 $n = 0$， x的列表或 y的列表为空。因此

$$\langle m, n\rangle \in x \circ s \quad \text{or} \quad \langle m, n\rangle \in x \circ s \circ y \quad \text{or} \quad \langle m, n\rangle \in s \circ y,$$

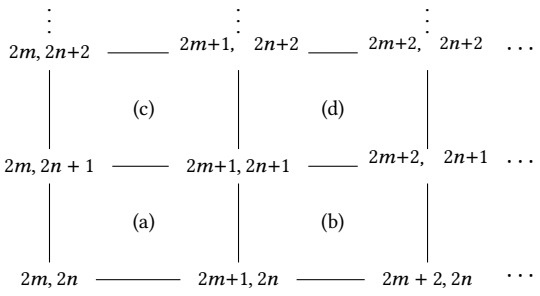


图5. 构造完整的网格点。

其中 $x \in x_m \circ \cdots \circ x_2 \circ x_1$ 且 $y \in y_1 \circ y_2 \circ \cdots \circ y_n$。因此，对于所有网格点$m, n$,

$$\langle m, n\rangle \Vdash \alpha,$$

当所有 i 时， $s \Vdash \mathrm{c}\backslash\alpha \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha/\mathrm{c} \wedge \alpha/\mathrm{c}$、 $x_i \Vdash \mathrm{c} \wedge \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$ 以及 $y_i \Vdash \mathrm{c} \wedge \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$。

我们进一步证明，对于所有网格点：

$$\langle 2m, 2n\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}},$$

$$\langle 2m+1, 2n\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}},$$

$$\langle 2m+1, 2n+1\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}},$$

$$\langle 2m, 2n+1\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{EO}}.$$

我们已经证明了阶梯点满足这一结论，因此接下来只需通过 (a)–(d) 将其推广到其他点（见图 5）：

(a) 如果 $2m, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$ 且 $2m+1, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}$，那么 $2m+1, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}}$ 且 $2m, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{EO}}$.(b) 如果 $2m+1, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}}$ 且 $2m+2, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{EO}}$，那么 $2m+1, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}$ 且 $2m+2, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$.(c) 如果 $2m, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{EO}}$ 且 $2m+1, 2n+2 \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}}$，那么 $2m, 2n+2 \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$ 且 $2m+1, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}$.(d) 如果 $2m+1, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}$ 且 $2m+2, 2n+2 \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$，那么 $2m+2, 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{EO}}$ 且 $2m+1, 2n+2 \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}}$.

由于这些证明类似，我们只证明 (a)——实际上只证明其后件的第一个合取项。因此，假设 (a) 的前件对任意 m， n 都成立。注意， $2m$， $2n \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$ 意味着存在某个 $t \in \mathrm{W}$,

$$\langle 2m, 2n\rangle \Vdash \mathrm{x}\backslash\left[\mathrm{EE} \vee \left(\mathrm{OE} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t'\right)\right]$$

由于还有 $2m+1, 2n \in x_{2m+1} \circ 2m, 2n$ 和 $x_{2m+1} \Vdash \mathrm{x}$，因此我们有

$$\langle 2m+1, 2n\rangle \Vdash \mathrm{EE} \vee \mathrm{OE}.$$

现在反设 $2m+1, 2n \Vdash \mathsf{ee}$。由于 $2m+1, 2n \Vdash \alpha$，可得 $2m+1, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$。因此，$2m+1, 2n+1 \in 2m+1, 2n \circ y_{2n+1}$ 和 $y_{2n+1} \Vdash \mathsf{y}$ 推出

$$\langle 2m+1, 2n+1\rangle \Vdash \mathrm{EE} \vee \mathrm{EO}.$$

这与假设矛盾，因此 $2m+1,\ 2n+1 \Vdash \alpha_{\mathrm{OO}}$，故 $2m+1,\ 2n+1 \Vdash \neg\mathsf{ee} \wedge \neg\mathsf{eo}$。因此，$2m+1,\ 2n \nVdash \mathsf{ee}$，由此

$$\langle 2m+1, 2n\rangle \Vdash \mathrm{OE},$$

这与 $2m+1,\ 2n \Vdash \alpha$ 一起推出

$$\langle 2m+1, 2n\rangle \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}},$$

正如所需。

最后请注意，对于所有网格点 $m,\ n$，由于 $m,\ n \Vdash \alpha$，存在一个 $t \in \mathrm{W}$，使得 $m,\ n \Vdash t$。此外，根据瓦片公式的定义（尤其是其中涉及的否定），这个 t 是唯一的，因为对于每个与 t不同的 t'，$m,\ n \Vdash t$ 都推出 $m,\ n \nVdash t'$。

因此，由下式给出的函数 $\tau\colon\ \mathbb{N}^2 \to \mathrm{W}$

$$\tau : (m,n) \mapsto t \in \mathcal{W} \text{ where } \langle m,n\rangle \Vdash t$$

是良定义的。为证明 τ 是一个铺砌，考虑u_{t_1}, r_{t_4} 其中 t 是一个砖块，且$m', n' \Vdash t$任意；我们将证明$m', n'+1 \Vdash d_{t_1}$以及$m'+1, n' \Vdash l_{t_4}$。我们只证明后者，因为前者的证明类似。不失一般性，假设 m'和 n' 为偶数，因此 $m' = 2m, n' = 2n$。于是$2m, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{EE}}$。根据上面的观察，在$2m, 2n$处至多有一个砖块成立，因此

$$\langle 2m, 2n\rangle \Vdash \mathrm{x} \backslash \Big[\mathrm{EE} \vee \big(\mathrm{OE} \wedge \bigvee_{t' \in \mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t'\big)\Big],$$

也就是说，上述内容是 α_{EE}中与 t对应的$\bigvee_{t \in \mathcal{W}}(t \wedge \cdots)$析取项。因此，由于 $x_{2m+1} \Vdash \mathrm{x}$，$2m+1, 2n \in x_{2m+1} \circ 2m, 2n$且$2m+1, 2n \Vdash \alpha_{\mathrm{OE}}$——因而$2m+1, 2n \Vdash \neg\mathsf{ee}$——我们必有

$$\langle 2m+1, 2n\rangle \Vdash t'$$

对于某个 $t' \in \mathrm{W}$，使得 $\mathrm{R}(t) = \mathrm{L}(t')$，恰如所需。 □

备注 *3.8*。细心的读者或许会想知道，为什么公式EE的析取中还额外出现了两次 α_{EE}，尤其是它们似乎会在两处不必要地增加论证的复杂性。我们在此说明，对于引理 3.7而言，这两处可以省略；但要使引理3.9的陈述成立，就必须保留它们。

引理3.9。设 $\mathcal{W}$ 是一个有限瓦片集。若 $\mathcal{W}$ 瓦片 $\mathbb{N}^2$，则 $(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \cup^c) \nvDash \phi_{\mathcal{W}}$。

证明。对于铺砌 $\tau\colon\ \mathbb{N}^2 \to \mathrm{W}$，回顾注3.3中的框架 $(\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N}) \cup^c)$，其中 $\mathrm{P}_\omega(\mathbb{N})$ 是自然数的有限集的集合，$\circ$ 定义为 $\cup$，而 N 是补运算 ^{c}，因此 $u \in s \circ t \iff u = s \cup t$，且 $s \Vdash \neg\varphi \iff s \nVdash \varphi$。将 $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 记为偶数的集合，将 $2\mathbb{N}+1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 记为该集合

奇数的集合，我们定义如下赋值 V：

$$
\begin{aligned}
V(p) &= \varnothing,\\
V(\mathrm{x}) &= \{\{n\} \mid n \in 2\mathbb{N}\},\\
V(\mathrm{y}) &= \{\{n\} \mid n \in 2\mathbb{N}+1\},\\
V(\mathrm{c}) &= \{X \mid X \neq \varnothing\},\\
V(\mathrm{ee}) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, |X| \text{ is even}, |Y| \text{ is even}\},\\
V(\mathrm{oe}) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, |X| \text{ is odd}, |Y| \text{ is even}\},\\
V(\mathrm{oo}) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, |X| \text{ is odd}, |Y| \text{ is odd}\},\\
V(\mathrm{eo}) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, |X| \text{ is even}, |Y| \text{ is odd}\},\\
V(u_i) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, \mathrm{U}(\tau(|X|,|Y|)) = i\},\\
V(d_i) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, \mathrm{D}(\tau(|X|,|Y|)) = i\},\\
V(l_i) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, \mathrm{L}(\tau(|X|,|Y|)) = i\},\\
V(r_i) &= \{X \cup Y \mid X \subseteq 2\mathbb{N}, Y \subseteq 2\mathbb{N}+1, \mathrm{R}(\tau(|X|,|Y|)) = i\}.
\end{aligned}
$$

提醒读者注意，在此论证中，偶数和奇数有两种不同的用途。它们分别用于编码定义 $V(\mathrm{ee})$、$V(\mathrm{oe})$、$V(\mathrm{oo})$ 和 $V(\mathrm{eo})$ 中的第一和第二坐标；随后，有限集中偶数/奇数元素的基数的奇偶性用于确定相应坐标是偶数还是奇数。另一方面，定义 $V(u_i)$、$V(d_i)$、$V(l_i)$ 和 $V(r_i)$ 背后的直觉，是将一个有限集——唯一地划分为 $X \cup Y$，使得 $X \subseteq 2\mathbb{N}$ 且 $Y \subseteq 2\mathbb{N}+1$——与砖块 $\tau(|X|,|Y|)$ 联系起来。

接下来我们证明

$$(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}), \cup, ^c, V), \varnothing \nVdash \phi_{\mathcal{W}}.$$

