arXiv:2603.01600v1 [math.NA] 2 Mar 2026

# Boussinesq方程的罗宾边界控制分析

Wei Gong◇，Dongdong Liang†，Xianbing Luo‡ 和 Changlun Ye⋆

**摘要**

本文研究了Boussinesq方程的一个最优边界控制问题。该方程组将时变纳维-斯托克斯系统与热方程耦合起来，控制通过温度的罗宾边界条件施加。首先，我们在变分框架下证明了该优化问题的适定性。随后，我们推导了一阶和二阶最优性条件，并明确刻画了伴随状态和最优控制。接着，我们对全离散格式进行了详细的数值分析：空间上采用有限元，时间上采用半隐式格式，并结合对控制的变分离散。我们为状态、伴随状态和控制变量给出了严格的先验误差估计。最后，通过数值实验验证了理论结果。

**Key词语**：Boussinesq方程、罗宾边界控制、一阶和二阶最优性条件、有限元、误差估计

**学科分类**：49J20, 49K20, 65M60, 65M12, 76D05。

## 1 引言

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为边界为 $\Gamma$ 且满足 $I := (0,T)$（其中 $T>0$为某个常数）的凸多边形区域。给定正则化参数 $\alpha>0$、目标状态 $\mathbf{y}_d \in L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$ 和 $\theta_d \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，考虑如下最优Robin边界控制问题：

$$(\mathrm{P}) \quad \min_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \quad J(u,(\mathbf{y},\theta)) = \frac{1}{2}\int_I\int_\Omega |\mathbf{y}-\mathbf{y}_d|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_I\int_\Omega |\theta-\theta_d|^2 dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_I\int_\Gamma |u|^2 dsdt, \tag{1.1}$$

其中 $u$ 为控制，$(\mathbf{y}\ \theta)$ 为状态，它们满足以下Boussinesq方程

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y} - \nu\Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla p + \beta\theta\mathbf{g} = \mathbf{h} & \text{in } \Omega_T := I\times\Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{y} = 0 & \text{in } \Omega_T, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} & \text{on } \Sigma_T := I\times\Gamma, \\ \partial_t\theta - \chi\Delta\theta + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\theta = f & \text{in } \Omega_T, \\ \frac{\chi}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \gamma\theta = u & \text{on } \Sigma_T \end{cases} \tag{1.2}$$

具有初始值

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{in } \Omega, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.3}$$

其中 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$ 为重力加速度，$\nu$、$\chi$、$\gamma$ 和 $\eta$ 为给定的正数常量，$\beta$ 为给定的常数。可容许控制集 $\mathcal{U}_{ad}$ 定义为

$$\mathcal{U}_{ad} := \left\{ u\in L^2(I;L^2(\Gamma)) : \quad u_a \le u(t,x) \le u_b, \quad \text{a.e. } (t,x)\in\Sigma_T \right\}$$

◇中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所 SKLMS & NCMIS，北京 100190，中国。电子邮箱：wgong@lsec.cc.ac.cn。该作者获得了国家重点研发计划（2022YFA1004402）、国家自然科学基金委员会项目（项目编号：12494543 和 12471393）以及中国科学院战略性先导科技专项 XDB0640000 和 XDB0640200 的资助。

†西安理工大学数学学院，中国西安 710048。电子邮箱：liang d1221@163.com。

‡贵州大学数学与统计学院，中国贵阳 550025。电子邮箱：xbluo1@gzu.edu.cn。⋆贵州师范大学数学科学学院，中国贵阳 550025。电子邮箱：chlunye@gznu.edu.cn。

其中 $u_a$， $u_b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 满足 $u_a < u_b$。

热驱动流动通常由 Boussinesq方程描述。在实际应用中，热对流在调节多种物理过程方面发挥着关键作用，包括晶体生长、凝固、核反应堆堆芯周围通道中流体的冷却，以及节能建筑系统的设计与控制（例如参见 [29, 4, 26, 1]）。鉴于其应用广泛，过去几十年来，研究者从多个角度广泛研究了热对流的控制。首先，关于定常热对流流体流动最优控制的最优性条件推导及数值模拟，可参见 [31, 19, 26, 42]。具体而言，[26, 21] 在 BRR理论框架内推导了有限元误差估计（参见 [17]），然而，这一框架并不适用于控制约束情形。其次，尽管文献中已有关于非定常热对流流体最优控制问题的最优性条件推导及数值模拟的研究（例如参见 [4, 24, 27, 40, 45]），其数值收敛性分析仍未得到探讨。这主要是由于问题 (P) 具有强非线性和耦合特性，使得在经典框架下进行数值分析极具挑战性。

自20世纪90年代以来，流体流动最优控制的理论与数值分析一直是热门研究课题（参见 [1, 16, 18, 19, 20, 25]）。关于由等温定常流体动力学支配的控制问题的误差估计，请读者参见 [12, 38, 37, 36]。特别是，非定常情形下误差估计的发展已积累了大量研究成果，其中主要关注分布控制（见 [3, 16, 8, 9, 10, 11, 41, 33]）。问题 (P) 属于 Robin边界控制这一类，而文献中对其数值分析的研究相当有限。 [14] 证明了一个由半线性抛物型偏微分方程支配的罗宾边界控制问题存在最优控制，并推导出相应的最优性系统。随后，研究建立了半离散有限元格式，并运用 BRR理论证明了严格的误差估计。 [15] 在弱正则性假设下，采用协调空间离散和间断Galerkin时间步进，为一个由具有低正则性初始数据的线性抛物型偏微分方程支配的最优罗宾边界控制问题建立了全离散有限元误差估计。需要特别指出的是，时间步长与网格尺寸是相互耦合的。此外，先前的分析采用间断Galerkin时间步进方法进行时间离散，这主要是因为该方法在时间方向上的离散具有一致性，有利于数值分析。在此背景下，本文的主要创新体现在以下几个方面：

1. 尽管针对多物理问题所支配的最优控制问题已有大量理论研究，但据我们所知，尚无此类问题的数值分析；本研究首次给出了严格的误差估计，且无需对空间和时间步长施加耦合条件；

2. 现有针对非线性状态方程所支配的时变最优控制问题的数值分析，均采用固定时间步长的全隐式时间离散方法或隐式-显式格式。本研究首次对采用可变时间步长的隐式-显式格式进行了数值分析，并且只需满足合理的正则性假设。

具体而言，对于本文所研究的问题（P），文献中尚未建立二阶最优性条件，但这对于数值分析是不可或缺的（参见 [13]）。在对数据作低正则性假设的条件下，我们推导出了该问题的二阶必要且充分最优性条件。此外，在假设数据具有更高正则性的情况下，我们采用自举论证，获得了最优控制以及相应状态和伴随变量的高阶正则性估计。本文的另一项主要贡献是：在适当的正则性假设下，针对全离散格式推导出最优阶时空误差估计，并对与所提出格式相关的无控制状态方程和伴随方程进行详细的误差分析。为在误差分析中解耦时间步长与空间网格尺寸之间的依赖关系，我们首先引入状态方程和伴随方程的空间半离散形式，并给出稳定性分析和空间误差估计。在此基础上，我们采用变步长隐式-显式（IMEX）格式离散时间方向，从而得到全离散状态方程

并建立相应的稳定性和误差估计。随后，我们通过变分离散方法对最优控制问题（P）进行离散化。这得到一个离散一阶最优性系统，并且我们对离散伴随方程给出了稳定性和误差分析。特别地，我们的分析表明，为了获得 $L^2$（$I$； $L^2$（$\Omega$）范数下伴随变量的最优阶误差估计，只需对时间步长施加一个相对温和的条件——这一要求源于离散伴随方程中的移位时间网格结构。为将最优控制问题的误差估计与无控制状态方程和伴随方程的误差估计联系起来，我们借鉴了 [10] 所涉及的通用分析框架，特别针对一个分布式最优控制问题。通过针对本文所研究的非线性非定常边界控制问题进行细致调整，我们最终推导出了最优误差估计。

本文其余部分安排如下。第2节介绍必要的预备知识。第3节推导一阶和二阶最优性条件，并研究罗宾边界控制问题最优解对的正则性。第4节给出主要理论结果，包括对状态方程和伴随方程的半离散与全离散格式进行分析、证明离散控制问题的收敛性，以及推导最优时空误差估计。第5节通过数值实验验证理论收敛率。

## 2 预备知识

我们采用函数空间、范数和微分算子的标准记号，相关定义可参见例如 [2, 7]。 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\Gamma)$ 的内积与范数分别记为 $(\cdot,\cdot)$、 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)_\Gamma$,$\|\cdot\|_\Gamma$。令 $H^{-s}(\Gamma) := H^s(\Gamma)^*$ 和 $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^*$。记号 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s(\Gamma)\ H^{-s}(\Gamma)}$（缩写为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$，用于 $s=\frac{1}{2}$）表示 $H^s(\Gamma)$ 与 $H^{-s}(\Gamma)$ 之间的对偶配对；记号 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)\ H^{-1}(\Omega)}$ 亦有类似定义。定义

$$L_0^2(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : (v,1) = 0\}.$$

此外，我们定义笛卡尔空间 $\mathbb{L}^p(\Omega) := L^p(\Omega)^2$, $\mathbb{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega)^2$, $\mathbb{H}_0^1(\Omega) := H_0^1(\Omega)^2$,$\mathbb{W}^{s,p}(\Omega) := W^{s,p}(\Omega)^2$ 以及 $\mathbb{H}^{-1}(\Omega) := (\mathbb{H}_0^1(\Omega))^*$。无散向量场定义如下:

$$\mathbb{X} := \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{y} = 0 \ \text{ in } \ \Omega\right\}, \quad \mathbb{H} := \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{y} = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \ \ \mathbf{y}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \text{ on } \ \Gamma\right\}.$$

$\mathbb{X}$ 的对偶空间记作 $\mathbb{X}^*$，对偶配对为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$。

对于给定的巴拿赫空间 $X$，我们还采用标准记号 $L^p(I;\ X)$ 和 $W^{s,p}(I;\ X)$ $(p \geq 1, s \geq 0)$ 表示具有相应范数的博纳空间（参见 [35]）。 $L^p(I;\ X)(1 < p < \infty)$ 的对偶空间为 $L^{p'}(I;\ X^*)$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$。为简便起见，对于 $p = 2$，我们将 $H^s(I;\ X) := W^{s,2}(I;\ X)$ 简记为 $p = 2$。 $L^p(I;X)$ 与 $L^{p'}(I;X^*)$ 之间的对偶关系定义为

$$\langle u, v\rangle_{L^p(I;X),L^{p'}(I;X^*)} = \int_I \langle u(t), v(t)\rangle_{X,X^*}\, dt \qquad \forall (u,v) \in L^p(I;X) \times L^{p'}(I;X^*).$$

设 $H^s(I;\ X) := [H^k(I;\ X)\ L^2(I;\ X)]_\theta$ 满足 $(1-\theta)k = s$（参见 [35, 第 47] 页）。

定义如下空间:

$\mathbb{W}(I) := \left\{\mathbf{y} \in L^2(I;\ \mathbb{X}) : \partial_t\mathbf{y} \in L^2(I;\ \mathbb{X}^*)\right\}$, $W(I) := \left\{\theta \in L^2(I;\ H^1(\Omega)) : \partial_t\theta \in L^2(I;\ H^1(\Omega)^*)\right\}$,$\mathbb{V}(I) := \left\{\mathbf{y} \in L^2(I;\ \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{X}) : \partial_t\mathbf{y} \in L^2(I;\ \mathbb{H})\right\}$, $V(I) := \{\theta \in L^2(I;\ H^2(\Omega)) : \partial_t\theta \in L^2(I;\ L^2(\Omega))\}$

$\hat{}$ 配备如下范数，其中任意 $y \in \mathbb{W}(I)$、 $\theta \in W(I)$、$\hat{}y \in \mathbb{V}(I)$ 和 $\theta \in V(I)$ :

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{W}(I)} = \left(\|\mathbf{y}\|^2_{L^2(I;\mathbb{X})} + \|\partial_t\mathbf{y}\|^2_{L^2(I;\mathbb{X}^*)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\theta\|_{W(I)} = \left(\|\theta\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))} + \|\partial_t\theta\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega)^*)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbb{V}(I)} = \left(\|\hat{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{X})} + \|\partial_t\hat{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{H})}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\hat{\theta}\|_{V(I)} = \left(\|\hat{\theta}\|^2_{L^2(I;H^2(\Omega))} + \|\partial_t\hat{\theta}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\mathbb{W}:=\mathbb{W}(I)\times W(I)$ 且 $\mathbb{V}:=\mathbb{V}(I)\times V(I)$，则有 $\mathbb{W}\hookrightarrow C(\bar{I};\mathbb{H})\times C(\bar{I};L^2(\Omega))$ 和 $\mathbb{V}\hookrightarrow C(\bar{I};\mathbb{X})\times C(\bar{I};H^1(\Omega))$（参见 [35]）。

定义双线性形式 $\mathbf{a}:\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ 和 $a:H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$，使得

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}dx,\quad a(u,v)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx,$$

以及三线性形式 $\mathbf{b}:\mathbb{L}^4(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $b:\mathbb{L}^4(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $\mathbf{c}:\mathbb{L}^4(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)\times\mathbb{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ 和 $c:\mathbb{L}^4(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}):=\frac{1}{2}\left[\mathbf{c}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})-\mathbf{c}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})\right],\quad b(\mathbf{u},v,w):=\frac{1}{2}\left[c(\mathbf{u},v,w)-c(\mathbf{u},w,v)\right],\\&\mathbf{c}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}):=\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}dx,\quad c(\mathbf{u},v,w):=\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla)v\cdot w dx.\end{aligned}$$

有关三线性形式$\mathbf{b}$ 的性质，请参阅附录A 和引理**A.1**。此外，有

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|&\le\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)},&(2.1)\\|\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|&\le C\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{u}\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\mathbf{w}\|^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}&(2.2)\end{aligned}$$

对任意 $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathbb{H}^1(\Omega)$，利用以下插值不等式（参见 [49, 引理 3。2]）

$$\|z\|_{L^4(\Omega)}\le C\|z\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|z\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\quad\forall z\in H^1(\Omega).\tag{2.3}$$

三线性形式$\mathbf{b}$ 也具有相同的性质。本文中，正数常量$C$可能因情况而异。若不会引起歧义，我们将对偶配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)\,H^{-1}(\Omega)}$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*}$ 简记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$。

# 3 最优控制问题

在接下来的小节3.1-3.3中，我们将推导最优控制问题 **(P)** 的最优性条件，并分析最优解的正则性。

## 3.1 Boussinesq 方程

首先，我们给出 Boussinesq 系统（1.2）的弱解定义。

定义 *3.1.* 对任意 $u\in L^2(I;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$、$f\in L^2(I;H^1(\Omega)^*)$、$h\in L^2(I;\mathbb{X}^*)$、$\mathbf{y}_0\in\mathbb{H}$ 和 $\theta_0\in L^2(\Omega)$，若一对 $(\mathbf{y},\theta)\in\mathbb{W}$ 满足

$$\begin{aligned}&\langle\partial_t\mathbf{y},\mathbf{v}\rangle+\nu\mathbf{a}(\mathbf{y},\mathbf{v})+\mathbf{b}(\mathbf{y},\mathbf{y},\mathbf{v})+\beta(\theta\mathbf{g},\mathbf{v})=\langle\mathbf{h},\mathbf{v}\rangle,&(3.1a)\\&\langle\partial_t\theta,\psi\rangle+\chi a(\theta,\psi)+b(\mathbf{y},\theta,\psi)+\eta\gamma\langle\theta,\psi\rangle_\Gamma=\langle f,\psi\rangle+\eta\langle u,\psi\rangle_\Gamma,&(3.1b)\\&\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0,\quad\theta(0)=\theta_0&(3.1c)\end{aligned}$$

对任意 $(\mathbf{v},\psi)\in\mathbb{X}\times H^1(\Omega)$ 以及几乎处处（*a.a.*）$t\in(0,T)$。

下面的引理（参见 [24, 定理 2.1，第 151]）揭示了方程组（1.2）弱解的存在性和唯一性。

**引理 3.1**。问题（1.2）存在唯一弱解 $(\mathbf{y},\theta)\in\mathbb{W}$ 满足

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{W}(I)}+\|\theta\|_{W(I)}\le C\Big(\|f\|_{L^2(I;H^1(\Omega)^*)},\|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{X}^*)},\|\mathbf{y}_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\|\theta_0\|_{L^2(\Omega)},\|u\|_{L^2(I;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))}\Big).\tag{3.2}$$

记 $\mathcal{S}$ 为控制到状态映射，定义为 $\mathcal{S}:L^2(I;L^2(\Gamma))\to\mathbb{W}$ 使得 $u\mapsto\mathcal{S}(u):=(\mathbf{y}_u,\theta_u)$，其中 $(\mathbf{y}_u,\theta_u)$ 是 (1.2) 在定义 3.1 中所定义的唯一解对。下面的引理陈述映射 $\mathcal{S}$ 的弱 - 弱连续性与可微性。

**引理 3.2.** 设 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $L^2(I;L^2(\Omega))$，则有 $(\mathbf{y}^{u_n},\theta_{u_n}) \rightharpoonup (\mathbf{y}^u,\theta_u)$ 于空间 $\mathbb{W}$ 中。

证明。 由引理 3.1 可知，序列 $\{(\mathbf{y}^{u_n},\theta_{u_n})\}_n$ 在空间 $\mathbb{W}$中有界。因此，我们可以提取一个弱收敛到某个 $(\mathbf{y}\ \theta) \in \mathbb{W}$的子序列。随后，在 (3.1) 中取极限，并利用唯一性，可以证明 $(\mathbf{y}\ \theta) = (\mathbf{y}^u,\theta_u)$。鉴于方程组 (3.1) 的解具有唯一性，我们可以得出整个序列收敛。更多细节见 [24]。

□

命题 *3.1.* 映射 $\mathcal{S}$ 是无穷次 *Fr´echet* 可微的。若令 $(z_{u,v},\xi_{u,v}) = \mathcal{S}'(u)v$, $(z_{u,vv},\xi_{u,vv}) = \mathcal{S}''(u)v^2$，则 $(z_{u,v},\xi_{u,v})$ 和 $(z_{u,vv},\xi_{u,vv})$ 唯一地满足以下方程组：

$$\begin{cases} \langle \partial_t \mathbf{z}_{u,v},\mathbf{v}\rangle + \nu \mathbf{a}(\mathbf{z}_{u,v},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{z}_{u,v},\mathbf{y}_u,\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_u,\mathbf{z}_{u,v},\mathbf{v}) + \beta(\xi_{u,v}\mathbf{g},\mathbf{v}) = 0, \\ \langle \partial_t \xi_{u,v},\psi\rangle + \chi a(\xi_{u,v},\psi) + b(\mathbf{z}_{u,v},\theta_u,\psi) + b(\mathbf{y}_u,\xi_{u,v},\psi) + \eta\gamma\langle \xi_{u,v},\psi\rangle_\Gamma = \eta\langle v,\psi\rangle_\Gamma, \\ \mathbf{z}_{u,v}(0) = 0, \quad \xi_{u,v}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

*and*

$$\begin{cases} \langle \partial_t \mathbf{z}_{u,vv},\mathbf{v}\rangle + \nu \mathbf{a}(\mathbf{z}_{u,vv},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{z}_{u,vv},\mathbf{y}_u,\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_u,\mathbf{z}_{u,vv},\mathbf{v}) + \beta(\xi_{u,vv}\mathbf{g},\mathbf{v}) = -2\mathbf{b}(\mathbf{z}_{u,v},\mathbf{z}_{u,v},\mathbf{v}), \\ \langle \partial_t \xi_{u,vv},\psi\rangle + \chi a(\xi_{u,vv},\psi) + b(\mathbf{z}_{u,vv},\theta_u,\psi) + b(\mathbf{y}_u,\xi_{u,vv},\psi) + \eta\gamma\langle \xi_{u,vv},\psi\rangle_\Gamma = -2b(\mathbf{z}_{u,v},\xi_{u,v},\psi), \\ \mathbf{z}_{u,vv}(0) = 0, \quad \xi_{u,vv}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

对任意$(\mathbf{v}\ \psi) \in \mathbb{X}\times H^1(\Omega)$ 以及几乎处处的 $t\in(0,T)$，分别成立。

证明。 该证明的详细内容可见于 [4]。 □

## 3.2 最优性条件

本小节旨在推导一阶和二阶最优性条件。为此，我们借助控制到状态映射 $\mathcal{S}$，引入约化泛函 $J(u) := J(u,\mathcal{S}(u))$。

**定理 3.1。** 约化泛函 $J\colon L^2(I;L^2(\Gamma)) \to \mathbb{R}$ 属于 $C^\infty$ 类。对于任意 $u, v \in L^2(I;L^2(\Gamma))$， $J$ 的一阶和二阶导数满足

$$J'(u)v = \int_{\Sigma_T} (\eta\kappa_u + \alpha u)v\, dsdt, \tag{3.5}$$

$$J''(u)v^2 = \int_{\Omega_T} \left(|\mathbf{z}_{u,v}|^2 + |\xi_{u,v}|^2 - 2(\mathbf{z}_{u,v}\cdot\nabla)\mathbf{z}_{u,v}\cdot\boldsymbol{\mu}_u - 2(\mathbf{z}_{u,v}\cdot\nabla)\xi_{u,v}\kappa_u\right) dxdt + \int_{\Sigma_T} \alpha|v|^2 dsdt, \tag{3.6}$$

其中$(\boldsymbol{\mu}_u,\kappa_u) \in L^2(I;\mathbb{X}) \times L^2(I;H^1(\Omega))$ 满足伴随系统

$$\langle -\partial_t\boldsymbol{\mu},\mathbf{w}\rangle + \nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{w},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{b}(\mathbf{y},\mathbf{w},\boldsymbol{\mu}) + b(\mathbf{w},\theta,\kappa) = (\mathbf{y}-\mathbf{y}_d,\mathbf{w}), \tag{3.7a}$$

$$\langle -\partial_t\kappa,\zeta\rangle + \chi a(\kappa,\zeta) + b(\mathbf{y},\zeta,\kappa) + \beta(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\mu},\zeta) + \eta\gamma\langle\kappa,\zeta\rangle_\Gamma = (\theta-\theta_d,\zeta), \tag{3.7b}$$

$$\boldsymbol{\mu}(T) = \mathbf{0}, \quad \kappa(T) = 0 \tag{3.7c}$$

对任意（$\mathbf{w}\ \zeta$）$\in \mathbb{X}\times H^1$（$\Omega$）以及几乎处处的 $t\in$（$\mathbf{0}$，$T$），并具有如下正则性

$$\boldsymbol{\mu}_u \in L^2(I;\mathbb{X}), \quad \partial_t\boldsymbol{\mu}_u \in L^{\frac{4}{3}}(I;\mathbb{X}^*)\cap\mathbb{W}(I)^*, \quad \kappa_u \in L^2(I;H^1(\Omega)), \quad \partial_t\kappa_u \in L^{\frac{4}{3}}(I;H^1(\Omega)^*)\cap W(I)^*,$$

其中（$\mathbf{y}\ \theta$）是方程（3.1）的解。此外，以下估计成立：

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\mu}_u\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\kappa_u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \left\|\partial_t\boldsymbol{\mu}_u\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(I;\mathbb{X}^*)} + \left\|\partial_t\kappa_u\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(I;H^1(\Omega)^*)} \\ &\qquad \le C\Big(\|\mathbf{y}_u\|_{\mathbb{W}(I)}, \|\theta_u\|_{W(I)}, \|\mathbf{y}_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}, \|\theta_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\Big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。证明的详细内容可见 [4]。 □

运用标准论证（参见 [48]），容易证明问题 (P) 至少存在一个最优解。由于问题 (P) 是非凸的，我们通常考虑局部最优解。若存在 $\rho > 0$ 使得 $J(\bar{u}) \le J(u)$，对每个 $u \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ 都成立，则称控制 $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ 为 (P) 的局部最优控制，其中 $\mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ 表示 $L^2(I;\ L^2(\Gamma)$ 中以 $\bar{u}$ 为中心、半径为 $\rho$ 的开球。下一个定理给出 (P) 局部极小值的一阶必要最优性条件。

**定理 3.2.** 设 $\bar{u}$ 是问题 *(P)* 的一个局部最优控制，且 $(\bar{y}, \bar{\theta}) \in \mathbb{W}$ 是相应的状态。则存在唯一的伴随状态 $(\bar{\mu}, \bar{\kappa}) \in L^2(I;\ \mathbb{X}) \times L^2(I;\ H^1(\Omega))$，满足 $\partial_t \bar{\mu} \in L^{\frac{4}{3}}(I;\ \mathbb{X}^*) \cap \mathbb{W}(I)^*$ 以及 $\partial_t \bar{k} \in L^{\frac{4}{3}}(I;\ H^1(\Omega)^*) \cap W(I)^*$，使得对于几乎处处的 $t \in (0, T)$，

$$\begin{cases} \langle \partial_t \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{v} \rangle + \nu \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + \beta(\bar{\theta}\mathbf{g}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{X}, \\ \langle \partial_t \bar{\theta}, \psi \rangle + \chi a(\bar{\theta}, \psi) + b(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\theta}, \psi) + \eta\gamma \langle \bar{\theta}, \psi \rangle_\Gamma = \langle f, \psi \rangle + \eta \langle \bar{u}, \psi \rangle_\Gamma \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ \bar{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \bar{\theta}(0) = \theta_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \langle -\partial_t \bar{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{w} \rangle + \nu \mathbf{a}(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{b}(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) + b(\mathbf{w}, \bar{\theta}, \bar{\kappa}) = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{X}, \\ \langle -\partial_t \bar{\kappa}, \zeta \rangle + \chi a(\bar{\kappa}, \zeta) + b(\bar{\mathbf{y}}, \zeta, \bar{\kappa}) + \beta(\mathbf{g} \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}}, \zeta) + \eta\gamma \langle \bar{\kappa}, \zeta \rangle_\Gamma = (\bar{\theta} - \theta_d, \zeta) \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega), \\ \bar{\boldsymbol{\mu}}(T) = \mathbf{0}, \quad \bar{\kappa}(T) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\int_{\Sigma_T} (\eta \bar{\kappa} + \alpha \bar{u})(u - \bar{u})\, dsdt \ge 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.11}$$

**注 3.** **1.** 等价地，利用投影算子，不等式 (3.11) 可改写为 $s$

$$\bar{u}(t,x) = \mathrm{Proj}_{[u_a, u_b]}\Big( -\frac{\eta}{\alpha} \bar{\kappa}(t,x) \Big) \quad \textit{for a.e. } (t,x) \in \Sigma_T. \tag{3.12}$$

