arXiv:2603.01610v1 [math.SP] 2 Mar 2026

随机算子、谱测度与 sofic 群中的局部经验收敛

MIGUEL DONOSO-ECHENIQUE、FELIX POGORZELSKI 与 MICHAEL SCHRÖDL-BAUMANN

摘要。在本论文中，我们考虑 sofic 群上一类随机算子的谱分布逼近问题。为此，我们利用 Austin 所定义的局部且经验收敛测度的概念。我们证明了态密度测度沿随机有限体积类似物的弱收敛。对于仅取有限多个有理数值的算子，我们证明了一个 Lück型逼近定理，从而得到谱测度的逐点收敛。在任意复系数的更广泛情形下，我们证明了谱分布函数沿具有变化有理系数的适配逼近元的逐点收敛。我们的结果适用于 Bowen 所定义的周期可逼近群类。更一般地，我们证明：有限状态构型空间上每一个作为周期测度的弱-∗ 极限而出现的不变概率测度，都允许在局部和经验意义上的逼近。

目录

1. 引言与主要结果 1
2. 预备知识 6
3. Sofic 群与局部经验收敛 8
4. Sofic 群上的周期测度与局部经验收敛 10
5. 连续算子与弱谱收敛 15
6. 局部经验收敛的 Lück 型逼近定理 23
7. 通过算子单调收敛进行有理逼近 25
8. 补充：自伴算子的 Gershgorin 型准则 31
参考文献 33

1. 引言与主要结果

1.1. **结果背景**。 离散随机薛定谔算子是描述量子力学现象的重要数学对象。过去几十年间，这一领域的各个方向都取得了长足进展。关于深入信息，请参阅相关专著和综述 [20, 25, 26, 49, 51]及其中的参考文献。

对于具有足够对称性的几何空间中的算子，随机薛定谔算子属于一类等变族的可测算子，它们是冯·诺依曼代数的元素。因此，可以通过迹来定义其谱分布，即低于给定能级的谱质量所占的比例。这便引出了积分态密度（IDS）的概念，其定义仿照 Pastur-Shubin 迹公式；该公式涉及 Pastur [64–66]和 Shubin [78] 关于连续和离散情形下随机算子谱分布的研究。此后不久，沿着这一方向开展了更多研究，参见例如 [6, 10, 11, 24, 33–35, 50, 52, 63]。

积分态密度（IDS）及其底层的态密度测度是算子理论中的核心量，因为它们可能包含谱信息，例如关于潜在的能隙标记、谱型、Lifshitz尾和局域化现象的信息；参见上文引用的专著和论文。

对于离散算子，底层希尔伯特空间通常建模在一个图上，图的顶点代表粒子可能所处的位置，而边则编码位置变化的势。一个重要问题是，能否用有限维类似物的归一化特征值计数函数来逼近积分态密度（IDS）；这关系到如何将积分态密度解释为低于固定能级的归一化态数。在这里，可以研究谱测度的弱收敛，或研究更强形式的收敛，即谱分布函数在所有能量值上一致收敛。

在凯莱图和确定性算子的背景下，这一强变体可表述为 Lück 型逼近问题，其源头可追溯至 Lück 关于通过普通 Betti 数逼近 [60] -Betti 数的开创性论文 ℓ^2。关于 ℓ^2-不变量的相关逼近结果，例如可见于 [27, 29, 32]。由此自然引出一个问题：能否通过与 sofic 逼近相关的有限维类似物的特征值计数函数，来逼近群环元素的归一化特征空间维数？Elek 证明了可解群满足这一强逼近猜想的这一形式 [30],，并推广了 [28] 关于无挠初等可 amenable 群的结果。对于具有代数系数的群环元素，Thom 在 [79], 中证明了强形式的逼近结果，从而推广了 [28] 中的结果，并且肯定地解决了[28]中提出的代数特征值猜想。Jaikin-Zapirain 在[41]中证明了任意系数下的 Lück 逼近定理。某些情况下也已证明谱测度逐点收敛，因而谱分布函数沿图序列一致收敛；例如，超有限序列的情形见 [31, 61, 62, 68]，整数系数算子的情形见 [1]。关于 ℓ^2-Betti 数在单纯复形的 Benjamini-Schramm 收敛下连续性的结果见 [73]。在近期论文 [59], 中，作者研究了残余有限群中收敛的数值方面。

对于可 amenable 群上的随机算子，沿 Følner 序列限制所得的强收敛形式已在许多情形下得到验证，且无需对底层系数作任何假设，参见例如 [37, 53, 55–58, 69, 70, 75, 76]。Schumacher 和 Schwarzenberger [74], 在 sofic 凯莱图方面取得了显著进展：他们证明，对于具有适当随机独立性性质的（可能无界）随机哈密顿算子，积分态密度沿 sofic 逼近弱收敛。

本文旨在将积分态密度收敛的动力学适用范围扩展到 sofic 群上的一般平稳遍历随机过程。具体而言，我们致力于研究超越可 amenable 结构和独立同分布模型的模型，从而能够涵盖不存在经典遍历定理的周期性与非周期性随机模型。

为此，我们采用了局部弱∗收敛（lw*收敛）的概念，以及局部与经验收敛（le收敛）的概念。后者指由 Austin 在 sofic 熵研究背景下提出的、定义于 sofic 逼近上的构型空间概率测度的收敛 [4]。（在后者的论文中，le收敛最初以淬火收敛之名引入，但稍后 Austin 本人更改了术语，参见 [5] 及其中第 2 页的说明。）粗略地说，这些收敛分别反映了 sofic 性现象和随机过程的遍历性现象。对于第5节中指定的一大类等变算子（下文称为连续算子），这使得我们能够以自然的方式定义随机有限类比对象（下文将相应的逼近序列称为诱导近似），并研究相对于 le收敛测度序列的依概率收敛。本文的主要结果如下。

- 我们研究所谓的*PA*（可周期逼近）群，并证明有限状态空间上的遍历随机过程的每个分布律都存在一种le收敛逼近，见推论16。

• 对于 sofic 群的凯莱图上的一大类随机算子，我们证明了与诱导逼近中元素相对应的谱测度弱收敛，见定理33。• 进一步超越弱收敛，我们运用 [1] 中的技巧，证明了取有限多个有理系数的随机算子的 Lück 型收敛结果，见定理36。• 利用冯·诺依曼代数中迹的单调算子收敛，我们证明了通过系数各异且为有理数的适配有限体积类比，可以逼近取有限多个复系数的算子的积分态密度，且适用于所有能量值，见推论48。

1.2. **结果描述**。 我们以随机薛定谔算子为引导性示例，进一步详细阐述上述结果。出于教学考虑，这里对某些概念仅作启发式说明。所有关键对象的严格定义请参阅 第 2 节 和第3节。

固定一个由有限对称集 S 生成的 sofic 群 G 。我们将由此得到的凯莱图记为 Cay(G, S)。sofic 群这一概念由 Gromov [36], 引入，术语则由 Weiss [82]提出。粗略地说，如果存在一个由有限图构成的序列 (V_n, E_n) ，其边 E_n 由 S 中的元素标记，并且当规模趋于无穷时， V_n 中各顶点周围的局部图结构与 Cay(G, S)中单位元顶点 e周围的局部图结构相匹配，那么该群就是 sofic 群。目前尚不清楚是否存在非 sofic 群。再固定一个紧度量空间 $(\mathcal{X}, d)$。那么，在赋予乘积拓扑后， G 在构型空间$\mathcal{X}^G$上有一个自然的连续平移作用。对于连续函数 $F\colon\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，可以定义一族有界自伴算子 $H_F^\omega\colon \ell^2(G) \to \ell^2(G)$ ，其定义如下:

$$H_F^\omega u(x) = \Delta u(x) \ + \ F\big(\omega(x)\big)u(x), \quad u \in \ell^2(G), \quad x \in G, \quad \omega \in \mathcal{X}^G,$$

其中 Δ 表示组合图拉普拉斯算子。结合 $\mathcal{X}^G$ 上平移不变的博雷尔概率测度 μ，我们得到一个 G-过程 $(G,\ \mathcal{X},\ \mu)$。随后，我们将 $\{H^\omega\}$ 称为 Cay$(G$ 上的随机薛定谔算子，$S)$ 其势函数为 F（分布律为 μ）。当 μ 遍历时，可以通过 Pastur-Shubin 型公式定义其积分态密度（IDS），

$$N_F(\beta) = \int_{\mathcal{X}^G} \langle \delta_e,\, 1_{]-\infty,\beta]}(H_F^\omega)\delta_e \rangle \, d\mu(\omega), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

其中 $1_{]-\infty,\ \beta]}$ 表示对应于低于能级 β 的谱投影算子。至于如何用有限体积类比来检验逼近，自然的做法是取一个 sofic 逼近 $(V_n,\ E_n)$ 并定义算子 $H_{F,\ n}^\rho\colon\ \ell^2(V_n) \to \ell^2(V_n)$ 的作用方式为

$$H_{F,n}^\rho u(v) = \Delta u(x) \ + \ F\big(\rho(v)\big)u(v), \quad u \in \ell^2(V_n), \quad v \in V_n, \quad \rho \in \mathcal{X}^{V_n},$$

其中，稍微滥用一下记号， Δ 现在也表示 $(V_n$ 上的组合拉普拉斯算子，$E_n)$。给定 $\beta \in \mathbb{R}$，我们定义

$$N_{F,n}^\rho(\beta) := \max\{i \leqslant |V_n| \,|\, \lambda_i \leqslant \beta\},$$