由于 $\phi_{\mathcal{W}} := \left[\neg(\mathrm{x}'\backslash \mathrm{oe}^c) \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha/\mathrm{c} \wedge \alpha/\mathrm{c}\right]\backslash p$，并且

$$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \nVdash p,$$

只需证明

$$(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}), \cup, ^c, V), \varnothing \Vdash \neg(\mathrm{x}'\backslash \mathrm{oe}^c) \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha/\mathrm{c} \wedge \alpha/\mathrm{c}.$$

要证明第一个合取项，只需证明

$$(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}), \cup, ^c, V), \varnothing \nVdash \mathrm{x}'\backslash \mathrm{oe}^c.$$

由于 $\mathrm{x}' := \mathrm{x} \wedge \mathrm{c} \wedge \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$，只需注意到

$$\{0\} \Vdash \mathrm{x}' \text{ but } \{0\} \cup \varnothing = \{0\} \nVdash \mathrm{oe}^c.$$

对于第一个命题，根据 $V(\mathrm{c})$ 的定义，c 在任意非空集合上都成立。此外，根据定义，$\{0\} \Vdash \mathrm{c}\backslash\mathrm{c}$ 当且仅当对每个 x，$z \in \mathrm{P}_\omega(\mathbb{N})$：$x \Vdash \mathrm{c}$ 且 $z = x \cup \{0\}$ 蕴含 $z \Vdash \mathrm{c}$。后者显然成立，因为 z 非空。第二个命题可由以下观察得出：$|\{0\} \cap 2\mathbb{N}| = |\{0\}| = 1$ 是奇数，而 $|\{0\} \cap (2\mathbb{N}+1)| = |\varnothing| = 0$ 是偶数。

还需证明

$$(\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}), \cup, ^c, V), \varnothing \Vdash \mathrm{c}\backslash\alpha \wedge \mathrm{c}\backslash\alpha/\mathrm{c} \wedge \alpha/\mathrm{c}.$$

根据 \ 和 / 的语义子句（回忆定义 3.2），结合 $V(\mathrm{c})$的定义，只需证明 $X \Vdash \alpha$对每个有限非空的 X 自然数集合都成立。为此，注意到任意有限非空的自然数集合X都能唯一划分为偶数部分和奇数部分：$X = X_e \cup X_o$，其中 $X_e := X \cap 2\mathbb{N}$ 且 $X_o := X \cap (2\mathbb{N}+1)$。不失一般性，我们假设 $|X_e|$和 $|X_o|$都是偶数。根据这些变量上的赋值，

$$X \Vdash \mathrm{ee} \wedge \neg\mathrm{oe} \wedge \neg\mathrm{oo} \wedge \neg\mathrm{eo}.$$

接下来，我们证明 α_{ee} 中剩余的合取项。为了得到 $X \Vdash \neg(\mathrm{x}'\backslash\mathrm{oe}^c)$，我们考虑一个偶数 n，使得 $n \notin X$，并仿照上面对 $\{0\}$ 的处理进行论证。现在只需证明

$$X \Vdash \bigvee_{t\in\mathcal{W}} \left(t \wedge \mathrm{x}\backslash\left[\mathrm{ee} \vee \left(\mathrm{oe} \wedge \bigvee_{t'\in\mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t'\right)\right] \wedge \left[\mathrm{ee} \vee \left(\mathrm{eo} \wedge \bigvee_{t''\in\mathcal{W}}^{\mathrm{U}(t)=\mathrm{D}(t'')} t''\right)\right]/\mathrm{y}\right).$$

由于 τ 是一个铺砖函数，并且 X 被唯一地划分为偶数部分 X_e 和奇数部分 X_o，我们得到 $X \Vdash t$，其中 t 是砖块 τ（$|X_e|$，$|X_o|$）所对应的公式。现在我们来证明中间的合取项

$$X \Vdash \mathrm{x}\backslash\left[\mathrm{ee} \vee \left(\mathrm{oe} \wedge \bigvee_{t'\in\mathcal{W}}^{\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t'\right)\right]$$

（参数翻译成 根据 \, 的语义子句，只需证明对所有 $n \in \mathbb{N}$:

$$X \cup \{2n\} \Vdash \mathrm{ee} \vee \left(\mathrm{oe} \wedge \bigvee_{t'\in\mathcal{W},\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t'\right)$$

分情况讨论，若$\{2n\} \in X$，则 $X \cup \{2n\} = X \Vdash \mathrm{ee}$。

此外，若$\{2n\} \notin X$，则 $|X_e \cup \{2n\}| = |X_e| + 1$是奇数，因此

$$X \cup \{2n\} = (X_e \cup \{2n\}) \cup X_o \Vdash \mathrm{oe} \wedge \bigvee_{t'\in\mathcal{W},\mathrm{R}(t)=\mathrm{L}(t')} t',$$

因为 $X \cup \{2n\}$比 X多一个偶数——奇数的基数保持不变——因此根据 u_i，d_i，l_i，r_i上的赋值，集合 $X \cup \{2n\}$与砖块 τ（$|X_e|+1$，$|X_o|$）相关联。因此，由于 τ是一个铺砌，τ（$|X_e|$，$|X_o|$）的右边等于 τ（$|X_e|+1$，$|X_o|$）的左边。□

4 对文献中可判定性命题的反驳

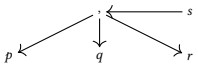
Galmiche 等人 [10] 为分簇蕴涵逻辑建立了语义表列，并在摘要中声称其具有有限模型性质和可判定性。然而，用于确立后者的 TBI′ 表列系统是不完备的。具体而言，经检查，BI 可证公式 $p \wedge (q \vee r) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 在 TBI′ 中没有闭表列。因此，所给系统并不支持该可判定性命题。即便这一不完备性得到解决，我们也同意“摘要中关于已获得可判定性的命题并未得到证实” [24]。

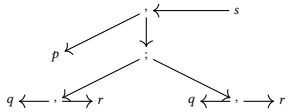
另外两项已发表的可判定性命题采用了束序列演算 LBI_0，该演算由相继式构成$X \Rightarrow A$，其中后件 A 是一个 BI-公式，前件 X 是一个束（见定义2.1）；具体而言，这些工作利用了该演算具有切消去这一事实（例如，见 [8]），并研究反向证明搜索。就本文讨论而言，LBI 的规则$_0$ 与 BI 原始演算（图1）足够相似。

Kaminski 和 Francez [16]声称，证明搜索中相继式里的束的深度——实质上是其语法树某一分支上逗号的最大数量——可以由终相继式中乘性联结词出现的总次数（$*$ 和 $-\!\!*$）所界定。然而，检查关键引理 [16, 引理 53]后可以发现其中存在漏洞：他们为这一界限给出的论证是，分支上的每个逗号都是由某条 $*_L$ 或 $-\!\!*_R$ 规则生成的。但这并不能排除这样的可能性（下文将给出示例）：通过恰当运用收缩，多个逗号可能源自同一个乘性联结词出现。一个更简单的反例来自这样的观察：深度的定义（下文记作 d）取决于分号和逗号的括号排序，因此，由于逗号的结合性，深度可能从结论到前提增加。例如，假设 $\mathsf{d}(Z) > \mathsf{d}(X)$ 且 $\mathsf{d}(Z) > \mathsf{d}(Y)$。那么 $\mathsf{d}((X, Y)\ Z) = \max(\max(\mathsf{d}(X), \mathsf{d}(Y)) + 1, \mathsf{d}(Z)) + 1 = \mathsf{d}(Z) + 1 < \mathsf{d}(Z) + 2 = \max(\mathsf{d}(X), \max(\mathsf{d}(Y), \mathsf{d}(Z)) + 1) + 1 = \mathsf{d}(X, (Y, Z))$。

Galatos 和 Jipsen [8] 从每个束相继式定义一个有向图。有人声称，乘性长度——即沿一条有向路径，在负位置上的 $*$ 和逗号，以及正位置上的 $-\!\!*$ 的数量所能达到的最大值（对所有有向路径取最大值）——从结论（的有向图）到前提（的有向图）不会增加。在他们处理 BI 的论证这一特殊情形中，他们将逗号视为 n 元联结词，而非二元联结词，否则逗号的结合规则（as-c）会违反他们的命题，例如 $((p,\ q)\ r)\ s \Rightarrow t$ 的乘性长度会大于 $(p,\ q), (r,\ s) \Rightarrow t$。然而，将逗号视为 n 元联结词也会带来问题：对于下方左侧的规则实例（采用本文的记法），结论和前提对应的有向图分别如下方中间和右侧所示。前提的乘性长度为 2，结论的乘性长度为 1，这与该命题相矛盾。

$$\frac{p, ((q, r); (q, r)) \Rightarrow s}{p, q, r \Rightarrow s}\ \mathrm{c}$$





反思这些判定分簇蕴涵逻辑的尝试，我们观察到，其总体思路是控制一条分支上乘性联结词/逗号的数量。下面的例子表明，我们不能指望这一点在分簇蕴涵逻辑中成立。为简洁起见，对于左蕴涵规则，仅写下了所关注的前提。此外，$x := (s \mathrel{-\!\!*} 1)$（用于中间 $-\!\!*_L$ 应用）。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{x, (x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow q}\ -\!\!*_R}{(x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow x \mathrel{-\!\!*} q}\ \to_L}{((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c); (x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow q}\ -\!\!*_L}{(a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c)); (x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow q}\ 1_L}{(1, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))); (x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow q}\ -\!\!*_L}{(x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))); (x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c))) \Rightarrow q}\ \mathrm{c}}{x, (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c)) \Rightarrow q}\ -\!\!*_R}{a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c) \Rightarrow x \mathrel{-\!\!*} q}\ \to_L}{(a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c)); ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c) \Rightarrow q}\ -\!\!*_L}{(a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c)); (a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c)) \Rightarrow q}\ \mathrm{c}}{a \mathrel{-\!\!*} ((x \mathrel{-\!\!*} q) \to c) \Rightarrow q}$$