在探讨二阶必要充分最优性条件之前，我们首先研究状态与伴随系统的解关于控制的 Lipschitz 连续性。利用标准能量估计可得到以下引理；详情请参阅 [24] 。

**引理 3.3.** 存在一个常数 $C_\rho > 0$，使得对于任意 $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}$，都有

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\theta_{u_1} - \theta_{u_2}\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\theta_{u_1} - \theta_{u_2}\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \\ &\qquad \le C_\rho \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}. \end{aligned}$$

**引理 3.4.** 存在一个常数 $C_\rho > 0$，使得对于所有 $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}$ 以及所有 $v \in L^2(I; L^2(\Gamma))$，有

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{z}_{u_1,v} - \mathbf{z}_{u_2,v}\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{z}_{u_1,v} - \mathbf{z}_{u_2,v}\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\xi_{u_1,v} - \xi_{u_2,v}\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \\ &\qquad + \|\xi_{u_1,v} - \xi_{u_2,v}\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \le C_\rho \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

证明。令 $(\mathbf{e_z}, e_\xi) = (\mathbf{z}_{u_1,v} - \mathbf{z}_{u_2,v}, \xi_{u_1,v} - \xi_{u_2,v})$。由 (3.3)，我们知道 $(\mathbf{e_z}, e_\xi)$ 满足

$$\begin{cases} \langle \partial_t \mathbf{e_z}, \mathbf{v} \rangle + \nu \mathbf{a}(\mathbf{e_z}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{e_z}, \mathbf{y}_{u_1}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{z}_{u_2,v}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{z}_{u_1,v}, \mathbf{v}) \\ \quad + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{e_z}, \mathbf{v}) + \beta(e_\xi \mathbf{g}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{X}, \\ \langle \partial_t e_\xi, \psi \rangle + \chi a(e_\xi, \psi) + b(\mathbf{e_z}, \theta_{u_1}, \psi) + b(\mathbf{z}_{u_2,v}, \theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \psi) + b(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \xi_{u_1,v}, \psi) \\ \quad + b(\mathbf{y}_{u_2}, e_\xi, \psi) + \eta\gamma \langle e_\xi, \psi \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ \mathbf{e}_z(0) = 0, \quad e_\xi(0) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

取 $(\mathbf{v}\ \psi) = (\mathbf{e_z}, e_\xi)$ 在 (3.14) 上，并对区间 $(0, t)$ 积分，对于任意 $t \in (0, T)$，有 s

$$\frac{1}{2}\big(\|\mathbf{e_z}(t)\|^2 + \|e_\xi(t)\|^2\big) + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{e_z}\|^2 ds + \chi \int_0^t \|\nabla e_\xi\|^2 ds + \gamma\eta \int_0^t \|e_\xi\|_\Gamma^2 ds$$

$$\leq \int_0^t |\mathbf{b}(\boldsymbol{e}_{\mathbf{z}}, \mathbf{y}_{u_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}})|ds + \int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{z}_{u_2,v}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}})|ds + \int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{z}_{u_1,v}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}})|ds + \int_0^t |\beta(e_\xi \mathbf{g}, \mathbf{e}_{\mathbf{z}})|ds$$
$$+ \int_0^t |b(\boldsymbol{e}_{\mathbf{z}}, \theta_{u_1}, e_\xi)|ds + \int_0^t |b(\mathbf{z}_{u_2,v}, \theta_{u_1} - \theta_{u_2}, e_\xi)|ds + \int_0^t |b(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \xi_{u_1,v}, e_\xi)|ds =: \sum_{i=1}^7 J_i. \quad (3.15)$$

在以下　　翼，我们对 (3.15) 右侧的每一项进行估计。对于项 $J_1$，有

$$J_1 \leq C \int_0^t \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\| \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\| \|\nabla \mathbf{y}_{u_1}\| ds \leq \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\nabla \mathbf{y}_{u_1}\|^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 \, ds + \frac{\nu}{6} \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 \, ds,$$

其中用到了不等式（2.2）。利用（2.1），项 $J_2 + J_3$ 可估计为

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &\leq C \int_0^t \|\nabla \mathbf{z}_{u_2,v}\| \|\nabla (\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\| \|\nabla \mathbf{e}_z\| ds + C \int_0^t \|\nabla \mathbf{z}_{u_1,v}\| \|\nabla (\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\| \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\| ds \\ &\leq \frac{\nu}{6} \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 ds + C \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \Big( \|\nabla \mathbf{z}_{u_2,v}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\nabla \mathbf{z}_{u_1,v}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \Big), \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中用到了引理3.3。根据杨氏不等式，项 $J_4$ 可估计为

$$J_4 \leq C \Big( \int_0^t \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 \, ds + \int_0^t \|e_\xi\|^2 \, ds \Big).$$

根据庞加莱不等式，项 $J_5$ 可估计为

$$\begin{aligned} J_5 &\leq C \int_0^t \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^{\frac{1}{2}} \|e_\xi\|^{\frac{1}{2}} \|e_\xi\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \|\nabla \theta_{u_1}\| ds \\ &\leq C \int_0^t \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\| \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\| \|\nabla \theta_{u_1}\| ds + C \int_0^t \|e_\xi\| \|e_\xi\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \theta_{u_1}\| ds \\ &\leq \frac{\nu}{6} \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 ds + \frac{C}{\nu} \int_0^t \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|^2 \|\nabla \theta_{u_1}\|^2 ds + \frac{C}{\min\{\chi, \gamma\eta\}} \int_0^t \|e_\xi\|^2 \|\nabla \theta_{u_1}\|^2 ds \\ &+ \frac{\min\{\chi, \gamma\eta\}}{4} \int_0^t \Big( \|\nabla e_\xi\|^2 + \|e_\xi\|^2_\Gamma \Big) ds. \end{aligned}$$

类似于（3.16），项 $J_6 + J_7$ 可估计为

$$\begin{aligned} J_6 + J_7 \leq \frac{\min\{\chi, \gamma\eta\}}{4} \int_0^t \Big( \|\nabla e_\xi\|^2 + \|e_\xi\|^2_\Gamma \Big) ds + \frac{C}{\min\{\chi, \gamma\eta\}} \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \Big( \|\nabla \mathbf{z}_{u_2,v}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \\ + \|\xi_{u_1,v}\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))} \Big). \end{aligned}$$

结合项 $J_1 - J_7$ 的估计与（3.15），并利用算子 $\mathcal{S}'$($u$的连续性，可通过格朗沃尔不等式得到（3.13），从而完成证明。 □

**引理 3.5**。 存在一个常数 $C_\rho > 0$，使得对于任意 $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}$，均有

$$\|\boldsymbol{\mu}_{u_1} - \boldsymbol{\mu}_{u_2}\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\kappa_{u_1} - \kappa_{u_2}\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C_\rho \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}. \quad (3.17)$$

证明。 令 $(\mathbf{e}^\mu, e_\kappa) := (\boldsymbol{\mu}_{u_1} - \boldsymbol{\mu}_{u_2}, \kappa_{u_1} - \kappa_{u_2})$, 由 (3.7) 可知，$(\mathbf{e}^\mu, e_\kappa)$ 满足

$$\begin{cases} \langle -\partial_t \mathbf{e}_\mu, \mathbf{w} \rangle + \nu \mathbf{a}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{w}, \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{e}_\mu) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_\mu) + b(\mathbf{w}, \theta_{u_2}, e_\kappa) = (\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{w}) \\ - \mathbf{b}(\mathbf{w}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \boldsymbol{\mu}_{u_1}) - \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_{u_1}) - b(\mathbf{w}, \theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \kappa_{u_1}), \\ \langle -\partial_t e_\kappa, \zeta \rangle + \chi a(e_\kappa, \zeta) + b(\mathbf{y}_{u_2}, \zeta, e_\kappa) + \beta(\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\mu, \zeta) + \eta\gamma \langle e_\kappa, \zeta \rangle_\Gamma = (\theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \zeta) - b(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \zeta, \kappa_{u_1}), \\ \mathbf{e}_\mu(T) = \mathbf{0}, \quad e_\kappa(T) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

对任意 $(\mathbf{w}\ \zeta)\ \in \mathbb{W}$. 对任意 $\mathbf{w}\ \in \mathbb{W}(I)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_I \mathbf{b}(\mathbf{w}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \boldsymbol{\mu}_{u_1})dt &\le \int_I \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \|\nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\| \|\boldsymbol{\mu}_{u_1}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} dt \\ &\le \int_I \|\mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\| \|\boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^{\frac{1}{2}} dt \\ &\le \|\nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{W}(I)} \|\boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\nabla \boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))},\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\int_I \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}_{u_1})dt \le \int_I \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}\| \|\boldsymbol{\mu}_{u_1}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} dt \tag{3.20}$$

$$\le \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|^2_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{w}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^2_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \frac{1}{2} \|\nabla \boldsymbol{\mu}_{u_1}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}$$

and

$$\int_I b(\mathbf{w}, \theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \kappa_{u_1})ds \le \|\nabla(\theta_{u_1} - \theta_{u_2})\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{W}(I)} \|\kappa_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \|\kappa_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}. \tag{3.21}$$

类似地，对于任意 $\psi \in W(I)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_I b(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \psi, \kappa_{u_1})dt &\le \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \|\nabla \psi\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \\ &\quad \|\kappa_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \|\kappa_{u_1}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

综合估计（3.19）–（3.22），我们得出结论，（3.18）右端项构成满足下列条件的线性泛函

$$(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \cdot) - \mathbf{b}(\cdot, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \boldsymbol{\mu}_{u_1}) - \mathbf{b}(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \cdot, \boldsymbol{\mu}_{u_1}) - b(\cdot, \theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \kappa_{u_1}) \in \mathbb{W}^*(I),$$

$$(\theta_{u_1} - \theta_{u_2}, \cdot) - b(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}, \cdot, \kappa_{u_1}) \in W^*(I).$$

因此，结合引理1（[4,第 5]页）和引理3.3，我们可以得到（3.17）。证明至此完成。 □

结合前述定理和引理，通过标准的不等式估计可得以下引理。

**引理 3.6** $C^1_\rho$ $C^2_\rho$ $u \in \mathcal{B}_\rho\ \bar{u}\ \cap \mathcal{U}_{ad}$ $v \in$ .. 存在正数常量和，使得对于 $L^2\ I\ L^2\ \Gamma$ 任意() 和(; ()) 都有

$$\left|J'(u)v\right| \le C^1_\rho \|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \quad and \quad \left|J''(u)v^2\right| \le C^2_\rho \|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}. \tag{3.23}$$

此外，存在 正数常量 $\widetilde{C}^1_\rho$ 和 $\widetilde{C}^2_\rho$，使得对于任意 $u_1$、$u_2 \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}$ 都有 $d$

$$\left|\big(J'(u_1) - J'(u_2)\big)v\right| \le \widetilde{C}^1_\rho \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}, \tag{3.24}$$

$$\left|\big(J''(u_1) - J''(u_2)\big)v^2\right| \le \widetilde{C}^2_\rho \|u_1 - u_2\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}. \tag{3.25}$$

以下引理断言 $J''(u)$ 是勒让德型（见 [6]）。

引理 *3.7.* 设 $v_n \rightharpoonup v$ *in* $L^2(I;\ L^2(\Gamma))$ 如 $n \to \infty$，则 $J''(u)v^2 \le \liminf_{n\to\infty} J''(u)v_n^2$。此外，若我们假设对于 $v_n \rightharpoonup v$ *in* $L^2(I;\ L^2(\Gamma))$ 有 $\lim_{n\to\infty} J''(u)v_n^2 = J''(u)v^2$，则 $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} = 0$。

证明。这里只需采用标准的紧性论证，因此省略证明。 □

二阶最优性条件在以下先验误差估计中起着关键作用。然而，为了以最小间隙推导二阶最优性条件，必须沿着方向 $v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{u})$ 来书写，其中 $T_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{u})$ 是 $\bar{u}$ 处到 $\mathcal{U}_{ad}$ 的切锥，使得 $J'(\bar{u})v = (\eta\bar{\kappa} + \alpha\bar{u},\ v)_{L^2(I;\ L^2(\Gamma))} = 0$ 对任意 $v \in T_{\mathcal{U}_{ad}}(\bar{u})$ 均成立。为了刻画这些方向，我们引入如下临界方向锥：

$$\mathcal{C}_{\bar{u}} = \big\{v \in L^2(I; L^2(\Gamma)) : v \text{ satisfies (3.27)–(3.29)}\big\}, \tag{3.26}$$

$$v \geq 0 \quad \text{if } -\infty < u_a = \bar{u} \text{ and } \eta\bar{\kappa} + \alpha\bar{u} = 0, \tag{3.27}$$

$$v \leq 0 \quad \text{若 } \bar{u} = u_b < +\infty \text{ 和 } \eta\bar{\kappa} + \alpha\bar{u} = 0, \tag{3.28}$$

$$v = 0 \quad \text{if } \eta\bar{\kappa} + \alpha\bar{u} \neq 0, \tag{3.29}$$

其中 $\bar{\kappa}$ 满足方程组（3.10）。

**定理 3.3**。 若 $\bar{u}$ 是问题 （P）的局部解，则 $J''$（$\bar{u}$）$v^2 \geq 0$ 对任意 $v \in \mathcal{C}_{\bar{u}}$均成立。反之，令 $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ 满足方程组 （3.9）-（3.11）。假设

$$J''(\bar{u})v^2 > 0 \tag{3.30}$$

对任意 $v \in \mathcal{C}_{\bar{u}}\backslash\{0\}$。则存在 $\rho > 0$ 和 $\vartheta > 0$ 使得

$$J(\bar{u}) + \frac{\vartheta}{2}\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \leq J(u) \quad \forall u \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.31}$$

证明。 应用引理 3.6 和引理3.7，结合定理 2.4（第 177 页）和定理 2.6（第 178 页）中详述的标准论证，[13], 即可证明该定理。 □

**注 3.2**。 最优性条件 （3.30）等价于以下条件：

$$J''(\bar{u})v^2 \geq \vartheta\|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \quad \forall v \in \mathcal{C}_{\bar{u}}. \tag{3.32}$$

事实上，我们注意到 (3.31) 意味着 $\bar{u}$是以下问题的一个局部解

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})} J_\vartheta(u) = J(u) - \frac{\vartheta}{2}\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.$$

因此，由二阶必要条件可得 $J''_\vartheta(\bar{u})v^2 \geq 0$ 对任意 $v \in \mathcal{C}_{\bar{u}}$均成立。只需注意到 $J''_\vartheta(\bar{u})v^2 = J''(\bar{u})v^2 - \vartheta\|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \geq 0$ 意味着 (3.32)。

## 3.3 最优解的正则性

当状态方程（1.2）和伴随方程（3.7）中的数据具有一定的光滑性时，我们可以证明相应的解具有更好的正则性。

*定理 3.4.* 设 $(\mathbf{y}\ p)$ 是问题 *(1.2)* 的唯一弱解对。假设 $f \in L^2(I;\ L^2(\Omega))$，$\mathbf{h} \in L^2(I;\ \mathbb{L}^2(\Omega))$，$\mathbf{y}_0 \in \mathbb{X}$, $u \in L^2(I; L^2(\Gamma))$ 以及 $\theta_0 \in H^1(\Omega)$。则有 $\mathbf{y} \in \mathbb{V}(I)$,$\theta \in L^2(I;\ H^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \cap H^{\frac{3}{4}}(I;\ L^2(\Omega))$，并且存在唯一的 $p \in L^2(I; H^1(\Omega)) \cap L^2(I;\ L^2_0(\Omega))$，使得

$$(\partial_t\mathbf{y}, \mathbf{v}) + \nu\mathbf{a}(\mathbf{y},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{y},\mathbf{y},\mathbf{v}) - (p, \nabla\cdot\mathbf{v}) + \beta(\theta\mathbf{g},\mathbf{v}) = (\mathbf{h},\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \quad a.a.\ t \in (0,T) \tag{3.33}$$

且 $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, 并且以下估计成立：

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{V}(I)} + \|p\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}\|_{C(\bar{I};\mathbb{X})} + \|\theta\|_{L^2(I;H^{\frac{3}{2}}(\Omega))} + \|\theta\|_{H^{\frac{3}{4}}(I;L^2(\Omega))}\\ &\leq C\big(\|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \|\mathbf{y}_0\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}, \|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}, \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}, \|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\big).\end{aligned}$$

此外，若 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I; L^2(\Gamma)) \cap L^2(I; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$，则 $\theta \in V(I)$ 且

$$\|\theta\|_{V(I)} + \|\theta\|_{C(\bar{I};H^1(\Omega))} \leq C\big(\|\mathbf{y}\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\ \|\theta\|_{L^2(I;H^{\frac{3}{2}}(\Omega))}\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\ \|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma))}\ \|u\|_{L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\big).$$

此外，设 $(\boldsymbol{\mu}, \kappa)$ 是问题 (3.7) 的唯一解对。假设 $\mathbf{y}_d \in L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$，$\theta_d \in L^2(I;\, L^2(\Omega))$，则有 $(\boldsymbol{\mu}, \kappa) \in \mathbb{V}$。此外，存在唯一的 $\lambda \in L^2(I; H^1(\Omega)) \cap L^2(I; L_0^2(\Omega))$，使得对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ 和 $a.a.\, t \in (0,T)$

$$(-\partial_t \boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}) + \nu \mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) + b(\mathbf{w}, \theta, \kappa) - (\lambda, \nabla \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{w}) \tag{3.34}$$

以及 $\boldsymbol{\mu}(T) = \mathbf{0}$，并且下述估计成立：

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbb{V}(I)} + \|\lambda\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} + \|\kappa\|_{V(I)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{C(\bar{I};\mathbb{X})} + \|\kappa\|_{C(\bar{I};H^1(\Omega))} \\ &\le C\big(\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{V}(I)}, \|\theta\|_{V(I)}, \|\mathbf{y}_d\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \|\theta_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big). \end{aligned} \tag{3.35}$$

证明。通过应用标准的逐步提升论证即可得到所需的正则性。由于 $L^2(I; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(I;\, L^2(\Omega))$，因此有 $\beta\theta\mathbf{g} - \mathbf{h} \in L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$。考虑如下方程组：

$$\langle \partial_t \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle + \nu \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{h}, \mathbf{v}) - \beta(\theta\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{X}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

标准估计（参见 [49, 第 465 页，定理 3。12]）表明，速度 $\mathbf{y} \in \mathbb{V}(I)$ 和压力 $p \in L^2(I;\, H^1(\Omega)) \cap L^2(I; L_0^2(\Omega))$。

由于 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$（参见 [2]），对于任意 $v \in L^2(I; H^2(\Omega))$，我们有

$$\int_{\Omega_T} (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta v \, dx\, dt \le C\|\mathbf{y}\|_{L^\infty(I;L^4(\Omega))} \|\nabla\theta\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Omega))}.$$

也就是说，$(\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta \in \Big(L^2(I;\, H^{\frac{1}{2}}(\Omega)) \cap H^{\frac{1}{4}}(I; L^2(\Omega))\Big)'$。此外，迹定理推出 $u - \gamma\theta \in L^2(I; L^2(\Gamma))$。考虑如下抛物型方程：

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \chi\Delta\theta &= f - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta \quad \text{in } \Omega_T, \\ \frac{\chi}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} &= u - \gamma\theta \quad \text{on } \Gamma_T. \end{aligned} \tag{3.36}$$

标准正则性结果给出 $\theta \in L^2(I; H^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \cap H^{\frac{3}{4}}(I; L^2(\Omega))$（参见 [39, 第 81 页，引理 2.2]），进而推出 $f - (\mathbf{y} \cdot \nabla)\theta \in L^2(I; L^2(\Omega))$。若 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I; L^2(\Gamma)) \cap L^2(I; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$，则由迹定理可得 $u - \gamma\theta \in H^{\frac{1}{4}}(I;\, L^2(\Gamma)) \cap L^2(I; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$（参见 [39, 第 80 页，引理 2.1]）。最后可知 $\theta \in V(I)$（参见 [39, 第 81 页，引理 2.2]）。

利用 $H^2$ 凸多边形区域中斯托克斯算子的正则性（见 [28, 第 400 页，定理2]）以及标准 Galerkin 方法，可以得到关于 $(\boldsymbol{\mu},\ \kappa)$ 的所需正则性和估计。此外，结合 [46, 第 14–15] 页中的命题 1.1 和 1.2、注 1.4，以及 [17, 第 22], 页中的引理 2.1，可得存在唯一的 $\lambda \in L^2(I\ ;\ H^1(\Omega)) \cap L^2(I\ ;\ L_0^2(\Omega))$，满足 (3.34) 和 (3.35)。 □

**注 3.3.** 在方程 (3.1a) 和 (3.7a)的表述中，使用了无散测试函数，因此未包含压力项。在数据满足适当的正则性假设时，定理3.4 给出了另一种等价表述，即 (3.33) 和 (3.34)；当测试函数不是无散函数时，该表述包含压力项。

定理 3.5. 假设 $\bar{u}$ 是问题 (P) 的一个局部解，$(\bar{y}\ \theta)$ 和 $(\bar{\mu}, \bar{\kappa})$ 分别是相应的状态对和伴随对。此外，假设 $f \in L^2(I; L^2(\Omega))$、$h \in L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$、$y_0 \in \mathbb{X}$，$\theta_0 \in H^1(\Omega)$、$\theta_d \in L^2(I;\, L^2(\Omega))$ 且 $y_d \in L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$。那么，对于某个 $1 \le p < \infty$，$(\bar{y}\ \bar{\theta}) \in \mathbb{V}$，$(\bar{\mu}, \bar{\kappa}) \in \mathbb{V}$ 和 $\bar{u} \in L^2(I;\, W^{1,p}(\Gamma)) \cap H^{\frac{3}{4}}(I;\, L^2(\Gamma))$。

证明。利用（3.9）、（3.10）、（3.12），定理 3.4 以及 [30, 引理 3.3，第 1735], 并应用标准的自举论证，即可得到所需结果。 □

# 4 最优控制问题的数值近似

本节旨在介绍控制问题 (P) 的解的数值近似，并分析其收敛性和稳定性。在随后的数值分析中，我们始终假设 $f \in L^2(I;\, L^2(\Omega))$、$\mathbf{h} \in L^2(I;\, \mathbb{L}^2(\Omega))$、$\mathbf{y}_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$、$\theta_0 \in H^1(\Omega)$、$\theta_d \in L^2(I; L^2(\Omega))$ 和 $\mathbf{y}_d \in L^2(I;\, \mathbb{L}^2(\Omega))$。

## 4.1 空间离散

设 $\mathcal{T}_h$ 是 $\Omega$ 的一族形状正则且拟一致的剖分，其中 $\Omega = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K$。记 $h_K$ 为单元 $K$ 的直径，并令 $h := \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$。单元 $K$ 上次数小于或等于 $\ell$ （$\ell \geq 1$）的多项式集合表示为 $\mathbf{P}_\ell(K)$）。定义

$$V_h := \left\{\theta_h \in C(\bar{\Omega}) : \theta_h|_K \in \mathbf{P}_\ell(K),\, \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

作为温度的近似空间。令 $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ 和 $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ 分别为速度和压力的有限维近似空间。我们假设空间 $\mathbb{V}_h$ 和 $Q_h$ 满足以下性质:

**(A1)**无穷小上确界条件，即,

$$\inf_{q_h\in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbb{V}_h} \frac{\mathcal{B}(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_h)}\|q_h\|_{L^2(\Omega)}} \geq C$$

对于某个常数 $C > 0$，其中 $\mathcal{B}$: $\mathbb{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ 由 $\mathcal{B}(\mathbf{v}\ q) := -\int_\Omega q\, \mathrm{div}\mathbf{v}\ dx$ 定义。(

**A**

**2)** 投影误差估计，即对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ 和 $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h\mathbf{v}\| + h\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq Ch^2\|v\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}, \quad \|p - I_h p\| \leq Ch\|p\|_{H^1(\Omega)}$$

对于某个常数 $C > 0$，其中 $\mathbf{I}_h$： $\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{V}_h$ 和 $I_h$： $L^2(\Omega) \to Q_h$ 是一些投影算子。

上述假设 **(A1)**-**(A2)** 由若干知名有限元满足，例如 Taylor-Hood 元和 Mini 元（见 [46]）。我们定义（向量值）离散拉普拉斯算子 $\boldsymbol{\Delta}_h$: $\mathbb{V}_h \to \mathbb{V}_h$

$$(-\boldsymbol{\Delta}_h\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h,$$

以及 $\mathbb{V}_h$ 的离散无散子空间:

$$\mathbb{X}_h := \{\mathbf{y}_h \in \mathbb{V}_h : \mathcal{B}(\mathbf{y}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

此外，我们定义 $\mathbb{L}^2$ 投影 $\mathbf{P}_h$： $\mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{X}_h$，使得

$$(\mathbf{P}_h\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{X}_h.$$

随后，离散斯托克斯算子定义为 $\mathbf{A}_h$： $\mathbb{X}_h \to \mathbb{X}_h$，其中$\mathbf{A}_h = \mathbf{P}_h\boldsymbol{\Delta}_h|_{\mathbb{X}_h}$。离散拉普拉斯算子 $\boldsymbol{\Delta}_h$ 可由离散斯托克斯算子 $\mathbf{A}_h$ 控制（参见 [22, 推论 4.4]）：

$$\|\boldsymbol{\Delta}_h\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{A}_h\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbb{X}_h.$$

以下离散插值不等式成立（参见 [22, 49]）：

$$\|\nabla\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C\|\nabla\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{A}_h\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{X}_h, \tag{4.1}$$

（标量值）离散拉普拉斯算子 $\Delta_h$： $V_h \to V_h$ 定义为

$$(-\Delta_h u_h, v_h) = \chi(\nabla u_h, \nabla v_h) + \eta\gamma(u_h, v_h)_\Gamma \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.2}$$

容易看出， $\Delta_h$ 的逆存在，并记为$\Delta_h^{-1}$ 。下列估计成立：

$$\|\nabla u_h\|_{L^4(\Omega)} \le C\|u_h\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\Delta_h u_h\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.3}$$

令 $R_h$： $H^1(\Omega) \to V_h$ 为 Ritz 投影，使得

$$\chi(\nabla R_h u, \nabla v_h) + \eta\gamma(R_h u, v_h)_\Gamma = \chi(\nabla u, \nabla v_h) + \eta\gamma(u, v_h)_\Gamma \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.4}$$

记 $P_h$： $L^2(\Omega) \to V_h$ 为由下式定义的 $L^2$ 投影

$$(P_h u, v_h) = (u, v_h) \quad v_h \in V_h.$$

此外，我们定义 Stokes-Ritz 投影（$\mathbf{R}_h^S$， $R^{S,p}_h$）： $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{V}_h \times Q_h$ 如下：

$$\begin{aligned} &\nu(\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{R}_h^S(\mathbf{u},p)), \nabla \mathbf{v}_h) - (p - R_h^{S,p}(\mathbf{u},p), \nabla\cdot \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h, \\ &(\nabla\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{R}_h^S(\mathbf{u},p)), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{4.5}$$

关于这些投影的一些有用结果可参见附录 A。

为了分别估计时间误差和空间误差，我们引入空间半离散状态方程：给定 $u \in L^2(I; L^2(\Gamma))$，求 $(\mathbf{y}_h(t)\ \theta_h(t)) \in \mathbb{X}_h \times V_h$，使其满足

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + \nu\mathbf{a}(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_h, \mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + \beta(\theta_h \mathbf{g}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{h}, \mathbf{v}_h), \\ (\partial_t \theta_h, \psi_h) + \chi a(\theta_h, \psi_h) + b(\mathbf{y}_h, \theta_h, \psi_h) + \eta\gamma(\theta_h, \psi_h)_\Gamma = (f, \psi_h) + \eta(u, \psi_h)_\Gamma, \\ \mathbf{y}_h(0) = \mathbf{y}_{0h} := \mathbf{P}_h \mathbf{y}_0, \quad \theta_h(0) = \theta_{0h} := P_h\theta_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

对任意 $(v_h,\ \psi_h) \in \mathbb{X}_h \times V_h$ 以及几乎处处的 $t \in (0,\ T]$，其中 $\mathbf{y}_{0h} \in \mathbb{X}_h$ 和 $\theta_{0h} \in V_h$ 满足

$$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{0h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le Ch, \quad \|\theta_0 - \theta_{0h}\|_{L^2(\Omega)} \le Ch \quad \text{and } \|\mathbf{P}_h\mathbf{y}_0\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \le C, \quad \|P_h\theta_0\|_{H^1(\Omega)} \le C$$

对于某个常数 $C > 0$。

我们还引　　入空间半离散伴随问题：求 $(\boldsymbol{\mu}_h(t)\ \kappa_h(t)) \in \mathbb{X}_h \times V_h$，使其满足

$$\begin{cases} (-\partial_t \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{w}_h) + \nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{w}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_h, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\mu}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_h, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\mu}_h) + b(\mathbf{w}_h, \theta_h, \kappa_h) = (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_d, \mathbf{w}_h), \\ (-\partial_t \kappa_h, \zeta_h) + \chi a(\kappa_h, \zeta_h) + b(\mathbf{y}_h, \zeta_h, \kappa_h) + \beta(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\mu}_h, \zeta_h) + \eta\gamma(\kappa_h, \zeta_h)_\Gamma = (\theta_h - \theta_d, \zeta_h), \\ \boldsymbol{\mu}_h(T) = \mathbf{0}, \quad \kappa_h(T) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

f对于任意 $(\mathbf{w}_h,\ \zeta_h) \in \mathbb{X}_h \times V_h$ 以及几乎处处 $t \in [0, T)$，其中 $\mathbf{y}_h$ 和 $\theta_h$ 满足格式 (4.6)　　.