其中， $(\lambda_i)_{i=1}^{|V_n|}$ 是$H_{F\,,n}^\rho$的所有特征值按递增顺序排列所得的序列。因此， $N_{F\,,n}^\rho(\beta)$ 统计所有小于或等于 β的特征值，并计入其重数。显然，只有在谨慎选择 $\rho_n \in \mathcal{X}^{V_n}$、并考虑过程的分布律 μ 后，这些函数的归一化版本才适合作为积分态密度的近似。这将通过一个概率测度序列 (μ_n) 来实现：这些概率测度定义在 $\mathcal{X}^{V_n}$ 上，并按照 Austin 在 [4, 5]中的定义，局部和经验地收敛到 μ。后者建立在局部弱-$*$ 收敛（lw^*-收敛）的基础上，可以将其视为概率测度 μ的一种 sofic 性现象。特别地，当 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ 是一个有限集（赋予离散度量）时， lw^*-收敛与图 [12] 的 Benjamini-Schramm 收敛密切相关，其中图的顶点还额外标记了有限个标签。因此，

我们将 (V_n, E_n, μ_n) 称为过程 $(G, \mathcal{X}, \mu)$的***sofic*** 模型 。如果 μ 还具有遍历性，那么 (μ_n) 甚至在局部和经验意义下收敛。粗略来说，这意味着连续函数 f 满足遍历型定理： $\mathcal{X}^G \to \mathbb{C}$; 也就是说，当 $n \in \mathbb{N}$足够大时，以高概率 μ_n，有

$$\frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} f\left(\Pi_v(\rho)\right) \approx \int_{\mathcal{X}^G} f(\omega)\, d\mu(\omega), \quad \rho \in \mathcal{X}^{V_n}, \tag{1}$$

其中 Π_v： $\mathcal{X}^{V_n} \to \mathcal{X}^G$ 表示将中心为 v 的构型 ρ 自然提升为 $\mathcal{X}^G$ 中的一个构型。对于多种过程类别，都存在这样的 sofic 模型，例如伯努利系统[4, 引理 5.2 和推论 5.8], , 以及（对于稍作重新表述的概念）某些代数作用或仿有限群上的作用 [39, 命题 1.2]。另一个来源是所谓的 PA 群，其中 PA 是“可周期近似”的缩写。Bowen [17] 将这类群引入为具有如下性质的群：每个有限状态过程的分布律 μ 都可以被周期概率测度弱-$*$逼近，也就是说，可以被具有有限支撑的不变概率测度逼近。Kechris 在 [47], 研究了 MD 性质，这是一种与 PA 等价的概念。EPA 群的概念则更强，其遍历周期测度在不变测度空间中弱 -$*$ 稠密。据我们所知，PA 和 EPA 是否等价仍是一个开放问题。关于这些不同概念之间联系的更多信息，请参阅综述 [19]。PA 群包括所有有限秩自由群和所有残余有限可约群。更多细节请参阅第4节。

记 $\mathcal{A}$ 为一个有限集，并定义 Q 为 G 的最大残余有限商群，其典范同态为 $\pi\colon G \to Q$。我们用 $\mathcal{P}(\mathcal{A}^G)$ 表示 $\mathcal{A}^G$ 上所有周期概率测度的集合。关于 sofic 模型的存在性，我们对 PA 群得到如下结果。

命题 A. 若 Q 具有 *PA* 性质，则在 π 下，$\mathcal{A}^Q$ 上的 Q-不变概率测度空间的推前等于弱-$*$-闭包 $\mathcal{P}(\mathcal{A}^G)$。特别地，*PA* 群 G 上的每个过程 $(G、\ \mathcal{A}、\ \mu)$ 都存在 ***sofic*** 模型 $(V_n、\ E_n、\ \mu_n)$。

我们还将看到，对于遍历过程，上述命题中得到的序列 (μ_n) le-收敛到 μ。命题的证明见命题 14 和推论 16。由于 PA 群必然是残余有限的，我们甚至可以证明 sofic 逼近来自群同态。例如，许多 Baumslag-Solitar 群拥有具有 PA 性质的残余有限商群，见例 19。

我们回到谱近似这一问题，并利用关系式（1）。记 N'_F 和 $N^{\rho'}_{F,\ n}$ 分别为与 N_F 和 $N^{\rho}_{F,\ n}$ 相关联的状态测度的归一化密度。我们证明以下关于弱收敛的结果。

定理 B。 设 $(V_n、\ E_n、\ \mu_n)$ 是遍历 G-过程 $(G、\ \mathcal{X}、\ \mu)$ 的一个 ***sofic*** 模型。那么对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意有界连续函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : |N^{\rho'}_{F,n}(f) - N'_F(f)| < \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

证明将在定理 33中给出，该定理适用于更广泛的连续算子及其诱导近似，见第 5节。我们简要比较本文结果与 [74]中的发现。我们指出，对于遍历过程，无需额外的独立性或混合性质，也能实现上述收敛。对于随机哈密顿算子以及由独立同分布过程随机化的 sofic 逼近，Schumacher 和 Schwarzenberger 在 [74] 中证明了几乎处处收敛。与本文所考虑的连续算子不同，该结果还涵盖某一类无界算子。关于相对于 Benjamini-Schramm 收敛的态密度测度弱收敛的相关结果，见 [1,3,13–16,31,67]。关于 Delone 动力系统收敛背景下的类似结果，见 [9]。对于

关于 Canopy 图上的带独立同分布势的薛定谔算子，沿穷尽有限集进行近似的结果已见 [2]。一个有趣的后续问题是，在 sofic 或剩余有限模型中，谱（作为集合）是否可能收敛。在拓扑动力系统收敛的背景下，这一问题已在 [8]中得到深入研究。

为了得到谱近似的一个强变体，我们证明了以下关于取有理数值的势函数的结论。

定理 C. 设 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ 为有限集，且 (V_n, E_n, μ_n) 是遍历 G-过程 $(G, \mathcal{A}, \mu)$ 的一个 *sofic* 模型。设 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ 是一个映射。那么存在一个序列 (A_n), $A_n \subseteq \mathcal{A}^{V_n}$，满足 $\lim_n \mu_n(A_n) = 1$，使得对于每个满足 $\rho_n \in A_n$ 的序列 (ρ_n)，我们都有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \left| \frac{N_{F,n}^{\rho_n}(\beta)}{|V_n|} - N_F(\beta) \right| = 0.$$

关于取有限多个有理数值的连续算子的总体陈述，可见定理 36 及推论 37。其证明基于 [60, 79] 中给出的原始形式 [1]。对于可解群以及随机算子在 Følner 平均上的限制，在各种情形下，积分态密度对任意系数的一致收敛已得到验证，例如参见[37, 45, 53, 55–58, 69, 70, 75, 76]。

对于任意实系数或复系数，情况仍未解决，我们也不知道是否能够将 [41] 中的技术推广到随机情形。不过，我们可以利用具有不同有理系数的适配 sofic 模型来逼近积分态密度。下面给出 PA 群上随机薛定谔算子的相关结论。同样，我们假设 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ 是有限的。对于势 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$，考虑一个单调递增的序列 (F_n)，其中的映射 $F_n\colon \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ 逐点收敛于 F，当 $n \to \infty$时。

定理 D。 设 G 为一个 *PA* 群，并带有一个遍历的 G-过程 $(G、\ \mathcal{A}、\ \mu)$。那么存在一个 *sofic* 模型 $(V_n、\ E_n、\ \mu_n)$ 以及一个序列 (A_n)，满足 $A_n \subseteq \mathcal{A}^{V_n}$，极限$_n\, \mu_n(A_n) = 1$，使得对于每个满足 $\rho_n \in A_n$的序列 (ρ_n)，都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{F_n,n}^{\rho_n}(\beta)}{|V_n|} = N_F(\beta) \quad \textit{for all} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

该断言见推论 49，其证明基于定理 43 和推论48，并应用于一般的连续算子。一个关键观点是将积分态密度视为冯·诺依曼代数中的迹，具体构造见 [54]。这样便可以利用积分态密度相对于底层迹的单调性，正如 [18]中所述。请注意，一般而言，不能期待在 β 中的一致收敛，参见注44。

论文结构。 第 2 节介绍图、 G-过程、有界自伴算子及其谱演算的预备知识。第 lw^*-收敛和 le-收敛的核心概念将在简要讨论群的 sofic性之后，于第 3 节引入。第 4节详细研究 PA 群及其商群，并证明有限状态空间过程存在剩余有限模型。第5节研究连续算子的诱导近似的谱测度弱收敛。第6节证明涉及有限个有理系数的强近似结论。对于有限个可能为复数的系数，我们在第 7 节证明，系数不断变化时，有限体积类比的积分态密度逐点收敛。该结果使用了第8节补充说明的有界自伴算子正（半）定性的 Gershgorin型准则。

致谢。 FP 和 MSB 在 SMS-DMV 群与动力学研讨会：谱与 L^2-不变量（Geneva，2018年）期间交流了促成本论文的初步想法，并感谢会议组织者，尤其感谢 Daniel Lenz 富有启发性的讨论。MSB 感谢卡尔斯鲁厄理工学院代数与几何研究所及莱比锡大学数学研究所提供的支持，使其得以于2019年前往莱比锡拜访 FP 一周，并在此期间进一步发展了本论文的构想。FP 感谢 Dominik Kwietniak 邀请其访问克拉科夫的雅盖隆大学，并就局部收敛和经验收敛进行了富有启发性的讨论。此外，FP 感谢 Melchior Wirth 与其讨论冯·诺依曼代数，尤其感谢他指出了参考文献 [18]。作者感谢 Tim Austin、Siegfried Beckus 和 Ivan Veselić 对论文初稿提出的宝贵意见。FP 在耶路撒冷以色列高等研究院（IIAS）访问期间完成了手稿，并感谢该研究院提供的优良工作条件。FP 感谢德国以色列科学研究与发展基金会（GIF）和德国研究联合会（DFG）的部分资助。在本研究的最后阶段，MDE 获得德国研究联合会（DFG）在德国卓越战略框架下的资助。