通过在反向证明搜索中反复使用这一演绎，可以得到一个相继式，它带有束 $x,(x,(\ldots,(x,(a \multimap ((x \multimap q) \multimap c)))\ldots))$，其中包含一条带有任意多个逗号的分支。

5 引理的证明 3.4和引理3.5

引理 3.4 的证明遵循（Priestley 风格）对偶理论中的标准论证（例如，参见 [29]）。对于单独的分簇蕴涵逻辑的不可判定性，熟悉 UDMF语义的读者可以改用引理 3.5 。

引理 3.4（重述）。如果语言 $\{\wedge, \vee, \neg, \backslash, /\}$ 中的公式可被一个析取分配剩余格反驳，那么它在一个析取关联框架中也不成立。

证明。对于一个析取分配剩余格 $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \top, \bot, \neg, \cdot, \backslash, /)$，考虑三元组 $(X_{\mathbf{A}}, \circ, N)$，其中

- $X_{\mathbf{A}}$ 是A的格还原的素滤子的集合。[5]
- $N\colon \mathrm{P}(X_{\mathbf{A}}) \to \mathrm{P}(X_{\mathbf{A}})$ 定义如下

$$N(Y) := \begin{cases} \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid \neg a \in x\} & \text{if } Y = \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid a \in x\} \text{ for some } a \in A \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\circ : X_{\mathbf{A}} \times X_{\mathbf{A}} \to \mathrm{P}(X_{\mathbf{A}})$ 定义如下 $x \circ y := \{z \in X_{\mathbf{A}} \mid \forall a \in x, b \in y\colon a \cdot b \in z\}$.

对于 $x, y \in X_{\mathbf{A}}$，我们定义 $xy := \{a \cdot b \mid a \in x, b \in y\}$，因此 $x \circ y = \{z \in X_{\mathbf{A}} \mid xy \subseteq z\}$。我们声称（$X_{\mathbf{A}}, \circ, N$）是一个析取关联框架。首先，注意到 N定义良好，因为根据素滤子定理，函数 $A \ni a \mapsto \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid a \in x\}$是单射，即$\{x \in X_{\mathbf{A}} \mid a \in x\} = \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid b \in x\}$蕴含 $a = b$。其次，要证明 N是不相交运算，只需观察到$\{x \in X_{\mathbf{A}} \mid a \in x\} \cap \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid \neg a \in x\} = \varnothing$：如果 $a, \neg a \in x \in X_{\mathbf{A}}$，那么 $\bot = a \wedge \neg a \in x$，这与 x 是适当的这一事实矛盾。

第三也是最后一点，我们证明 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$。每当 $w \in (x \circ y) \circ z$ 时，也就是说，如果存在一个素滤子 u，使得$u \in x \circ y$且 $w \in u \circ z$（即，使得 $xy \subseteq u$和 $uz \subseteq w$），我们就必须证明 $w \in x \circ (y \circ z)$；也就是说，存在一个素滤子 v，使得 $w \in x \circ v$且 $v \in y \circ z$（即，使得 $xv \subseteq w$和 $yz \subseteq v$）。注意，对于滤子 v，条件$yz \subseteq v$等价于 $yz \subseteq v$，其中 yz 表示由 yz 生成的滤子；因此，给定 $w \in (x \circ y) \circ z$，我们考虑集合

$$F := \{v' \text{ is a proper filter on } \mathbf{A} \mid xv' \subseteq w \text{ and } yz \subseteq v'\}$$

并将应用佐恩引理来得到所需的素滤子 v。为说明 F 非空，我们证明滤子yz是正规的，并且 $xyz \subseteq w$。它是正规的，否则 $\bot \in yz$就意味着 $\bot$ 大于 yz中某些元素的下确界，也就是说，存在 $b_1, \ldots\ldots, b_n \in y$，$c_1, \ldots\ldots, c_n \in z$使得$\bigwedge_{1 \le i \le n} b_i \cdot c_i = \bot$。这将导致矛盾 $\bot \in w$，因为 $(\top \cdot \bigwedge_{1 \le i \le n} b_i) \in xy \subseteq u$并且

$$w \supseteq uz \ni \left(\top \cdot \bigwedge_{1 \le i \le n} b_i\right) \cdot \bigwedge_{1 \le i \le n} c_i \overset{\text{(as.)}}{=} \top \cdot \left(\bigwedge_{1 \le i \le n} b_i \cdot \bigwedge_{1 \le i \le n} c_i\right) \overset{\text{(mon.)}}{\le} \top \cdot \bigwedge_{1 \le i \le n} b_i \cdot c_i = \top \cdot \bot = \bot,$$

其中 (mon.) 指的是·的单调性，而它与最后一个等式均由剩余性质推出。要看出 $xyz \subseteq w$，注意到 $xyz \subseteq uz \subseteq w$，因此 $xyz \subseteq xyz \subseteq w = w$。

因此 F非空。由于对于 F 中的每条链 $v'_1 \subseteq v'_2 \subseteq \cdots$，$\bigcup v'_i \in F$，由佐恩引理可知，偏序集 $(F, \subseteq)$ 存在极大元 $v \in F$。由于 $v \in F$，接下来只需证明 v是素的；我们假设 $d \notin v$并

[5]回顾一下，对于格$(L, \wedge, \vee)$，素滤子 x是一个非空真子集 $\varnothing \neq x \subseteq L$，满足：(i) $a \wedge b \in x$当且仅当 $a \in x$和 $b \in x$；(ii) $a \vee b \in x$当且仅当 $a \in x$或 $b \in x$。

$e \notin v$，我们将证明 $d \vee e \notin v$。我们有 $yz \subseteq v \subseteq v \cup \{d\}$，并且根据极大性，$v \cup \{d\} \notin F$，因此 $xv \cup \{d\} \not\subseteq w$或 $v \cup \{d\}$ 不是一个真子集，此时 $\bot \in v \cup \{d\}$，从而 $\bot \in x\{\bot\} \subseteq xv \cup \{d\}$；由于 $\bot \notin w$，两种情况下我们都得到 $xv \cup \{d\} \not\subseteq w$，也就是说，存在 $d_x \in x$和 $d_v \in v$使得 $d_x \cdot (d_v \wedge d) \notin w$。同理，存在 $e_x \in x$和 $e_v \in v$使得$e_x \cdot (e_v \wedge e) \notin w$。因此，根据 $\cdot$ 的可加性以及 w 的素性，

$$\begin{aligned}(d_x \wedge e_x) \cdot [(d_v \wedge e_v) \wedge (d \vee e)] &= (d_x \wedge e_x) \cdot [(d_v \wedge e_v) \wedge d] \vee (d_x \wedge e_x) \cdot [(d_v \wedge e_v) \wedge e] \\ &\leq d_x \cdot (d_v \wedge d) \vee e_x \cdot (e_v \wedge e) \notin w.\end{aligned}$$

因此，由于 $d_x \wedge e_x \in x$和 $v \in F$，我们有$(d_v \wedge e_v) \wedge (d \vee e) \notin v$，从而由于 $d_v \wedge e_v \in v$，我们有 $d \vee e \notin v$，符合要求。这证明了$(x \circ y) \circ z \subseteq x \circ (y \circ z)$。其逆命题可类似地证明。因此我们得出结论：$(X_{\mathbf{A}}, \circ N)$是一个析取关联框架。

现设 φ 是语言$\{\wedge, \vee, \neg, \backslash, /\}$中的一个公式，并假设$\mathbf{A} \not\models \varphi$，即存在一个从公式代数到$\mathbf{A}$ 的同态 h，使得 $h(\varphi) \neq \top$。则 $\mathfrak{M} = (X_{\mathbf{A}}, \circ N, V_h)$是一个析取关联模型，其中

$$V_h(p) := \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid h(p) \in x\}.$$

归纳法表明，对于所有 $x \in X_{\mathbf{A}}$ 以及语言$\{\wedge, \vee, \neg, \backslash, /\}$中的公式 α，

$$\|\alpha\| = \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid h(\alpha) \in x\}.$$

基例由定义可得；$\vee$，$\wedge$ 由素滤子的定义性质可得；$\neg$ 由定义可得，因为 $\|\neg\alpha\| = N(\|\alpha\|)$ 归纳假设 $= N(\{x \in X_{\mathbf{A}} \mid h(\alpha) \in x\}) = \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid \neg h(\alpha) \in x\} = \{x \in X_{\mathbf{A}} \mid h(\neg\alpha) \in x\}$。最后，剩余算子归纳步骤中的“$\supseteq$”很容易推出，但反向则不那么简单，因此我们在此为 $\backslash$ 证明这一点。

因此，假设逆否命题成立，即 $h(\alpha)\backslash h(\beta) = h(\alpha\backslash\beta) \notin y$；我们要证明 $y \not\Vdash \alpha\backslash\beta$，也就是说，找出素滤子 x, z使得 $z \in x \circ y, x \Vdash \alpha$和 $z \not\Vdash \beta$。我们定义滤子

$$z_0 := \langle h(\alpha) y \rangle = \{a \in A \mid \exists b \in y : a \geq h(\alpha) \cdot b\}.$$

注意，$h(\beta) \notin z_0$，否则就会有某个 $b \in y$ 使得 $h(\alpha) \cdot b \leq h(\beta)$，由此根据剩余$y \ni b \leq h(\alpha)\backslash h(\beta)$，这将与 $h(\alpha) \backslash h(\beta) \notin y$矛盾。因此，根据素滤子定理，存在 $z \in X_{\mathbf{A}}$ 使得$z_0 \subseteq z \not\ni h(\beta)$，由此根据归纳假设 $z \not\Vdash \beta$。接下来，注意到 $x_0 := \{a \in A \mid a \geq h(\alpha)\}$ 是一个真滤子：它显然是一个滤子；它还是真滤子，因为 (i) 根据剩余，$\top \leq \bot \backslash h(\beta)$ 成立；(ii) $h(\alpha)\backslash h(\beta) \notin y$。因此，运用与之前相同的佐恩引理论证，我们得到一个素滤子 $x \supseteq x_0$，使得 $x \circ y \ni z$。因此，由归纳假设可知，$h(\alpha) \in x_0 \subseteq x$蕴含 $x \Vdash \alpha$，所以我们有 $y \not\Vdash \alpha\backslash\beta$，如所求。