**注 4.1.** 显然，(4.6) 和 (4.7) 分别是系统 (3.1)和 (3.7)的半离散化。

**引理 4.1.** 给定 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I;\ L^2(\Gamma)) \cap L^2(I;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$，设 $(\mathbf{y}_h,\ \theta_h)$ 是 (4.6)的解。则有以下估计：

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{y}_h\|_{C(\bar{I};\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\theta_h\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega))} + \sqrt{\nu}\|\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \sqrt{\min\{\chi, \eta\gamma\}}\|\theta_h\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \\ &\qquad \le C\big(\|\mathbf{y}_0\| + \|\theta_0\| + \|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big), \qquad (4.8) \\ &\|\mathbf{y}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \sqrt{\nu}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \\ &\qquad \le C\big(\|\nabla\mathbf{y}_0\| + \|\theta_0\| + \|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} + \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big), \qquad (4.9) \\ &\|\partial_t\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C\big(\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|, \|\theta_0\|, \|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}, \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big). \qquad (4.10) \end{aligned}$$

证明。估计（4.8）的证明是标准的，这里省略。

• 对（4.9）的估计。将 $\mathbf{v}_h = -\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h$ 代入（4.6），并从 0 积分到 $t$ 可得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{y}_h(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|^2 + \nu\int_0^t \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^2 ds = \int_0^t [-(\mathbf{h}, \mathbf{A}_h\mathbf{y}_h) + (\beta\theta_h\mathbf{g}, \mathbf{A}_h\mathbf{y}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_h, \mathbf{y}_h, \mathbf{A}_h\mathbf{y}_h)]ds$$

$$\leq \frac{\nu}{4}\int_0^t \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^2 ds + \frac{2}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{h}\|^2 ds + \frac{2|\mathbf{g}|^2\beta^2}{\nu}\int_0^t \|\theta_h\|^2 ds + \frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|\mathbf{y}_h\|^2\|\nabla\mathbf{y}_h\|^4 ds + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^2 ds,$$

其中用到了杨氏不等式、（4.1）和（2.3）。将右端项移至左端并吸收，再令$J(t) := \frac{2C}{\nu^3}\|\mathbf{y}_h\|^2_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\|\nabla \mathbf{y}_h(t)\|^2$，我们得到

$$\|\nabla\mathbf{y}_h(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^2 ds \leq \|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|^2 + \int_0^t J\|\nabla\mathbf{y}_h\|^2 ds + \frac{4}{\nu}\int_I \|\mathbf{h}\|^2 ds + \frac{4|\mathbf{g}|^2\beta^2}{\nu}\int_I \|\theta_h\|^2 ds.$$

注意到 $\int_0^T J(t)dt \leq C$，应用格朗沃尔不等式和 (4.8)，可得 (4.9)。

- (4.10) 的估计。取 $\mathbf{v}_h = \partial_t\mathbf{y}_h$ 为 (4.6) 第一个方程中的函数，从 0 到 $T$ 积分，并利用 (2.3)、(4.1)，得到

$$\begin{aligned}
&\int_I \|\partial_t\mathbf{y}_h\|^2 dt = -\nu\int_I \mathbf{a}(\mathbf{y}_h,\partial_t\mathbf{y}_h)dt - \int_I \mathbf{b}(\mathbf{y}_h,\mathbf{y}_h,\partial_t\mathbf{y}_h)dt - \int_I \beta(\theta_h\mathbf{g},\partial_t\mathbf{y}_h)dt + \int_I (\mathbf{h},\partial_t\mathbf{y}_h)dt\\
&\leq \nu\int_I \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|\|\partial_t\mathbf{y}_h\|dt + C\int_I \|\mathbf{y}_h\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{y}_h\|\,\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^{\frac12}\|\partial_t\mathbf{y}_h\|dt + \beta|\mathbf{g}|\int_I \|\partial_t\mathbf{y}_h\|\|\theta_h\|dt + \int_I \|\partial_t\mathbf{y}_h\|\,\|\mathbf{h}\|dt\\
&\leq \frac12\int_I \|\partial_t\mathbf{y}_h\|^2 dt + C\Big(\int_I \Big(\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^2 + \|\mathbf{y}_h\|^2\|\nabla\mathbf{y}_h\|^4\Big)dt + \int_I \|\theta_h\|^2 dt + \int_I \|\mathbf{h}\|^2 dt\Big).
\end{aligned}$$

利用方程 (4.8) 和 (4.9)，可得 (4.10)。证明至此完成。 □

下一个引　理给出了状态方程 (3.1) 的空间逼近误差估计 .

**引理4.2**。 给定 $u \in H^{\frac14}(I;L^2(\Gamma))\cap L^2(I;\ H^{\frac12}(\Gamma))$，令 $(\mathbf{y}\ \theta) \in \mathbb{V}$ 为 (3.1) 的解，且 $(\mathbf{y}_h,\ \theta_h)$为半离散状态方程 (4.6)的解。则有如下估计：

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\theta-\theta_h\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}\\
&\qquad + \|\theta-\theta_h\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \widetilde{C}_1 h,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\widetilde{C}_1 = C\big(\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|, \|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}\ \|u\|_{H^{\frac14}(I;L^2(\Gamma))}\ \|u\|_{L^2(I;H^{\frac12}(\Gamma))}\|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\ \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big)$.

证明。 我们将误差分解为以下几部分：

$$\mathbf{y}-\mathbf{y}_h = \mathbf{y}-\mathbf{P}_h\mathbf{y}+\mathbf{P}_h\mathbf{y}-\mathbf{y}_h = \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}},\quad \theta-\theta_h = \theta - P_h\theta + P_h\theta - \theta_h = \zeta_h^\theta + \eta_h^\theta. \tag{4.12}$$

从 (4.6) 中减去 (3.33)、(3.1b)，并取 $(\mathbf{v}\ \psi) = (\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \eta_h^\theta)$，利用分解 (4.12)，并从 0 积分至 $t$，得到

$$\begin{aligned}
&\frac12\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}(t)\|^2 + \frac12\|\eta_h^\theta(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \chi\int_0^t \|\nabla\eta_h^\theta\|^2 ds + \gamma\gamma\int_0^t \|\eta_h^\theta\|_\Gamma^2 ds =\\
&-\int_0^t \big[\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) - (p,\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})\big]ds - \int_0^t \big[\chi a(\zeta_h^\theta,\eta_h^\theta) + \gamma\gamma(\zeta_h^\theta,\eta_h^\theta)_\Gamma + \beta(\mathbf{g}\zeta_h^\theta,\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) + \beta(\mathbf{g}\eta_h^\theta,\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})\big]ds\\
&+\int_0^t \Big[\mathbf{b}(\mathbf{y}_h,\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) - \mathbf{b}(\mathbf{y},\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})\Big]ds + \int_0^t \Big[b(\mathbf{y}_h,\theta_h,\eta_h^\theta) - b(\mathbf{y},\theta,\eta_h^\theta)\Big]ds\\
&= J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

利用 $\int_0^t (I_h p,\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})\ dt = 0$ 这一事实，我们推导出关于 $J_1$ 的如下估计：

$$J_1 = -\int_0^t [\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})ds - (p-I_hp,\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})]ds \leq \frac{\nu}{8}\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + 4\nu\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \frac{C}{\nu}\int_0^t \|p-I_hp\|^2 ds.$$

借助杨氏不等式，我们可以如下估计 $J_2$：

$$J_2 \leq \frac{\nu}{8}\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \frac{\chi}{4}\int_0^t \|\nabla \eta_h^{\theta}\|^2 ds + 2\chi\int_0^t \|\nabla \zeta_h^{\theta}\|^2 ds + 2\eta\gamma\int_0^t \|\zeta_h^{\theta}\|_{\Gamma}^2 ds + \frac{\eta\gamma}{4}\int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|_{\Gamma}^2 ds$$
$$+ \frac{\beta^2|\mathbf{g}|^2}{2\nu}\int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|^2 ds + \frac{\beta^2|\mathbf{g}|^2}{2\nu}\int_0^t \|\zeta_h^{\theta}\|^2 ds.$$

对于 $J_3$ 的估计，我们进行如下分解

$$J_3 = -\int_0^t \mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) ds - \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{P}_h\mathbf{y}, \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) ds - \int_0^t \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{P}_h\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}) ds.$$

我们使用（2.3），事实 $\mathbf{y} \in L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))$ 以及 $\mathbf{P}_h$ 在 $\mathbb{H}^1(\Omega)$ 中的稳定性（见 [32, 第 15] 页）可得 in

$$J_3 \leq \frac{\nu}{8}\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + C\Big(\frac{(\nu^2+1)}{\nu^3}\int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds\Big) G$$

其中 $G := \|\mathbf{y}\|^2_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}\|^4_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}$。利用分部积分及与上述类似的思路，可得

$$J_4 = -\int_0^t b(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \theta, \eta_h^{\theta}) ds - \int_0^t b(\mathbf{P}_h\mathbf{y}, \zeta_h^{\theta}, \eta_h^{\theta}) ds - \int_0^t b(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, P_h\theta, \eta_h^{\theta})$$
$$\leq \frac{\nu}{8}\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \frac{\chi}{4}\int_0^t \|\nabla \eta_h^{\theta}\|^2 ds + \frac{\eta\gamma}{4}\int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|_{\Gamma}^2 ds + C\Big(\frac{1}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\Big(\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \int_0^t \|\zeta_h^{\theta}\|^2_{H^1(\Omega)} ds\Big)$$
$$+ \frac{1+\chi^2}{\chi^2\nu}\int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \frac{1}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|^2 ds\Big) H$$

其中 $H := \|\theta\|^2_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\theta\|^4_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}\|^2_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}$。合并各项 $J_1$、$J_2$、 $J_3$、 $J_4$ 的估计，并利用（4.13），得到

$$\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}(t)\|^2 + \|\eta_h^{\theta}(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \chi\int_0^t \|\nabla \eta_h^{\theta}\|^2 ds + \eta\gamma\int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|_{\Gamma}^2 ds \leq C\Big(J\Big(\int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds$$
$$+ \int_0^t \|\eta_h^{\theta}\|^2 ds\Big) + K\Big(\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|^2 ds + \int_0^t \|\zeta_h^{\theta}\|^2_{H^1(\Omega)} ds + \int_0^t \|p - I_h p\|^2 ds\Big)\Big)$$

其中 $J$:=最大值 $\{G^{(\nu^2+1)}_{\nu^3} + H\frac{1+\chi^2}{\chi^2\nu}, \frac{\beta^2|\mathbf{g}_{2\nu}|^2}{H} + H^{1}_{\text{最小值}\{\chi,\eta\gamma\}}\}$, $K$:=最大值 $\{2\nu + \frac{G}{\nu} + \frac{H}{\text{最小值}\{\chi,\eta\gamma\}}$，最大值$\{\chi,\eta\chi\} + \frac{H}{\{\chi,\eta\gamma\}} + \beta^2|_{\text{最小值}\mathbf{g}_{2\nu}}|^2, \frac{1}{\nu}\}$。然后，利用格朗沃尔不等式、假设（**A2**）、引理 A.3和三角不等式，可推出（4.11）。证明至此完成。 □

**引理4.3**。 给定 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma)) \cap L^2(I;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$，令 $(\mathbf{y}_h,\ \theta_h)$ 为 (4.6)的解。则有以下估计：

$$\|\partial_t\theta_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\theta_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\theta_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\theta_h\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))} \leq \widetilde{C}_1. \tag{4.14}$$

证明。 我们依次证明所需的估计。

- ($\|\partial_t\theta_h\|_{L^2;\ I\text{估计}L^2(\Omega)}$。对于 $v \in L^2(\Omega)$ 和 $\zeta \in C_0^\infty(I)$，令 $v_h = P_h v$，取 $\psi_h = \zeta v_h$和 $\psi = \zeta v_h$ 代入（4.6）和（3.1）的第三个方程，并从 0 积分到 $T$，得到

$$\int_I (\partial_t\theta_h, \zeta v_h) dt = -\chi\int_I (\nabla\theta_h, \zeta\nabla v_h) dt - \eta\gamma\int_I (\theta_h, \zeta v_h)_\Gamma dt - \int_I b(\mathbf{y}_h, \theta_h, \zeta v_h) dt + \int_I (f, \zeta v_h) dt + \int_I \eta(u, \zeta v_h)_\Gamma dt$$
$$= \int_I (\partial_t\theta, \zeta v_h) dt + \int_I \big[b(\mathbf{y}, \theta, \zeta v_h) - b(\mathbf{y}_h, \theta_h, \zeta v_h)\big] dt + \int_I \big[\chi(\nabla(\theta - \theta_h), \zeta\nabla v_h) + \eta\gamma(\theta - \theta_h, \zeta v_h)_\Gamma\big] dt$$

$\leq C\big(\|\partial_t\theta\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}_h\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \max\{\chi,\eta\gamma\}\big)\|\zeta v\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$,

这里用到了柯西-施瓦茨不等式、（4.11）和逆估计。随后通过稠密性论证可得该估计。

- 的估计$\|\theta_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}$。由逆估计、 $H^1$-投影的 $L^2$-稳定性（见 [50]）以及引理4.2，可推得

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} &\leq \|\theta_h - P_h\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|P_h\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\\ &\leq Ch^{-1}\|\theta_h - P_h\theta\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + C\|\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\\ &\leq Ch^{-1}\|\theta_h - \theta\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + C\|\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\\ &\leq C\big(1 + \|\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

- 的估计$\|\theta_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))}$。由逆估计和引理4.2，可得

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))} &\leq \|\theta_h - P_h\theta\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))} + \|P_h\theta\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))}\\ &\leq C\|\theta_h - P_h\theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\theta_h - P_h\theta\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(I,H^1(\Omega))} + \|P_h\theta\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))}\\ &\leq C\big(h^{-\frac{1}{2}}\|\theta_h - \theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\theta_h - \theta\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(I,L^2(\Omega))} + \|\theta\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))}\big)\\ &\leq C\big(\big(\|\theta_h\|_{H^1(I;L^2(\Omega))} + \|\theta\|_{H^1(I;L^2(\Omega))}\big)^{\frac{1}{2}} + \|\theta\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

按照上述步骤，我们可以得到 $\|\mathbf{y}^h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}$ 的估计。

- 的估计$\|\theta_h\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))}$。利用逆估计、插值不等式、 $W^{1,p}$-稳定性以及 $L^2$投影（见 [50]）和引理4.2，可得

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))} &\leq \|\theta_h - P_h\theta\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))} + \|P_h\theta\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))}\\ &\leq C\|\theta_h - P_h\theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;W^{1,4}(\Omega))}\|\theta_h - P_h\theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I,W^{1,4}(\Omega))} + \|P_h\theta\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))}\\ &\leq C\big(h^{-\frac{1}{2}}\|\theta_h - \theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\theta_h - \theta\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I,H^1(\Omega))} + \|\theta\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))}\big)\\ &\leq C\big(\big(\|\theta_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\theta\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\big)^{\frac{1}{2}} + \|\theta\|_{L^4(I;W^{1,4}(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

下一个引理给出了伴随方程（3.7）空间逼近的误差估计。由于证明与引理4.2的证明类似，故略去。

**引理 4.4.** 设 $(\boldsymbol{\mu},\kappa) \in \mathbb{V}$ 是 $(3.7) \in \mathbb{V}$ 的解，且 $(\boldsymbol{\mu}_h,\kappa_h) \in \mathbb{V}$ 是半离散伴随方程 $(4.7) \in \mathbb{V}$ 的解。那么，在引理*4.2* 的假设下，有以下估计：

$$\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\kappa - \kappa_h\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|\kappa - \kappa_h\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \widetilde{C}_2 h,$$

其中

$$\widetilde{C}_2 = C\big(\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|, \|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}, \|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma))\cap L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}, \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}, \|\mathbf{y}_d\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \|\theta_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big).$$

**引理4.5.** 给定 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I;\ L^2(\Gamma)) \cap L^2(I;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 并设 $(\boldsymbol{\mu}_h,\kappa_h)$ 是问题 (4.7)的解，则有以下估计：

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\mu}_h\|_{C(\bar{I};\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\kappa_h\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega))} + \sqrt{\nu}\|\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \sqrt{\text{最小}\{\chi,\eta\gamma\}}\|\kappa_h\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C\big(\|\mathbf{y}_{0h}\|, \|\theta_0\|,\\ &\|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\ \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\ \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\ \|\mathbf{y}_d\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\ \|\theta_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big), \sqrt{\text{最小}\{\chi,\eta\gamma\}}\|\kappa_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\\ &+ \|\Delta_h\kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \sqrt{\nu}\|\Delta_h\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \widetilde{C}_2, \|\partial_t\kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\partial_t\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\\ &+ \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\kappa_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(I;H^1(\Omega))} \leq C_2.\end{aligned} \tag{4.15}$$

证明。 证明从略，因为它类似于引理4.1 和4.3的证明。 □

**注记4.2.** 给定 $u \in L^2(I;L^2(\Gamma))$，利用不等式 (4.8) 和 (4.15) 以及 *Picard-Lindel¨* 定理，众所周知，半离散方程 (4.6) 和 (4.7) 至少有一个解。通过标准方法可以得到唯一性。

利用适当的对偶论证，我们可以在范数 $L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$（或 $L^2(I;L^2(\Omega))$）下，推导出状态和伴随变量的更优误差估计。

**引理 4.6.** 设 $(\mathbf{y}\ \theta) \in \mathbb{V}$ 是方程 (3.1a)-(3.1b) 在 $u \in H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma)) \cap L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 下的解，且 $(\mathbf{y}_h, \theta_h) \in L^2(I;\mathbb{X}_h) \times L^2(I;V_h)$ 是方程 (4.6) 的解。那么存在一个常数 $C>0$，使得

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\theta-\theta_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le Ch^2. \tag{4.16}$$

证明。 利用（4.12）和引理 A.3，可得

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\theta-\theta_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le Ch^2 + \|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}.$$

现在，我们可以使用对偶论证来估计 $\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$。定义如下对偶问题：求 $(\boldsymbol{\varphi}_h,\ z_h) \in L^2(I;\mathbb{X}_h) \times L^2(I;V_h)$，使得对于任意 $(\mathbf{w}_h,\ \zeta_h) \in \mathbb{X}_h \times V_h$ 以及几乎处处的$t \in (0,\ T)$，

$$\begin{cases} (-\partial_t \boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{w}_h) + \nu \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{w}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_h, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + b(\mathbf{w}_h, \theta_h, z_h) = (\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{w}_h), \\ (-\partial_t z_h, \zeta_h) + \chi a(z_h, \zeta_h) + b(\mathbf{y}, \zeta_h, z_h) + \beta(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}_h, \zeta_h) + \eta\gamma(z_h,\zeta_h)_\Gamma = (\eta_h^{\theta}, \zeta_h), \\ \boldsymbol{\varphi}_h(T) = \mathbf{0}, \quad z_h(T) = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

上述方程类似于半离散伴随方程（4.7）。因此，类似于引理 4.1的证明，我们知道（4.17）具有唯一解（$\boldsymbol{\varphi}_h,\ z_h$）$\in L^\infty(I;\ \mathbb{X}_h) \times L^\infty(I;\ V_h)$，且以下稳定性估计成立：

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\varphi}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|z_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|\Delta_h z_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \\ &\le C\big(\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big). \end{aligned} \tag{4.18}$$

令（$\mathbf{w}_h,\ \zeta_h$）=（$\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}},\ \eta_h^{\theta}$）代入（4.17），并从 0 积分到 $T$，得到

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} = \int_I (-\partial_t\boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})dt + \int_I (-\partial_t z_h, \eta_h^{\theta})dt + \nu\int_I \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}})dt \\ &+ \int_I \big[\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)\big]dt + \int_I \big[b(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \theta_h, z_h) + b(\mathbf{y}, \eta_h^{\theta}, z_h)\big]dt + \chi\int_I a(z_h, \eta_h^{\theta})dt \\ &+ \beta\int_I (\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}_h, \eta_h^{\theta})dt + \eta\gamma\int_I (z_h, \eta_h^{\theta})_\Gamma dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

将（4.6）从（3.33）中减去，对（3.1b）应用（$\mathbf{v}\ \psi$）=（$\mathbf{v}_h,\ \psi_h$）≡（$\boldsymbol{\varphi}_h,\ z_h$），利用分解（4.12），并从 0 积分到 $T$，得到

$$\begin{aligned} &-\int_I (\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \partial_t\boldsymbol{\varphi}_h)dt + \nu\int_I \mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt + \beta\int_I (\eta_h^{\theta}\mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt = -\nu\int_I \mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt + \int_I (p, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_h)dt - \beta\int_I (\zeta_h^{\theta}\mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt \\ &-\int_I \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\varphi}_h)dt - \int_I \mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\varphi}_h)dt - \int_I \mathbf{b}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt - \int_I \mathbf{b}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt \end{aligned} \tag{4.20}$$

and

$$-\int_I (\eta_h^{\theta}, \partial_t z_h)dt + \chi\int_I a(\eta_h^{\theta}, z_h)dt + \eta\gamma\int_I (\eta_h^{\theta}, z_h)_\Gamma dt = -\chi\int_I a(\zeta_h^{\theta}, z_h)dt - \eta\gamma\int_I (\zeta_h^{\theta}, z_h)_\Gamma dt$$

$$- \int_I b(\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}, \theta_h, z_h)dt - \int_I b(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \theta_h, z_h)dt - \int_I b(\mathbf{y}, \eta_h^{\theta}, z_h)dt - \int_I b(\mathbf{y}, \zeta_h^{\theta}, z_h)dt. \quad (4.21)$$

现在结合（4.19）、（4.20）和（4.21），得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} &= \int_I \big[ - \nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h) + (p, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_h)\big]dt \\ &- \int_I \big[\chi a(\zeta_h^{\theta}, z_h) + \eta\gamma(\zeta_h^{\theta}, z_h)_\Gamma\big]dt - \int_I \big[\mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\varphi}_h)\big]dt \\ &- \int_I \big[b(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, \theta_h, z_h) + b(\mathbf{y}, \zeta_h^{\theta}, z_h)\big]dt - \beta\int_I (\zeta_h^{\theta}\mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi}_h)dt = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5. \quad (4.22)\end{aligned}$$

利用投影$\mathbf{R}_h^S$（定义见（4.5））以及离散斯托克斯算子的定义$\mathbf{A}_h$，可得

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_I \big[ - \nu\mathbf{a}(\mathbf{R}_h^S(\mathbf{y}, p), \boldsymbol{\varphi}_h) + (R_h^{S,p}(\mathbf{y}, p), \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_h) + \nu\mathbf{a}(\mathbf{P}_h\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi}_h)\big]dt = -\nu\int_I \mathbf{a}\big(\mathbf{R}_h^S(\mathbf{y}, p) - \mathbf{P}_h\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi}_h\big)dt \\ &\le C\nu\big(\|\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_h^S(\mathbf{y}, p)\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big)\,\|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}, \quad (4.23)\end{aligned}$$

其中利用了以下事实：$\boldsymbol{\varphi}_h$和$\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}$是离散无散的，因此$\mathbf{R}_h^S(\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}, p) \in \mathbb{X}_{h\circ}$ 为处理项 $J_2$，我们使用投影 $R_h$（定义见（4.4））得到如下结果

$$\begin{aligned}J_2 = -\int_I \big[\chi a(R_h\zeta_h^{\theta}, z_h) + \eta\gamma(R_h\zeta_h^{\theta}, z_h)_\Gamma\big]dt &= \int_I (R_h\zeta_h^{\theta}, \Delta_h z_h)dt \\ &\le C\big(\|\zeta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\theta - R_h\theta\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big)\|\Delta_h z_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