2. 预备知识

我们介绍本文所需的对象、术语和概念。

2.1. 图。图是一个二元组 (V,E)，其中 V是一个可数离散集，而 $E\subseteq V\times V$是一个对称集，即 $(x,y)\in E$ 蕴含 $(y,x)\in E$。 V中的元素称为顶点， E 中的元素称为边。在 $(x$中，若 $y)\in E$ 对于某个 $x,y\in V$成立，我们称 x 和 y 相邻，或等价地说，它们共用一条边，记作 $x\sim y$。以集合 S 为边标记的边标记是一个映射 $\vartheta\colon E\to S$，带有边标记的图称为边标记图。注意，每个没有边标记的图都可以视为带有常值边标记映射 $\vartheta\colon E\to\{*\}$的图。在 (V,E) 中，路径是一个有限元组 $(x_n)\in V^N$，其中某个 $N\in\mathbb{N}$ 满足以下性质：对所有 $1\leqslant i\leqslant N-1$，都有 $x_i\sim x_{i+1}$。我们称 N 为路径长度，并称 $(x_n)\in V^N$ 为长度为 $N-1$的路径。若存在一个 $N\in\mathbb{N}$ 和一条路径 $(x_n)\in V^N$，使得 $x_1=y$ 且 $x_N=z$，则称两个顶点 $y,z\in V$之间有路径相连。当每一对不同顶点之间都有路径相连时，图 (V,E) 称为连通图。对于顶点 $x\in V$，我们将 x 的顶点度 $\deg(x)$定义为满足 x 且与 y 相邻的顶点 $y\in V$的基数。若 $\sup_{x\in V}\deg(x)<\infty$，则称图 (V,E) 为有界图。对于 $W\subseteq V$，由 W 诱导的子图是一个顶点集为 W、边集为 $E_W=E\cap(W\times W)$的图。若 (V,E) 带有边标记 $\vartheta\colon E\to S$，则 (W,E_W) 也继承边标记 $\vartheta_W:=\vartheta_{|E_W}$。稍微滥用一下记号，我们也用 W表示诱导子图（而不只是其顶点集）。对于两个图 (V_1,E_1) 和 (V_2,E_2)，若它们分别带有取值于同一集合 S的边标记 ϑ_1 和 ϑ_2，如果存在一个双射 $\varphi\colon V_1\to V_2$，保持顶点关系、边关系以及边标记不变，则称这两个图同构。任何这样的映射 φ 都称为图同构。在这种情况下，为了强调所指的图同构 φ，我们写作 $(V_1,E_1)\cong(V_2,E_2)$ 或$(V_1,E_1)\overset{\varphi}{\cong}(V_2,E_2)$。同样，如果边集所指明确，我们也使用简写 $V_1\cong V_2$ 和 $V_1\overset{\varphi}{\cong}V_2$。图 (V,E) 上的路径距离定义为 $d_E\colon V\times V\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，其中

$$d_E(x,y)=\inf\big\{N\in\mathbb{N}:\ \text{there is a path of length } N \text{ connecting } x \text{ and } y\big\},$$

对于 $x\neq y$和 $d_E(x,\ x)=0$对所有 $x\in V$均成立。这里我们采用 $\inf\varnothing=\infty$的约定。注意，对于连通图 $(V,\ E)$，d_E在 V上定义了一个度量，称为路径度量。给定 $R>0$和$x\in V$，我们将 $B_E(x,R)$ 记作以 x为中心、半径为 R 的（闭）球，定义为

$$B_E(x,R):=\big\{z\in V:\ d_E(x,z)\leqslant R\big\}.$$

最后，如果图 $(V,\ E)$ 满足 V的基数有限，我们称其为有限 。

2.2. **凯莱图**。 对我们而言，最重要的例子来自有限生成群 G，其具有有限对称生成集 $S \subseteq G\backslash\{e\}$; 其中 e始终表示 G中的单位元。回顾一下，若 $S = S^{-1} = \{s^{-1}\colon\ s \in S\}$，则称 $S \subseteq G$是对称的。关于 S的（左）凯莱图Cay$(G,\ S)$是一个图，其顶点集为 $V = G$，且当且仅当存在某个 $s \in S$使得 x 满足 $y = sx$ 时， x与 $y \in G$ 之间有一条边。注意，由于 S具有对称性，边集也是对称的。这样，我们通过设定 $\vartheta\colon\ E \to S,\ \vartheta\big((x,\ y)\big) = yx^{-1}$，便得到一个图标记。此外，Cay$(G,\ S)$ 显然是有界的，因为所有顶点的度都等于 S的基数。由于 G 由 S中的元素生成，Cay$(G,\ S)$ 是连通的。根据定义不难看出，路径度量与函数 $d_S(g,\ h) = |gh^{-1}|_S$一致，其中

$$|g|_S := \min\big\{L \in \mathbb{N}\colon\ \text{there exist } s_i \in S, \text{ such that } g = s_1 s_2 \cdots s_L\big\}$$

若 $g \neq e$ 且 $|e|_S = 0$。显然， G 通过右平移在 $(G,\ d_S)$ 上以等距变换作用。给定 $R > 0$和 $g \in G$，我们将 $B_S(g,\ R)$ 记为以 x为中心、半径为 R 的（闭）球。

2.3. **移位作用与G-过程**。设 G是一个有限生成群， $(\mathcal{X},\ d)$ 是一个紧度量空间。群 G 通过（右）平移在乘积空间 $\mathcal{X}^G$ （赋予乘积拓扑）上连续作用，

$$h.(\omega_g)_{g\in G} = (\omega_{gh})_{g\in G},$$

我们称之为移位作用。

若博雷尔概率测度 $\mu \in$Prob$(\mathcal{X}^G)$ 满足 $\mu(g.B) = \mu(B)$ 对每个博雷尔集 $B \subseteq \mathcal{X}^G$ 及每个 $g \in G$都成立，其中 $g.B =\{g.b\colon\ b \in B\}$，则称其为 G-不变的（若群指代明确，也简称不变）。我们将 Prob$(\mathcal{X}^G, G)$ 记为 Prob$(\mathcal{X}^G)$中所有 G-不变博雷尔概率测度构成的子集。若测度 $\mu \in$ Prob$(\mathcal{X}^G, G)$ 满足 $\mu(B) \in \{0, 1\}$ 对每个不变可测集 B都成立，则称其为遍历的；其中，若对所有 $g \in G$都有 $\mu(g.B \triangle B) = 0$，则称 B为不变集。依照 [4],，若 $\mu \in$Prob$(\mathcal{X}^G, G)$，则称元组 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 为一个 G-过程。此外，若 μ 是遍历的，则称该过程为遍历过程。

2.4. **算子**。 给定一个可数离散集 V，我们考虑标准的 ℓ^2-空间

$$\ell^2(V) = \big\{f : V \to \mathbb{C} : \sum_{v\in V} |f(v)|^2 < \infty\big\},$$

其内积为

$$\langle f,\, k\rangle := \sum_{v\in V} \overline{f(v)}k(v), \quad f, k \in \ell^2(V),$$

其中，横线表示复共轭。由此得到一个范数为 $\|f\| = \sqrt{\langle f,\ f\rangle}$的复希尔伯特空间，其中 $f \in \ell^2(V)$。对于 $v \in V$，我们将 δ_v记作 $\ell^2(V)$中的唯一函数，使得 $\delta_v(v) = 1$，且当 $w \neq v$时 $\delta_v(w) = 0$。（有界）算子 是一个线性映射 $H\colon\ \ell^2(V) \to \ell^2(V)$，满足 $\|H\| :=$ sup$_{0\neq f\in\ell^2(V)} \|Hf\|/\|f\|$ 有限。数值 $\|H\|$称为 H的算子范数 。对于算子 H，我们记作

$$H(x, y) := \langle \delta_x,\, H\delta_y\rangle \in \mathbb{C}$$

对于 $x,\ y \in V$。我们称 H是自伴的，如果 $H(x,\ y) = H(y,\ x)$对所有 $x,\ y \in V$均成立。

2.5. **谱演算**。回顾一下，每个有界自伴算子 $H\colon\ \ell^2(V)\to\ell^2(V)$都有一个谱演算，参见 [71, 第七章]。存在唯一的投影值测度 E_H，称为的谱测度，它将每个博雷尔集 $B\subseteq\mathbb{R}$映射为一个正交投影 $E_H(B)$，投影到 $\ell^2(V)$ 对应于 H 的谱 $\Sigma(H)$ 中包含于 B的部分上。特别地，对于每一对 $v,\ w\in V$，在 $\mathbb{R}$上的一个复博雷尔测度 $\tau_{v,\ w}$（其支撑为 $\Sigma(H)$）由 $\tau_{v,\ w}(B)=\langle\delta_v,\ \ E_H(B)\delta_w\rangle$定义，并且有

$$H(v,w)=\langle\delta_v,\ H\delta_w\rangle=\int_{\mathbb{R}}\lambda\,d\tau_{v,w}(\lambda).$$

此外，对于每个实值博雷尔函数 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$其在$\Sigma(H)$上的限制有界，存在唯一的自伴算子 $f(H)\colon\ \ell^2(V)\to\ell^2(V)$ 使得

$$\langle\delta_v,\ f(H)\delta_w\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\,d\tau_{v,w}(\lambda)$$

对于所有 $v,\ w\in V$，并且有

$$\|f(H)\|=\|f|_{\Sigma(H)}\|_\infty.$$

我们用 $\mathbb{R}[x]$表示实系数多项式环。对于 $p\in\mathbb{R}[x]$，次数 $\deg(p)$是 p中以非零系数出现的单项式的最高幂。将 $p=\sum_{i=0}^K a_ix^i$ 视为函数 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，可得

$$p(H)=\sum_{i=0}^K a_iH^i,$$

这与函数演算一致，因为对于单项式 $x\mapsto x^k$，有

$$\langle\delta_v,\ H^k\delta_w\rangle=\int_{\mathbb{R}}\lambda^k\,d\tau_{v,w}(\lambda)$$