最后，由于 $h(\varphi) \neq \top$，存在一个素滤子 x s.t. $h(\varphi) \notin x$，因此 $x \not\Vdash \varphi$ so $\mathfrak{M} \not\models \varphi$，从而完成了该引理的证明。 □

注 *5.1*。先前论证中使用选择原则（用来从真滤子构造素滤子），可能会令读者担忧：分簇蕴涵逻辑 BI 的不可判定性（以及更一般地，定理 2.10）是否可能独立于 ZF。其实不必担心。简言之，这里的情况与 ZF 和一阶逻辑的情况完全相同：对于可数语言，ZF 能证明一阶逻辑的完备性和紧致性（因为这些语言无需选择公理即可良序化），但对于任意语言则不能。

更具体地说，如果语言 $\{\wedge, \vee, \neg, \backslash, /\}$ 中的一个公式被某个析取分配剩余格所否证，那么它尤其也被我们语言上的林登鲍姆–塔斯基代数所否证。由于不借助选择公理也能良序化我们的语言，这个代数也能良序化。因此，在前一个引理中，将真滤子扩张为素滤子的过程——对于

这个特定代数——可以通过林登鲍姆引理的通常递归构造来完成，而无需选择公理（之所以可行，正是因为我们有一个良序）。换句话说，选择公理只在 Stone 式表示中才需要，而完备性并不需要。

引理 3.5（重述）。如果语言 $\{\wedge, \vee, \neg, -\!\!*\}$ 中的某个公式被一个 *BI*代数反驳，那么它在某个析取关联框架中不成立。

证明。假设 $\nvdash \top \Rightarrow \varphi$。那么根据完备性，[6] 存在一个向上和向下封闭的幺半群模型 $(S, \preccurlyeq, \circ\ E, V)$，使得 $s \in S(S, \preccurlyeq, \circ\ E, V)$ $s \nVdash \varphi$。我们断言， $\mathfrak{M} := (S, \circ\ N, V)$，其中 $N(X) := (\downarrow X)^c := \{s \in S \mid \forall s' \in X \text{s.t. } s \preccurlyeq s'\}^c$，是一个析取关联模型。无需逐一列出对 $(S, \preccurlyeq, \circ\ E, V)$ 施加的所有条件，只需注意 $\circ : S \times S \to \mathrm{P}(S)$ 是结合的；$\preccurlyeq$ 是自反的；并且赋值 V 尤其是一个函数$V\colon P \to \mathrm{P}(S)$。此外，在此语义中， $\neg$ 的子句就是直觉主义否定 $\|\neg\alpha\| := (\downarrow\|\alpha\|)^c$，因此$\|\alpha\| \cap \|\neg\alpha\| = \varnothing$（因为 $\preccurlyeq$是自反的）。由此可知， $\mathfrak{M} = (S, \circ\ N, V)$ 是一个析取关联模型。因此，由于此 BI 语义中的 $\wedge, \vee, -\!\!*$ 子句与我们的语义相同，我们得到 $\mathfrak{M}, s \nVdash \varphi$，证毕。□

致谢

Knudstorp 部分获得了 MOSAIC项目（H2020-MSCA-RISE-2020，101007627）的资助，部分获得了 Nothing is Logical（NihiL）项目（NWO OC 406.21.CTW.023）的资助。Ramanayake 部分获得了奥地利科学基金（FWF）项目 P33548 以及荷兰研究委员会（NWO）项目 OCENW.M.22.258 的资助。

参考文献

[1] R. Berger，《多米诺问题的不可判定性》，《美国数学会回忆录》系列。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1966年，第66卷。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1090/memo/0066[2] S. Brookes，“《并发分离逻辑的语义》”，Theoretical Computer Science，第375卷，第1-3期，第227–270页，2007年4月。[在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2006.12.034[3] S. Brookes 和 P. W. O’Hearn，“并发分离逻辑”，《ACM SIGLOG 新闻》，第3卷，第3期，第47–65页，2016年8月。[在线]。可访问：http://doi.acm.org/10.1145/2984450.2984457[4] J. Brotherston 和 M. Kanovich，“《命题分离逻辑及其相关逻辑的不可判定性》”，《ACM学报》，第61卷，第2期，第14:1–14:43页，2014年4月。[在线]。可访问：http://doi.acm.org/10.1145/2542667[5] J. Brotherston 和 M. I. Kanovich，“《命题分离逻辑及其相关逻辑的不可判定性》”，载于《第25届年度 IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS）论文集》，2010年，第130–139页。[在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1109/LICS.2010.24[6] C. Calcagno 和 D. Distefano，“Infer：用于 C 程序内存安全的自动程序验证器”，载于《第三届 NASA形式化方法国际研讨会（NFM）论文集》，M. Bobaru、K. Havelund、G. J. Holzmann 和 R. Joshi 编，柏林、海德堡，2011年，第459–465页。[在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-20398-5_33[7] S. Docherty 和 D. Pym，“分离逻辑的 Stone型对偶”，《计算机科学中的逻辑方法》，第15卷，第1期，2019年3月。[在线]。可访问：https://lmcs.episciences.org/3984[8] N. Galatos 和 P. Jipsen，“分配剩余框架与广义捆束蕴涵代数”，《普遍代数》，第78卷，第303–336页，2017年。[9] N. Galatos、P. Jipsen、T. Kowalski 和 H. Ono，《剩余格：次结构逻辑的代数一瞥》，《逻辑与数学基础研究》系列。Elsevier，2007年，第151号。[10] D. Galmiche、D. Méry 和 D. J. Pym，“《BI与资源表列的语义》”，《计算机科学中的数学结构》，第15卷，第6期，第1033–1088页，2005年。[在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1017/S0960129505004858[11] Infer，“一种在发布前检测 java 和 c/c++/objective-c 代码中错误的工具。”[在线]。可访问：https://fbinfer.com/[12] S. S. Ishtiaq 和 P. W. O’Hearn，“《作为可变数据结构断言语言的BI》”，载于《POPL 2001会议记录：第28届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会》，英国伦敦，2001年1月17日至19日，C. Hankin 和 D. Schmidt 编。ACM，2001年，第14–26页。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1145/360204.375719[13] P. Jipsen 和 T. Litak，《捆绑蕴涵与分离逻辑的代数一瞥》。瑞士尚佩里：Springer International Publishing，2022年，第185–242页。[在线]。可访问：https://doi.org/10.1007/978-3-030-76920-8_5[6]参见

, e.g., [7] 关于向上和向下封闭的幺半群模型与框架。

[14] B. Jónsson 和 C. Tsinakis，“作为剩余布尔代数的关系代数”，Algebra Univeralis，第 30 卷，第 4 期，第 469–478 页，1993年。[15] B. Jónsson 和 A. Tarski，“带算子的布尔代数。第一部分”，American Journal of Mathematics，第 73 卷，第 4 期，第 891–939 页，1951 年。 [在线]。可访问：http://www.jstor.org/stable/2372123[16] M. Kaminski 和 N. Francez，“扩展了直觉主义命题逻辑的 Lambek 演算”，Stud Logica，第 104 卷，第 1051–1082 页，2016 年。[17] S. B. Knudstorp，“Relevant S 不可判定”，载于第 39 届 ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集（LICS ’24）。爱沙尼亚塔林：ACM，2024 年，第 1–8 页。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1145/3661814.3662128[18] ——，“菱形与多米诺骨牌：结合模态逻辑的不可能性结果”，2025 年，审稿中。[19] M. Kozak，“分配全Lambek演算具有有限模型性质”，Studia Logica，第 91 卷，第 2 期，第 201–216 页，2009 年。 [在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1007/s11225-009-9172-7[20] Á. Kurucz、I. Németi、I. Sain 和 A. Simon，“具有二元模态的可判定与不可判定逻辑”，Journal of Logic, Language, and Information，第 4 卷，第 3 期，第 191–206 页，1995 年。 [在线]。可访问：http://www.jstor.org/stable/40180071[21] D. Larchey-Wendling 和 D. Galmiche，“通过相位语义证明布尔BI的不可判定性”，载于第 25 届 IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS）论文集，2010 年，第 140–149 页。 [在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1109/LICS.2010.18 [22] P. Lincoln、J. C. Mitchell、A. Scedrov 和 N. Shankar，“命题线性逻辑的判定问题”，Ann. Pure Appl. Log.，第 56 卷，第 1–3 期，第 239–311 页，1992年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1016/0168-0072(92)90075-B[23] P. W. O’Hearn 和 D. J. Pym，“分簇蕴涵逻辑”，The Bulletin of Symbolic Logic，第 5 卷，第 2 期，第 215–244 页，1999年。 [在线]。可访问：http://www.jstor.org/stable/421090[24] D. Pym，“关于分簇蕴涵逻辑完备性的较新论文综述”，https://www.cantab.net/users/david.pym/BI- completeness-papers.pdf，2025 年，访问日期：2026-01-03。[25] D. J. Pym、P. W. O’Hearn 和 H. Yang，“可能世界与资源：BI的语义”，Theoretical Computer Science，第 315 卷，第 1 期，第 257–305 页，2004 年。 [在线]。可访问：http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397503006248[26] D. Pym，《分簇蕴涵逻辑的语义与证明理论》，应用逻辑丛书。Kluwer Academic Publishers，2002 年，第 26 卷。[27] J. C. Reynolds，“关于共享可变数据结构的直觉主义推理”，载于 Millennial Perspectives in Computer Science。Palgrave，2000 年，第 303–321 页。[28] ——，“分离逻辑：一种用于共享可变数据结构的逻辑”，载于第 17 届 IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS）论文集，2002 年，第 55–74 页。 [在线]。可访问：http://dx.doi.org/10.1109/LICS.2002.1029817[29] A. Urquhart，“相关逻辑代数的对偶性”，Studia Logica，第 56 卷，第 1–2 期，第 263–276 页，1996 年，Priestley对偶专题。[30] ——，“相关逻辑中判定过程的复杂性 II”，J. Symb. Log.，第 64 卷，第 4 期，第 1774–1802 页，1999年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.2307/2586811[31] H. Wang，“判定问题的 ∀∃∀ 情形”，载于《自动机数学理论》，1963 年，第 23–55 页。