应用引理A.1和（4.1），可得

$$\begin{aligned}J_3 \le C\|\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big(&\|\mathbf{y}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\|\boldsymbol{\varphi}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} \\ &+ \big(\|\mathbf{y}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\mathbf{y}\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\big)\|\boldsymbol{\varphi}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big). \quad (4.24)\end{aligned}$$

使用与（4.24）中相同的论证，由（4.3）可得

$$\begin{aligned}J_4 \le C\|\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\big(&\|\nabla\theta\|_{L^2(I;L^4(\Omega))}\|z_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + \|z_h\|^{\frac12}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\Delta_h z_h\|^{\frac12}_{L^2(I;L^2(\Omega))}\|\theta_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\big) \\ &+ C\|\zeta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big(\|\mathbf{y}\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\|z_h\|^{\frac12}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\Delta_h z_h\|^{\frac12}_{L^2(I;L^2(\Omega))} \\ &+ \|\mathbf{y}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_h\|^{\frac12}_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\|z_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$J_5 \le \beta|\mathbf{g}|\,\|\zeta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\|\boldsymbol{\varphi}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}.$$

结合对 $J_1$、$J_2$、$J_3$、$J_4$ 和 $J_5$的估计，利用（4.22）、（4.18）和定理4.1，得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\eta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le C\big(&\|\boldsymbol{\zeta}_h^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\zeta_h^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\theta - R_h\theta\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \\ &+ \|\mathbf{y} - \mathbf{R}_h^S(\mathbf{y}, p)\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big).\end{aligned}$$

最后，应用引理A.2和A.3，证明完成。 □

**引理 4.7.** 在引理 *4.4* 的假设下，以下估计成立：

$$\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\kappa - \kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le Ch^2. \quad (4.25)$$

证明. 我们使用分解

$$\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_h=\boldsymbol{\mu}-\mathbf{P}_h\boldsymbol{\mu}+\mathbf{P}_h\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_h=\boldsymbol{\zeta}_h^{\boldsymbol{\mu}}+\boldsymbol{\eta}_h^{\boldsymbol{\mu}},\quad \kappa-\kappa_h=\kappa-P_h\kappa+P_h\kappa-\kappa_h=\zeta_h^{\kappa}+\eta_h^{\kappa}.$$

由 $L^2$ 引理 A.3给出的投影误差估计可得

$$\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\kappa-\kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\le Ch^2+\|\boldsymbol{\eta}_h^{\boldsymbol{\mu}}|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta_h^{\kappa}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}.$$

现在，我们使用对偶论证来估计 $\|\boldsymbol{\eta}_h^{\boldsymbol{\mu}}\|_{L^2(I;\,\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta_h^{\kappa}\|_{L^2(I;\,L^2(\Omega))}$。定义以下对偶问题：求 $(\boldsymbol{z}_h,\xi_h)\in L^2(I;\mathbb{X}_h)\times L^2(I;V_h)$，使得对任意 $(\mathbf{v}_h,\psi_h)\in\mathbb{X}_h\times V_h$

$$\begin{cases}(\partial_t\mathbf{z}_h,\mathbf{v}_h)+\nu\mathbf{a}(\mathbf{z}_h,\mathbf{v}_h)+\mathbf{b}(\mathbf{z}_h,\mathbf{y}_h,\mathbf{v}_h)+\mathbf{b}(\mathbf{y}_h,\mathbf{z}_h,\mathbf{v}_h)+\beta(\xi_h\mathbf{g},\mathbf{v}_h)=(\boldsymbol{\eta}_h^{\boldsymbol{\mu}},\mathbf{v}_h),\\ (\partial_t\xi_h,\psi_h)+\chi a(\xi_h,\psi_h)+b(\mathbf{z}_h,\theta_h,\psi_h)+b(\mathbf{y}_h,\xi_h,\psi_h)+\eta\gamma(\xi_h,\psi_h)_\Gamma=(\eta_h^{\kappa},\psi_h),\\ \mathbf{z}_h(0)=0,\quad \xi_h(0)=0.\end{cases}\tag{4.26}$$

注意，上述方程与线性化状态方程（3.3）相似。与引理 4.1的证明类似，已知（4.26）有唯一解 $(\mathbf{z}_h,\xi_h)\in L^2(I;\mathbb{X}_h)\times L^2(I;V_h)$，并满足以下稳定性估计：

$$\|\mathbf{z}_h\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}+\|\mathbf{A}_h\mathbf{z}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\xi_h\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}+\|\Delta_h\xi_h|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\le C(\|\boldsymbol{\eta}_h^{\boldsymbol{\mu}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta_h^{\kappa}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}).$$

接下来 进行与引理 4.6类似的分析，并利用其结果，我们由此得到（4.25）。 □

## 4.2 全离散最优控制问题

此外，我们考虑时间离散。设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{N_\tau}=T$表示区间 $[0,T]$的一个划分。我们定义 $\tau_n:=t_n-t_{n-1}$, $I_n^r:=(t_{n-1},\ t_n]$和 $I_n^l:=[t_{n-1},t_n)$，其中$n=1,\ \cdots,\ N_\tau$。我们对时间步长作如下假设

$$(\mathbf{B})\qquad \exists\,\epsilon_0,\epsilon_1>0 \text{ such that } \tau=\max_{1\le n\le N_\tau}\tau_n<\epsilon_0\tau_n \text{ and } |\tau_n-\tau_{n-1}|\le\epsilon_1\tau^2\quad \forall 1\le n\le N_\tau \text{ and } \forall\tau>0.$$

此外，我们令 $\sigma=(\tau,h)$。最后，我们定义空间

$$\mathbb{X}_\sigma:=\Big\{\mathbf{v}_\sigma\in L^2(I;\mathbb{X}_h):\mathbf{v}_\sigma=\sum_{n=1}^{N_\tau}\mathbf{v}_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^r},\ \mathbf{v}_{n,h}\in\mathbb{X}_h,\ n=1,\cdots,N_\tau\Big\},$$

$$V_\sigma:=\Big\{v_\sigma\in L^2(I;V_h):v_\sigma=\sum_{n=1}^{N_\tau}v_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^r},\ v_{n,h}\in V_h,\ n=1,\cdots,N_\tau\Big\},$$

其中$\mathbb{1}_{I_n^r}$ 表示区间 $I_n^r$ 的示性函数。

为处理全离散状态方程与伴随方程的时间误差估计，我们需要如下两个时间插值算子。定义插值算子 $\Pi_\tau^r:\ C(I;X)\to X_\tau^r$ 与$\Pi_\tau^l:\ C(\bar{I};\ X)\to X_\tau^l$，使得对任意 $v\in C(\bar{I};\ X)$， $\Pi_\tau^r v$与 $\Pi_\tau^l v$满足

$$\Pi_\tau^r v\big|_{I_n^r}=v(t_n),\quad \Pi_\tau^l v\big|_{I_n^l}=v(t_{n-1}),\quad n=1,\dots,N_\tau,$$

其中 $(\Pi_\tau^r v)(0)=v(0)$，且 $(\Pi_\tau^l v)(T)=v(T)$，其中 $X$ 是给定的巴拿赫空间，且 $X_\tau^r:=\{v_\tau\in L^2(I;\ X):\ v_\tau=\sum_{n=1}^{N_\tau}v_n\mathbb{1}_{I_n^r},\ v_n\in X,\ n=1,\dots,N_\tau\}$；将 $I_n^r$ 替换为 $_{n=1}I_n^l$，即可类似地定义 $X_\tau^l$。注意，上述插值是通过取每个子区间端点处的值来定义的，插值误差估计见附录 A 的引理 A.5。此外，定义 $L^2$-投影 $P_\tau:\ L^2(I;\ X)\to X_\tau^r$，使得 $P_\tau w$ 满足

$$P_\tau w\big|_{I_n^r}=\frac{1}{\tau_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n}w\,dt\quad n=1,\cdots,N_\tau,\quad \forall w\in L^2(I;X).$$

为简便起见，记作$P_\tau^n w = P_\tau w\big|_{I_n^\tau}$，并且 $L^2$-投影误差估计见附录A中的引理A.4。

为定义全离散最优控制问题，我们需要考虑状态方程（4.6）的时间离散。为实现这一目标，我们采用隐式-显式时间离散格式。给定$u \in L^2(I;\ L^2(\Gamma))$，我们寻求一个离散解对 $(\mathbf{y}_{n,h}, \theta_{n,h}) \in \mathbb{X}_h \times V_h$，使其满足对于 $n = 1, \cdots, N_\tau$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n-1,h}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\Big) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{y}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{y}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \beta(\theta_{n-1,h}\mathbf{g}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{h}^n, \mathbf{v}_h),\\
&\Big(\frac{\theta_{n,h} - \theta_{n-1,h}}{\tau_n}, \psi_h\Big) + \chi a(\theta_{n,h}, \psi_h) + b(\mathbf{y}_{n-1,h}, \theta_{n,h}, \psi_h) + \eta\gamma(\theta_{n,h}, \psi_h)_\Gamma = (f^n, \psi_h) + \eta(u^n, \psi_h)_\Gamma,\\
&\mathbf{y}_{0,h} = \mathbf{y}_{0h}, \quad \theta_{0,h} = \theta_{0h}
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

对于任意 $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathbb{X}_h \times V_h$，其中 $\mathbf{h}^n := \frac{1}{\tau_n}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{h}(t)dt$。此外，对于 $(\mathbf{y}_\sigma, \theta_\sigma) \in \mathbb{X}_\sigma \times V_\sigma$，我们定义

$$
(\mathbf{y}_\sigma, \theta_\sigma)\big|_{(0,T]} = \Big(\sum_{n=1}^{N_\tau} \mathbf{y}_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^\tau}, \sum_{n=1}^{N_\tau} \theta_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^\tau}\Big) \text{ with } \mathbf{y}_\sigma(0) = \mathbf{y}_{0h},\ \theta_\sigma(0) = \theta_{0h}. \tag{4.28}
$$

由于状态方程是一个耦合系统，我们采用隐式-显式格式，将速度场和温度场的计算解耦。具体而言，根据离散格式（4.27），在每个时间步长内，我们分别求解纳维–斯托克斯方程以获得速度场 $\mathbf{y}_{n,h}$，以及热方程以确定温度场 $\theta_{n,h}$。与间断Galerkin时间步进方法相比，这种方法显著降低了计算成本（参见[47]）。此外，容易证明方程（4.27）具有唯一解。

### 4.2.1 全离散状态方程的分析

下面，我们给出数值格式（4.27）的稳定性分析。

**引理 4.8。** 给定 $u \in L^2(I;\ L^2(\Gamma))$，令 $\{(\mathbf{y}_{n,h}, \theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 为 (4.27)的解。则有以下估计：

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{y}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\theta_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \min\{\chi, \eta\gamma\}^{\frac{1}{2}}\|\theta_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \le \mathcal{C}_1\big(\|\mathbf{y}_{0h}\|\\
&+ \big(1 + \beta|\mathbf{g}|\nu^{-\frac{1}{2}}\big)\|\theta_{0h}\| + \nu^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \min\{\chi, \eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\\
&+ \gamma^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\big) =: \widetilde{G}_1,
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{y}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \nu^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le \mathcal{C}_2\big(\big(1 + \nu^{-2}\widetilde{G}_1^2\big)\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\| + \tau_1^{\frac{1}{2}}\|\Delta\mathbf{y}_0\| + \tau_1^{\frac{1}{2}}\nu^{-\frac{1}{2}}\|\theta_{0h}\|\\
&+ \nu^{-\frac{1}{2}}\widetilde{G}_1 + \|\mathbf{h}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\big) =: \widetilde{G}_2,
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$$
\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau} \frac{\|\mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n-1,h}\|^2}{\tau_n}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C\big(\big(\nu^{-\frac{1}{2}} + 1\big)\widetilde{G}_1^2 + \big(\nu^{-\frac{1}{2}} + 1\big)\widetilde{G}_2^2 + \widetilde{G}_1\big), \tag{4.31}
$$

其中 $\mathcal{C}_1 := C\exp\big(C\nu^{-\frac{1}{2}}\beta|\mathbf{g}|\sqrt{T}\big)$，$\mathcal{C}_2 := C\exp\big(C\nu^{-2}\widetilde{G}_1^2\big)$。

证明。我们逐一证明这些估计。

- (4.29) 的估计。将 $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = \tau_n(\mathbf{y}_{n,h}, \theta_{n,h})$ 代入 (4.27)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\mathbf{y}_{n,h}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n-1,h}\|^2 + \nu\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_{n,h}\|^2 - \frac{1}{2}\|\theta_{n-1,h}\|^2\\
&+ \frac{1}{2}\|\theta_{n,h} - \theta_{n-1,h}\|^2 + \chi\tau_n\|\nabla\theta_{n,h}\|^2 + \eta\gamma\tau_n\|\theta_{n,h}\|_\Gamma^2 = -\beta\tau_n(\theta_{n-1,h}\mathbf{g}, \mathbf{y}_{n,h}) + \tau_n(\mathbf{h}^n, \mathbf{y}_{n,h})\\
&+ \eta\tau_n(u^n, \theta_{n,h})_\Gamma + \tau_n(f^n, \theta_{n,h})\\
&\le \frac{\nu\tau_n}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\| + \frac{\eta\gamma\tau_n}{2}\|\theta_{n,h}\|_\Gamma + \frac{\chi\tau_n}{2}\|\nabla\theta_{n,h}\| + \frac{C\beta^2|\mathbf{g}|^2\tau_n}{\nu}\|\theta_{n-1,h}\|^2 + \frac{C}{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{h}\|^2 dt
\end{aligned}
$$

$$+\frac{C}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|f\|^2dt+\frac{\eta}{\gamma}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u\|_\Gamma^2dt.$$

因此，对 $1\le k\le N_\tau$ 从 $n$ 1 到 $k$ 求和，可得

$$\|\mathbf{y}_{k,h}\|^2+\|\theta_{k,h}\|^2+\nu\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\chi\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\nabla\theta_{n,h}\|+\eta\gamma\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\theta_{n,h}\|_\Gamma^2$$
$$\le C\big(\|\mathbf{y}_{0h}\|^2+\|\theta_{0h}\|^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{\beta^2|\mathbf{g}|^2\tau_n}{\nu}\|\theta_{n-1,h}\|^2+\frac{1}{\nu}\int_I\|\mathbf{h}\|^2dt+\frac{1}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\int_I\|f\|^2dt+\frac{\eta}{\gamma}\int_I\|u\|_\Gamma^2dt\big).$$

然后，利用离散 Gronwall 不等式，我们可以得到结果（4.29）。

- （4.30）的估计。取 $\mathbf{v}_h=-\tau_n\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}$，在（4.27）的第一个方程中，利用（2.3）和（4.1），可得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2-\frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h})\|^2+\nu\tau_n\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2=\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{y}_{n,h},\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h})$$
$$+\tau_n\beta(\theta_{n-1,h}\mathbf{g},\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h})-\tau_n(\mathbf{h}^n,\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h})$$
$$\le C\Big(\tau_n\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^{\frac12}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^{\frac32}+\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^{\frac12}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^{\frac12}\|\mathbf{y}_{n,h}\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^{\frac12}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|$$
$$+\tau_n\|\theta_{n-1,h}\|\,\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|+\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{h}\|^2\,dt\Big)^{\frac12}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|\tau_n^{\frac12}\Big)$$
$$\le\frac{\nu\tau_n}{2}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\frac{\nu\tau_{n-1}}{4}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\big(G_n+H_n\big)\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+C\Big(\frac{\tau_n}{\nu}\|\theta_{n-1,h}\|^2+\frac{\tau_n}{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{h}\|^2\,dt\Big),\tag{4.32}$$

其中 $\tau_0=\tau_1$，$G_n=\frac{C\tau_n}{\nu^3}\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2$，$H_n=\frac{C\tau_n}{\nu^3}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2\|\mathbf{y}_{n,h}\|^2$。因此，利用等式

$$\frac{\nu\tau_n}{2}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2=\frac{\nu\tau_n}{4}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\frac{\nu\tau_n}{4}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2-\frac{\nu\tau_{n-1}}{4}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\frac{\nu\tau_{n-1}}{4}\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2,$$

并重排（4.32），对 $n$ 从 1 到 $k$，针对 $1\le k\le N_\tau$求和，可得

$$\|\nabla\mathbf{y}_{k,h}\|^2+\nu\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2\le\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|^2+\tau_1C\|\Delta\mathbf{y}_0\|^2+\big(G_1+H_1\big)\|\nabla\mathbf{y}_{0h}\|^2$$
$$+\sum_{n=1}^{k-1}\big(G_{n+1}+H_{n+1}\big)\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+C\Big(\sum_{n=1}^{k}\frac{\tau_n}{\nu}\|\theta_{n-1,h}\|^2+\int_I\|\mathbf{h}\|^2dt\Big),\tag{4.33}$$

其中用到了不等式 $\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{0,h}\|\le C\|\Delta\mathbf{y}_0\|$。然后，利用离散 Gronwall 不等式，我们可以得到（4.30）。

- (4.31) 的估计。将 $\mathbf{v}_h=\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}$ 代入 (4.27) 的第一个方程，利用 (2.3) 和 (4.1)，可得

$$\frac{1}{\tau_n}\|\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2-\frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\frac{\nu}{2}\|\nabla(\mathbf{y}_{n-1,h}-\mathbf{y}_{n,h})\|^2=$$
$$-\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{y}_{n,h},\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h})-\beta(\theta_{n-1,h}\mathbf{g},\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h})+(\mathbf{h}^n,\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h})$$
$$\le\frac{\|\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2}{2\tau_n}+C\big(\tau_n\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|\,\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|\,\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|\,\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|$$
$$+\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|\,\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|\,\|\mathbf{y}_{n,h}\|\,\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|+\tau_n\|\theta_{n-1,h}\|^2+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{h}\|^2dt\big)$$
$$\le\frac{\|\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2}{2\tau_n}+C\big(\tau_n\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2$$

$$+\tau_n\|\nabla \mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\tau_n\|\mathbf{y}_{n,h}\|^2\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\tau_n\|\theta_{n-1,h}\|^2+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{h}\|^2dt\big).$$

对 $n$ 从 **1** 到 $N_\tau$ 求和，得到

$$\sum_{n=1}^{N_\tau}\frac{1}{\tau_n}\|\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\le C\big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n,h}\|^2$$
$$+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{y}_{n,h}\|^2\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}\|^2+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\theta_{n-1,h}\|^2+\int_I\|\mathbf{h}\|^2dt+\nu\|\nabla y_0\|^2\big).$$

最后，结合（4.29）和（4.30）可得（4.31）。 □

**注4.3**。 若 $\mathbf{y}_0\in\mathbb{X}$，由逆估计可得 $\|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{0h}\|\le Ch^{-1}\|\nabla\mathbf{y}_0\|$。因此，根据（4.33），为使 $\tau\le Ch^2$ 具有更高正则性，我们需要假设 $(\mathbf{y}_\sigma,\ \theta_\sigma)$。

**引理*4.9.*** *给定 $u\in H^{\frac14}(I;\ L^2(\Gamma))\cap L^2(I;\ H^{\frac12}(\Gamma))$, 设 $(y_h,\theta_h)\in L^2(I;\ \mathbb{X}_h)\times L^2(I;\ V_h)$ 为方程 (4.6) 的解，并设 $\{(y_{n,h},\theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 为全离散状态方程 (4.27) 的解。则有以下估计：*

$$\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}+\|\theta_h-\theta_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\theta_h-\theta_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C\tau^{\frac12}. \tag{4.34}$$

证明。 我们从以下分解开始：

$$\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma=\mathbf{y}_h-\Pi_\tau^r\mathbf{y}_h+\Pi_\tau^r\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma=\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}},\quad \theta_h-\theta_\sigma=\theta_h-\Pi_\tau^r\theta_h+\Pi_\tau^r\theta_h-\theta_\sigma=\zeta_\tau^\theta+\eta_\tau^\theta \tag{4.35}$$

并令 $\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}=\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}}(t_n)$。对 $t_{n-1}$ 到 $t_n$ 之间积分（4.6），再利用（4.27）减去该式，其中 $(\mathbf{v}_h,\psi_h)=(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\eta_{n,\tau}^\theta)$ 并使用分解（4.35），得到

$$\frac12\|\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}\|^2-\frac12\|\boldsymbol{\eta}_{n-1,\tau}^{\mathbf{y}}\|^2+\frac12\|\eta_{n,\tau}^\theta\|^2-\frac12\|\eta_{n-1,\tau}^\theta\|^2+\nu\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}\|^2+\chi\tau_n\|\nabla\eta_{n,\tau}^\theta\|^2+\gamma\gamma\tau_n\|\eta_{n,\tau}^\theta\|_\Gamma^2$$
$$\le\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[-\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})-\chi a(\zeta_\tau^\theta,\eta_{n,\tau}^\theta)-\gamma\gamma(\zeta_\tau^\theta,\eta_{n,\tau}^\theta)_\Gamma-\beta(\zeta_\tau^\theta+\theta_h(t_n)-\theta_h(t_{n-1})+\eta_{n-1,\tau}^\theta,\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{g})\big]dt$$
$$+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{y}_{n,h},\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})-\mathbf{b}(\mathbf{y}_h,\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})\big]dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[b(\mathbf{y}_{n-1,h},\theta_{n,h},\eta_{n,\tau}^\theta)-b(\mathbf{y}_h,\theta_h,\eta_{n,\tau}^\theta)\big]dt$$
$$=J_1+J_2+J_3. \tag{4.36}$$

根据柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式和迹不等式，该项 $J_1$ 满足

$$J_1\le\frac{\nu}{4}\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}\|+\frac{\chi}{4}\tau_n\|\nabla\eta_{n,\tau}^\theta\|^2+\frac{\gamma\gamma}{4}\tau_n\|\eta_{n,\tau}^\theta\|_\Gamma^2+\frac{3\nu}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}}\|^2dt+C\Big(\max\{\chi,\gamma\gamma\}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\zeta_\tau^\theta\|_{H^1(\Omega)}^2dt$$
$$+\frac{\beta^2|\mathbf{g}|^2}{\nu}\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\zeta_\tau^\theta\|^2dt+\tau_n\|\theta_h(t_n)-\theta_h(t_{n-1})\|^2+\tau_n\|\eta_{n-1,\tau}^\theta\|^2\Big)\Big).$$

利用引理 4.1，（2.3）和杨氏不等式，我们可以估计三线性项 $J_2$ 如下：

$$J_2=\int_{t_{n-1}}^{t_n}-\mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}-\mathbf{b}(\Pi_\tau^r\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}-\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_{n-1,\tau}^{\mathbf{y}},\Pi_\tau^r\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})dt$$
$$+\int_{t_{n-1}}^{t_n}-\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\Pi_\tau^r\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})dt$$

$$\le \frac{\nu}{4}\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau}\|^2+\frac{\nu}{8}\tau_{n-1}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n-1,\tau}\|^2+C\Big(\frac{1}{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_{\tau}\|^2dt+\frac{1}{\nu^3}\tau_{n-1}\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n-1,\tau}\|^2$$
$$+\tau_n\frac{1}{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\partial_t\mathbf{y}_h\|dt\,\|\nabla(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}))\|\Big). \tag{4.37}$$

利用类似的论证，我们得到 $J_3$的估计

$$J_3\le\frac{\nu}{8}\tau_{n-1}\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n-1,\tau}\|^2+\frac{\chi}{4}\tau_n\|\nabla\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2+\frac{\eta\gamma}{4}\tau_n\|\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2_{\Gamma}+C\Big(\frac{1}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_{\tau}\|^2dt$$
$$+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\zeta^{\theta}_{\tau}\|^2_{H^1(\Omega)}dt+\frac{1}{\nu\min\{\chi,\eta\gamma\}^2}\tau_{n-1}\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n-1,\tau}\|^2+\tau_n\frac{1}{\min\{\chi,\eta\gamma\}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\partial_t\mathbf{y}_h\|dt\,\|\nabla(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}))\|\Big).$$

因此，将上述估计与（4.36）结合，并利用等式 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2$，我们重新整理并对 $n$从 1 到 $k$ 的 $1\le k\le N_\tau$ 求和，得到（4.36）

$$\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{k,\tau}\|^2+\|\eta^{\theta}_{k,\tau}\|^2+\nu\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau}\|^2+\chi\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\nabla\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2+\eta\gamma\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2_{\Gamma}$$
$$\le C\Big(\int_0^{t_k}\big[\|\nabla\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_{\tau}\|^2+\|\zeta^{\theta}_{\tau}\|^2_{H^1(\Omega)}\big]dt+\tau\int_0^{t_k}\big[\|\partial_t\theta_h\|^2+\|\partial_t\mathbf{y}_h\|^2\big]dt+\tau\sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\nabla(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}))\|^2$$
$$+\sum_{n=1}^{k-1}\tau_n\big(\|\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2+\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau}\|^2\big)\Big),$$

其中我们令 $\tau_0:=\tau_1$，并利用了事实 $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{0,h}=\eta^{\theta}_{0,h}=0$。离散 Gronwall 不等式推出

$$\max_{1\le n\le N_\tau}\Big(\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau}\|^2+\|\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2\Big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\Big(\nu\|\nabla\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau}\|^2+\min\{\chi,\eta\gamma\}\|\eta^{\theta}_{n,\tau}\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)$$
$$\le C\Big(\|\nabla\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_{\tau}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\zeta^{\theta}_{\tau}\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))}+\tau\big(\|\partial_t\theta_h\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}+\|\partial_t\mathbf{y}_h\|^2_{L^2(I;\mathbf{L}^2(\Omega))}\big)\Big).$$

这个不等　式结合引理 A.5、4.1 和4.3，以及三角不等式，证明了（4.34）　　. □

**注 4.4**。对于 $u\in L^2(I;\ L^2(\Gamma))$，类似的误差估计是后续对伴随方程进行稳定性分析所需的（见引理 *4.12*），详见附录*B*。

**注4.5**。利用 *[49, 第 476]* 页中的引理 ***4.17*** 和 ***4.18*** 以及上述引理，我们得到

$$\sup_{1\le n\le N_\tau}\tau_n\|\theta_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\xrightarrow{\tau\to0}0. \tag{4.38}$$