对于所有 $v,\ w\in V$。

3. sofic 群与局部与经验收敛

我们在第 3.1 节定义并简要讨论 sofic 群，并在第 3.2节介绍 Austin 提出的局部与经验收敛概念。

3.1. **sofic 群与近似**。考虑一个有限生成群 G，以及一个具体的有限对称生成集 $S\subseteq G$，并考虑其凯莱图 $\mathrm{Cay}(G,\ S)$，其边由 $\vartheta((x,\ y))=yx^{-1}\in S$标记。给定一个有界图 $(V,\ E)$，其边由来自S、$v\in V$和 $R>0$ 的元素标记；若存在一个图同构$\varphi\colon\ B_E(v,\ R)\to B_S(e,\ R)$，满足 $\varphi(v)=e$，我们就称 v 是一个 R-良好顶点（在 $(V,\ E)$ 中）。接下来我们将介绍 sofic 群这一类群，它们可以通过有限图进行近似，而这些有限图在局部看起来与 $\mathrm{Cay}(G,\ S)$ 相同。

在本文中，我们记 $|A|$ 为有限集的基数 A。以下定义出自 Weiss [82]。

定义 1（sofic 群）。设 G 是一个有限生成群，其有限对称生成集为 S。若对每个 $\varepsilon>0$ 和 $R>0$，都存在一个有限图 $(V,\ E)$，其边标签取自 S，使得 $|V_0|\geqslant(1-\varepsilon)|V|$ 对于 $(V$ 中由 R 定义的好顶点集合 $V_0\subseteq V,\ E)$，则称 G 为 *sofic*。

可以看出 [82]，sofic性是群 G的一种性质，且与具体选取的有限生成集无关。

定义 2. G的*sofic* 逼近是一个序列 (V_n,σ_n)，其中 V_n是一个有限集，且对于每个 $n\geqslant1$，$\sigma_n\colon\ G\to$对称群(V_n)，满足

- 对于所有 $g,h\in G$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{v\in V_n:\sigma_n^g\left(\sigma_n^h(v)\right)=\sigma_n^{gh}(v)\right\}\right|}{|V_n|}=1,$$

- 对所有 $g\in G\backslash\{e\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{v\in V_n:\sigma_n^g(v)\neq v\right\}\right|}{|V_n|}=1.$$

第一条性质表明，在 σ_n 限制于 G 的有限子集上表现为同态的顶点所占比例趋于1，当 $n\to\infty$。第二条性质保证，σ_n 限制于 G 的有限子集上的作用为自由的顶点所占比例趋于1，当 $n\to\infty$。容易验证，一个有限生成群是 sofic 的，当且仅当它具有 sofic 逼近。事实上，一个 sofic 逼近给出一列有限图 $(V_n,\ E_n)$，这些图在 n充分大时满足定义1 的条件，其中边集 E_n 定义如下

$$E_n:=\{(v,\sigma_n^s(v))\mid v\in V_n,\ s\in S\}.$$

以及如下的边标记 ϑ_n：$E_n\to S$，$\vartheta(v,\ \sigma_n^s(v))=s$，若 v 是一个 1-良好顶点，否则为 $\vartheta_n(v,\ \sigma_n^s(v))=s_0$，其中 $s_0\in S$ 是任意的。现在不难看出，对每一个 ε 和每一个 $R>0$，存在某个 $N\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geqslant N$，$(V_n,\ E_n)$ 中 R-好顶点所占比例至少为 $1-\varepsilon$。还要注意，对所有这样的图，其顶点度以集合 S的基数为界。我们强调，虽然底群的 sofic性与生成集 S的选取无关，但图 $(V_n,\ E_n)$ 确实依赖于 S。在本文中，我们始终考虑 sofic 群 G，并配以固定的有限对称生成集 S，使得图$(V_n,\ E_n)$ 渐近地与 Cay$(G,\ S)$具有相同的局部结构。在有必要强调图结构时，我们也会说对 Cay$(G,\ S)$的 sofic 逼近。进一步注意，先验地，图 $(V_n,\ E_n)$ 不必是边对称的，并且可能包含自环（即形如 $(w,\ w)$的边）。然而，这些现象只能出现在不是 R-好顶点的顶点附近，而这些顶点所占比例将渐近为 0。因此，必要时修改这些图，总可以不失一般性地假设 sofic 逼近中的所有图确实是边对称的，且不含任何自环。关于 sofic 群的更多细节与背景，我们参阅 [21, 第 7]章。

回忆一下，群 G 是剩余有限的，是指存在一个序列 (Γ_n)，其中包含 G 的有限指数正规子群，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma_n=\{e\}$，$\Gamma_{n+1}\leqslant\Gamma_n$。

定义 3。设 G 是一个剩余有限群。若存在一个序列 (Γ_n)，其中包含 G 的有限指数正规子群，且满足 $\Gamma_{n+1}\leqslant\Gamma_n$，并且 $V_n=G/\Gamma_n$ 和 σ_n：对于每个 $n\geqslant 1$、$g\in G$和 $v\in V_n$，$G\to$ 对称群(V_n) 定义为 $\sigma_n^g(v\Gamma_n)=gv\Gamma_n$，则称序列 $(V_n,\ \sigma_n)$ 为 G 的剩余有限逼近。

容易验证，G 的每个剩余有限逼近都是G的 sofic 逼近。

3.2. **局部与经验收敛**。设 $(\mathcal{X},\ d)$ 是一个紧致可度量空间。给定一个可数集 V，我们用概率测度空间$(\mathcal{X}^V)$ 表示积拓扑空间 $\mathcal{X}^V$（其可度量）上的所有博雷尔概率测度所构成的空间。

我们现在引入关于 $\mathcal{X}^{V_n}$ 上测度的局部弱* 收敛以及局部与经验收敛的概念，这些概念针对 sofic 逼近 (V_n,σ_n)，由 Austin 在 [4] 中定义。为此，设G 为一个 sofic有限生成群，且 (V_n,σ_n) 为 G 的一个 sofic 逼近。固定 $V=V_n$ 与$\sigma=\sigma_n$，对 $\rho=(\rho_v)_{v\in V}\in\mathcal{X}^V$，令

$$\Pi_v^{\sigma}(\rho):=(\rho_{\sigma^g(v)})_{g\in G}\in\mathcal{X}^G.$$

每个 $\rho \in \mathcal{X}^V$ 都有一个与之关联的 $\mathcal{X}^G$ 上的概率测度，称为其经验分布

$$P_\rho^\sigma := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \delta_{\Pi_v^\sigma(\rho)}.$$

固定 $\mu \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^G,\ G)$。对于开集 $\mathcal{O} \subset$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^G)$，定义

$$\Omega(\mathcal{O}, \sigma) := \{\rho \in \mathcal{X}^V \mid P_\rho^\sigma \in \mathcal{O}\}.$$

定义 4（lw*-收敛和le-收敛）。设 $(V_n,\ \sigma_n)$ 是 G 的一个 sofic 逼近，$\mu \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^G, G)$ 且对每个 $n \geqslant 1$，$\mu_n \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^{V_n})$。

- 序列 (μ_n) 局部弱* 收敛（简称*lw**-收敛）到 μ，记作 $\mu_n \xrightarrow{lw*} \mu$，若对于每个弱*-邻域 $\mathcal{O}$，只要 μ，就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{v \in V_n : \left(\Pi_v^{\sigma_n}\right)_* \mu_n \in \mathcal{O}\right\}\right|}{|V_n|} = 1.$$

- 序列 (μ_n) 局部且经验收敛（简称*le*-收敛）到 μ，记作$\mu_n \xrightarrow{le} \mu$，若 $\mu_n \xrightarrow{lw*} \mu$，且对于每个弱*-邻域 $\mathcal{O}$，只要 μ，就有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Omega(\mathcal{O}, \sigma_n)) = 1.$$

注记 5. 请注意，$\mu_n \xrightarrow{lw*} \mu$ 等价于以下事实：对于所有连续的 $f\colon\ \mathcal{X}^G \to \mathbb{C}$，以及所有$\varepsilon > 0$，我们都有

$$\frac{1}{|V_n|}\left|\left\{v \in V_n : \left|\int_{\mathcal{X}^{V_n}} f((\Pi_v^{\sigma_n})(\rho))d\mu_n(\rho) - \int_{\mathcal{X}^G} f(\omega)d\mu(\omega)\right| < \varepsilon\right\}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

le-收敛定义中的第二个性质表明

$$\mu_n\left(\left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : \left|\frac{1}{|V_n|}\sum_{v\in V_n} f(\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)) - \int_{\mathcal{X}^G} f(\omega)d\mu(\omega)\right| < \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

定义 6（sofic 模型和剩余有限模型）。设 G 是一个 sofic 群，$\Sigma = (V_n, \sigma_n)$ 是 G 的一个 sofic 逼近，$\mathcal{X}$ 是一个紧致可度量空间。若 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 是一个 G-过程，且存在一个序列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$，满足 $\mu_n \in \mathrm{Prob}(\mathcal{X}^{V_n})$，使得 $\mu_n \xrightarrow{lw*} \mu$（分别为 $\mu_n \xrightarrow{le} \mu$），则称 (V_n, σ_n, μ_n) 是 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 的一个 sofic 模型（分别为遍历 sofic 模型）。此外，若 (V_n, σ_n) 是一个剩余有限逼近，且每个 μ_n 都是 V_n-不变的，则称 (V_n, σ_n, μ_n) 是 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 的一个剩余有限模型（分别为遍历剩余有限模型）。

以下断言归功于 Austin。

命题7 ([4, 推论5。7]). 设 $\mu \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^G, G)$ 和 (μ_n) 构成一个序列，且 $\mu_n \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^{V_n})$对应于 *sofic* 逼近 (V_n, σ_n). 若 μ 是遍历的，则

$$\mu_n \xrightarrow{lw*} \mu \quad \Longrightarrow \quad \mu_n \xrightarrow{le} \mu.$$