从与分支计数器机器的接受问题出发的归约

我们通过对与分支计数器机器（ACM）的接受问题进行归约，确立了分簇蕴涵逻辑的不可判定性。同一问题曾被用于证明命题线性逻辑的不可判定性 [22]；与此同时，扩张型与分支计数器机器的接受问题曾被用于确立 $\mathbf{FL_{ec}}$ [30]的非原始递归下界，亦称为**LR**。此处的证明相较而言有两点新颖之处：（i）引入一种新颖的编码，以驯服结构上更为丰富的直觉主义收缩，从而按需复制机器指令；（ii）完备性论证——即从作为该归约实例的 BI 定理的证明中读出计算树——采用经由代数剩余框架的语义论证（从而使我们得以避免繁复的证明论分情况讨论）。

本附录自成体系。与分支计数器机器在第A.1节引入。归约函数，以及将计算模拟为分簇蕴涵逻辑中的证明（即归约的可靠性），在第A.2节给出。对剩余框架的回顾以及与分支计数器机器的代数表示见第A.4节。我们最后以剩余框架对可靠性的论证（第A.3节）以及对完备性的论证（第A.5节）作结。

A.1 与分支计数器机器（AC M)

经过对 [22, 30], a k-ACM $M = (Q、 R_k、 I、 q_f)$ 进行轻微的符号调整后，它是一个元组，其中 Q是一个状态有限集， $R_k = \{r_1、 \ldots\ldots、 r_k\}$ 是一个 k命题变量集， I是一个指令有限集，而 $q_f \in Q$是一个指定的

终止状态。每条指令都是递增 指令 $q \multimap (q' * r_i)$、递减 指令 $(q * r_i) \multimap q'$，或分叉 $q \multimap (q' \vee q'')$，其中 $\{q$、q'、$q''\} \subseteq Q$和 $r_i \in R_k$。

一个 M 的配置是一个公式 qR，其中 $q \in Q$，而 R 是取自 R_k的变量的有限乘积，并视交换性而定，或为单位元 1。我们有时将 $q1$ 写作 q。r_i在 R中的出现次数被解释为第 i个寄存器的值。随后，我们将配置编码为相继式中的多重集，该多重集由 qR中每个命题变量的出现次数得到。我们用 r^n 表示 n 个 r的乘积。这些记法之间存在显然的双射翻译。

一个计算树按通常方式定义为一棵树，其节点标记为配置，并且每个节点的子节点（每个节点可以有零个、一个或两个子节点）的标记，都是通过对其父节点的标记应用某条指令得到的。具体而言，如果标记为 C的节点有一个标记为 C' 的子节点（我们将这一事实记为 $C \rightsquigarrow C'$），那么或者

(increment) $C = qr_1^{n_1} \cdots r_i^{n_i} \cdots r_k^{n_k}, C' = q' r_1^{n_1} \cdots r_i^{n_i+1} \cdots r_k^{n_k}$, for some $q \multimap (q' * r_i) \in I$, or
(decrement) $C = qr_1^{n_1} \cdots r_i^{n_i+1} \cdots r_k^{n_k}, C' = q' r_1^{n_1} \cdots r_i^{n_i} \cdots r_n^{n_k}$, for some $(q * r_i) \multimap q' \in I$,

并且，如果一个标记为 C的节点有两个子节点，分别标记为 C' 和 C''（记作 $C \rightsquigarrow C' \vee C''$），那么

（分叉） $C = qR, C' = q'R, C'' = q''R$，对于某个 $q \multimap (q' \vee q'') \in I$。

如果存在一棵计算树，其根节点标记为 C 且每个叶节点都标记为q_f，则 ACM接受配置 C。

定理 A.1（Lincoln 等人， 1992 [22]）。存在一个2-*ACM*，其接受问题是不可判定的。

A.2 从与分支计数器机器归约（编码的可靠性）

给定一个 ACM $M = (Q, R_k, I, q_f)$，我们定义

$$i := \bigwedge I, \qquad t := (i \multimap q_f) \to q_f, \qquad \theta := (\top \multimap t) \wedge 1.$$

令 qR 为任意配置。我们证明如下归约。

$$M \text{ accepts } qR \text{ iff } q, R, \theta \Rightarrow q_f \text{ is provable in BI}$$

可证性使用通常的序列演算 LBI [10, 26]来定义。我们将自由使用 LBI [8, 26] 的切消去定理，该定理指出每个可证明的相继式都有一个无割证明。

从左到右的方向（可靠性）使用证明规则来模拟机器指令，并由此促成了 θ的定义。具体而言，设 T 是一棵计算树，其根标记为 qR，每个叶节点标记为q_f，1。通过对 T 的高度进行归纳法，得到一个 LBI 证明。基例：T 是一个标记为q_f的单节点。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q_f \Rightarrow q_f}}{q_f, \varnothing_\times \Rightarrow q_f} \equiv}{q_f, 1 \Rightarrow q_f} 1_L}{q_f, ((\top \multimap t); 1) \Rightarrow q_f} \mathrm{w}}{q_f, \theta \Rightarrow q_f} \wedge_L$$

归纳情形。设 $R = r_1^{n_1} \cdots r_k^{n_k}$。假设 T 中的最后一条指令 $T_1 \multimap T_2$ 是递减 $(q.r_1) \multimap q'$（其他情形类似）。因此，$qR \rightsquigarrow q'R'$，而 $q'R'$ 的接受由严格子树 T_0见证。由此可得$R' = r_1^{n_1-1} r_2^{n_2} \cdots r_k^{n_k}$。只需从 $q', R', \theta \Rightarrow q_f$ 推导出 $q, R, \theta \Rightarrow q_f$（这可视为实现 $(q.r_1) \multimap q'$ 的证明论工具）。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,r_1 \Rightarrow q.r_1}\quad \dfrac{}{q',r_1^{n_1-1},r_2^{n_2},\ldots,r_k^{n_k},\theta \Rightarrow q_f}}{q,r_1^{n_1},\ldots,r_k^{n_k},\theta,(q.r_1) \multimap q' \Rightarrow q_f}\multimap_L}{q,R,\theta,\wedge I \Rightarrow q_f}\ \text{repeated}\ \wedge_L,\text{w}}{q,R,\theta \Rightarrow \wedge I \multimap q_f}\multimap_R \quad \dfrac{}{q_f \Rightarrow q_f}}{((\wedge I \multimap q_f) \to q_f; q,R,\theta \Rightarrow q_f}\to_L}{q,R \Rightarrow \top}\quad}{q,R,\top \multimap \Big(\big(\wedge I \multimap q_f\big) \to q_f\Big); q,R,\theta \Rightarrow q_f}\multimap_L}{q,R,\Big(\top \multimap \Big(\big(\wedge I \multimap q_f\big) \to q_f\Big)\Big) \wedge 1; q,R,\theta \Rightarrow q_f}\wedge_L}{q,R,\theta;q,R,\theta \Rightarrow q_f}\quad}{q,R,\theta \Rightarrow q_f}\text{c}$$

上述每个叶节点都是可证明的；特别地， $q',R',\theta \Rightarrow q_f$ 根据归纳假设是可证明的，因为 T_0 的高度严格小于 T。

对于从右到左的方向（完备性），证明论方法必须证明任何 $q,R,\theta \Rightarrow q_f$的无割证明都对应于一棵接受 qR 的计算树。如果证明以如上推导结束，那么我们只需通过归纳假设，从 $q',R',\theta \Rightarrow q_f$ 的可证性中提取一次计算，再将指令 $(q.r_1) \multimap q' \in I$ 加在前面。然而，分簇蕴涵逻辑中的证明比计算更加灵活，因此证明还有许多其他可能的结尾。实际上，这里的情况比线性逻辑或 FLec 更复杂，因为分簇蕴涵逻辑具有更丰富的结构。例如，证明可能以一系列收缩规则和弱化规则结束。

$$\begin{array}{c} X \Rightarrow q_f \\ \text{sequence of } w \text{ and } c \text{ rules} \\ q,R,\theta \Rightarrow q_f \end{array}$$

这里并非所有序列都可行，例如， $\Rightarrow q_f$不可证明。因此，我们需要刻画可能的束 X，并对 $X \Rightarrow q_f$ 上的接受作出广义解释。由此产生的复杂性促使我们转而采用一种优雅的替代方案：通过剩余框架对相继式作语义解释。

A.3 基于 (G)BI-代数的可靠性

我们同时证明 BI 及其非交换版本 GBI 的不可判定性。后者使用两种除法/和 \。BI 情形的证明可以通过将两种除法统一替换为 $\multimap$来获得，也可以注意到，在交换性的条件下，两种除法是等价的。事实上，该结果适用于 BI 与 GBI 之间的所有逻辑，甚至适用范围更广（推论 A.6 和 A.7）。

给定一个 k-ACM $\mathrm{M} = (Q,\ R_k,\ I,\ q_f)$，将 I中使用右除法的指令写作 d'/d（而不是 $d \multimap d'$），并按如下方式更新之前定义的项，使用左除法。

$$i := \bigwedge I, \qquad t := (i \backslash q_f) \to q_f, \qquad \theta := (\top \backslash t) \wedge 1.$$