现在我们给出$(\mathbf{y}_\sigma,\theta_\sigma)$关于控制 $u$ 的连续依赖。

**引理 4.10.** 给定 $\max\big\{\|u\|_{H^{\frac14}(I;L^2(\Gamma))},\ \|u\|_{L^2(I;H^{\frac12}(\Gamma))}\|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\big\}\le M$，其中 $M$ 是一个正数常量。那么，当 $\tau$ 充分小时，可得

$$\|\mathbf{y}_\sigma(u)-\mathbf{y}_\sigma(v)\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\theta_\sigma(u)-\theta_\sigma(v)\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\mathbf{y}_\sigma(u)-\mathbf{y}_\sigma(v)\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}$$
$$+\|\theta_\sigma(u)-\theta_\sigma(v)\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C_M\|u-v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))},$$

其中，$C_M$ 是依赖于 $M$的正数常量。

证明。令 $\left(\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}, e_{n,h}^{\theta}\right) = \left(\mathbf{y}_{n,h}(u) - \mathbf{y}_{n,h}(v)\theta_{n,h}(u) - \theta_{n,h}(v)\right)$。对于任意 $n = 1, \cdots, N_\tau$，由（4.27）可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}} - \mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}, \mathbf{v}_h\right) + \tau_n \nu\nu \mathbf{a}(\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}, \mathbf{v}_h) + \tau_n \mathbf{b}(\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_{n,h}(u), \mathbf{v}_h) + \tau_n \mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}(v), \mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}, \mathbf{v}_h) \\
&+ \tau_n \beta(e_{n-1,h}^{\theta}\mathbf{g}, \mathbf{v}_h) = 0, \\
&(e_{n,h}^{\theta} - e_{n-1,h}^{\theta}, \psi_h) + \chi\tau_n a(e_{n-1,h}^{\theta}, \psi_h) + \tau_n b(\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}, \theta_{n,h}(u), \psi) + \tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h}(v), e_{n,h}^{\theta}, \psi_h) \qquad (4.39) \\
&+ \eta\gamma(e_{n,h}^{\theta}, \psi_h) = \tau_n \eta(u^n - v^n, \psi_h)_\Gamma, \\
&\mathbf{e}_{0,h}^{\mathbf{y}} = 0, \quad e_{0,h}^{\theta} = 0.
\end{aligned}
$$

取 $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}, e_{n,h}^{\theta})$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{1}{2}\|e_{n,h}^{\theta}\|^2 - \frac{1}{2}\|e_{n-1,h}^{\theta}\|^2 + \nu\tau_n\|\nabla\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \chi\tau_n\|\nabla e_{n,h}^{\theta}\|^2 + \eta\gamma\tau_n\|e_{n,h}^{\theta}\|_\Gamma^2 \\
&\le -\tau_n \mathbf{b}(\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_{n,h}(u), \mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}) - \tau_n \mathbf{b}(\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}, \theta_{n,h}(u), e_{n,h}^{\theta}) + \left[\tau_n \eta(u^n - v^n, e_{n,h}^{\theta})_\Gamma - \tau_n \beta(e_{n-1,h}^{\theta}\mathbf{g}, \mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}})\right] \\
&= J_1 + J_2 + J_3. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

利用（2.3）和（4.1），可推得

$$
J_1 \le G_n\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{\nu}{4}\tau_n\|\nabla\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{\nu}{8}\tau_{n-1}\|\nabla\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2
$$

其中 $G_n = \tau_n C\left(\frac{1}{\nu}\left(\|\nabla\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2 + \|\mathbf{A}_h\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\right) + \frac{1}{\nu^3}\|\nabla\mathbf{y}_{n,h}(u)\|^4\right)$ 且 $\tau_0 := \tau_1$。由不等式（2.3）可推得

$$
\begin{aligned}
J_2 &\le C\tau_n\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^{\frac{1}{2}}\|e_{n,h}^{\theta}\|^{\frac{1}{2}}\|e_{n,h}^{\theta}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)} \\
&\quad + C\tau_n\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla e_{n,h}^{\theta}\|\,\|\theta_{n,h}(u)\|^{\frac{1}{2}}\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

我们可以应用杨氏不等式得到

$$
J_2 \le \frac{\nu}{8}\tau_{n-1}\|\nabla\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{\chi}{2}\tau_n\|\nabla e_{n,h}^{\theta}\|^2 + \frac{\eta\gamma}{4}\tau_n\|e_{n,h}^{\theta}\|_\Gamma^2 + C\left(H_n\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2\|e_{n,h}^{\theta}\|^2\right)
$$

其中 $H_n = \tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|^2\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2$。根据柯西–施瓦茨不等式、杨氏不等式和索博列夫不等式，我们有

$$
J_3 \le \frac{\nu}{4}\tau_n\|\nabla\mathbf{e}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{\eta\gamma}{4}\tau_n\|e_{n,h}^{\theta}\|_\Gamma^2 + C\tau_n\left(\|e_{n-1,h}^{\theta}\|^2 + \|u^n - v^n\|_\Gamma^2\right).
$$

因此，将上述估计与（4.40）结合，并对 $n = 1$，……，$k$ 求和 $1 \le k \le N_\tau$，对于任意 $1 \le k \le N_\tau$，我们得到以下界

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{e}_{k,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \|e_{k,h}^{\theta}\|^2 + \nu\tau_k\|\nabla\mathbf{e}_{k,h}^{\mathbf{y}}\|^2 + \chi\tau_k\|\nabla e_{k,h}^{\theta}\|^2 + \eta\gamma\tau_k\|e_{k,h}^{\theta}\|_\Gamma^2 \le C\Big(\sum_{n=1}^{k}\Big((G_n + H_n)\|\mathbf{e}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2 \\
&\quad + \tau_n\|e_{n-1,h}^{\theta}\|^2\Big) + \sum_{n=1}^{k}\tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2\|e_{n,h}^{\theta}\|^2 + \int_0^{t_k}\|u - v\|_\Gamma^2 dt\Big).
\end{aligned}
$$

注记 4.5 意味着$\tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2 \to 0$ 关于 $n$一致成立，当 $\tau \to 0$。因此，我们可以将时间网格尺寸取得足够小，使得 $C\tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|_{H^1(\Omega)}^2 \le \frac{1}{2}$ 对所有 $n$均成立。结合引理4.8 和格朗沃尔不等式，即可完成证明。□

注释*4.6*。在引理 *4.10* 中，可以使用 $max\{\|u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\ \|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\} \le M$ 替代原假设 $max\{\|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma))}\ \|u\|_{L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\|v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\} \le M$。然后，当 $\sigma$ 足够小时，可类似地由引理*B.1*推出引理 *4.10* 的结论。

类似地，利用适当的对偶论证，我们可以在范数 $L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$（或 $L^2(I;L^2(\Omega))$）下推导出全离散状态变量改进的时间收敛阶。

**引理 4.11**。 在引理 *4.9* 的假设下，有如下估计成立 ：

$$\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\theta_h-\theta_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\le C\tau. \tag{4.41}$$

证明。 我们采用与（4.35）中相同的分解。由插值的误差估计 $\Pi_\tau^r$ （见引理 A.5 ）可得

$$\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\theta_h-\theta_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\le C\tau+\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}.$$

现在我们使用对偶论证来给出 $\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\,\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;\,L^2(\Omega))}$ 的估计。我们首先定义一个离散对偶问题：寻找一个离散解对 $(\boldsymbol{\varphi}_{n,h},\,z_{n,h})\in\mathbb{X}_h\times V_h$，使得对于 $n=N_\tau,\,\cdots,\,1$ 以及任意 $(\mathbf{w}_h,\,\zeta_h)\in\mathbb{X}_h\times V_h$，

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{n,h}-\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h}}{\tau_n},\mathbf{w}_h\Big)+\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}_{n,h},\mathbf{w}_h)+\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\mathbf{b}(\mathbf{w}_h,\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h})+\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\mathbf{w}_h,\boldsymbol{\varphi}_{n,h})\\
&+b(\mathbf{w}_h,\theta_h(t_n),z_{n,h})=(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\mathbf{w}_h),\\
&\Big(\frac{z_{n,h}-z_{n+1,h}}{\tau_n},\zeta_h\Big)+\chi a(z_{n,h},\zeta_h)+b(\mathbf{y}_{n-1,h},\zeta_h,z_{n,h})+\eta\gamma(z_{n,h},\zeta_h)_\Gamma+\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\beta(\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h},\zeta_h\mathbf{g})=(\eta_{n,\tau}^{\theta},\zeta_h),\\
&\varphi_{N_\tau+1,h}=0,\ \mathbf{y}_{N_\tau+1,h}:=\mathbf{y}_{N_\tau,h},\quad z_{N_\tau+1,h}=0,\ \tau_{N_\tau+1}:=\tau_{N_\tau}.
\end{aligned}\tag{4.42}$$

类似于引理 4.8 和4.12的证明，我们知道（4.42）具有唯一解 $\{(\boldsymbol{\varphi}_{n,h},\,z_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$，并且满足如下稳定性估计：

$$\begin{aligned}
\max_{1\le n\le N_\tau}\Big(\|z_{n,h}\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\nabla\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2\Big)&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\Big(\|\nabla\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2+\|z_{n,h}\|_{H^1(\Omega)}^2\Big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\Big(\|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2+\|\Delta_h z_{n,h}\|^2\Big)\\
&\le C\Big(\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}^2+\|\eta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}^2\Big).
\end{aligned}\tag{4.43}$$

令 $\mathbf{w}_h,\,\zeta_h)=\tau_n\,(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\,\eta_{n,\tau}^{\theta})=\tau_n$ 在（4.42）中，并对 $N_\tau$ 求和至 1，可得

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\mathbf{y}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}^2+\|\eta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}^2&=\sum_{n=1}^{N_\tau}\big(\boldsymbol{\varphi}_{n,h}-\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h},\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}\big)+\nu\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}_{n,h},\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}})+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_{n+1}\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h})\\
&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n b(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\theta_h(t_n),z_{n,h})+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(z_{n,h}-z_{n+1,h},\eta_{n,\tau}^{\theta}\Big)\\
&+\chi\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n a(z_{n,h},\eta_{n,\tau}^{\theta})+\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h},\eta_{n,\tau}^{\theta},z_{n,h})+\eta\gamma\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n(z_{n,h},\eta_{n,\tau}^{\theta})_\Gamma+\beta\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_{n+1}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1,h},\eta_{n,\tau}^{\theta}\mathbf{g}).
\end{aligned}\tag{4.44}$$

对于（4.6），从 $t_{n-1}$ 积分到 $t_n$，并从（4.27）中减去其与 $\tau_n$ 的乘积，再令 $(\mathbf{v}_h,\,\psi_h)=(\boldsymbol{\varphi}_{n,h},\,z_{n,h})$，可得

$$\begin{aligned}
\nu\tau_n\mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})&=-(\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\eta}_{n-1,\tau}^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})-\nu\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt-\tau_n\beta(\eta_{n-1,\tau}^{\theta}\mathbf{g},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})\\
&-\tau_n\beta(\theta_h(t_n)-\theta_h(t_{n-1}),\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\cdot\mathbf{g})-\beta\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta_\tau^{\theta}\mathbf{g},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt-\tau_n\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_{n-1,\tau}^{\mathbf{y}},\mathbf{y}_{n,h},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})-\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\boldsymbol{\eta}_{n,\tau}^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})\\
&-\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\mathbf{y}_h(t_n),\boldsymbol{\varphi}_{n,h})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_n),\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\mathbf{y}},\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt,
\end{aligned}$$

$$\chi\tau_n a(\eta^\theta_{n,\tau},z_{n,h})+\tau_n\eta\gamma(\eta^\theta_{n,\tau},z_{n,h})_\Gamma=-(\eta^\theta_{n,\tau}-\eta^\theta_{n-1,\tau},z_{n,h})-\chi\int_{t_{n-1}}^{t_n}a(\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})dt-\eta\gamma\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})_\Gamma dt$$
$$-\tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h},\eta^\theta_{n,\tau},z_{n,h})-\tau_n b(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h},\theta_h(t_n),z_{n,h})-\tau_n b(\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_{n,\tau},\theta_h(t_n),z_{n,h})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_h(t_n),\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})dt$$
$$-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau,\theta_h,z_{n,h})dt.$$

将上述方程代入（4.44），并进行必要的化简，得到

$$\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_\tau\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta^\theta_\tau\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}=-\nu\sum_{n=1}^{N_\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau,\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\tau_n(\theta_h(t_n)-\theta_h(t_{n-1}),\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\cdot\mathbf{g})$$
$$-\beta\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta^\theta_\tau\mathbf{g},\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt\Big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_n)-\mathbf{y}_h(t_{n-1}),\mathbf{y}_h(t_n),\boldsymbol{\varphi}_{n,h})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_h(t_n),\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau,\boldsymbol{\varphi}_{n,h})$$
$$-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau,\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\varphi}_{n,h})dt\Big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\chi\int_{t_{n-1}}^{t_n}a(\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})dt-\eta\gamma\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})_\Gamma dt\Big)$$
$$+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\tau_n b(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h},\theta_h(t_n),z_{n,h})-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_h(t_n),\zeta^\theta_\tau,z_{n,h})dt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau,\theta_h,z_{n,h})dt\Big)$$
$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5. \tag{4.45}$$

对于 $J_1$ 和 $J_2$，利用算子 $\mathbf{A}_h$ 的定义以及柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$J_1\le\nu\|\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big(\sum_{k=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac12},$$
$$J_2\le C|\mathbf{g}|\big(\tau\|\partial_t\theta_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}+\|\zeta^\theta_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big)\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac12}.$$

利用式（2.3）、（4.1）和引理 4.1，可得

$$J_3\le C\Big(\tau\|\partial_t\mathbf{y}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big)\Big(\Big(\max_{1\le n\le N_\tau}\|\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}$$
$$+\Big(\max_{1\le n\le N_\tau}\|\nabla\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{A}_h\boldsymbol{\varphi}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}\Big).$$

为处理项 $J_4$，我们使用式（ $\Delta_h$ 中定义的算子（4.2）得到

$$J_4=\sum_{n=1}^{N_\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta^\theta_\tau,\Delta_h z_{n,h})\le\|\zeta^\theta_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\Big(\sum_{k=1}^{N_\tau}\tau_n\|\Delta_h z_{n,h}\|^2\Big)^{\frac12}.$$

利用式（4.3）、（4.14）、引理4.1 和4.8，得到 $J_5$，可推出

$$J_5\le C\Big(\tau+\|\zeta^\theta_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big)\Big(\Big(\sum_{k=1}^{N_\tau}\tau_n\|z_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac14}\Big(\sum_{k=1}^{N_\tau}\tau_n\|\Delta_h z_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}$$
$$+\max_{1\le n\le N_\tau}\|z_{n,h}\|_{H^1(\Omega)}\Big).$$

因此，结合 $J_1$–$J_5$ 的估计以及式（4.45）和（4.43），我们得到界 d

$$\|\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{y}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\eta^\theta_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\le C\big(\tau+\|\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{y}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\zeta^\theta_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\big).$$

应用引理 A.5、引理4.1 和4.3于上述估计，可得最终估计式（4.41）。 □

### 4.2.2 离散伴随方程分析

定义离散控制到状态算子 $S_\sigma\colon L^2(I;L^2(\Gamma)) \to \mathbb{X}_\sigma\times V_\sigma$ by $(\mathbf{y}_\sigma(u)\ \theta_\sigma(u)) = \mathcal{S}_\sigma(u)$，其中 $(\mathbf{y}_\sigma(u)\ \theta_\sigma(u))$ 由 (4.28) 给出，其控制为 $u\in L^2(I;L^2(\Gamma))$。那么，与离散状态方程 (4.27) 相关联的离散控制问题如下：

$$(\mathrm{P}_\sigma)\quad \min_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\quad J_\sigma(u)=\frac{1}{2}\int_I\int_\Omega|\mathbf{y}_\sigma(u)-\mathbf{y}_d|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_I\int_\Omega|\theta_\sigma(u)-\theta_d|^2dxdt+\frac{\alpha}{2}\int_I\int_\Gamma|u|^2dsdt.$$

这里，控制变量没有显式离散化，而是采用变分离散方法（见 [23]）。容易验证，离散问题（$\mathrm{P}_\sigma$）至少存在一个解。

我们可以看到，映射 $\mathcal{S}_\sigma$ 是无穷次 Fréchet 可微的。因此，应用链式法则可知，$J_\sigma\colon L^2(I;\ L^2(\Gamma)) \to \mathbb{R}$ 属于 $C^\infty$ 类。此外，给定一个方向 $v\in L^2(I;L^2(\Gamma))$，其一阶导数表示如下：

$$J'_\sigma(u)v=\int_I(\mathbf{y}_\sigma(u)-\mathbf{y}_d,\mathbf{z}_\sigma)\,dt+\int_I(\theta_\sigma(u)-\theta_d,\xi_\sigma)\,dt+\alpha\int_I(u,v)_\Gamma\,dt,$$

其中 $(\mathbf{z}_\sigma,\xi_\sigma)=S'_\sigma(u)v$，且 $(\mathbf{z}_\sigma,\xi_\sigma)\big|_{(0,T]}=\big(\sum\limits_{n=1}^{N_\tau}\mathbf{z}_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^\tau},\sum\limits_{n=1}^{N_\tau}\xi_{n,h}\mathbb{1}_{I_n^\tau}\big)$，其中 $\mathbf{z}_\sigma(0)=0,\ \theta_\sigma(0)=0$，其中$\{(\mathbf{z}_{n,h},\xi_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 是以下方程组的解：

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\mathbf{z}_{n,h}-\mathbf{z}_{n-1,h}}{\tau_n},\mathbf{v}_h\Big)+\nu\mathbf{a}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{v}_h)+\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n-1,h},\mathbf{y}_{n,h},\mathbf{v}_h)+\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{v}_h)+\beta(\xi_{n-1,h}\mathbf{g},\mathbf{v}_h)=\mathbf{0},\\
&\Big(\frac{\xi_{n,h}-\xi_{n-1,h}}{\tau_n},\psi_h\Big)+\chi a(\xi_{n,h},\psi_h)+b(\mathbf{z}_{n-1,h},\theta_{n,h},\psi_h)+b(\mathbf{y}_{n-1,h},\xi_{n,h},\psi_h)+\eta\gamma(\xi_{n,h},\psi_h)_\Gamma=\eta(v^n,\psi_h)_\Gamma,\\
&\mathbf{z}_{0,h}=0,\quad \xi_{0,h}=0
\end{aligned}\tag{4.46}$$

对于 $n=1,\cdots,N_\tau$ 以及任意的 $(\mathbf{v}_h,\psi_h)\in\mathbb{X}_h\times V_h$，其中 $\{(\mathbf{y}_{n,h},\theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 是全离散状态方程 (4.27) 的解。与控制理论中的常见做法一样（参见 [48]），通常引入伴随状态以简化该导数的表达式。为此，我们考虑离散伴随方程：求一个离散解对 $(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\kappa_{n,h})$，使得对于 $n=N_\tau,\cdots,1$ 以及任意的 $(\mathbf{w}_h,\zeta_h)\in\mathbb{X}_h\times V_h$，

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\boldsymbol{\mu}_{n,h}-\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}}{\tau_n},\mathbf{w}_h\Big)+\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\mathbf{w}_h)+\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\mathbf{b}(\mathbf{w}_h,\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h})+\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{w}_h,\boldsymbol{\mu}_{n,h})\\
&+\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}b(\mathbf{w}_h,\theta_{n+1,h},\kappa_{n+1,h})=(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_d^n,\mathbf{w}_h),\\
&\Big(\frac{\kappa_{n,h}-\kappa_{n+1,h}}{\tau_n},\zeta_h\Big)+\chi a(\kappa_{n,h},\zeta_h)+b(\mathbf{y}_{n-1,h},\zeta_h,\kappa_{n,h})+\eta\gamma(\kappa_{n,h},\zeta_h)_\Gamma+\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\beta(\boldsymbol{\mu}_{n+1,h},\zeta_h\mathbf{g})=(\theta_{n,h}-\theta_d^n,\zeta_h),\\
&\mu_{N_\tau+1,h}:=0,\ \mathbf{y}_{N_\tau+1,h}:=\mathbf{y}_{N_\tau,h},\ \theta_{N_\tau+1}:=\theta_{N_\tau},\quad \kappa_{N_\tau+1,h}:=0,
\end{aligned}\tag{4.47}$$

其中 $\{(\mathbf{y}_{n,h},\theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 是全离散状态方程 (4.27) 的解，且 $\tau_{N_\tau+1}:=\tau_{N_\tau}$。容易证明，方程 (4.47) 有唯一解。

利用 (4.46) 和 (4.47)，得到

$$\begin{aligned}
&\int_I(\mathbf{y}_\sigma(u)-\mathbf{y}_d,\mathbf{z}_\sigma)\,dt+\int_I(\theta_\sigma(u)-\theta_d,\xi_\sigma)\,dt=\sum_{n=1}^{N_\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_d,\mathbf{z}_{n,h})+(\theta_{n,h}-\theta_d,\xi_{n,h})\big]dt\\
&=\sum_{n=1}^{N_\tau}\big(\boldsymbol{\mu}_{n,h}-\boldsymbol{\mu}_{n+1,h},\mathbf{z}_{n,h}\big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\big[\tau_n\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\mathbf{z}_{n,h})+\tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h})+\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{z}_{n,h},\boldsymbol{\mu}_{n,h})\big]\\
&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\big(\kappa_{n,h}-\kappa_{n+1,h},\xi_{n,h}\big)+\sum_{n=1}^{N_\tau}\big[\tau_n\chi a(\kappa_{n,h},\xi_{n,h})+\tau_{n+1}b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_{n+1,h},\kappa_{n+1,h})+\tau_nb(\mathbf{y}_{n-1,h},\xi_{n,h},\kappa_{n,h})\\
&+\eta\gamma\tau_n(\kappa_{n,\ h},\ \xi_{n,\ h})_\Gamma+\tau_{n+1}\beta(\boldsymbol{\mu}_{n+1,\ h},\ \xi_{n,\ h}\mathbf{g})\big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N_\tau} \big(\mathbf{z}_{n,h} - \mathbf{z}_{n-1,h}, \boldsymbol{\mu}_{n,h}\big) + \sum_{n=1}^{N_\tau} \tau_n \big[\nu \mathbf{a}(\boldsymbol{\mu}_{n,h}, \mathbf{z}_{n,h}) + \mathbf{b}(\mathbf{z}_{n-1,h}, \mathbf{y}_{n,h}, \boldsymbol{\mu}_{n,h}) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\mu}_{n,h}) + \beta(\xi_{n-1,h}\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}_{n,h})\big] \\
&+ \sum_{n=1}^{N_\tau} \big(\xi_{n,h} - \xi_{n-1,h}, \kappa_{n,h}\big) + \sum_{n=1}^{N_\tau} \tau_n \big[\chi a(\kappa_{n,h}, \xi_{n,h}) + b(\mathbf{z}_{n-1,h}, \theta_{n,h}, \kappa_{n,h}) + b(\mathbf{y}_{n-1,h}, \xi_{n,h}, \kappa_{n,h}) + \eta\gamma(\kappa_{n,h}, \xi_{n,h})_\Gamma\big] \\
&= \sum_{n=1}^{N_\tau} \tau_n \eta(v^n, \kappa_{n,h})_\Gamma = \int_I \eta(\kappa_\sigma, v)_\Gamma dt,
\end{aligned}
$$

其中 $(\boldsymbol{\mu}_\sigma, \kappa_\sigma)\big|_{[0,T)} = \big(\sum_{n=1}^{N_\tau} \boldsymbol{\mu}_{n,h} \mathbb{1}_{I_n^l}, \sum_{n=1}^{N_\tau} \kappa_{n,h} \mathbb{1}_{I_n^l}\big)$，其中 $\mu_\sigma(T) = 0, \kappa_\sigma(T) = 0$。因此，由所得恒等式可得

$$
J'_\sigma(u)v = \int_I (\eta\kappa_\sigma + \alpha u, v)_\Gamma \, dt. \tag{4.48}
$$

与定理 3.2类似，下一个定理给出了 $(\mathrm{P}_\sigma)$ 的任意局部极小值所满足的一阶必要最优性条件。

**定理 4.1.** 设 $\bar{u}_\sigma$ 是问题 $(\mathrm{P}_\sigma)$ 的一个局部解。那么存在 $\{(\bar{\mathbf{y}}_{n,h}, \bar{\theta}_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 和 $\{(\bar{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}, \bar{\kappa}_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$，使得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\bar{\mathbf{y}}_{n,h} - \bar{\mathbf{y}}_{n-1,h}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\Big) + \nu \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\bar{\mathbf{y}}_{n-1,h}, \bar{\mathbf{y}}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \beta(\bar{\theta}_{n-1,h}\mathbf{g}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{h}^n, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{X}_h, \\
&\Big(\frac{\bar{\theta}_{n,h} - \bar{\theta}_{n-1,h}}{\tau_n}, \psi_h\Big) + \chi a(\bar{\theta}_{n,h}, \psi_h) + b(\bar{\mathbf{y}}_{n-1,h}, \bar{\theta}_{n,h}, \psi_h) + \eta\gamma(\bar{\theta}_{n,h}, \psi_h)_\Gamma = (f^n, \psi_h) + \eta(\bar{u}_\sigma^n, \psi_h)_\Gamma \quad \forall \psi_h \in V_h, \\
&\bar{\mathbf{y}}_{0,h} = \mathbf{y}_{0h}, \quad \bar{\theta}_{0,h} = \theta_{0h},
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\bar{\boldsymbol{\mu}}_{n,h} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}}{\tau_n}, \mathbf{w}_h\Big) + \nu \mathbf{a}(\bar{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}, \mathbf{w}_h) + \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \mathbf{b}(\mathbf{w}_h, \bar{\mathbf{y}}_{n+1,h}, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}) + \mathbf{b}(\bar{\mathbf{y}}_{n-1,h}, \mathbf{w}_h, \bar{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}) \\
&+ \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} b(\mathbf{w}_h, \bar{\theta}_{n+1,h}, \bar{\kappa}_{n+1,h}) = (\bar{\mathbf{y}}_{n,h} - \mathbf{y}_d^n, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{X}_h, \\
&\Big(\frac{\bar{\kappa}_{n,h} - \bar{\kappa}_{n+1,h}}{\tau_n}, \zeta_h\Big) + \chi a(\bar{\kappa}_{n,h}, \zeta_h) + b(\bar{\mathbf{y}}_{n-1,h}, \zeta_h, \bar{\kappa}_{n,h}) + \eta\gamma(\bar{\kappa}_{n,h}, \zeta_h)_\Gamma + \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \beta(\bar{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}, \zeta_h \mathbf{g}) \\
&= (\bar{\theta}_{n,h} - \theta_d^n, \zeta_h) \quad \forall \zeta_h \in V_h, \\
&\bar{\mu}_{N_\tau+1,h} := 0, \ \bar{\mathbf{y}}_{N_\tau+1,h} := \bar{\mathbf{y}}_{N_\tau,h}, \ \bar{\theta}_{N_\tau+1} := \bar{\theta}_{N_\tau}, \quad \bar{\kappa}_{N_\tau+1,h} := 0,
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

$$
\int_I (\eta\bar{\kappa}_\sigma + \alpha\bar{u}_\sigma, v - \bar{u}_\sigma)_\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.51}
$$