注8. 上述命题指出，对于遍历过程，只需找到lw*-收敛序列，即可得到 le-收敛的实例。

4. 周期测度与 sofic 群上的局部经验收敛

本节致力于构造在局部与经验意义上收敛到给定不变概率测度的测度，并利用弱-$*$周期测度逼近。一般框架在第4.1节中建立，见命题11，并在第4.2节中对周期可逼近群作深入探讨，见命题14。

4.1. 周期测度逼近。设 G 为一个 sofic 群，且 $(\mathcal{X},\ d)$ 为一个紧度量空间。下一个引理表明，分别容许 sofic、遍历 sofic、剩余有限或遍历剩余有限模型的 G-过程集合都是弱-$*$闭的。

引理9。设 (μ_n) 是概率测度空间 $\mathrm{Prob}(\mathcal{X}^G, G)$ 中的一个序列，并假设 $\mu_n \overset{w*}{\to} \mu \in$概率测度空间$(\mathcal{X}^G, G)$。

(i) 若每个 $(G, \mathcal{X}, \mu_n)$ 都存在 *sofic* 模型（分别为遍历 *sofic* 模型），则 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 存在 *sofic* 模型（分别为遍历 *sofic* 模型）。(ii) 若每个 $(G, \mathcal{X}, \mu_n)$ 都存在剩余有限模型（分别为遍历剩余有限模型），则 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 存在剩余有限模型（分别为遍历剩余有限模型）。

证明。这可由直接的对角序列论证得到。 □

定义 10（周期测度）。若测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathcal{X}^G, G)$ 的支撑有限，则称其为周期的；等价地，若 $\mathrm{supp}(\mu) = \bigcup_{i=1}^{k} G.\omega_i$，其中每个 $\omega_i \in \mathcal{X}^G$ 都满足 $\mathrm{stab}_G(\omega_i) := \{g \in G : g.\omega_i = \omega_i\}$ 是一个有限指数子群。

由不变性可立即看出，对于每个周期 μ，存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $\omega_i \in \mathcal{X}^G$和 $a_i > 0$，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$和

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{1}{|G.\omega_i|} \sum_{\zeta \in G.\omega_i} \delta_\zeta.$$

命题 11. 设 G 是一个 *sofic* 群，且 $\mu \in$概率测度空间$(\mathcal{X}^G, G)$ 是一个周期测度。

(i) 存在一个 *sofic* 模型 (V_n, σ_n, μ_n)，对应于 $(G, \mathcal{X}, \mu)$，使得对于所有 n 和 $v \in V_n$，均有 $(\Pi_v^{\sigma_n})_* \mu_n = \mu$。(ii) 如果 G 是剩余有限的，那么 (i) 中的 *sofic* 模型可以选为一个剩余有限模型。

证明该命题还需要以下基本引理。

引理 12. 设 $N \leqslant H \leqslant G$。选取集合 C 和 D，分别作为 G中 H 的左陪集以及H中 N 的代表元。于是，

(i) CD 在 G中每个 N 陪集恰好包含一个元素，(ii) $CD = \bigsqcup_{c \in C} cD = \bigsqcup_{d \in D} Cd$，特别是 $|CD| = |C| \cdot |D|$。

证明。首先注意，若 $g \in G$，则对某个 $c \in C$ 和 $h \in H$，有 $g = ch$。此外，存在$d \in D$和 $t \in N$使得 $h = dt$，因此 $g = cdt \in cdN$。现在，若 $c, c' \in C$和 $d, d' \in D$满足 $cdN = c'd'N$，由于 dN和 $d'N$是 H的子集，我们有 $cH \cap c'H \neq \varnothing$，从而得到$c = c'$。这直接推出 $d = d'$，因此 $cd = c'd'$。由此，我们证明了(i)。

为证明(ii)成立，设 $cD \cap c'D \neq \varnothing$。于是可以找到 $d, d' \in D$，使得 $cd = c'd'$，因此 $cdN = c'd'N$，并且同样有 $c = c'$。另一种分解的证明类似。□

命题 *11* 的证明。任取一个 sofic 逼近 $\hat{\Sigma} = (\hat{V}_n,\ \hat{\sigma}_n)$，并取有限集 $\Omega \subseteq \mathcal{X}^G$，使得 $\mathrm{supp}(\mu) = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} G.\omega$。子群 $\bigcap_{\omega \in \Omega} \mathrm{stab}_G(\omega) \leqslant G$ 是有限指数子群的有限交，因此它本身也具有有限指数。令 $N \leqslant \bigcap_{\omega \in \Omega} \mathrm{stab}_G(\omega)$ 为 G的一个有限指数正规子群。

ˆ 我们继续证明 (i)。对每个 $n \geqslant 1$，定义映射 σ_n：$G \to$对称群$(V_n \times G/N)$，如下：

$$\sigma_n^g(v, hN) = (\hat{\sigma}_n^g(v), ghN),$$

对于 $g,\ h \in G$和 $v \in \hat{V}_n$。注意，如果 $g \in G \backslash N$，那么 $gNhN \neq hN$，因此 $\sigma_n^g(v,\ hN) \neq (v,\ hN)$对所有 $h \in G$均成立。另一方面，如果 $g \in N \backslash \{e\}$，那么

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|\hat{V}_n \times G/N|} |\{(v, hN) \in \hat{V}_n \times G/N : \sigma_n^g(v, hN) \neq (v, hN)\}|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|G/N|}{|\hat{V}_n||G/N|} |\{v \in \hat{V}_n : \hat{\sigma}_n^g(v) \neq v\}| = 1.$$

ˆ因此， $\Sigma := (V_n \times G/N, \sigma_n)$ 是渐近自由的。此外，

$$\sigma_n^{gg'}(v, hN) = [\sigma_n^g \circ \sigma_n^{g'}](v, hN) \iff \hat{\sigma}_n^{gg'}(v) = [\hat{\sigma}_n^g \circ \hat{\sigma}_n^{g'}](v),$$

对所有 $g, g', h \in G$ 以及 $v \in$ˆV_n，由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{(v, hN) \in \hat{V}_n \times G/N : \sigma_n^{gg'}(v, hN) = [\sigma_n^g \circ \sigma_n^{g'}](v, hN)\}|}{|\hat{V}_n \times G/N|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|G/N|}{|\hat{V}_n||G/N|} |\{v \in \hat{V}_n : \hat{\sigma}_n^{gg'}(v) = \hat{\sigma}_n^g \circ \hat{\sigma}_n^{g'}(v)\}| = 1.$$

因此， Σ 是一个 sofic 逼近。

现在，若对每个 $\omega \in \Omega$ 都存在 $\mu_n^\omega \in$ 概率测度空间$(\mathcal{X}^{\hat{}V_n \times G/N})$，使得 μ_n^ω 局部弱-$*$ 收敛到 $G.\omega$ 上的均匀测度，则显然测度 $\sum_{\omega\in\Omega} \mu(G.\omega)\mu_n^\omega$ 将局部弱-$*$收敛到 μ。因此我们可以假设 $\Omega = \{\omega\}$ 且 μ 是 $G.\omega$ 上的均匀测度。

选取 $\mathrm{stab}_G(\omega)$ 在 G 中的左陪集的一组代表元所成的集合 $C \subseteq G$，并令 $D \subseteq \mathrm{stab}_G(\omega)$ 为 N 在 $\mathrm{stab}_G(\omega)$ 中的左陪集的一组代表元。则由引理 12， CD 是 N 在 G 中的一个基本域。现固定 $n \geqslant 1$。给定 $t \in CD$，令 $\rho_n^t \in \mathcal{X}^{\hat{}V_n \times G/N}$ 为满足对所有 $h \in G$ 以及所有 $v \in$ˆV_n 都有 $\rho_n^t(v, hN) = \omega(ht)$ 的构型。这是良定义的，因为若 $hN = h'N$，则 $t^{-1}h^{-1}h't \in N \subseteq \mathrm{stab}_G(\omega)$，从而 $\omega(ht) = (ht.\omega)(e) = (h't.\omega)(e) = \omega(h't)$。此外，对 ˆ$t \in CD$、 g、 $h \in G$ 与 $v \in V_n$，

$$\left[\Pi_{(v,hN)}^{\sigma_n}(\rho_n^t)\right](g) = \rho_n^t(\sigma_n^g(v, hN)) = \rho_n^t(\hat{\sigma}_n^g(v), ghN) = \omega(ght) = (ht.\omega)(g),$$

因此 $\Pi_{(v,\ hN)}^{\sigma_n}(\rho_n^t) = ht.\omega$。由于 $D \subseteq \mathrm{stab}_G(\omega)$，对于所有 $c \in C$， d， $d' \in D$，我们有 $cd.\omega = cd'.\omega$，所以$\rho_n^{cd} = \rho_n^{cd'}$，由此可得

$$\mu_n := \frac{1}{|CD|} \sum_{t\in CD} \delta_{\rho_n^t} = \frac{1}{|C|} \sum_{c\in C} \delta_{\rho_n^c},$$

ˆ 其中不失一般性地假设 $e \in D$。据此，对于所有 $h \in G$和 $v \in V_n$，我们有

$$\left[\Pi_{(v,hN)}^{\sigma_n}\right]_* \mu_n = \frac{1}{|C|} \sum_{c\in C} \delta_{\Pi_{(v,hN)}^{\sigma_n}(\rho_n^c)} = \frac{1}{|C|} \sum_{c\in C} \delta_{hc.\omega} = \frac{1}{|G.\omega|} \sum_{\zeta\in G.\omega} \delta_\zeta = \mu.$$