我们将 $c \rightsquigarrow c_1 \vee \cdots \vee c_m$记作：若存在一棵根为 c且叶子的多重集等于 $\{c_1,\ \ldots,\ c_m\}$ 的计算树。此外，对于 q_f 的任意有限（非幂等）并 $q_f \vee \cdots \vee q_f$，我们记作 q_f。

引理 A.2。 若 $c \rightsquigarrow q_f$则对于每个 ACM GBI $\models c\theta \le q_f\ (Q, R_k, I, q_f)$ 以及配置 c,

证明。我们对计算的长度进行归纳；当长度等于零时，有 $c\theta = q_f\theta \le q_f 1 = q_f$。若 $c \rightsquigarrow_{n+1} q_f$，则存在配置 $c_1,\ \ldots,\ c_m$、 $m \in \{1,\ 2\}$，使得 $c \rightsquigarrow_1 c' := c_1 \vee \cdots \vee c_m$，且 $c_i \rightsquigarrow_n q_f$ 对所有 i 都成立。根据归纳假设，对所有 i， $c_i\theta \le q_f$ 都属于分簇蕴涵逻辑，因此 $c'\theta \le q_f$。此外，由于 $c \rightsquigarrow_1 c'$，存在 $d'/d \in I$和$R \in R_k^*$，使得 $c = dR$ 和 $c' = d'R$ 对某个 $R \in R_k^*$ 成立。注意， $c = dR \le i \backslash idR \le i \backslash [(d'/d)dR] \le i \backslash d'R = i \backslash c'$，因此

$c\theta \le (i\backslash c')\theta \le i\backslash c'\theta$。所以,

$$c\theta = c\theta \wedge c\theta \le \top(\top\backslash t) \wedge c\theta \le t \wedge (i\backslash c'\theta) \le [(i\backslash q_f) \to q_f] \wedge (i\backslash q_f) \le q_f. \qquad \square$$

以上是我们先前给出的证明论论证的代数表示。事实上，步骤 $c\theta = c\theta \wedge c\theta$ 对应于通过应用收缩，从 $q, R, \theta \Rightarrow q_f$ 自底向上开始。如前所述，该证明使用了两种除法——事实上，注意到二者都出现在 θ 中——以涵盖非交换情形。通过将这两种除法合并，该证明可专门化为分簇蕴涵逻辑。

A.4 剩余框架简述

A 分配剩余框架是一个结构

$$\mathbf{W} = (W, W', N, \circ, \varepsilon, \backslash\backslash, /\!/, \wedge, \epsilon, \succ, \prec)$$

其中 W,W'是集合，$\circ$ 和 $\wedge$ 是定义在 W、$\varepsilon, \epsilon \in W$、$\backslash\backslash$ 上的二元运算，而 $\succ$ 是从 $W \times W'$到 W'和 $/\!/, \prec$ 的函数：$W' \times W \to W'$、$N \subseteq W \times W'$；并且对于所有 $x, y, w \in W$ 和 $z \in W'$，我们有以下蕴含关系（双线表示双向蕴含）

$$\frac{x \circ y\ N\ z}{y\ N\ x\backslash\backslash z}\ (\circ N) \quad \frac{x \circ y\ N\ z}{x\ N\ z/\!/ y}\ (\circ N) \quad \frac{(x \circ y) \circ z\ N\ z}{x \circ (y \circ w)\ N\ z}\ (\circ a)$$

$$\frac{x \circ y\ N\ z}{y \circ x\ N\ z}\ (\circ e) \qquad \frac{x\ N\ z}{\varepsilon \circ x\ N\ z}\ (\varepsilon) \qquad \frac{x\ N\ z}{x \circ \varepsilon\ N\ z}\ (\varepsilon)$$

$$\frac{x \wedge y\ N\ z}{y\ N\ x \succ z}\ (\wedge N) \quad \frac{x \wedge y\ N\ z}{x\ N\ z \prec y}\ (\wedge N) \quad \frac{(x \wedge y) \wedge w\ N\ z}{x \wedge (y \wedge w)\ N\ z}\ (\wedge a)$$

$$\frac{x \wedge y\ N\ z}{y \wedge x\ N\ z}\ (\wedge e) \quad \frac{x\ N\ z}{\epsilon \wedge x\ N\ z}\ (\epsilon) \quad \frac{x \wedge x\ N\ z}{x\ N\ z}\ (\wedge c) \quad \frac{x\ N\ z}{x \wedge y\ N\ z}\ (\wedge i)$$

不满足 $(\circ e)$；如果它还满足 $(\circ e)$，则称其为交换的。双向蕴含 $(\circ N)$、$(\wedge N)$ 是核条件，其余则是框架的结构条件 。

举一个代数方面的例子：如果$\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \cdot, 1, \backslash, / \to, \top)$ 是一个 GBI代数（BI代数），那么$\mathbf{W}_\mathbf{A} = (A, A, \le, \cdot, 1, \backslash, / \wedge, \top, \to, \leftarrow)$ 是一个（分别为交换的）分配剩余框架。举一个证明论方面的例子，

$$\mathbf{W}_{GBI} = (W, W', N, \circ, \varepsilon, \backslash\backslash, /\!/, \wedge, \epsilon, \succ, \prec)$$

是一个分配剩余框架，其中 W 是公式集合 Fm 上绝对自由的 $\{\circ\ \varepsilon, \wedge, \epsilon\}$-代数 GBI（这些是 GBI-序列的左端，其中 $\circ$ 通常记作逗号，而 $\wedge$ 记作分号），$W' = S_W \times Fm$，其中 S_W 表示 W 上的截段，即 W 中有一个空位的元素 $u = u(_)$（因此，如果 $x \in W$ 和 $u \in S_W$，那么 $u(x) \in W$），当且仅当序列 $u(x) \Rightarrow a$ 在 BI 中可证明时，$x\ N (u, a)$；且 $x\backslash\backslash(u, a) := (u(x \circ _)\ a), (u, a)/\!/ y := (u(_ \circ y)\ a), x \succ (u, a) := (u(x \wedge _)\ a), (u, a) \prec y := (u(_ \wedge y)\ a)$。对于 BI，框架实际上是交换的。

现在，在任意 $\mathbf{W}$ 中，对于 $X \subseteq W$ 和 $Y \subseteq W'$，我们定义 $X^\triangleright = \{b \in W' \mid X\ N\ b\}$ 和 $Y^\triangleleft = \{a \in W \mid a\ N\ Y\}$，其中 $X\ N\ b$ 表示对所有 $x \in X$ 都有 $x\ N\ b$，而 $a\ N\ Y$ 表示对所有 $y \in Y$ 都有 $a\ N\ y$；此外，$X\ N\ Y$ 表示对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 都有 $x\ N\ y$。我们将 $\{a\}^\triangleright$ 记作 $a^\triangleright$，将 $\{b\}^\triangleleft$ 记作 $b^\triangleleft$。映射 $^\triangleright$ 和 $^\triangleleft$ 构成一个伽罗瓦连接，即对于所有 $X \subseteq W$ 和 $Y \subseteq W'$，都有 $X \subseteq Y^\triangleleft$ 当且仅当 $Y \subseteq X^\triangleright$；并且映射 $\gamma\colon X \mapsto X^{\triangleright\triangleleft}$ 是幂集 $\mathrm{P}(W)$ 上的闭包算子。

那么，$\mathbf{W}^+ := (\gamma[\mathrm{P}(W)], \cap, \cup_\gamma, \circ_\gamma, 1_\gamma, \backslash, / \to, \top)$ 是一个 GBI代数，其中 $X \cup_\gamma Y := \gamma(X \cup Y)$，$X \circ_\gamma Y := \gamma(X \circ Y)$，$1_\gamma = \gamma(\varepsilon)$，$X\backslash Y = \{w \in W \mid X \circ \{w\} \subseteq Y\}$，$Y/X = \{w \in W \mid \{w\} \circ X \subseteq Y\}$，$X \to Y = \{w \in W \mid X \wedge \{w\} \subseteq Y\}$，$\top = W$；这个 GBI代数称为 $\mathbf{W}$ 的伽罗瓦代数；当 $\mathbf{W}$ 是交换的时，它实际上是一个分簇蕴涵逻辑代数。

对于每个 $b \in W'$，集合 $b^{\blacktriangleleft}$ 是闭的，称为一个 基本闭集。此外，基本闭集构成一个基：每个闭集都是基本闭集的交。因此，对于 X， $Y \in W^{+}$，当且仅当对于所有 $b \in W_{\prime}$，都有：$Y \subseteq b^{\blacktriangleleft} \Rightarrow X \subseteq b^{\blacktriangleleft}$。

映射 γ实际上是一个核，即它还满足 $\gamma(x)\gamma(y) \leq \gamma(xy)$，或者等价地， $\gamma(\gamma(x)\gamma(y)) = \gamma(xy)$。此外，仅因为它是一个闭包算子，它也满足 $\gamma(\gamma(x) \vee \gamma(y)) = \gamma(x \vee y)$。

现在我们给出一个与分支计数器机器的代数表示。对于整数 k， k-与分支计数器机器是一个结构 $\mathbf{M} = (Q, R_k, I, q_f)$，其中$Q$是一个状态集合， $q_f \in Q, R_k = \{r_1, \ldots\ldots, r_k\}$ 是寄存器标记集合，而 I是由以下形式的指令组成的集合： $q'r/q$（递增）、 q'/qr（递减）和 $(q_1 \vee q_2)/q$（分叉），其中 q， q'， q_1， $q_2 \in Q$和 $r \in R$。