**注 4.7.** 我们只需注意到 (4.51)蕴含

$$
\bar{u}_\sigma(t,x) = \mathrm{Proj}_{[u_a, u_b]}\big(-\frac{\eta}{\alpha}\bar{\kappa}_\sigma(t,x)\big) \quad \textit{for a.e. } (t,x) \in \Sigma_T. \tag{4.52}
$$

下面，我们给出离散伴随方程 (4.47) 的稳定性分析。

引理 *4.12.* 已知 $u \in L^2(I; L^2(\Gamma))$，设 $\{(y_{n,h}, \theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 为全离散状态方程 *(4.27)* 的解，而 $\{(\boldsymbol{\mu}_{n,h}, \kappa_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 表示全离散伴随方程 *(4.47)* 的解。那么当 $\sigma$ 足够小时，以下估计成立：

$$
\|\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\kappa_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \nu^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \text{最小}\{\chi, \eta\gamma\}^{\frac{1}{2}} \|\kappa_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \mathcal{C}_3 \big(\nu^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{y}_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}
$$

$$+\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}}\|\theta_d\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}+\widetilde{G}_1\Big)=:\widetilde{G}_3, \tag{4.53}$$

$$\min\{\chi,\eta\gamma\}^{\frac{1}{2}}\Big(\|\kappa_\sigma\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}+\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\|\kappa_{n,h}-\kappa_{n+1,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)+\|\Delta_h\kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$$

$$\le\mathcal{C}_4\Big((\beta|\mathbf{g}|+1)\widetilde{G}_3+\nu^{-\frac{1}{2}}\widetilde{G}_2^2\Big)=:\widetilde{G}_4, \tag{4.54}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\frac{\|\kappa_{n,h}-\kappa_{n+1,h}\|^2}{\tau_n}\Big)^{\frac{1}{2}}\le C\Big(\widetilde{G}_2\widetilde{G}_4\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{4}}+\widetilde{G}_2^2\widetilde{G}_3\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}}+\widetilde{G}_4\Big), \tag{4.55}$$

其中

$$\mathcal{C}_3:=C\exp\Big(C\big((\nu^{-\frac{1}{2}}+\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}})\widetilde{G}_1+\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}}\beta|\mathbf{g}|\sqrt{T}+\nu^{-\frac{3}{2}}\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2+\nu^{-1}\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{G}_2^2\big)\Big),$$

$$\mathcal{C}_4:=C\exp\Big(C\big(\nu^{-\frac{1}{2}}\widetilde{G}_1^2+\widetilde{G}_3\big)\Big).$$

证明。我们逐一证明该估计。

- （4.53）的估计。取（$\mathbf{w}_h,\zeta_h$）$=\tau_n$（$\boldsymbol{\mu}_{n,h},\kappa_{n,h}$）满足（4.47），可得

$$\frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\|\kappa_{n,h}\|^2\big)-\frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^2+\|\kappa_{n+1,h}\|^2\big)+\nu\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\chi\tau_n\|\nabla\kappa_{n,h}\|^2+\eta\gamma\tau_n\|\kappa_{n,h}\|^2_\Gamma$$
$$\le\Big[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[(\mathbf{y}_\sigma-\mathbf{y}_d,\boldsymbol{\mu}_{n,h})+(\theta_\sigma-\theta_d,\kappa_{n,h})\big]dt-\tau_{n+1}\beta(\kappa_{n,h}\mathbf{g},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h})\Big]-\tau_{n+1}\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h})$$
$$-\tau_{n+1}\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\theta_{n+1,h},\kappa_{n+1,h})=J_1+J_2+J_3. \tag{4.56}$$

由柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，项 $J_1$ 满足

$$J_1\le\frac{\tau_n\nu}{6}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\frac{\tau_n}{2}\big(\chi\|\nabla\kappa_{n,h}\|^2+\eta\gamma\|\kappa_{n,h}\|^2_\Gamma\big)+C\Big(\nu^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\mathbf{y}_\sigma-\mathbf{y}_d\|^2dt$$
$$+\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\theta_\sigma-\theta_d\|^2dt+F_n\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^2\Big)$$

其中 $F_n=\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-1}\beta^2|\mathbf{g}|^2\tau_n$。利用（2.3），可得

$$\begin{aligned}J_2&\le C\tau_{n+1}\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{y}_{n+1,h}\|\,\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^{\frac{1}{2}}\\&\quad+C\tau_{n+1}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|\,\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{y}_{n+1,h}\|\\&\le\frac{\nu\tau_n}{6}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\frac{\nu\tau_{n+1}}{4}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^2+C\big(G_n\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+H_n\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^2\big)\end{aligned}$$

其中 $G_n=\nu^{-1}\tau_{n+1}\|\nabla\mathbf{y}_{n+1,h}\|^2$，$H_n=\tau_{n+1}\big(\nu^{-1}\|\nabla\mathbf{y}_{n+1,h}\|^2+\nu^{-3}\|\nabla\mathbf{y}_{n+1,h}\|^4\big)$。采用类似的论证，我们得到 $J_3$ 的估计

$$J_3\le\frac{\nu\tau_n}{6}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\frac{\tau_{n+1}}{4}\big(\chi\|\nabla\kappa_{n+1,h}\|^2+\eta\gamma\|\kappa_{n+1,h}\|^2_\Gamma\big)+C\big(K_n\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+M_n\|\kappa_{n+1,h}\|^2\big)$$

在 $K_n=\tau_{n+1}\nu^{-1}\|\nabla\theta_{n+1,h}\|^2$，$M_n=\tau_{n+1}$ 最小值$\{\chi,\eta\gamma\}^{-1}\|\nabla\theta_{n+1,h}\|^2+\tau_{n+1}\nu^{-2}$ 最小值$\{\chi,\eta\gamma\}^{-1}\|\theta_{n+1,h}\|^2\|\theta_{n+1,h}\|^2_{H^1(\Omega)}$。因此，利用等式 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2$，并将上述估计与（4.56）结合，对 $n=N_\tau,\dots,k$ 求和，对于任意 $1\le k\le N_\tau$，我们得到以下界

$$\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\|\kappa_{n,h}\|^2+\sum_{n=k}^{N_\tau}\tau_n\big[\nu\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+\min\{\chi,\eta\gamma\}\big(\|\nabla\kappa_{n,h}\|^2+\|\kappa_{n,h}\|^2_\Gamma\big)\big]$$
$$\le C\Big(\sum_{n=k}^{N_\tau}\big((G_n+K_n)\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}\|^2+(F_n+H_n+M_n)\big(\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}\|^2+\|\kappa_{n+1,h}\|^2\big)\big)+\int_{t_{k-1}}^{T}\nu^{-1}\|\mathbf{y}_\sigma-\mathbf{y}_d\|^2dt$$

$$+\min\{\chi,\eta\gamma\}^{-1}\int_{t_{k-1}}^{T}\|\theta_\sigma-\theta_d\|^2dt\Big).$$

与注 4.5类似，引理 B.1 表明 $\tau_n\|\theta_{n,h}(u)\|^2_{H^1(\Omega)}\to 0$ 关于 $n$ 一致收敛，当 $\sigma\to 0$时。因此，结合引理 4.8，对 $\|\mathbf{y}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}$进行界定后，我们可以将时间和空间网格尺寸取得足够小，使得 $C(G_n+K_n)\le\frac{1}{2}$ 对所有 $n$均成立。结合引理 4.8 和格朗沃尔不等式，即得证明。

（4.54）和（4.55的估计与（4.30）和（4.31）的估计类似。 □

下一个定理给出了伴随方程近似的时间误差估计。由于证明与引理 4.9的证明类似，因此从略。

引理*4.13.* 设 $(\boldsymbol{\mu}_h,\kappa_h)\in L^2(I;\mathbb{X}_h)\times L^2(I;V_h)$ 是方程 *(4.7)* 的解，且 $\{(\boldsymbol{\mu}_{n,h},\kappa_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 是离散伴随方程 *(4.47)* 的解。那么，在引理*4.9*的假设下，以下估计成立：

$$\|\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}+\|\kappa_h-\kappa_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\kappa_h-\kappa_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C\tau^{\frac{1}{2}}.$$

现在我们给出解 $(\boldsymbol{\mu}_\sigma,\kappa_\sigma)$ 对控制 $u$ 的连续依赖性。

**引理 4.14.** 已知 最大值 $\{\|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;\ L^2(\Gamma))},\ \|u\|_{L^2(I;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\,\|v\|_{L^2(I;\ L^2(\Gamma))}\}\le M$，其中 $M$是一个正常数。那么，当 $\sigma$充分小时，可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\mu}_\sigma(u)-\boldsymbol{\mu}_\sigma(v)\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\kappa_\sigma(u)-\kappa_\sigma(v)\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\mu}_\sigma(u)-\boldsymbol{\mu}_\sigma(v)\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\\+\|\kappa_\sigma(u)-\kappa_\sigma(v)\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C_M\|u-v\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))},\end{aligned}$$

其中， $C_M$ 是依赖于 $M$的正数常量。

证明。 令 $(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\ h},\ e^{\kappa}_{n,\ h})=(\boldsymbol{\mu}_{n,\ h}(u)\ -\boldsymbol{\mu}_{n,\ h}(v)\ \ \kappa_{n,\ h}(u)-\kappa_{n,\ h}(v)\ )$。由（4.47）可得

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}-\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h},\mathbf{w}_h\big)+\tau_n\nu\mathbf{a}(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},\mathbf{w}_h)+\tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{w}_h,\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u))+\tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{w}_h,\mathbf{y}_{n+1,h}(v),\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h})\\&+\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h},\mathbf{w}_h,\boldsymbol{\mu}_{n,h}(u))+\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}(v),\mathbf{w}_h,\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h})+\tau_{n+1}b(\mathbf{w}_h,\theta_{n+1,h}(u),e^{\kappa}_{n+1,h})\\&+\tau_{n+1}b(\mathbf{w}_h,e^{\theta}_{n+1,h},\kappa_{n+1,h}(v))=\tau_n(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n,h},\mathbf{w}_h),\\&(e^{\kappa}_{n,h}-e^{\kappa}_{n+1,h},\zeta_h)+\chi\tau_n a(e^{\kappa}_{n,h},\zeta_h)+\tau_n b(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h},\zeta_h,\kappa_{n,h}(u))+\tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h}(v),\zeta_h,e^{\kappa}_{n,h})\\&+\eta\gamma\tau_n(e^{\kappa}_{n,h},\zeta_h)_\Gamma+\tau_{n+1}\beta(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h},\zeta_h\mathbf{g})=\tau_n(e^{\theta}_{n,h},\zeta_h),\\&\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{N_\tau+1,h}=0,\quad e^{\kappa}_{N_\tau+1,h}=0,\end{aligned}$$

其中 $(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n,\ h},\ e^{\theta}_{n,\ h}):=(\mathbf{y}_{n,\ h}(u)\ \ -\mathbf{y}_{n,\ h}(v)\ \theta_{n,\ h}(u)\ -\theta_{n,\ h}(v)\ )$。取 $(\mathbf{w}_h,\ \zeta_h)\ =(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\ h},\ e^{\kappa}_{n,\ h})$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big(\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2+\|e^{\kappa}_{n,h}\|^2\big)-\frac{1}{2}\big(\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|^2+\|e^{\kappa}_{n+1,h}\|^2\big)+\tau_n\nu\|\nabla\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2+\tau_n\chi\|\nabla e^{\kappa}_{n,h}\|^2+\tau_n\eta\gamma\|e^{\kappa}_{n,h}\|^2_\Gamma\\&\le-\big[\tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u))+\tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h}(v),\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h})+\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h},\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},\boldsymbol{\mu}_{n,h}(u))\big]\\&-\big[\tau_{n+1}b(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},\theta_{n+1,h}(u),e^{\kappa}_{n+1,h})+\tau_{n+1}b(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h},e^{\theta}_{n+1,h},\kappa_{n+1}(v))+\tau_n b(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h},e^{\kappa}_{n,h},\kappa_{n,h}(u))\big]\\&-\big[\tau_{n+1}\beta(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h},e^{\kappa}_{n,h}\mathbf{g})-\tau_n(\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n,h},\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h})-\tau_n(e^{\theta}_{n,h},e^{\kappa}_{n,h})\big]=J_1+J_2+J_3\end{aligned}\tag{4.57}$$

其中 $\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{N_\tau+1,\ h}:=\mathbf{0}$ 以及 $e^{\theta}_{N_\tau+1,\ h}:=0$。根据引理 4.8 和 4.12，（4.57）可估计如下：

$$\begin{aligned}&J_1\le C\tau_{n+1}\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|e^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|+C\tau_{n+1}\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla e^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|\\&+C\tau_{n+1}\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla y_{n+1,h}(v)\|\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}+C\tau_{n+1}\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|y_{n+1,h}(v)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|+C\tau_n\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|e^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|+C\tau_n\|e^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla e^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|\end{aligned}$$

$$\le \frac{\nu}{6}\tau_n\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + \frac{\nu}{4}\tau_{n+1}\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|^2 + C\Big(G_n\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + H_n\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|^2 + \tau_{n+1}\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|$$
$$+ \tau_{n+1}\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|^2 + \tau_n\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\| + \tau_n\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|^2\Big)$$

满足$G_n = \tau_{n+1}\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|^2 + \tau_{n+1}\|\boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|^2\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|^2 + \tau_n\|\boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|^2\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|^2 + \tau_n\|\nabla \mathbf{y}_{n+1,h}(v)\|^2$,$H_n = \tau_n\|\nabla \mathbf{y}_{n+1,h}(v)\|^2 + \tau_n\|\mathbf{y}_{n+1,h}(v)\|^2\|\nabla \mathbf{y}_{n+1,h}(v)\|^2$。此外，我们有

$$\begin{aligned} J_2 &\le C\tau_{n+1}\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla \theta_{n+1,h}(u)\|\| e^{\kappa}_{n+1,h}\|_{L^4(\Omega)} + C\tau_{n+1}\|e^{\kappa}_{n+1,h}\|_{L^4(\Omega)}\|\theta_{n+1,h}(u)\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\| \\ &\quad + C\tau_{n+1}\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|e^{\theta}_{n+1,h}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla \kappa_{n+1,h}(v)\| + C\tau_{n+1}\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\kappa_{n+1,h}(v)\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla e^{\theta}_{n+1,h}\| \\ &\quad + C\tau_n\|e^{\kappa}_{n,h}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla \kappa_{n,h}(u)\| + C\tau_n\|e^{\kappa}_{n,h}\|_{L^4(\Omega)}\|\kappa_{n,h}(u)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\| \\ &\le \frac{\nu}{6}\tau_n\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + \frac{1}{4}\big(\tau_n\chi\|\nabla e^{\kappa}_{n,h}\|^2 + \tau_n\eta\gamma\|e^{\kappa}_{n,h}\|^2_{\Gamma}\big) + \frac{1}{4}\big(\tau_{n+1}\chi\|\nabla e^{\kappa}_{n+1,h}\|^2 + \tau_{n+1}\eta\gamma\|e^{\kappa}_{n+1,h}\|^2_{\Gamma}\big) \\ &\quad + C\Big(I_n\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + K_n\|e^{\kappa}_{n+1,h}\|^2 + \tau_{n+1}\|e^{\theta}_{n+1,h}\|^2_{H^1(\Omega)} + \tau_n\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|^2\Big) \end{aligned}$$

与 $I_n = \tau_{n+1}\|\nabla \theta_{n+1,h}(u)\|^2$，$K_n = \tau_{n+1}\|\nabla \theta_{n+1,h}(u)\|^2 + \tau_{n+1}\|\theta_{n+1,h}(u)\|^2\|\theta_{n+1,h}(u)\|^2_{H^1(\Omega)}$ 和 $\big(\tau_n\chi\|\nabla e^{\kappa}_{n,h}\|^2 + \tau_n\eta\gamma\|e^{\kappa}_{n,h}\|^2_{\Gamma}\big) + C\Big(\tau_{n+1}\beta^2|\mathbf{g}|^2\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|^2 + \tau_n\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n,h}\|^2 + \tau_n\|e^{\theta}_{n,h}$
$J_3 \le \frac{\nu}{6}\tau_n\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + \frac{1}{4}_{h}\|^2\Big)$，

其中我们用到了（4.54）。因此，结合上述估计与（4.57），并对 $n = N_\tau$，……，$k$求和，$1 \le k \le N_\tau$任意取值时，我们得到如下界

$$\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{k,h}\|^2 + \|e^{\kappa}_{k,h}\|^2 + \sum_{n=k}^{N_\tau}\big[\tau_n\nu\|\nabla \mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2 + \tau_n\chi\|\nabla e^{\kappa}_{n,h}\|^2 + \tau_n\eta\gamma\|e^{\kappa}_{n,h}\|^2_{\Gamma}\big] \le C\Big(\sum_{n=k}^{N_\tau}(G_n + I_n)\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h}\|^2$$
$$+ \sum_{n=k}^{N_\tau}(H_n + \tau_{n+1}\beta^2|\mathbf{g}|^2)\|\mathbf{e}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}\|^2 + \sum_{n=k}^{N_\tau}K_n\|e^{\kappa}_{n+1,h}\|^2 + \sum_{n=k}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n,h}(u)\|\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|$$
$$\sum_{n=k}^{N_\tau}\tau_{n+1}\|\nabla \boldsymbol{\mu}_{n+1,h}(u)\|\|\mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\|\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n+1,h}\| + \sum_{n=k}^{N_\tau}\tau_n\big[\|\nabla \mathbf{e}^{\mathbf{y}}_{n-1,h}\|^2 + \|e^{\theta}_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\big]\Big).$$

利用引理4.9、4.8 和4.13，我们可以将时间网格尺寸和空间网格尺寸取得足够细，使得$C(G_n + I_n) \le \frac{1}{2}$对所有 $n$成立。然后由引理4.10 与格朗沃尔不等式即可完成证明。 □

我们可以推导出全离散伴随变量在范数 $L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$ 或 $L^2(I;\ L^2(\Omega))$ 下改进的时间收敛阶。

**引理 4.15**。 在引理*4.13* 的假设下，如下估计 *hol* *ds:*

$$\|\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\kappa_h - \kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le C\tau. \tag{4.58}$$

证明。 我们使用该分解

$$\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\mu}_\sigma = \boldsymbol{\mu}_h - \Pi^l_\tau\boldsymbol{\mu}_h + \Pi^l_\tau\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\mu}_\sigma = \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau + \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau, \quad \kappa_h - \kappa_\sigma = \kappa_h - \Pi^l_\tau\kappa_h + \Pi^l_\tau\kappa_h - \kappa_\sigma = \zeta^{\kappa}_\tau + \eta^{\kappa}_\tau.$$

我们可以由插值的误差估计 $\Pi^l_\tau$ （由引理A.5 给出）得到

$$\|\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\kappa_h - \kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le C\tau + \|\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta^{\kappa}_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}.$$

现在，我们利用对偶论证，为$\|\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta^{\kappa}_\tau\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$给出一个估计。我们首先定义一个离散对偶问题：求一个离散解对 $(\mathbf{z}_{n,h},\xi_{n,h}) \in \mathbb{X}_h \times V_h$，使其对于$n = 1,\cdots,N_\tau$以及任意 $(\mathbf{v}_h,\psi_h) \in \mathbb{X}_h \times V_h$ 满足，

$$\Big(\frac{\mathbf{z}_{n,h} - \mathbf{z}_{n-1,h}}{\tau_n}, \mathbf{v}_h\Big) + \nu\mathbf{a}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{z}_{n-1,h}, \mathbf{y}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{v}_h) + \beta(\xi_{n-1,h}\mathbf{g}, \mathbf{v}_h)$$

$$= ((\boldsymbol{\eta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}})^n, \mathbf{v}_h),$$
$$\Big(\frac{\xi_{n,h}-\xi_{n-1,h}}{\tau_n}, \psi_h\Big) + \chi a(\xi_{n,h}, \psi_h) + b(\mathbf{z}_{n-1,h}, \theta_h(t_n), \psi_h) + b(\mathbf{y}_{n-1,h}, \xi_{n,h}, \psi_h) + \eta\gamma(\xi_{n,h}, \psi_h)_\Gamma = ((\eta_\tau^{\kappa})^n, \psi_h),$$
$$\mathbf{z}_{0,h} = 0, \quad \xi_{0,h} = 0. \tag{4.59}$$

与引理 4.8 的证明类似，我们知道 (4.59) 有唯一解 $\{(\mathbf{z}_{n,h}, \xi_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$，并且以下稳定性估计成立：

$$\max_{1\le n\le N_\tau}\Big(\|\xi_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\Big(\|\nabla \mathbf{z}_{n,h}\|^2 + \|\xi_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\Big) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\Big(\|\mathbf{A}_h\mathbf{z}_{n,h}\|^2 + \|\Delta_h\xi_{n,h}\|^2\Big)$$
$$\le C\Big(\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_\tau^{\kappa}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\Big). \tag{4.60}$$

令 $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = \tau_n(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}, \eta^{\kappa}_{n,\tau})$ 于 (4.59) 中，并对 1 到 $N_\tau$ 求和，得到

$$\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_\tau^{\kappa}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} = \sum_{n=1}^{N_\tau}(\mathbf{z}_{n,h} - \mathbf{z}_{n-1,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\nu\mathbf{a}(\mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n-1,h}, \mathbf{y}_{n,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau})$$
$$+ \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\beta(\xi_{n-1,h}\mathbf{g}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}(\xi_{n,h} - \xi_{n-1,h}, \eta^{\kappa}_{n,h}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\big[\chi a(\xi_{n,h}, \eta^{\kappa}_{n,h})$$
$$+ \eta\gamma(\xi_{n,h}, \eta^{\kappa}_{n,h})_\Gamma\big] + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n b(\mathbf{z}_{n-1,h}, \theta_h(t_n), \eta^{\kappa}_{n,h}) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h}, \xi_{n,h}, \eta^{\kappa}_{n,h}). \tag{4.61}$$

对 (4.7) 从 $t_{n-1}$ 到 $t_n$ 积分，并从 (4.47) 中减去其与 $\tau_n$ 的乘积，令 $(\mathbf{w}_h, \zeta_h) = (\mathbf{z}_{n,h}, \xi_{n,h})$，可得

$$\tau_n\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau}, \mathbf{z}_{n,h}) = -(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,\tau} - \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,\tau}, \mathbf{z}_{n,h}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau, \mathbf{z}_{n,h})dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\sigma, \boldsymbol{\mu}_h)dt$$
$$- \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n+1,h}, \boldsymbol{\mu}_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_{n+1,h}, \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau)dt - \tau_n\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_{n+1,h}, \boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1}) - \boldsymbol{\mu}_h(t_n))$$
$$- (\tau_n - \tau_{n+1})\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_{n+1,h}, \boldsymbol{\mu}_h(t_n)) - \tau_{n+1}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h}, \mathbf{y}_{n+1,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,h}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\sigma, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\mu}_h)dt$$
$$- \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau)dt - \tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1})) - \tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h}, \mathbf{z}_{n,h}, \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n,h})$$
$$- \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h}, \zeta^{\theta}_\tau, \kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_n) - \theta_h(t_{n+1}), \kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_{n+1}), \zeta^{\kappa}_\tau)dt$$
$$- \tau_n b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_{n+1}), \kappa_h(t_{n-1}) - \kappa_h(t_n)) - (\tau_n - \tau_{n+1})b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_{n+1}), \kappa_h(t_n)) - \tau_{n+1}b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_{n+1}), \eta^{\kappa}_{n+1,\tau})$$
$$- \tau_{n+1}b(\mathbf{z}_{n,h}, \theta_h(t_{n+1}) - \theta_{n+1,h}, \kappa_{n+1,h}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n}(\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\sigma, \mathbf{z}_{n,h})dt,$$

$$\chi\tau_n a(\eta^{\kappa}_{n,\tau}, \xi_{n,h}) + \tau_n\eta\gamma(\eta^{\kappa}_{n,\tau}, \xi_{n,h})_\Gamma = -(\eta^{\kappa}_{n,\tau} - \eta^{\kappa}_{n+1,\tau}, \xi_{n,h}) - \chi\int_{t_{n-1}}^{t_n}a(\zeta^{\kappa}_\tau, \xi_{n,h})dt - \eta\gamma\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta^{\kappa}_\tau, \xi_{n,h})_\Gamma dt$$
$$- \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\sigma, \xi_{n,h}, \kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_\sigma, \xi_{n,h}, \zeta^{\kappa}_\tau)dt - \tau_n b(\mathbf{y}_{n,h} - \mathbf{y}_{n-1,h}, \xi_{n,h}, \kappa_h(t_{n-1}))$$
$$- \tau_n b(\mathbf{y}_{n-1,h}, \xi_{n,h}, \eta^{\kappa}_{n,\tau}) - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\beta(\boldsymbol{\zeta}^{\boldsymbol{\mu}}_\tau, \xi_{n,h}\mathbf{g})dt - (\tau_n - \tau_{n+1})\beta(\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1}), \xi_{n,h}\mathbf{g}) - \tau_{n+1}\beta(\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1}) - \boldsymbol{\mu}_h(t_n), \xi_{n,h}\mathbf{g})$$
$$- \tau_{n+1}\beta(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\mu}}_{n+1,\tau}, \xi_{n,h}\mathbf{g})) + \int_{t_{n-1}}^{t_n}(\theta_h - \theta_\sigma, \xi_{n,h}\mathbf{g})dt$$