这就得到了所需的断言 (i)。

ˆ 现在我们证明 (ii)。若 G 是剩余有限的，则可取 $\Sigma = (V_k, \hat{}\sigma_k)$ 为一个剩余有限逼近，使得 $V_n = G/\ker(\hat{}\sigma_n)$，并对每个 $n \geqslant 1$ 定义 $N_n := N \cap \ker(\hat{}\sigma_n)$。令 σ_n 为与商映射 π_n: $G \to G/N_n$, 相对应的同态 $G \to$ 对称群(G/N_n)，显然序列 $(G/N_n, \sigma_n)$ 是一个剩余有限逼近。同样，既然现在我们已固定 sofic 逼近，只需考虑 $\Omega = \{\omega\}$ 且 μ 是 $G.\omega$ 上均匀测度的情形。

固定 $n \geqslant 1$。定义 $\rho_n \in \mathcal{X}^{G/N_n}$ by $\rho_n(gN_n) = \omega(g)$ （这是定义良好的，因为 $N_n \leqslant N \leqslant \mathrm{stab}_G(\omega)$）。注意，对所有 $v \in G/N_n$, ，映射 $\Pi_v^{\sigma_n}$定义了一个双射 $(G/N_n).\rho_n \to G.\omega$。事实上，若 $g \in G$，则 $g.\omega$在 $\Pi_v^{\sigma_n}$下的一个原像为 $(h_v^{-1}gN_n).\rho_n$，其中 $h_v \in G$满足 $\pi_n(h_v) = v$。因此，该映射是满射。此外，对于 t， g， $h \in G$，我们有

$$\Pi_{gN_n}^{\sigma_n}(hN_n.\rho_n)(t) = (hN_n.\rho_n)(tgN_n) = \rho_n(tghN_n) = \omega(tgh) = (gh.\omega)(t),$$

因此，对每个 $\omega \in \Omega$ 都有$\Pi_{gN_n}^{\sigma_n}(hN_n.\rho_n) = gh.\omega$。由此，若 $gh_1.\omega = gh_2.\omega$ 且 $w_i := h_iN_n$ 对于$i = 1$， 2 成立，则 $h_1.\omega = h_2.\omega$，进而对所有 $t \in G$，

$$(w_1.\rho_n)(tN_n) = \rho_n(th_1N_n) = \omega(th_1) = \omega(th_2) = \rho_n(th_2N_n) = (w_2.\rho_n)(tN_n).$$

因此， $w_1.\rho_n^\omega = w_2.\rho_n$，从而$\Pi_{gN_n}^{\sigma_n}$定义了一个单射。由此可知，该映射是双射，正如所断言的那样。

考虑 $\mu_n \in$概率测度空间$(\mathcal{X}^{G/N_n}, G/N_n)$为定义在轨道$(G/N).\rho_n$上的均匀测度。那么 $(\Pi_v^{\sigma_n})_*\mu_n$ 是 $G.\omega$上的均匀测度，因为对于任意 $g \in G$，我们都有

$$\mu_n((\Pi_v^{\sigma_n})^{-1}(\{g.\omega\})) = \frac{1}{|(G/N_n).\rho_n|} = \frac{1}{|G.\omega|}.$$

由此得到 (ii)。 □

4.2. **PA 群或商群的局部经验收敛**。本节将证明，对于 PA 群的每个遍历作用，都可以找到 le-收敛的序列。

定义 13（PA 群和 EPA 群）。若可数群 G 是可周期近似的，或称其具有*PA* 性质（简称 G 为*PA*群），则对每个有限集 $\mathcal{A}$，周期性的 G-不变概率测度在 Prob$(\mathcal{A}^G, G)$ 中关于弱-$*$拓扑稠密。

若群 G 是遍历性周期可近似的，或称其具有*EPA*性质（简称 G 为*EPA*群），则对每个有限集 $\mathcal{A}$，遍历的周期性 G-不变概率测度在 Prob$(\mathcal{A}^G, G)$ 中关于弱-$*$拓扑稠密。

如上所述，PA 性质由 Bowen 在 [17], 中提出，并证明有限生成自由群具有此性质。在 [47], 中，Kechris 引入了 MD 性质，它等价于 PA 性质（见 [19, 第 2698] 页）。已知以下群具有 PA 性质：自由群 $\mathbb{F}_r$ [47, 第 486], 页；可解且剩余有限群 [72], ；由有限非平凡群或具有 PA 性质的群构成的自由积 [80, 定理 4.8], 具有 PA 性质的群的子群，以及包含一个具有 PA 性质的有限指数子群的群 [47, 第486], 页；形如 $H \rtimes \mathbb{F}_r$ 且满足 H 可解且剩余有限的群 [19, 第 2699] 页。另一方面，不具有 PA 性质的群的例子包括所有非剩余有限群[17, 第 7.2 节], , 以及 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$（当 $n > 2$ [47,第 466], 页）和 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ [19,第 2699] 页。

我们将 $R(G)$ 称为 G 的剩余子群，也就是说，它是 G 的所有有限指数正规子群的交。给定群同态 $\pi\colon G \to Q$，定义映射 $\Phi^\pi\colon \mathcal{X}^Q \to \mathcal{X}^G$，使得 $\Phi^\pi(\omega) = \omega \circ \pi$ 对于 $\omega \in \mathcal{X}^Q$ 成立。

命题 14。设 $\mathcal{A}$ 为有限集，$\mathcal{P}(\mathcal{A}^G)$ 和 $\mathcal{P}_e(\mathcal{A}^G)$ 分别为概率测度空间$(\mathcal{A}^G, G)$ 中的周期测度集和周期遍历测度集。设 $\pi\colon G \to Q$ 为满射群同态。

(i) 若 Q 具有 *PA* 性质，则 Φ_*^π(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q, \overline{Q})) \subseteq \overline{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^G)$。特别地，任何满足 $\mu \in \Phi_*^\pi$(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q, Q))$ 的 G-过程 $(G, \mathcal{A}, \mu)$ 都存在 *sofic* 模型。(ii) 若 Q 具有 *EPA*性质，则 Φ_*^π(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q, Q)) \subseteq \mathcal{P}_e(\mathcal{A}^G)$。特别地，每个满足 $\mu \in \Phi_*^\pi$(概率测度空间$(\overline{\mathcal{A}^Q}, Q))$ 的 G-过程 $(G, \mathcal{A}, \mu)$ 都存在遍历 *sofic* 模型。

此外，若 Q 与 $G/R(G)$ 同构，则 *(i)* 和 *(ii)* 中的包含关系都是等式。

证明该命题需要用到以下标准引理。

引理15. 对于群同态 $\pi\colon G \to Q$，有以下结论。

(i) 映射 Φ^π 连续，且对于所有 $\omega \in \mathcal{X}^Q$，$\Phi^\pi(\pi(g).\omega) = g.\Phi^\pi(\omega)$ $g \in G$。(ii) 推前映射 Φ_*^π: 概率测度空间$(\mathcal{X}^Q) \to$概率测度空间$(\mathcal{X}^G)$ 在弱-*拓扑下连续，并将 Q-不变测度映射为 G-不变测度。(iii) 若 π 还是满射，则映射 Φ^π 和 Φ_*^π 是单射。

证明。 这是标准结论，留给读者证明。 □

命题 *14*的证明。 我们首先证明 (i) 和 (ii) 中的包含关系。令 $\mu \in$概率测度空间$(\mathcal{A}^Q,\ Q)$。由于 Q是一个 PA群，存在一个序列 $(\mu_n)_n$ 位于 概率测度空间$(\mathcal{A}^Q$中，$Q)$ 由周期测度组成，并以弱-*收敛于 μ，因此由 Φ_*^π的连续性可得 $\Phi_*^\pi\mu_n \to \Phi_*^\pi\mu$。我们需要检查每个 $\Phi_*^\pi\mu_n$ 都是周期测度。

如果 $\omega \in$ 支集(μ_n) 且 U 是 $\Phi^\pi(\omega)$的一个开邻域，那么 $\omega \in (\Phi^\pi)^{-1}(U)$，这意味着 $\Phi^\pi_*\mu_n(U) = \mu_n((\Phi^\pi)^{-1}(U)) > 0$，因此 $\Phi^\pi(\omega) \in$支集$(\Phi^\pi_*\mu_n)$。这表明 $\Phi^\pi($支集$(\mu_n))$是支集$(\Phi^\pi_*\mu_n)$的一个子集。反过来，如果 $y \in$ 支集$(\Phi^\pi_*\mu_n)$，那么 $\mu_n((\Phi^\pi)^{-1}B(y,\ 1/k)) > 0$对于每个 $k > 1$都成立。由于支集(μ_n) 是有限的，必然存在某个 $\omega \in$ 支集(μ_n)，使得 $\omega \in(\Phi^\pi)^{-1}(B(y,\ 1/k))$ 对无穷多个 k成立，这就得到 $\Phi^\pi(\omega) = y$，从而支集$(\Phi^\pi_*\mu_n)$ $=\Phi^\pi($支集$(\mu_n))$。现在我们可以将支集$(\mu_n) = \bigsqcup_{i=1}^k Q.\omega_i$ 写成某些元素 $\omega_i \in \mathcal{A}^Q$ 的形式，其中$|Q.\omega_i| < \infty$。于是得到

$$\operatorname{supp}(\Phi^\pi_*\mu_n) = \Phi^\pi\left(\bigsqcup_{i=1}^k Q.\omega_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^k G.\Phi^\pi(\omega_i),$$

这里我们用到了引理 $\Phi^\pi(\pi(g).\omega_i) = g \cdot \Phi^\pi(\omega_i)$ 第 (i) 部分中的事实15。注意，上面的第二个等式是由 π 的满射性结合引理第 (iii) 部分得出的。由此可知，$\Phi^\pi_*\mu_n$ 是周期的。注意，若 $k = 1$（因此每个 μ_n 都是遍历的），那么 μ 也遍历。这就证明了 (i) 和 (ii) 中的包含关系。