一个配置 是由 $Q \cup R_k$生成的自由交换幺半群 $(Q \cup R_k)^*$中的一个元素，其形式为 $qr_1^{n_1} \cdots r_k^{n_k}$，其中 $q \in Q$；通常， r^n 表示 r的 n次乘积。

我们还考虑以 $(Q \cup R_k)^*$为底集的自由交换半群 $(J, \vee)$，因此， J中的元素在交换性意义下具有标准形： $x_1 \vee \ldots \vee x_m$，其中 $m \in \mathbb{Z}^+$和 $x_1, \ldots, x_m \in (Q \cup R_k)^*$。在 J上，我们定义运算 $\cdot$ 如下：对于所有 $x_i, y_j \in (Q \cup R_k)^*$， $(\bigvee x_i) \cdot (\bigvee y_j) = \bigvee (x_i \cdot y_j)$。注意，$\cdot$对 $\vee$满足分配律，因此 $(J, \vee, \cdot)$ 具有半环结构。注意，我们不假设 $\vee$ 是幂等的，因此 $x_1 \vee \ldots \vee x_m$ 本质上是一个多重集，而不是一个集合。（这是因为在下面的计算树中，我们不想把叶节点视为相同。）

在 J 上，我们将单步计算关系 $\rightsquigarrow_1$ 定义为包含 $d \rightsquigarrow_1 d'$的最小关系，其中对所有$d'/d \in I$均成立，并且在乘法下封闭（若 $x \rightsquigarrow_1 y$，则 $xz \rightsquigarrow_1 yz$，对所有 x、 y、 $z \in J$均成立），且在并下封闭（若 $x \rightsquigarrow_1 y$，则 $x \vee z \rightsquigarrow_1 y \vee z$，对所有 x、 y、 $z \in J$均成立）。例如，若 $q'r_1/q \in I$，则 $q \rightsquigarrow_1 q'r_1$，但也有 $qr_1r_2 \rightsquigarrow_1 q'r_1r_1r_2$和$qr_1r_2 \vee q'r_1r_3 \rightsquigarrow_1 q'r_1r_1r_2 \vee q'r_1r_3$。容易看出，由于乘法对并满足分配律，对于每个单步计算 $x \rightsquigarrow_1 y$，都存在 $d'/d \in I$，使得 $x = dz \vee w$且 $y = d'z \vee w$，其中某个 $z \in (Q \cup R_k)^*$和$w \in J$（或者 $x = dz$ 和 $y = d'z$）。我们将单步计算 $dz \vee w \rightsquigarrow_1 d'z \vee w$的计算森林定义为$w = \bigvee_j w_j$，即由 $dz \vee \bigvee_j w_j \rightsquigarrow_1 d'z \vee \bigvee_j w_j$构成的森林，其极小元素为 dz，而且包含所有w_j；此外，若指令为递增或递减，则dz 的子节点为 $d'z$；而 dz 的子节点为 q_1z和 q_2z （w_j 没有子节点）。

我们将 $\rightsquigarrow$ 定义为 $\rightsquigarrow_1$的自反传递闭包；具体而言， $\rightsquigarrow_n$ 是$\rightsquigarrow_1$ 的 n重复复合/幂，而 $\rightsquigarrow$ 是对所有 $n \in \mathbb{N}$取 $\rightsquigarrow_n$ 的并。长度为 n 的计算是一个满足$x_0 \rightsquigarrow_1 x_1 \rightsquigarrow_1 \ldots \rightsquigarrow_1 x_n$的元素序列。计算的计算森林以递归方式定义。给定 $x \rightsquigarrow dz \vee w$对应的计算森林 F以及 $d'/d \in I$， $x \rightsquigarrow dz \vee w \rightsquigarrow_1 d'z \vee w$的计算森林通过扩展 F得到，使得：若指令是递增或递减，则 dz的子节点为 $d'z$；而 dz的子节点为 q_1z和 q_2z

请注意，我们将$(Q \cup R_k)^*$取为自由交换幺半群，例如 $qr_1r_2 = qr_2r_1$，因此 $qr_1r_2 \rightsquigarrow qr_2r_1$。不过，我们也可以将$(Q \cup R_k)^*$ 取为自由幺半群，并仅在计算关系层面规定交换性，即在 $\rightsquigarrow$的定义中加入 $xy \rightsquigarrow_1 yx$。（在下面的证明中，我们对 $\preccurlyeq$ 采用了这种方法。）

在 $\rightsquigarrow$ 自由代数上的运算数量（$(Q \cup R_k)^*$）的定义中。换句话说，我们取一个只有一个二元运算的自由代数并不重要，也可以取一个有两个二元运算和两个零元运算的自由代数。我们在下面的证明中就这样做，并将由此得到的计算关系记为 $\preccurlyeq$。

A.5 归约的完备性

令 M 为 $Q \cup R_k$ 上的绝对自由 $\{\circ\ \varepsilon, \wedge, \epsilon\}$-代数。我们定义 $W := M$，以及 $W_{\prime} = S_M$，即 M 上所有截段的集合。对于 $u \in S_W$，我们定义 $x \backslash\backslash u := u(x \circ _)$， $u /\!/ y := u(_ \circ y)$， $x \succ u := u(x \wedge _)$， $u \prec y := u(_ \wedge y)$。如果 M 的一个元素中只含有 $\circ$（例如，它是一个配置），我们通常将 $\circ$ 写作 $\cdot$，或直接写成连接形式。

我们定义 $(J,\vee)$ 为 M 上的自由交换半群；因此， $M \subseteq J$ 以及 J 的元素在交换性意义下具有标准形： $x_1 \vee \ldots \vee x_m$， 其中 $m \in \mathbb{Z}^+$ 且 $x_i \in M$。在 J 上，我们还定义运算 $\circ$ $\varepsilon, \wedge, \epsilon$：对所有 $x_i, y_j \in M$， 有 $(\bigvee x_i) \circ (\bigvee y_j) = \bigvee(x_i \circ y_j)$ 且 $(\bigvee x_i) \wedge (\bigvee y_j) = \bigvee(x_i \wedge y_j)$；常元与 M 中的相同；由此得到代数 $\mathbf{J} := (J, \circ\ \varepsilon, \wedge, \epsilon, \vee)$。

我们将 $\preccurlyeq$ 记作 J上的最小$\{\circ\ \wedge, \vee\}$-相容关系，它包含 $\rightsquigarrow$、 $\wedge$ 的半格公理（即$x \wedge y \preccurlyeq y \wedge x, x \preccurlyeq x \wedge x$， $x \wedge y \preccurlyeq x$）、 $\circ$-结合性（$(x \circ y) \circ z \cong x \circ (y \circ z)$）、 $\circ$-交换性（$x \circ y \preccurlyeq y \circ x$）以及单位元公理（$x \circ \varepsilon \cong x \cong \varepsilon \circ x, x \wedge \epsilon \cong x$）， 其中 $x \cong y$是（$x \preccurlyeq y$和 $y \preccurlyeq x$）的简写，对 $x, y \in W$均成立。最后，对于 $x \in W$和 $u \in S_W$， 我们记 $x\ N\ u$当且仅当 $u(x) \preccurlyeq q_f$。我们定义 $\mathbf{W}_{\mathtt{M}} := (W, W' N, \circ\ \varepsilon, \backslash\!\backslash, /\!/, \wedge, \epsilon, \succ, \prec)$。

引理 A.3。 对于每个 $ACM\ \mathtt{M}$， $\mathbf{W}_{\mathtt{M}}$ 都是交换分配剩余框架。

证明。我们首先验证两个核性质。我们有 $x \wedge y\ N\ u$当且仅当 $u(x \wedge y) \preccurlyeq q_f$当且仅当 $x\ N\ u(_ \wedge y) = u \prec y$。同样，对于 $\succ$、 $\backslash\!\backslash$和 $/\!/$。

接下来，我们验证四个框架结构性质。如果 $x \wedge y\ N\ u$那么 $u(x \wedge y) \preccurlyeq q_f$因此 $u(y \wedge x) \preccurlyeq u(x \wedge y) \preccurlyeq q_f$， 从而得到 $y \wedge x\ N\ u$。对于 $\circ$ 的交换律同理。如果 $x \wedge x\ N\ u$， 则 $u(x) \preccurlyeq u(x \wedge x) \preccurlyeq q_f$， 所以 $x\ N\ u$。如果 $x\ N\ u$， 则$u(x \wedge y) \preccurlyeq u(x) \preccurlyeq q_f$， 所以 $x \wedge y\ N\ u$。□

引理 A.4。 如果 $\mathbf{W}_{\mathtt{M}} \models c\theta \leq q_f$那么 $c \rightsquigarrow q_f$， 对于每个 $ACM\ \mathtt{M}$和配置 c。

证明。赋值 e在扩展赋值 $e(x) = \gamma(\{x\})$ for$x \in Q \cup R_k$下满足不等式 $c\theta \leq q_f$holds in $\mathbf{W}_{\mathtt{M}}^+$； 其中 $\gamma(X) = X^{\triangleright\triangleleft}$。因此， $e(c\theta) \subseteq e(q_f) = \gamma(\{q_f\})$。由于 $\varepsilon \circ\ q_f \preccurlyeq q_f$， 我们得到 $q_f\ N\ u_\varepsilon$， 其中 $u_\varepsilon := (\varepsilon \circ _)$， 即 $q_f \in u_\varepsilon^{\triangleleft}$， 所以 $\gamma(\{q_f\}) \subseteq u_\varepsilon^{\triangleleft}$。因此， $e(c) \circ_\gamma e(\theta) = e(c\theta) \subseteq u_\varepsilon^{\triangleleft}$。我们将首先证明 $e(c) = \gamma(\{c\})$， 以及 $1 \subseteq e(i)$， 其中 $1 := 1_{\mathbf{W}_{\mathtt{M}}^+}$是 $\mathbf{W}_{\mathtt{M}}^+$的乘法单位元。