其中 $\theta(t_{N_\tau+1}) := \theta(t_{N_\tau})$。将上述方程代入（4.61），并进行必要的化简，得到

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\eta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|^2_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\eta_\tau^{\kappa}\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} = \sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\nu\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}},\mathbf{z}_{n,h})dt - \chi\int_{t_{n-1}}^{t_n}a(\zeta_\tau^{\kappa},\xi_{n,h})dt - \eta\gamma\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\zeta_\tau^{\kappa},\xi_{n,h})_\Gamma dt\Big)\\
&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma,\boldsymbol{\mu}_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}})dt\\
&-\tau_n\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1})-\boldsymbol{\mu}_h(t_n)) - (\tau_n-\tau_{n+1})\mathbf{b}(\mathbf{z}_{n,h},\mathbf{y}_{n+1,h},\boldsymbol{\mu}_h(t_n))\Big)\\
&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma,\mathbf{z}_{n,h},\boldsymbol{\mu}_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n,h},\mathbf{z}_{n,h},\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}})dt - \tau_n\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{z}_{n,h},\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1}))\Big)\\
&+\sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h},\zeta_\tau^{\theta},\kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_h(t_n)-\theta_h(t_{n+1}),\kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_h(t_{n+1}),\zeta_\tau^{\kappa})dt\\
&-\tau_n b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_h(t_{n+1}),\kappa_h(t_{n-1})-\kappa_h(t_n)) - (\tau_n-\tau_{n+1})b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_h(t_{n+1}),\kappa_h(t_n))\\
&-\tau_{n+1}b(\mathbf{z}_{n,h},\theta_h(t_{n+1})-\theta_{n+1,h},\kappa_{n+1,h})\Big) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma,\xi_{n,h},\kappa_h)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}b(\mathbf{y}_\sigma,\xi_{n,h},\zeta_\tau^{\kappa})dt\\
&-\tau_n b(\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h},\xi_{n,h},\kappa_h(t_{n-1}))\Big) + \sum_{n=1}^{N_\tau}\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma,\mathbf{z}_{n,h})dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\beta(\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}},\xi_{n,h}\mathbf{g})dt\\
&-(\tau_n-\tau_{n+1})\beta(\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1}),\xi_{n,h}\mathbf{g}) - \tau_{n+1}\beta(\boldsymbol{\mu}_h(t_{n-1})-\boldsymbol{\mu}_h(t_n),\xi_{n,h}\mathbf{g}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n}(\theta_h-\theta_\sigma,\xi_{n,h}\mathbf{g})dt\Big)\\
&= J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6. \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

基于前　　前述稳定性分析中，项 $J_i\,(i=1,\ \cdots,\ 6)$ 在 (4.62) 中可估计如下　　：

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le \nu\|\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{A}_h\mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac12} + \|\zeta_\tau^{\kappa}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\Delta_h\xi_{n,h}\|^2\Big),\\
J_2+J_3 &\le C\Big(\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \tau^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\|\mathbf{y}_{n-1,h}-\mathbf{y}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac12} + \|\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \tau\|\partial_t\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}\\
&\quad + \max_{1\le n\le N_\tau}|\tau_n-\tau_{n+1}|\tau^{-1}\Big)\Big(\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla\mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{A}_h\mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14} + \max_{1\le n\le N_\tau}\|\nabla\mathbf{z}_{n,h}\|\Big),\\
J_4 &\le C\Big(\|\zeta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \tau\|\partial_t\theta_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\zeta_\tau^{\kappa}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \tau\|\partial_t\kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|\eta_\tau^{\theta}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\\
&\quad + \max_{1\le n\le N_\tau}|\tau_n-\tau_{n+1}|\tau^{-1}\Big)\Big(\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\nabla\mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\mathbf{A}_h\mathbf{z}_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14} + \max_{1\le n\le N_\tau}\|\nabla\mathbf{z}_{n,h}\|\Big),\\
J_5 &\le C\Big(\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\zeta_\tau^{\kappa}\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \tau^{\frac12}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\|\mathbf{y}_{n,h}-\mathbf{y}_{n-1,h}\|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big(\max_{1\le n\le N_\tau}\|\xi_{n,h}\|_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + \Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\xi_{n,h}\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac14}\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\Delta_h\xi_{n,h}\|^2\Big)^{\frac14}\Big),\\
J_6 &\le C\Big(\|\mathbf{y}_h-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\zeta}_\tau^{\boldsymbol{\mu}}\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \tau^{\frac12}\|\partial_t\boldsymbol{\mu}_h\|_{L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\theta_h-\theta_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}
\end{aligned}
$$

$$+\max_{1\le n\le N_\tau}|\tau_n-\tau_{n+1}|\tau^{-1}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\big[\|\mathbf{z}_{n,h}\|^2+\|\xi_{n,h}\|^2\big]\Big).$$

结合上述估计、(4.62) 和 (4.60)，利用假设 (B)、引理 A.5、4.8 和 4.11即可得出结论。

□

结合引理 4.2、4.4、4.7、4.9、4.13 和4.11，可得到以下关于时间误差和空间误差的定理。

**定理 4.2.** 在引理 *4.7* 和 *4.15*的假设下，以下估计成立：

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\\&\qquad+\|\theta-\theta_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\theta-\theta_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C\big(\tau^{\frac12}+h\big),\qquad(4.63)\\&\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))}+\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}\\&\qquad+\|\kappa-\kappa_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))}+\|\kappa-\kappa_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C\big(\tau^{\frac12}+h\big),\qquad(4.64)\\&\qquad\|\kappa-\kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le C\big(\tau^{\frac34}+h^{\frac32}\big).\qquad(4.65)\end{aligned}$$

证明. (4.63) 和 (4.64) 的推导很直接。下面给出 (4.65) 的推导。利用三角不等式和迹不等式，可得

$$\begin{aligned}\|\kappa-\kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}&\le\|\kappa-\kappa_h\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}+\|\kappa_h-\kappa_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\&\le C\|\kappa-\kappa_h\|^{\frac12}_{L^2(I;L^2(\Omega))}\|\kappa-\kappa_h\|^{\frac12}_{L^2(I;H^1(\Omega))}+C\|\kappa_h-\kappa_\sigma\|^{\frac12}_{L^2(I;L^2(\Omega))}\|\kappa_h-\kappa_\sigma\|^{\frac12}_{L^2(I;H^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

于是（4.65）结合上述不等式以及引理 4.4、4.7、4.13 和 4.1 可得 5. □

### 4.2.3 离散控制问题分析

在本小节中，我们将推导离散最优控制问题的一些收敛性结果。定理 4.3 和4.4 的证明分别与 [9], 中的定理 4.13 和 4.15 的证明类似，因此略去。以下定理说明离散最优控制问题 ($\mathrm{P}_\sigma$) 收敛到连续问题 (P)。

**定理 4.3**。 设 $\bar u_\sigma$ 是问题$(\mathrm{P}_\sigma)$的一个全局解。那么，序列 $\{\bar u_\sigma\}_\sigma$ 在$L^2(I;L^2(\Gamma))$ 中有界，并且存在子序列（仍记作原序列），弱收敛于点 $\bar u$，其中$L^2(I;L^2(\Gamma))$，且 $\bar u$ 是(P)的一个全局解。此外，我们有

$$\lim_{\sigma\to0}\|\bar u_\sigma-\bar u\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}=0,\quad\lim_{\sigma\to0}J_\sigma(\bar u_\sigma)=J(\bar u).\qquad(4.66)$$

下一个定理指出，最优控制问题 (P) 的严格局部解可以由离散最优控制问题 ($\mathrm{P}_\sigma$) 的局部解逼近。

**定理 4.4**。 设 $\bar u$ 是问题 (P)的严格局部极小值。那么，存在一个序列 $\{\bar u_\sigma\}_\sigma$，其元素是问题$(\mathrm{P}_\sigma)$ 的局部极小值，使得 (4.66) 成立。

在定理 4.5中，我们将“严格局部极小值”替换为“局部极小值”，并研究相同结论是否成立。由于解缺乏唯一性，我们无法证明这样一个一般性结果。相反，对于 (P) 的每个局部极小值，我们只能给出一个较弱的结果。为此，我们采用 Barbu [5]提出的一种技术。设 $\bar u$是问题 (P) 的一个局部极小值。我们将该局部极小值与相应的最优控制问题

$$(\widetilde{\mathrm{P}}_\sigma)\qquad\min_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\widetilde J_\sigma(u):=J_\sigma(u)+\frac12\|u-\bar u\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.$$

~类似于问题($\mathrm{P}_\sigma$)，我们可以证明最优控制问题($\mathrm{P}_\sigma$)存在一个解。

**定理 4.5.** 设 $\bar{u}$为问题(P)的一个局部极小值。则存在一列 $\{\widetilde{u}_\sigma\}_\sigma$ ~局部极小值，它们是问题$(\mathrm{P}_\sigma)$ 的局部极小值，使得

$$\lim_{\sigma\to 0}\|\widetilde{u}_\sigma-\bar{u}\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}=0,\quad \lim_{\sigma\to 0}\widetilde{J}_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)=J(\bar{u}).$$

证明。 我们引入一个局部适应性最优控制问题

$$(\widetilde{\mathrm{P}}_{\sigma,\delta})\qquad \min_{u\in\mathcal{U}_{ad}\cap\bar{\mathcal{B}}_\delta(\bar{u})}\widetilde{J}_\sigma(u).$$

由此可直接得出，该问题至少存在一个解。设 $\widetilde{u}_\sigma$ 是问题 (~$\mathrm{P}_{\sigma,\delta}$) 的全局解。因此，我们可以得出存在子列在 $L^2(I;L^2(\Gamma))$¯ 中弱收敛于某个点 $\widetilde{u}\in\mathcal{U}_{ad}\cap\mathcal{B}_\delta(\bar{u})$。此外，利用引理 3.2、B.1 以及紧嵌入$\mathbb{W}\hookrightarrow L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))\times L^2(I;L^2(\Omega))$，我们可以推得 $(\mathrm{y}_\sigma(\widetilde{u}_\sigma),\theta_\sigma(\widetilde{u}_\sigma))\to(\mathrm{y}_{\widetilde{u}},\theta_{\widetilde{u}})$ 在 $L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))\times L^2(I;L^2(\Omega))$ 中。此外，根据范数的弱序列下半连续性，我们得到

$$J(\bar{u})+\frac{1}{2}\|\widetilde{u}-\bar{u}\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le J(\widetilde{u})+\frac{1}{2}\|\widetilde{u}-\bar{u}\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le\liminf_{\sigma\to 0}\widetilde{J}_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)\le\limsup_{\sigma\to 0}\widetilde{J}_\sigma(\bar{u})=J(\bar{u}).$$

~这意味着 $\widetilde{u}=\bar{u}$，$\lim_{\sigma\to 0}\|\widetilde{u}_\sigma-\bar{u}\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}=0$ 且 $\lim_{\sigma\to 0}J_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)=J(\bar{u})$。由此可知，对于充分小的 $\sigma$，$\widetilde{u}_\sigma$ 是问题 $(\mathrm{P}_{\sigma,\delta})$ 的一个局部~解。证明完毕。 □

设 $\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$ 是离散控制问题 $(\mathrm{P}_\sigma)$ 的一列局部极小值，满足当 $\sigma\to 0$ 时，$\bar{u}_\sigma\to\bar{u}$ 属于 $L^2(I;L^2(\Gamma))$，其中 $\bar{u}$ 表示问题 (P) 的一个局部解。接下来，我们将推导最优控制以及相应状态和伴随变量的误差估计。在给出误差估计之前，我们先陈述以下辅助引理。

**引理 4.16.** 设 $\bar{u}$ 满足二阶最优性条件 (3.32)。那么，存在 $\sigma_*>0$ 使得我们可以从 $\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$中提取一个子序列，并仍用相同的记号表示，使得

$$2^{-1}\min\{\alpha,\lambda\}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le\big[J'(\bar{u}_\sigma)-J'(\bar{u})\big](\bar{u}_\sigma-\bar{u})\quad \textit{for any } |\sigma|<\sigma_*. \tag{4.67}$$

证明. 定义 $v_\sigma=\|\bar{u}_\sigma-\bar{u}\|^{-1}_{L^2(I;L^2(\Gamma))}(\bar{u}_\sigma-\bar{u})$。我们注意到，当 $\sigma\to 0$ 时，沿着一个子序列有 $v_\sigma\rightharpoonup v$ 属于 $L^2(I;L^2(\Gamma))$。不失一般性，我们仍用相同的记号表示该子序列，且极限点 $v$ 满足条件 (3.27)-(3.28)。接下来，我们证明 $J'(\bar{u})\neq 0$ 蕴含 $v=0$。为此，利用引理 4.14 和定理 4.2，我们可以推导出

$$\|\bar{\kappa}-\bar{\kappa}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le\|\bar{\kappa}-\kappa_\sigma(\bar{u})\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}+\|\kappa_\sigma(\bar{u})-\bar{\kappa}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\to 0\quad\text{as}\quad\sigma\to 0.$$

因此，结合上述收敛性结果，我们得到

$$J'(\bar{u})v=\lim_{\sigma\to 0}J'_\sigma(\bar{u}_\sigma)v_\sigma=\lim_{\sigma\to 0}\|\bar{u}_\sigma-\bar{u}\|^{-1}_{L^2(I;L^2(\Gamma))}J'_\sigma(\bar{u}_\sigma)(\bar{u}_\sigma-\bar{u})\le 0.$$

此外，由于 $v$满足条件（3.27）-（3.28），这意味着 $\mathcal{J}(t,x)v(t,x)\ge 0$，其中$\mathcal{J}=J'(\bar{u})$。因此，若 $\mathcal{J}(t,x)\neq 0$，则 $v=0$。

应用中值定理，我们得到

$$\big[J'(\bar{u}_\sigma)-J'(\bar{u})\big](\bar{u}_\sigma-\bar{u})=J''(\hat{u}_\sigma)(\bar{u}_\sigma-\bar{u})^2,\quad\hat{u}_\sigma=\bar{u}_\sigma+\theta_\sigma(\bar{u}_\sigma-\bar{u}), \tag{4.68}$$

其中 $\theta_\sigma\in(0,1)$。此外，通过应用引理 3.4 和 3.5，以及由标准 Galerkin 方法得到的界 $\|\mathbf{z}_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\|_{L^\infty(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}+\|\kappa_{\hat{u}_\sigma}\|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))}+\|\xi_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C$，由 (3.6) 和 (3.32) 可得

$$\lim_{\sigma\to 0}J''(\hat{u}_\sigma)v_\sigma^2=\lim_{\sigma\to 0}\Big(\int_{\Omega_T}\big(|\mathbf{z}_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}|^2+|\xi_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}|^2-2(\mathbf{z}_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\cdot\nabla)\mathbf{z}_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu}_{\hat{u}_\sigma}-2(\mathbf{z}_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\cdot\nabla)\xi_{\hat{u}_\sigma,v_\sigma}\kappa_{\hat{u}_\sigma}\big)\,dxdt$$

$$+\alpha\Big) = J''(\bar{u})v^2 + \alpha(1 - \|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))})$$
$$\geq \alpha + (\lambda - \alpha)\|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.$$

鉴于 $\|v\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \leq 1$，可知 $\lim_{\sigma\to 0} J''(\hat{u}_\sigma)v_\sigma^2 \geq \min\{\alpha,\lambda\} > 0$。因此，存在$\sigma_*$，使得对所有 $|\sigma| < \sigma_*$，均有 $J''(\hat{u}_\sigma)v_\sigma^2 \geq \frac{1}{2}\min\{\alpha,\lambda\}$。最后，结合 (4.68)，即可得出结论。

□

接下来给出最优控制及相应状态和伴随变量的误差估计。

**定理 4.6**。设 $\bar{u}$ 满足二阶最优性条件 (3.32)。则存在 $\sigma_* > 0$ 使得对于任意 $|\sigma| \leq \sigma_*$，以下误差估计成立：

$$\|\bar{u} - \bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \leq C(\tau^{\frac{3}{4}} + h^{\frac{3}{2}}), \tag{4.69}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{y}}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{y}}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\bar{\theta} - \bar{\theta}_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|\bar{\theta} - \bar{\theta}_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C\big(\tau^{\frac{1}{2}} + h\big), \tag{4.70}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_\sigma\|_{L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))} + \|\bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))} + \|\bar{\kappa} - \bar{\kappa}_\sigma\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|\bar{\kappa} - \bar{\kappa}_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C\big(\tau^{\frac{1}{2}} + h\big). \tag{4.71}$$

证明。我们如下定义 $\{\kappa_{n,h}\}_{n=1}^{N_\tau+1}$ 在 $I_n^l$ 上针对 $n = 1,\ldots,N_\tau$的分段线性插值：

$$\widetilde{\kappa}_\sigma(t,x) := \frac{t_n - t}{\tau_n}\bar{\kappa}_{n,h}(x) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}\bar{\kappa}_{n+1,h}(x).$$

此外，利用（4.54）和（4.55），我们得到以下估计：

$$\|\widetilde{\kappa}_\sigma - \bar{k}_\sigma\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} = \sum_{n=1}^{N_\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\widetilde{\kappa}_\sigma - \bar{k}_\sigma\|^2 dt = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N_\tau}\tau_n\|\bar{\kappa}_{n,h} - \bar{\kappa}_{n+1,h}\|^2 \leq C\tau^2,$$
$$\|\widetilde{\kappa}_\sigma - \bar{k}_\sigma\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C\tau. \tag{4.72}$$

集合 $\widetilde{u}_\sigma = \mathrm{Proj}_{[u_a,u_b]}\Big(-\frac{\eta}{\alpha}\widetilde{\kappa}_\sigma\Big)$。由于 $\bar{u}_\sigma \to \bar{u}$ 属于 $L^2(I;\ L^2(\Gamma))$，当 $\sigma \to 0$ 时，因此 We

$$\|\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \leq C. \tag{4.73}$$

此外，根据引理 4.12，我们得到

$$\|\widetilde{\kappa}_\sigma\|_{H^1(I;L^2(\Omega))} + \|\widetilde{\kappa}_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C.$$

同样，利用 中的引理 2.1 [39, 第 80], 页，我们得到

$$\|\widetilde{\kappa}_\sigma\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma))} + \|\widetilde{\kappa}_\sigma\|_{L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq C.$$

因此，我们得出结论（参见 [30,第 1735 页，引理 3.3]）

$$\|\widetilde{u}_\sigma\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;L^2(\Gamma))} + \|\widetilde{u}_\sigma\|_{L^2(I;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq C. \tag{4.74}$$

根据引理 4.16、(3.11) 和 (4.51)，$\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$ 的每个子序列都有一个进一步的子序列（仍记作原来的记号），满足

$$2^{-1}\min\{\alpha,\lambda\}\|\bar{u} - \bar{u}_\sigma\|^2_{L^2(I;L^2(\Gamma))} \leq J'(\bar{u}_\sigma)(\bar{u}_\sigma - \bar{u}) \leq [J'(\bar{u}_\sigma) - J'_\sigma(\bar{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma - \bar{u})$$
$$= [J'(\bar{u}_\sigma) - J'(\widetilde{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma - \bar{u}) + [J'(\widetilde{u}_\sigma) - J'_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma - \bar{u})$$

$$+[J'_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)-J'_\sigma(\bar{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma-\bar{u}) \tag{4.75}$$

对每个 $|\sigma|<\sigma_*$。对于第一项，由引理 3.5、(4.72)、(4.73) 和 (4.74) 可推出

$$\begin{aligned}
[J'(\bar{u}_\sigma)-J'(\widetilde{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma-\bar{u}) &\le C\big(\eta\|\kappa_{\widetilde{u}_\sigma}-\kappa_{\bar{u}_\sigma}\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}+\alpha\|\bar{u}_\sigma-\widetilde{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\big)\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\
&\le C\|\bar{u}_\sigma-\widetilde{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\
&\le C\|\widetilde{\kappa}_\sigma-\bar{k}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\
&\le C\|\widetilde{\kappa}_\sigma-\bar{k}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}\|^{\frac{1}{2}}\|\widetilde{\kappa}_\sigma-\bar{k}_\sigma\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I;H^1(\Omega))}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\
&\le C\tau^{\frac{3}{4}}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.
\end{aligned}$$

对于第二项，由定理 4.2 和（4.74）可得

$$\begin{aligned}
[J'(\widetilde{u}_\sigma)-J'_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma-\bar{u}) &\le C\eta\|\kappa_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)-\kappa(\widetilde{u}_\sigma)\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\\
&\le C\big(\tau^{\frac{3}{4}}+h^{\frac{3}{2}}\big)\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.
\end{aligned}$$

对于最后一项，利用引理 4.14、（4.72）、（4.73）和（4.74），我们推得

$$[J'_\sigma(\widetilde{u}_\sigma)-J'_\sigma(\bar{u}_\sigma)](\bar{u}_\sigma-\bar{u})\le C\tau^{\frac{3}{4}}\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}.$$

结合上述估计和（4.75），可得的每个子序列 $\{\bar{u}_\sigma\}_\sigma$ 都有一个进一步的子序列满足

$$\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}\le C(\tau^{\frac{3}{4}}+h^{\frac{3}{2}}). \tag{4.76}$$

为推导（4.69），我们采用反证法，假设它不成立。这意味着存在一个序列 $\sigma$ 使得

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\|\bar{u}-\bar{u}_\sigma\|_{L^2(I;L^2(\Gamma))}}{\tau^{\frac{3}{4}}+h^{\frac{3}{2}}}=+\infty.$$

然而，这与（4.76）矛盾。

Th估计（4.70）和（4.71）可直接由引理 4.10、4.14和定理 4. 2. □

**注 4.8.** 考虑涉及流体涡量的目标泛函

$$\min_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\quad J(u)=\frac{1}{2}\int_I\int_\Omega|\mathrm{curl}\,\mathbf{y}_u|^2dxdt+\frac{\alpha}{2}\int_I\int_\Gamma|u|^2dsdt, \tag{4.77}$$

其中 $(y_u,\theta_u)$ 是方程 *(1.2)* 的唯一解对。利用定理 *3.4*，我们可以定义 $\mathcal{S}: L^2(I;L^2(\Gamma))\to\mathbb{V}(I)\times W(I)$，使得 $u\mapsto\mathcal{S}(u):=(y_u,\theta_u)$。同样，我们可以得到与定理 *4.6* 相同的结果。

# 5 数值实验

本节将给出一个例子，以验证定理 4.6中的理论结果。数值模拟采用开源有限元软件 NGSolve [44], , 该软件可从以下网址获取：https://ngsolve.org/。在所有示例中求解代数方程时，我们使用 PARDISO 提供的稀疏直接求解器 [43]。我们将重点讨论 Mini有限元；不过，以类似方式也可将其推广到 Taylor-Hood单元。在整个实验过程中，我们采用固定步长的投影梯度法 $\frac{1}{\alpha}$，并将容差设为 $10^{-6}$。所有数值实验的相应代码均可在 Git仓库中找到： –

https://github.com/TyphoohYe/OptimalControlWithBoussinesqEquations.git。

我们考虑带有逐点控制约束的算例，其中精确解未知，并采用时间步长为 $\tau=2^{-9}$、空间步长为 $h=2^{-7}$ 的数值解作为参考解 $(\bar{\mathbf{y}}^*,\ \theta^*,\ \bar{\boldsymbol{\mu}}^*,\ \bar{\kappa}^*,\ \bar{u}^*)$ 来计算收敛阶。我们设 $\Omega=(0,\ 1)\times(0,\ 1)$，并令参数

$u_a = -0.2$, $u_b = 0.2$, $T = 1$, $\nu = 0.1$, $\mathbf{g} = (-10,\ 10)^T$, $\beta = \chi = \gamma = \eta = 1$ 和 $\alpha = 0.1$。现在考虑函数

$$\mathbf{y}_d = \big(50x^2(x-1)^2(2y(y-1)^2 + 2y^2(y-1)), -50y^2(y-1)^2(2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1))\big)^T,$$
$$\theta_d = 0,\ \mathbf{h} = \mathbf{y}_0 = (0,0)^T,\ f = \theta_0 = 0.$$

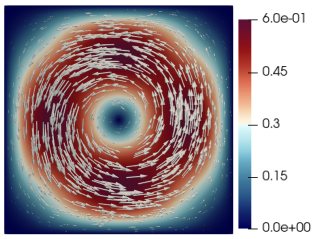
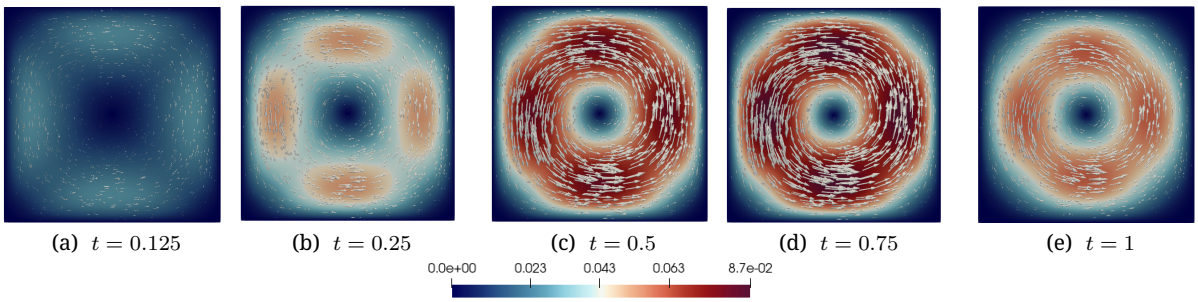
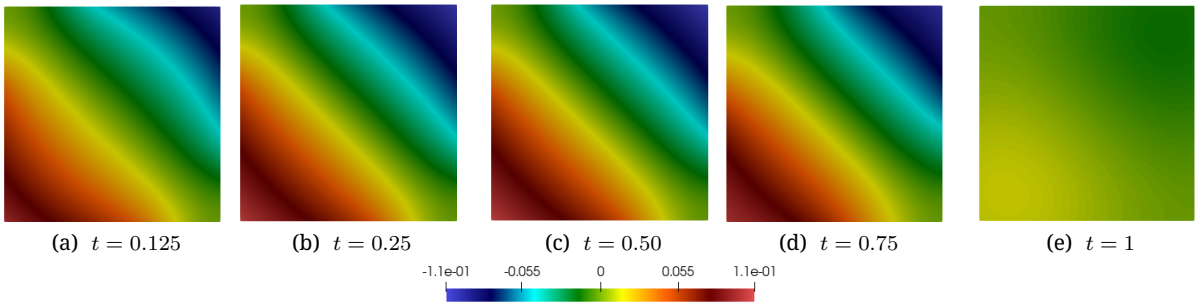