两个“特别地”的陈述可直接由命题11结合引理9得出。因此，(i) 和 (ii) 得证。

现在，在附加假设 $Q \simeq G/R(G)$ 下，我们证明反向包含关系。为此，只需证明当 G 具有 PA 性质时，$\mathcal{P}(\mathcal{A}^G)$ 是 Φ^π_*(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q$ 的子集，因为 Φ^π_*(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q,\ Q))$ 由于 Φ^π_* 的紧致性和连续性而闭合。设 $\mu \in$概率测度空间$(\mathcal{A}^G,\ G)$ 是一个周期测度，并将 $\operatorname{supp}(\mu) = \bigsqcup_{i=1}^k G.\omega_i$ 写作某些满足 $|G.\omega_i| <$8 的元素 $\omega_i \in \mathcal{A}^G$。令 $H = \bigcap_{i=1}^k \operatorname{stab}_G(\omega_i)$。由于 H 在 G 中具有有限指数，它包含一个正规有限指数子群 N，该子群属于 G；并且我们有 $R(G) \leqslant N$，因此典范群同态 γ: $Q \to G/N$ 满足 $\gamma \circ \pi = \pi_N$，其中 π_N: $G \to G/N$ 是商映射。这转化为 $\Phi^\pi \circ \Phi^\gamma =\Phi^{\pi_N}$。

定义 $\tilde{\omega}_i \in \mathcal{A}^{G/N}$ 为 $\tilde{\omega}_i(\pi_N(g)) = \omega_i(g)$。这是良定义的，因为若 $g^{-1}g' \in N \leqslant H = \bigcap_{i=1}^k \operatorname{stab}_G(\omega)$，则 $\omega_i(g) = (g^{-1}g'.\omega_i)(g) = \omega_i(g')$。现在令

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^k \frac{\mu(G.\omega_i)}{|G.\omega_i|} \sum_{\zeta \in (G/N).\tilde{\omega}_i} \delta_\zeta \in \operatorname{Prob}(\mathcal{A}^{G/N}, G/N).$$

事实上，$\tilde{\mu}$ 是一个概率测度。为此，首先注意，对于所有 $g,\ g' \in G$，

$$\Phi^{\pi_N}(\pi_N(g).\tilde{\omega}_i)(g') = \tilde{\omega}_i(\pi_N(g'g)) = (g.(\tilde{\omega}_i \circ \pi_N))(g') = (g.\Phi^{\pi_N}(\tilde{\omega}_i))(g'),$$

因此 $\Phi^{\pi_N}(\pi_N(g).\tilde{\omega}_i) = g.\Phi^{\pi_N}(\tilde{\omega}_i) = g.\omega_i$对于每个 i。于是 Φ^{π_N}定义了一个满射 $(G/N).\tilde{\omega}_i \to G.\omega_i$。此外，由于 π_N是满射，Φ^{π_N}根据引理 15的第 (iii) 部分可知是单射，因此 $|(G/N).\tilde{\omega}_i| =|G.\omega_i|$。于是 $\tilde{\mu}$ 是轨道 $(G/N).\tilde{\omega}_i$上的均匀测度的凸组合。

我们还证明了 $\pi_N(g).\tilde{\omega}_i$ 是 $g \cdot \omega_i$ 在 Φ^{π_N} 下的唯一原像。由此可知，对每个 $g \in G$，

$$\Phi^{\pi_N}_*\tilde{\mu}(\{g.\omega_i\}) = \tilde{\mu}((\Phi^{\pi_N})^{-1}(\{g.\omega_i\})) = \tilde{\mu}(\{\pi_N(g).\tilde{\omega}_i\}) = \frac{\mu(G.\omega_i)}{|G.\omega_i|} = \mu(\{g.\omega_i\}).$$

因此$\Phi^\pi_*(\Phi^\gamma_*\tilde{\mu}) = \Phi^{\pi_N}_*\tilde{\mu} = \mu$，其中根据前一引理的第(ii)部分，$\Phi^\gamma_*\tilde{\mu}$ 是 Q-不变的。从而，$\mu \in \Phi^\pi_*($概率测度空间$(\mathcal{A}^Q,\ Q))$。□

推论16. 设 G 是一个*PA*（相应地，*EPA*）群，并设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集。则每个 G-过程 $(G$、$\mathcal{A}$、$\mu)$都容许一个剩余有限模型（相应地，遍历剩余有限模型）。

备注17。 Shriver 已在 [77, 命题 4。1] 通过对 $*$ 上测度的弱逼近 $\mathcal{A}^G$，借助如下形式的周期测度，刻画了 PA 群：

$$\frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} \delta_{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)},$$

其中 $(V_n,\ \sigma_n)$ 是由同态构成的 sofic 逼近，且 $\rho \in \mathcal{A}^{V_n}$。尽管这种构造是专为使经验分布近似原始测度而设计的，但如何在模型空间中模拟周期测度并获得剩余有限模型，仍然是一个难题。我们已在命题 11 的证明中阐述了实现这一目的所需的论证。

推论的证明*16*。这是命题14（应用于 $\pi = \mathrm{id}\colon\ G \to G$）的直接推论。注意到 Φ_*^{id}是恒等映射，并应用命题11 和引理9，即可得出这些模型可以取为剩余有限模型。□

注 18。群 $G/R(G)$ 称为 G 的最大残余有限商群，因为 G 的任何其他剩余有限商群 T都可分解为$G/R(G)$的一个商群。现在，人们可能会将 G 的最大 PA 商定义为满足以下条件的 PA 商 Q：任何其他 PA 商 T都可分解为Q的一个商群；但事实证明，这样的对象可能并不存在。举例来说，取$G = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$，并假设 $N \trianglelefteqslant \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 满足如下条件：$Q :\ = (\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)/N$ 是 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 的最大 PA 商。由于 $\mathbb{F}_2 \times 1$ 和 $1 \times \mathbb{F}_2$ 都是 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$的 PA 商，它们都必须分解为 Q的商群，这意味着 $N \leqslant (1 \times \mathbb{F}_2) \cap (\mathbb{F}_2 \times 1) = 1$，因此 $Q = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$。然而，$\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 不是 PA 群（参见[19,第 2699] 页，并结合 [42]）。

例 19（Baumslag-Solitar群）。对于 $m,\ n \geqslant 1$ 参数为$m,\ n$ 的 Baumslag-Solitar 群定义如下：

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b \mid ab^m = b^n a \rangle.$$

作为 $\mathbb{Z}$ 的 HNN扩张，$\mathrm{BS}(m,n)$ 是一个 sofic 群 [22]。群 $\mathrm{BS}(1,n)$ 是残余有限且可解的，因此根据 [72]，它们具有 EPA性质，故满足推论16的假设。若 $m,n > 1$，则群 $\mathrm{BS}(m,n)$ 是 $\mathbb{Z}$ 的非升HNN扩张，因此它是一个非可解群；若进一步地，m 和 n 的素因子集合不同，则众所周知，$\mathrm{BS}(m,n)$ 具有非Hopf性质 [7],，所以它不可能是残余有限的。特别地，若 $m,n > 1$ 是互素整数，则群 $\mathrm{BS}(m,n)$ 是一个非可解、具有非Hopf性质的 sofic 群。尽管如此，正如 [48, 引理 3.2] 所证明的，$\mathrm{BS}(m,n)$ 的最大残余有限商群是 $Q := \mathbb{Z}\left[\frac{1}{mn}\right] \rtimes \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 的生成元作用为乘以 m/n。注意，Q 作为一个阿贝尔群扩张阿贝尔群的群，是可解的。它也是有限生成的，并且由于它可以表示为两个阿贝尔子群 $H_1, H_2 \leqslant Q$ 的 $Q = H_1 H_2$，根据 [40]，它是亚交换群。由此可根据 [38, 定理 1] 得出，Q 是残余有限的，因此具有 EPA性质。由命题 14 可知，记π 为商映射 $\mathrm{BS}(m,n) \to Q$，则 Φ_*^{π}(概率测度空间$(\mathcal{A}^Q, Q)$) 中的每个测度都会产生一个允许存在遍历 sofic 模型的 G-过程。

5. 连续算子与谱弱收敛

在本节中，我们将介绍相关的算子族，并称之为连续算子。我们将在第*5.1*节详细讨论它们通过 sofic 逼近得到的有限体积对应物的存在性与性质，这些对应物称为诱导近似。随后，我们定义态密度测度，并证明沿诱导近似的弱收敛，参见第5.2节中的定理33。

给定一个图 (V,E)，若 $H(x,y) = 0$只要 $d_E(x,y) > M$ 就成立，则称 $M \in \mathbb{N}$ 是算子 $H\colon \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ 的有限跳跃范围参数。现在考虑一个有限生成 sofic 群 G 及其对称生成集 S。令 $(V,E) = \mathrm{Cay}(G,S)$ 为 G关于 S 和规范边标记 $\vartheta((x,y)) = yx^{-1}$的凯莱图。此外，对于紧度量空间 $\mathcal{X}$，若算子族 $\{H^\omega\}_{\omega \in \mathcal{X}^G}$ $H^\omega\colon \ell^2(G) \to \ell^2(G)$ 满足以下条件，则称其等变：

$$H^\omega\big(xg, yg\big) = H^{g.\omega}(x,y), \quad \text{for all} \quad x,y,g \in G, \quad \omega \in \mathcal{X}^G.$$

定义酉算子 U_g： $\ell^2(G) \to \ell^2(G), U_g u(x) = u(xg)$后，上述等变性条件等价于

$$H^{g.\omega} = U_g H^\omega U_{g^{-1}}, \quad \omega \in \mathcal{X}^G, \quad g \in G.$$

定义 20（连续算子）。一族算子 $\{H^\omega\}_{\omega\in\mathcal{X}^G}$： $\ell^2(G) \to \ell^2(G)$ 称为 Cay(G 上的连续算子，S)（带参数 M），如果