为证明 $e(c) = \gamma(c)$， 设 $c = a_1 \cdot a_2 \cdots a_m$， 其中某个 $a_i \in Q \cup R_k$。于是 $e(c) = e(a_1 \cdot a_2 \cdots a_m) = e(a_1) \circ_\gamma e(a_2) \circ_\gamma \cdots \circ_\gamma e(a_m) = \gamma(a_1) \circ_\gamma \gamma(a_2) \circ_\gamma \cdots \circ_\gamma \gamma(a_m) = \gamma(\gamma(a_1) \circ\ \gamma(a_2) \circ \cdots \circ\ \gamma(a_m)) = \gamma(a_1 \cdot a_2 \cdots a_m) = \gamma(c)$。我们将 $\gamma(x)$ 记作 $\gamma(\{x\})$。

为证明 $1 \subseteq e(i)$， 注意： $1 \subseteq e(i) = \bigcap(\gamma(d_i')/\gamma(d_i))$ 当且仅当对所有 $d'/d \in I$， $1 \subseteq \gamma(d_i')/\gamma(d_i)$； 当且仅当 $\gamma(d_i) \subseteq \gamma(d_i')$ 当且仅当对所有 $d'/d \in I$， $d \in \gamma(d')$。因此，对于给定的 $d'/d \in I$， 我们假设 $\gamma(d') \subseteq u^{\triangleleft}$， 即 $d' \in u^{\triangleleft}$， 并将证明 $d \in u^{\triangleleft}$； 我们根据 d' 是否为并来区分情况。如果 d' 是一个配置， 那么 $d' \in u^{\triangleleft}$ 给出 $u(d') \preccurlyeq q_f$， 而 $d'/d \in I$ 给出 $d \rightsquigarrow d'$， 因此 $d \preccurlyeq d'$， 从而 $u(d) \preccurlyeq u(d') \preccurlyeq q_f$； 故 $d \in u^{\triangleleft}$。如果 $d' = q_1 \vee q_2$，那么 $d' \in u^{\triangleleft}$ 给出 $u(q_1) \preccurlyeq q_f$ 和 $u(q_2) \preccurlyeq q_f$， 而 $d'/d \in I$ 给出 $d \rightsquigarrow q_1 \vee q_2$， 因此 $d \preccurlyeq q_1 \vee q_2$， 从而 $u(d) \preccurlyeq u^{\mathbf{J}}(q_1 \vee q_2) = u^{\mathbf{J}}(q_1) \vee u^{\mathbf{J}}(q_2) \preccurlyeq q_f \vee q_f \preccurlyeq q_f$； 故 $d \in u^{\triangleleft}$。

利用 $1 \subseteq e(i)$， 我们证明 $e(\theta) = 1$。事实上， $e(t) = [e(i) \backslash \gamma(q_f)] \to \gamma(q_f) \supseteq [1 \backslash \gamma(q_f)] \to \gamma(q_f) = \gamma(q_f) \to \gamma(q_f) = \top_{\mathbf{W}_{\mathtt{M}}^+}$， 因此 $1 \supseteq e(\theta) = e(\top) \backslash e(t) \cap 1 \supseteq e(\top) \backslash \top_{\mathbf{W}_{\mathtt{M}}^+} \cap 1 \supseteq 1$。

现在，由 $e(c) = \gamma(c)$、 $e(\theta) = 1$以及 $e(c) \circ_\gamma e(\theta) \subseteq u_\varepsilon^{\triangleleft}$， 我们得到 $c \in \gamma(c) = e(c) \circ_\gamma e(\theta) \subseteq u_\varepsilon^{\triangleleft}$， 即 $c \preccurlyeq \varepsilon \circ\ c \preccurlyeq u_\varepsilon(c) \preccurlyeq q_f$， 因此 $c \preccurlyeq q_f$。我们将证明 $c \rightsquigarrow q_f$。

我们先证明以下命题：若 $z \preccurlyeq_{n+1} q_f$and $z$contains $\wedge$， 则存在 z'， 使得 $z \preccurlyeq_1 z' \preccurlyeq_n q_f$， 且第一步是弱化。因此， 在给定的、见证 $c \preccurlyeq q_f$的计算中，可能先有若干指令步骤依次应用于 c， 然后沿某个分支首次（如有）应用收缩，得到 $c' \preccurlyeq c' \wedge c'$； 其中 c'是一个配置。更一般地说，也可能是 $c'(x) \preccurlyeq c'(x \wedge x)$， 其中 x是一个 $\circ$-项。由于结构 $c' \wedge c'$，或更一般地说，结构 $c'(x \wedge x)$，包含一个 $\wedge$，根据该命题，我们可以应用弱化，移除 $\wedge$ 并回到 c'，或更一般地回到 $c'(x)$。因此，存在一种不应用收缩的计算（也就没有涉及 $\wedge$ 的步骤）。同样，我们也可以看到，存在一种见证 $c \preccurlyeq q_f$且不涉及 ε 或 ϵ 步骤的计算。因此， $c \rightsquigarrow q_f$。

为证明该命题，我们根据 $z \preccurlyeq_{n+1} q_f$中的第一步进行分类。若 $v(x) \preccurlyeq_1 v(x \wedge x) \preccurlyeq_n q_f$，则根据归纳假设，$v(x \wedge x) \preccurlyeq_1 v(x) \preccurlyeq_{n-1} q_f$；此时 $v(x) \preccurlyeq_{n-1} q_f$。或者，若 $v(x \wedge x) \preccurlyeq_1 v'(x \wedge x) \preccurlyeq_{n-1} q_f$，则$v(x) \preccurlyeq_1 v'(x) \preccurlyeq_1 v'(x \wedge x) \preccurlyeq_{n-1} q_f$。其余非指令步骤的情形类似。

为讨论指令步骤，我们引入一些术语。对于 $z \in M$ 以及结构树 z的一个叶节点 d，我们用 $m(d)$表示结构树 z 中包含 d 且不包含任何 $\wedge$的最大主下集；此外，如果存在，我们也将 $\wedge$ 在 $m(d)$正上方的出现记作 $\wedge_d$。我们称 $z = v(m(d))$是$\circ$-形式（相对于d）。在步骤 $u(x \wedge y) \preccurlyeq_1 u(x)$中，我们称弱化作用于所显示的 $\wedge$，且 y 被移除；如果$v(y) = u(x \wedge y)$，则令 $v := u(x)$。因此，如果弱化作用于 $v(m(d))$中，那么它要么作用于$\wedge_d$，并且 $m(d)$被移除，即 $v(m(d)) \preccurlyeq v$;– 要么作用于 v 内部的某个 $\wedge$（甚至可能作用于 $\wedge_d$），但 $m(d)$未被移除，即对于某个 v'，有 $v(m(d)) \preccurlyeq v'(m(d))$。 –

如果 $v(m(q)) \preccurlyeq_1 v(m(q_1)) \vee v(m(q_2)) \preccurlyeq_n q_f$，其中各表达式均为 $\circ$-形式，那么根据归纳假设，对于两个 $i \in \{1, 2\}$，要么 $v(m(q_i)) \preccurlyeq_1 v'(m(q_i)) \preccurlyeq_{n-1} q_f$（ $m(q_1)$ 和 $m(q_2)$ 中没有任何一个因弱化而被移除），此时$v(m(q)) \preccurlyeq_1 v'(m(q)) \preccurlyeq_1 v'(m(q_1)) \vee v'(m(q_2)) \preccurlyeq_{n-1} q_f$；要么对于某个 $\overline{i} \in \{1, 2\}$，$v(m(q_i)) \preccurlyeq_1 v \preccurlyeq_{n-1} q_f$（$m(q_1)$ 和 $m(q_2)$ 中至少有一个因弱化而被移除），此时我们有 $v(m(q)) \preccurlyeq_1 v \preccurlyeq_{n-1} q_f$。 –

若 $v(m(qr)) \preccurlyeq_1 v(m(q')) \preccurlyeq_n q_f$，其中这些表达式均为 $\circ$-形式，则根据归纳假设，要么 $v(m(q')) \preccurlyeq_1 v'(m(q')) \preccurlyeq_{n-1} q_f$，此时 $v(m(qr)) \preccurlyeq_1 v'(m(qr)) \preccurlyeq_1 v'(m(q')) \preccurlyeq_{n-1} q_f$；要么 $v(m(q')) \preccurlyeq_1 v \preccurlyeq_{n-1} q_f$，此时有$v(m(q)) \preccurlyeq_1 v \preccurlyeq_{n-1} \overline{q_f}$。□

推论 A.5。若$\mathcal{V}$ 是包含$\mathbf{W}_{\mathtt{M}}$的 *GBI*代数簇，其中 M 是某个 *ACM*，则对于 M 的每个配置 c，$\mathcal{V} \models c\theta \leq \overline{q_f}$当且仅当$c \rightsquigarrow q_f$。

证明。若$c \rightsquigarrow q_f$，则GBI $\models c\theta \leq q_f$，由引理A.2，因此$\mathcal{V} \models c\theta \leq q_f$。反之，若$\mathcal{V} \models c\theta \leq q_f$，则 $\mathbf{W}_{\mathtt{M}} \models c\theta \leq q_f$，因此$c \rightsquigarrow q_f$，由引理A.4。□

回顾一下，存在接受问题不可判定的与分支计数器机器。

推论 A.6. 若一个*GBI*代数簇对某个不可判定的*ACM* M包含$\mathbf{W}_{\mathtt{M}}$，则其等式理论是不可判定的。

推论 A.7. 分簇蕴涵逻辑的等式理论是不可判定的。对*GBI*同样成立。

注意，经由剩余框架的论证以一种同样不使用选择公理的方式确立了不可判定性。另外，请注意，它对那些既不包含底元 $\bot$ 也不包含否定联结词 $\neg$的片段确立了不可判定性。