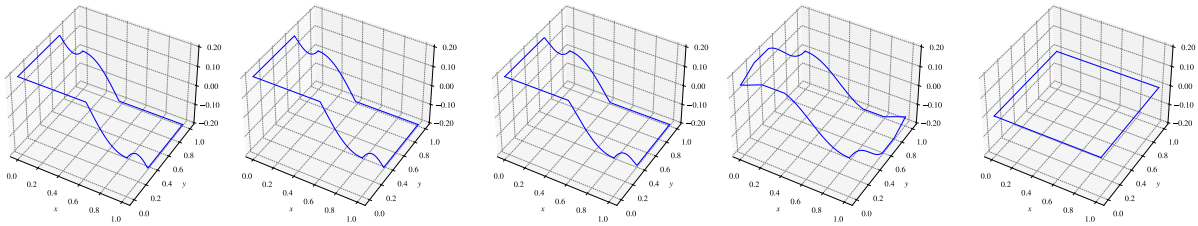

图1：目标速度的大小 $\mathbf{y}_d$




(a) $t = 0.125$ (b) $t = 0.25$ (c) $t = 0.5$ (d) $t = 0.75$ (e) $t = 1$




(a) $t = 0.125$ (b) $t = 0.50$ (c) $t = 0.50$ (d) $t = 0.75$ (e) $t = 1$



(a) $t = 0.125$ (b) $t = 0.25$ (c) $t = 0.5$ (d) $t = 0.75$ (e) $t = 1$

$\bar{}$图2：最优速度的大小 $\bar{}\mathbf{y}$，以及相应的最优温度 $\theta$ 和最优控制 $\bar{u}$，取值于 $t = 0.125$、$t = 0.25$、$t = 0.5$、$t = 0.75$ 和 $t = 1$。

目标速度如图1所示，$t = 0.125$、0.25、0.5、0.75、1处的最优解如图2所示。我们定义 $\mathcal{E}_X^{\mathbf{y}} = \|\bar{}\mathbf{y}_\sigma - \bar{}\mathbf{y}^*\|_X$，类似于 $\mathcal{E}_X^{\theta}$、$\mathcal{E}_X^{\kappa}$、$\mathcal{E}_X^{\boldsymbol{\mu}}$和 $\mathcal{E}_X^{u}$。误差及相应的收敛率汇总于表1和表2。在表1中，我们将时间步长固定为 $\tau = 2^{-9}$

同时将空间步长 $h$ 从 $2^{-3}$ 变化到 $2^{-6}$。数据表明，随着空间加密，误差在范数 $L^2(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$（或 $L^2(I;L^2(\Omega))$）、$L^\infty(I;\mathbb{L}^2(\Omega))$和 $L^2(I;L^2(\Gamma))$中呈现出近似二次收敛率。相比之下，在 $L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))$范数中的收敛性仅遵循线性收敛率。在表2中，我们将空间步长固定为 $h = 2^{-7}$，同时将时间步长 $\tau$ 从 $2^{-3}$变化到 $2^{-7}$。数据表明，关于时间步长的收敛性对所考虑的所有范数均为线性。由这些结果可见，控制变量的空间离散化和时间离散的经验收敛率均高于理论预测的收敛率。这一差异可归因于数值实验中所用测试数据的光滑性。

# 参考文献


[1] F. Abergel与R. Temam，流体力学中的若干控制问题，*Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 303 1990 ,–325，Springer，.[2] R.A. Adams， *Sobolev Spaces*，学术出版社，阿姆斯特丹，2005[3] C.T. Anh与T.M. Nguyet，三维纳维–斯托克斯–沃伊特方程最优控制问题的间断伽辽金逼近，Numer. Math.，145（2020），727–769。[4] G. B¨arwolff与M. Hinze，Boussinesq近似最优边界控制的分析，数学研究所预印本系列 f¨ur Mathematik，柏林工业大学 Universit¨at Berlin，2008。[5] V. Barbu， *Optimal Control of Variational Inequalities*，数学研究笔记100，皮特曼，波士顿，1984。[6] F. Bonnans与A. Shapiro， *Perturbation Analysis of Optimization Problems*，Springer，纽约，2000。[7] S.C. Brenner与L.R. Scott， *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*，Springer，纽约，2008。[8] E. Casas与K. Chrysafinos，三维演化纳维–斯托克斯方程速度跟踪控制问题的分析，SIAM J. Control Optim.，54（2016），第1期，99-128。[9] E. Casas与K. Chrysafinos，速度跟踪问题离散化的误差估计，Numer. Math.，130（2015），第4期，615-643。[10] E. Casas与K. Chrysafinos，速度跟踪问题的间断伽辽金时间步进格式，SIAM J. Numer. Anal.，50（2012），第5期，2281–2306。[11] E. Casas与K. Chrysafinos，带开关控制的速度跟踪问题逼近的误差估计，ESAIM Control Optim. Calc. Var.，23（2017），1267–1291。[12] E. Casas、M. Mateos与J.P. Raymond，稳态纳维–斯托克斯方程分布式控制问题数值近似的误差估计，SIAM J. Control Optim.，46（2007），第3期，952-982。[13] E. Casas与F. Tr¨oltzsch，关于误差估计的一般定理及其在拟线性椭圆最优控制问题中的应用，Comput. Optim. Appl.，53（2012），173–206。[14] K. Chrysafinos、M.D. Gunzburger与L.S. Hou，受半线性抛物型偏微分方程约束的最优罗宾边界控制问题的半离散逼近，J. Math. Anal. Appl.，323（2006），891–912。[15] K. Chrysafinos与E. Karatzas，受抛物型偏微分方程约束的罗宾边界控制问题的间断伽辽金时间步进格式的误差估计，SIAM J. Numer. Anal.，52（2014），2837–2862。[16] K. Deckelnick与M. Hinze，非定常纳维–斯托克斯方程分布式控制的半离散化与误差估计，Numer. Math.，97（2004），297–320。[17] V. Girault与P.-A. Raviart， *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*，Springer计算数学丛书第5卷，Springer，柏林，1986。[18] M.D. Gunzburger， *Perspectives in Flow Control and Optimization*，SIAM，2003。[19] M.D. Gunzburger、L.S. Hou与T.P. Svobony，流体流动边界控制问题的逼近及其在加热与冷却控制中的应用，Computers Fluids，22（1993），239-251。[20] M.D. Gunzburger、L. Hou与T.P. Svobodny，不可压缩流动的边界速度控制及其在黏性阻力减小中的应用，SIAM J. Control Optim.，30（1992），第1期，167-181。[21] M.D. Gunzburger与H.C. Lee，固体/流体耦合温度控制问题的分析、逼近与计算，Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，118（1994），133-152。

Table 1: Experimental order of convergence with $h$ ($\tau = 2^{-9}$)

| $h$ | $\mathcal{E}^{\mathbf{y}}_{L^\infty(\mathbb{L}^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\theta}_{L^\infty(L^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\mathbf{y}}_{L^2(\mathbb{H}^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\theta}_{L^2(H^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\mu}}_{L^\infty(\mathbb{L}^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\kappa}_{L^\infty(L^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\mu}}_{L^2(\mathbb{H}^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\kappa}_{L^2(H^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{u}_{L^2(L^2)}$ | Rate |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-3}$ | 5.087E-03 | | 8.899E-04 | | 1.123E-01 | | 1.091E-02 | | 4.290E-03 | | 2.747E-03 | | 9.845E-02 | | 1.667E-02 | | 7.107E-03 | |
| $2^{-4}$ | 1.093E-03 | 2.22 | 1.726E-04 | 2.37 | 5.308E-02 | 1.08 | 5.304E-03 | 1.04 | 8.843E-04 | 2.28 | 5.794E-04 | 2.25 | 4.496E-02 | 1.13 | 7.449E-03 | 1.16 | 1.318E-03 | 2.43 |
| $2^{-5}$ | 2.595E-04 | 2.08 | 4.050E-05 | 2.09 | 2.643E-02 | 1.01 | 2.689E-03 | 0.98 | 2.106E-04 | 2.07 | 1.416E-04 | 2.03 | 2.254E-02 | 1.00 | 3.862E-03 | 0.95 | 3.251E-04 | 2.02 |
| $2^{-6}$ | 5.391E-05 | 2.27 | 8.444E-06 | 2.26 | 1.285E-02 | 1.04 | 1.309E-03 | 1.04 | 4.435E-05 | 2.25 | 2.832E-05 | 2.32 | 1.139E-02 | 0.98 | 1.937E-03 | 1.00 | 6.659E-05 | 2.29 |



Table 2: Experimental order of convergence with $\tau$ ($h = 2^{-7}$)

| $\tau$ | $\mathcal{E}^{\mathbf{y}}_{L^\infty(\mathbb{L}^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\theta}_{L^\infty(L^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\mathbf{y}}_{L^2(\mathbb{H}^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\theta}_{L^2(H^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\mu}}_{L^\infty(\mathbb{L}^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\kappa}_{L^\infty(L^2)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\mu}}_{L^2(\mathbb{H}^1)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{\kappa}_{L^2(H)}$ | Rate | $\mathcal{E}^{u}_{L^2(L^2)}$ | Rate |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-3}$ | 2.025E-02 | | 2.944E-02 | | 7.022E-02 | | 2.958E-02 | | 2.529E-02 | | 9.692E-03 | | 3.490E-02 | | 1.570E-02 | | 5.248E-02 | |
| $2^{-4}$ | 1.096E-02 | 0.89 | 2.184E-02 | 0.43 | 3.658E-02 | 0.94 | 1.628E-02 | 0.86 | 1.559E-02 | 0.70 | 5.291E-03 | 0.87 | 1.903E-02 | 0.88 | 8.013E-03 | 0.97 | 2.698E-02 | 0.96 |
| $2^{-5}$ | 5.623E-03 | 0.96 | 1.431E-02 | 0.61 | 1.841E-02 | 0.99 | 8.780E-03 | 0.89 | 8.642E-03 | 0.85 | 2.684E-03 | 0.98 | 9.830E-03 | 0.95 | 3.982E-03 | 1.01 | 1.351E-02 | 1.00 |
| $2^{-6}$ | 2.705E-03 | 1.06 | 8.315E-03 | 0.78 | 8.857E-03 | 1.06 | 4.609E-03 | 0.93 | 4.351E-03 | 0.99 | 1.288E-03 | 1.06 | 4.849E-03 | 1.02 | 1.899E-03 | 1.07 | 6.489E-03 | 1.06 |
| $2^{-7}$ | 1.179E-03 | 1.20 | 4.203E-03 | 0.98 | 3.927E-03 | 1.17 | 2.282E-03 | 1.01 | 1.942E-03 | 1.16 | 5.599E-04 | 1.20 | 2.247E-03 | 1.11 | 8.377E-04 | 1.18 | 2.890E-03 | 1.17 |

[22] J.G. Heywood 和 R. Rannacher，非定常 Navier–Stokes问题的有限元逼近。I. 解的正则性与空间离散的二阶误差估计，SIAM数值分析杂志，19(1982)，275–311。[23] M. Hinze，控制约束优化中的一种变分离散概念：线性二次情形，计算优化与应用，30(2005)，45-61。[24] M. Hinze 和 U. Matthes，Boussinesq近似的最优控制与模型预测控制。载于：K. Kunisch、J. Sprekels、G. Leugering、F. Tr¨oltzsch（编），耦合偏微分方程的控制。国际数值数学丛书，Birkh¨auser，巴塞尔，155(2007)。[25] M. Hinze 和 K. Kunisch，含时流体流动最优控制的二阶方法，SIAM控制与优化杂志，40(2001)，925-946。[26] K. Ito 和 S. S. Ravindran，热对流流体流动的最优控制，SIAM科学计算杂志，19(1998)，1847-1869。[27] N. Jork 和 J.S. Simon，受二维Boussinesq系统约束的未正则化最优控制问题分析，SIAM数学分析杂志，57(2025)，3910–3952。[28] R. Kellogg 和 J. Osborn，凸多边形上Stokes问题的一个正则性结果，泛函分析杂志，21(1976)，397–431。[29] K. Kunisch 和 X. Marduel，非等温粘弹性流体流动的最优控制，非牛顿流体力学杂志，88(2000)，261–301。[30] K. Kunisch 和 B. Vexler，一类发展方程的约束Dirichlet边界控制 $L^2$ ，SIAM控制与优化杂志，46(2007)，1726-1753。[31] H.-C. Lee 和 O. Yu. Imanuvilov，包含固体介质的定常Boussinesq方程Neumann边界最优控制问题分析，SIAM控制与优化杂志，39(2000)，第2期，第457–477页。[32] D. Leykekhman、B. Vexler，瞬态Stokes问题Galerkin解的 $L^2(I;H^1(\Omega)^d)$和 $L^2(I;L^2(\Omega)^d)$最佳逼近型误差估计，Calcolo，61(2024)，第1期，论文编号7，共22页。[33] D. Leykekhman、B. Vexler 和 J. Wagner，受逐时刻点态状态约束的瞬态Stokes方程最优控制问题的先验误差估计，IMA数值分析杂志，DOI：10.1093/imanum/draf018，2025。[34] D. Liang、W. Gong 和 X. Xie，抛物型Dirichlet边界控制问题的一种新误差分析，ESAIM: M2AN，59(2025)，749-787。[35] J.L. Lions 和 E. Magenes， *Nonhomogeneous Boundary Value Problem and Applications*，第1、2卷，Springer，纽约，1972。[36] W. Liu 和 N. Yan，受Stokes方程支配的控制问题的后验误差估计，SIAM数值分析杂志，40(2006)，1850–1869。[37] A. R¨osch 和 B. Vexler，Stokes方程的最优控制：含后处理的有限元离散先验误差分析，SIAM数值分析杂志，44(2006)，1903–1920。[38] K. Zhou 和 W. Gong，$\mathbf{L}^2(\Gamma)$中Stokes方程Dirichlet边界控制有限元逼近的误差估计，科学计算杂志，91(2022)，第2期，论文编号45。[39] K. Malanowski，凸控制约束最优控制问题中逼近的收敛性与解的正则性，应用数学与优化，8(1982)，69-95。[40] G. Peralta，非等温粘性两相流Cahn–Hilliard–Oberbeck–Boussinesq系统的二维分布最优控制，应用数学与优化，84(2021)，1219–1279。[41] G. Peralta 和 J.S. Simon，对流项含时滞的Navier–Stokes方程最优控制：分析与有限元逼近，数学流体力学杂志，23(2021)，第3期，论文编号56。[42] S.S. Ravindran，热对流流动最优控制的数值解，国际数值方法：流体，25(1997)，205–227。[43] O. Schenk 和 K. G¨artner，使用PARDISO求解非对称稀疏线性方程组，未来一代计算机系统，20(2004)，475–487。

[44] J. Sch¨oberl，NGSolve中有限元的实现，ASC报告 30/2014，分析与科学计算研究所，维也纳工业大学，2014。[45] Y.C. Song、X.M. Yuan 和 H.R. Yue，热对流流动最优控制的一种数值方法，计算物理学杂志，494(2023)，112458。[46] R. Temam， *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*，数学及其应用研究，第2卷，北荷兰出版公司，1977。[47] V. Thom´ee， *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*，施普林格出版社，柏林，1997。[48] F. Tr¨oltzsch， *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory， Methods and Applications*，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2010。[49] B. Vexler 和 J.Wagner，非定常Navier–Stokes方程有限元离散的误差估计，ESAIM: M2AN，58(2024)，457–488。[50] M. Crouzeix 和 V. Thom´ee， $L_p$ 和 $W_p^1$ 中有限元函数空间的 $L_2$-投影的稳定性，计算数学，48(1987)，521–532。

# 附录A 基本引理

Th三线性形式**b** 的以下性质可见于多种文献（参见 [17, 46 ]）

**引理 A.1.** 三线性形式**b** 满足以下性质：

**1. b(u, v, w)** $=$ **c(u, v, w)** $=-$**c(u, w, v)** $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}^1$ **(Ω)**。**2. b(u, v, w)** $=-$**b(u,w, v)** $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}^1$**(Ω)**。**3. b(u, v, v)** $=0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1$**(Ω)**。

我们给出一些关于投影算子的有用结果（参见 [17]）。

**引理 A.2.** 设 $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)$，$p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$，*Stokes-Ritz* 投影 $R_h^S(\mathbf{u}\ p)$ 满足

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{R}_h^S(\mathbf{u},p)\| \le Ch\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|p\|\big), \quad \|\mathbf{u}-\mathbf{R}_h^S(\mathbf{u},p)\| \le Ch^2\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|p\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

**引理A.3.** 设 $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$， $u \in H^s(\Omega)$ 满足 $s \in [1,2]$，则对于 $L^2$投影 $\mathbf{P}_h$、 $P_h$ 和 *Ritz* 投影 $R_h$，有以下估计

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}-\mathbf{P}_h\mathbf{u}\|+h\|\nabla\big(\mathbf{u}-\mathbf{P}_h\mathbf{u}\big)\| \le Ch^2\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)},\\
&\|u-P_hu\|+h\|\nabla\big(u-P_hu\big)\| \le Ch^s\|u\|_{H^s(\Omega)},\\
&\|u-R_hu\|+h\|\nabla\big(u-R_hu\big)\| \le Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

以下给出插值算子 $\Pi_\tau^r$、 $\Pi_\tau^l$ 以及 $L^2$-投影 $P_\tau$ 的误差估计，详见 [34,第 762-763] 页。

**引理 A.4.** 对于任意的 $s \in [0,1]$ 和 $w \in H^s(I;\ L^2(\Omega))$，有

$$\|w-P_\tau w\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le C\tau^s\|w\|_{H^s(I;L^2(\Omega))}.$$

**引理A.** **5.** 对于任意 $s \in [\frac{1}{2},1]$，若 $w \in H^s(I;\ L^2(\Omega)) \cap C(\bar{I};\ L^2(\Omega))$，则下列估计成立：

$$\|w-\Pi_\tau^r w\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}+\|w-\Pi_\tau^l w\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \le C\tau^s\|w\|_{H^s(I;L^2(\Omega))}.$$

# 附录 B 补充引理

引理*B.1.* 给定 $u \in L^2(I;\ L^2(\Gamma))$，设 $(\mathbf{y},\ \theta) \in \mathbb{V}(I)\times\big(L^2(I;\ H^{\frac{3}{2}}(\Omega))\cap(H^{\frac{3}{4}}(I;\ L^2(\Omega))\cap H^1(I;\ H^1(\Omega)^*))\big)$ 是 *(3.1)* 的解，且 $\{(\mathbf{y}_{n,h},\theta_{n,h})\}_{n=1}^{N_\tau}$ 是离散状态方程 *(4.27)* 的解。则

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_\sigma\|_{L^2(I;\mathbb{H}^1(\Omega))}+\|\theta-\theta_\sigma\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}\le C\big(\tau^{\frac14}+h^{\frac12}\big). \tag{B.1}$$

证明。我们从以下分解开始:

$$\mathbf{y}-\mathbf{y}_\sigma=\mathbf{y}-\Pi_\sigma^{\mathbf{y}}\mathbf{y}+\Pi_\sigma^{\mathbf{y}}\mathbf{y}-\mathbf{y}_\sigma=\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\eta}_\sigma^{\mathbf{y}},\quad \theta-\theta_\sigma=\theta-\Pi_\sigma^\theta\theta+\Pi_\sigma^\theta\theta-\theta_\sigma=\zeta_\sigma^\theta+\eta_\sigma^\theta, \tag{B.2}$$

其中，令 $\Pi_\sigma^{\mathbf{y}}\mathbf{y}=\mathrm{P}_h\Pi_\tau^r\mathbf{y}$、$\Pi_\sigma^\theta\theta=\Pi_\tau^rP_h\theta$、$\boldsymbol{\zeta}_n^{\mathbf{y}}{}_{,h}=\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}}(t_n)$ 以及 $\zeta_{n,h}^\theta=\zeta_\sigma^\theta(t_n)$。对 (3.33)、(3.1b) 从 $t_{n-1}$ 积分到 $t_n$，从中减去 (4.27)，其中 $(\mathrm{v}\ \psi)=(\mathrm{v}_h,\psi_h)\equiv(\boldsymbol{\eta}_n^{\mathbf{y}}{}_{,h},\eta_{n,h}^\theta)$，并利用分解 (B.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac12\|\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2-\frac12\|\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\frac12\|\eta_{n,h}^\theta\|^2-\frac12\|\eta_{n-1,h}^\theta\|+\nu\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\tau_n\chi\|\nabla\eta_{n,h}^\theta\|^2+\tau_n\eta\gamma\|\eta_{n,h}^\theta\|_\Gamma^2\le\\
&-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[\nu\mathbf{a}(\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}},\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}})-(p,\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}})-\chi a(\zeta_\sigma^\theta,\eta_{n,h}^\theta)-\eta\gamma(\zeta_\sigma^\theta,\eta_{n,h}^\theta)_\Gamma-\beta(\zeta_\sigma^\theta+P_h(\theta(t_n)-\theta(t_{n-1}))+\eta_{n-1,h}^\theta,\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{g})\big]dt\\
&+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[\mathbf{b}(\mathbf{y}_{n-1,h},\mathbf{y}_{n,h},\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}})-\mathbf{b}(\mathbf{y},\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}})\big]dt+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[\tau_nb(\mathbf{y}_{n-1,h},\theta_{n,h},\eta_{n,h}^\theta)-b(\mathbf{y},\theta,\eta_{n,h}^\theta)\big]dt\\
&=J_1+J_2+J_3.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

利用假设 **(A2)**，可得

$$\begin{aligned}
J_1\le{}&\frac{\nu}{4}\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\frac{\chi}{6}\tau_n\|\nabla\eta_{n,h}^\theta\|^2+\frac{\eta\gamma}{6}\tau_n\|\eta_{n,h}^\theta\|_\Gamma^2+C\Big(\tau_n\|\eta_{n-1,h}^\theta\|^2+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[\|\nabla\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}}\|^2+\|\zeta_\sigma^\theta\|_{H^1(\Omega)}^2\\
&+h^2\|p\|_{H^1(\Omega)}^2\big]dt+\tau_n^2\|\partial_t\theta\|_{H^1(\Omega)^*}^2\Big).
\end{aligned}$$

采用类似于（4.37）的论证，我们得到 $J_2$ 和 $J_3$ 的估计

$$\begin{aligned}
J_2\le{}&\frac{\nu\tau_n}{4}\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\frac{\nu\tau_{n-1}}{8}\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+C\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}}\|^2dt+\tau_n\|\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\tau_n\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\partial_t\mathbf{y}\|dt\,\|\nabla(\mathbf{y}(t_n)-\mathbf{y}(t_{n-1}))\|\Big),\\
J_3\le{}&\frac{\nu}{8}\tau_{n-1}\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\frac{\chi}{6}\tau_n\|\nabla\eta_{n,h}^\theta\|^2+\frac{\eta\gamma}{6}\tau_n\|\eta_{n,h}^\theta\|_\Gamma^2+C\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\partial_t\mathbf{y}\|dt\Big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2dt\\
&+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\Pi_\sigma^\theta\theta\|_{H^1(\Omega)}^2dt\Big)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\zeta_\sigma^\theta\|_{H^1(\Omega)}^2dt+\tau_n\|\Pi_\sigma^\theta\theta\|_{H^1(\Omega)}^2\|\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\tau_n\|\Pi_\sigma^\theta\theta_{n,h}\|_{H^1(\Omega)}^2\|\eta_{n,h}^\theta\|^2\Big).
\end{aligned}$$

因此，将上述估计与（B.3）结合，并对 $n=1,\dots,k$ 的任意 $1\le k\le N_\tau$ 求和，可得以下界

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\eta}_{k,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\|\eta_{k,h}^\theta\|^2+\nu\sum_{n=1}^k\tau_n\|\nabla\boldsymbol{\eta}_{n,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\chi\sum_{n=1}^k\tau_n\|\nabla\eta_{n,h}^\theta\|^2+\eta\gamma\sum_{n=1}^k\tau_n\|\eta_{n,h}^\theta\|_\Gamma^2\\
&\le C\Big(\int_0^{t_k}\big[\|\nabla\boldsymbol{\zeta}_\sigma^{\mathbf{y}}\|^2+\|\zeta_\sigma^\theta\|_{H^1(\Omega)}^2+h^2\|p\|_{H^1(\Omega)}^2\big]dt+\tau^{\frac12}\Big(\int_0^T\|\partial_t\mathbf{y}\|^2dt\Big)^{\frac12}\sum_{n=1}^k\tau_n\|\nabla\big(\mathbf{y}(t_n)-\mathbf{y}(t_{n-1})\big)\|\\
&+\tau_n^2\|\partial_t\theta\|_{H^1(\Omega)^*}^2+\tau^{\frac12}\Big(\int_0^T\|\partial_t\mathbf{y}\|^2dt\Big)^{\frac12}\int_0^{t_k}\big[\|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2+\|\Pi_\sigma^\theta\theta\|_{H^1(\Omega)}^2\big]dt\\
&+\sum_{n=1}^k\tau_n\big(\|P_h\theta(t_n)\|_{H^1(\Omega)}^2\|\boldsymbol{\eta}_{n-1,h}^{\mathbf{y}}\|^2+\tau_n\|\eta_{n-1,h}^\theta\|^2+\|P_h\theta(t_n)\|_{H^1(\Omega)}^2\|\eta_{n,h}^\theta\|^2\big)\Big).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

由于 $L^2(I;\, H^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \cap H^1(I;\, H^1(\Omega)^*)) \hookrightarrow C(\bar{I};\, L^2(\Omega))$，因此可得 $\theta, P_h\theta \in C(\bar{I};\, L^2(\Omega))$，进而得到 $P_h\theta \in C(\bar{I};\, H^1(\Omega))$。此外，利用插值空间 $\left[L^2(I;\, H^{\frac{3}{2}}(\Omega))\ H^{\frac{3}{4}}(I;\, L^2(\Omega))\right]_{\frac{1}{3}} = H^{\frac{1}{4}}(I;\, H^1(\Omega))$（参见 [35, 第1章，公式 9.24]），可得 $\theta \in H^{\frac{1}{4}}(I; H^1(\Omega))$。接下来，利用$H^1$稳定性对 $L^2$ 投影进行估计，可得

$$\|P_h\theta\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;H^1(\Omega))} \leq C\|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}}(I;H^1(\Omega))}.$$

因此，应用引理 A.3 和 A.5，可得

$$\|\theta - \Pi_\sigma^\theta\theta\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \|\theta - P_h\theta\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} + \|P_h\theta - \Pi_\sigma^\theta\theta\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq C\left(\tau^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{1}{2}}\right). \tag{B.5}$$

与注 4.5类似，(B.5) 表明 $\tau_n\|P_h\theta(t_n)\|^2_{H^1(\Omega)} \to 0$ 在 $n$ 中一致成立，当 $\sigma \to 0$时。因此，我们可以将时间和空间网格尺寸取得足够小，使得 $C\tau_n\|P_h\theta(t_n)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}$ 对所有 $n$均成立。结合 (B.4)和 (B.5)，利用引理 A.3 和 A.5，并应用格朗沃尔不等式和三角不等式，即完成证明。

□