- 对所有 x，$y \in G$，映射 $\omega \mapsto H^\omega(x,\ y)$ 是连续的；
- 算子 H^ω 对每个 $\omega \in \mathcal{X}^G$ 都是自伴的；
- 存在 $M \in \mathbb{N}$，它是所有 H^ω、$\omega \in \mathcal{X}^G$ 的有限跳跃范围参数；
- 这族 $\{H^\omega\}$ 是等变的。

如果连续算子 $\{H^\omega\}$ 还满足以下条件，我们称其具有有界相互作用：对所有 ω_1，$\omega_2 \in \mathcal{X}^G$ 以及每个 $x \in G$，都有

$$\omega_1|_{B_S(e,M)} = \omega_2|_{B_S(e,M)} \quad \Longrightarrow \quad H^{\omega_1}(e,x) = H^{\omega_2}(e,x).$$

从定义可知，生成集 S 的选取很重要。不过，我们假设只要 G 固定，S 也就固定。因此，稍微滥用一下术语，我们也会称 $\{H^\omega\}$ 为 上的连续算子，或者简称 $\{H^\omega\}$ 为连续算子，前提是 G 和 S 的指代明确。给定一个过程 $(G,\ \mathcal{X},\ \mu)$，我们也会将 $\{H^\omega\}$ 称为随机算子（其分布律为μ）；本文标题和引言中使用了这一术语。

注记21. 我们再作几点进一步的说明。

- 可以为有界相互作用条件引入一个额外参数，它可能与 M不同。然而，显然取二者的最大值即可使这两个参数相匹配。
- 注意，映射 $\omega \mapsto H^\omega(x,y)$ 的连续性，连同有限跃迁范围性质与等变性，自动蕴含这些算子在算子范数下一致有界，即

$$\sup_{\omega\in\mathcal{X}^G} \left\|H^\omega\right\| < \infty,$$

另见下文公式（2）。

- 在 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ 为有限的情形下，有界相互作用蕴含函数 $\omega \mapsto H^\omega(x,y)$ 是局部常值的，因而自动连续。
- 若系数 $H^\omega(x,y)$ 仅取自可能取值的某个有限集，则连续性也迫使映射 $\omega \mapsto H^\omega(x,y)$ 为局部常值。必要时增大参数 M，我们便可确保在此情形下 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用。

5.1. **sofic 凯莱图的诱导逼近**。我们现在为有限生成 sofic 群G的凯莱图 Cay(G,S) 上的连续算子定义有限维逼近元。为此，固定一个到 G 的 sofic 逼近 (V_n,σ_n)，它由 S-标记图构成。

定义 22（诱导逼近）。设 $M \in \mathbb{N}$。在 (V_n,E_n) 上的算子族 H_n^ρ： $\ell^2(V_n) \to \ell^2(V_n)$ 的序列 $\left(\{H_n^\rho\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，是在$G$上、参数为 M 的连续算子$\{H^\omega\}$的弱逼近，定义在 (V_n,σ_n) 上，如果

- 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 与 $x,y \in V_n$，映射 $\rho \mapsto H_n^\rho(x,y)$ 是博雷尔的，
- 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 与 $\rho \in \mathcal{X}^{V_n}$，算子 H_n^ρ是自伴的，
- M是所有算子H_n^ρ的有限跳跃范围参数，
- 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $4M$-好顶点 $w \in V_n$，我们有

$$H_n^\rho(w,v) = H^{\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(e,g)$$

对所有 $\rho \in \mathcal{X}^{V_n}$、$v \in B_{E_n}(w,\ M)$ 以及唯一的 $g \in B_S(e,\ M)$，且满足 $\sigma_n^g(w) = v$。

我们称 $\big(\{H_n^\rho\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\{H^\omega\}$ 的诱导近似，如果它是$\{H^\omega\}$的弱逼近，并且此外，

- 对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\rho\in\mathcal{X}^{V_n}$，以及所有 $v,\ w\in V_n$，我们有

$$H_n^\rho(v,w)\in\{H^\omega(x,y):\ x,y\in V,\ \omega\in\mathcal{X}^G\}\cup\{0\}.$$

注23。第五条性质表明，所有 H_n^ρ 的系数只能取自$\{H^\omega\}$ 或为 0。第四条性质对 $4M$-好顶点提出了更强的条件。这里要求，在$(V_n,\ E_n)$ 与 $\mathsf{Cay}(G,\ S)$ 的几何结构和颜色结构相同的位置，H_n^ρ 的系数取自 H^ω。还需注意，所有图 $(V_n,\ E_n)$ 和 $\mathsf{Cay}(G,\ S)$ 的顶点度都有统一上界。由于 $\{H^\omega\}$的一致有界性等价于

$$\sup_{x,y\in G}\sup_{\omega\in\mathcal{X}^G}\big|H^\omega(x,y)\big|<\infty, \tag{2}$$

第五条性质保证所有算子范数一致有界，即

$$\max\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\big\|H_n^\rho\big\|,\ \sup_{\omega\in\mathcal{X}^G}\|H^\omega\|\Big\}<\infty.$$

例 24。设 $(V,\ E)=\mathsf{Cay}(G,\ S)$ 为由有限对称集 $S\subseteq G$生成的 sofic 群上的凯莱图。设 Δ 为图拉普拉斯算子 $\Delta\colon\ \ell^2(G)\to\ell^2(G)$,

$$\Delta(u(x))=\sum_{y\sim x}(u(y)-u(x))$$

其中求和遍历所有与 x 通过一条边相连的顶点。于是，集合 $\{H^\omega\}$，其中$H^\omega\colon\ \ell^2(G)\to\ell^2(G)$ 由下式给出

$$H_F^\omega u(x)=\Delta u(x)+F(\omega(x))u(x)$$

对于 $\omega\in\mathcal{X}^G$、$u\in\ell^2(G)$、$x\in G$ 和连续映射 $F\colon\ \mathcal{X}\to\mathbb{R}$，定义了一个参数为 $M=1$ 的连续算子。族 $\{H_F^\omega\}$ 由具有实值势 $F\circ\omega$ 的离散薛定谔算子组成。对于 $g,\ h\in G$ 和 $u\in\ell^2(G)$，通过简短计算即可得出其等变性:

$$\begin{aligned}(U_gH_F^\omega U_{g^{-1}}u)(h)&=(H_F^\omega U_{g^{-1}}u)(hg)=(\Delta U_{g^{-1}}u)(hg)+F(\omega(hg))(U_{g^{-1}}u)(hg)\\&=\sum_{z:z\sim hg}\big((U_{g^{-1}}u)(z)-(U_{g^{-1}}u)(hg)\big)+F(\omega(hg))u(h)\\&=\sum_{z:zg^{-1}\sim h}\big(u(zg^{-1})-u(h)\big)+F(\omega(hg))u(h)\\&=\sum_{z:z\sim h}\big(u(z)-u(h)\big)+F(g.\omega(h))u(h)=H_F^{g.\omega}u(h).\end{aligned}$$

给定一个 sofic 逼近 $(V_n,\ \sigma_n)$，我们可以通过设定以下内容来定义一个诱导近似 $(\{H_n^\rho\}_\rho)_{n\in\mathbb{N}}$

$$H_n^\rho u(v)=\Delta u(v)+F(\rho(v))u(v)$$

对于 $\rho\in\mathcal{X}^{V_n}$、$u\in\ell^2(V_n)$和 $v\in V_n$。给定一个过程 $(G,\ \mathcal{X},\ \mu)$，我们称 $\{H_F^\omega\}$ 为一个具有势 F 的随机薛定谔算子。

下一个命题及其证明基于以下一般事实：如果 (V,E,σ) 是 sofic 逼近中的一个有限图，并且 $v\in V$是某个 $Q\in\mathbb{N}$ 的 Q-良好顶点，那么对于每个$w\in B_{E_n}(v,Q)$，都存在唯一的 $g\in G$，满足 $|g|_S\leqslant Q$，使得 $\sigma^g(v)=w$。

命题 25 (诱导逼近的存在性)。 设 $(V, E) = \mathrm{Cay}(G, S)$，其中 G 是由有限集 S 生成的 *sofic* 群，并设 (V_n, E_n, σ_n) 是一个 *sofic* 逼近。设 $\{H^\omega\}_{\omega \in \mathcal{X}^G}$ 是一个参数为 M 的连续算子，其中 $\mathcal{X}$ 是一个紧度量空间。此外，假设以下条件至少有一项成立：

- 所有映射 σ_n： $G \to$ 对称群(V_n) 都是同态；
- 连续算子 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用。

那么可以通过如下方式定义诱导近似 $\left(\{H_n^\rho\}\right)$

$$H_n^\rho(w, v) = H^{\Pi_w^{\sigma_n}(\rho)}(e, g), \quad \rho \in \mathcal{X}^{V_n}, \quad v, w \in V_n, \tag{3}$$

如果 v、 w都是 $2M$-好顶点， $v \in B_{E_n}(w$、 $M)$且 $g \in G$是唯一满足 $|g|_S \leqslant M$和 $\sigma^g(w) = v$的对象；在所有其他情况下，令 $H^\rho(v$、 $w) = 0$。

注26。在各自的近似背景下，文献中此前已有类似构造，参见例如 [31], 引理2.2及其后的讨论，见 [74],或引理9.8及前文讨论，见 [67]。

证明。 令 $\{H_n^\rho\}$ 如上定义。注意，这些算子定义良好，因为对于一个 M-良好顶点 v，存在唯一的 $g \in G$，使得 $|g|_S \leqslant M$ 且 $\sigma^g(w) = v$。映射的可测性

$$\rho \mapsto H_n^\rho(w, v) = H^{\Pi_w^{\sigma_n}(\rho)}(e, g)$$

是映射可测性的直接推论

$$\rho \mapsto \Pi_w^{\sigma_n}(\rho), \quad \omega \mapsto H^\omega(e, g),$$

以及常值零映射的可测性。

根据构造，对于所有 H_n^ρ， M 都是有限跳跃范围参数，而算子 H_n^ρ 的取值仅为 $\{H^\omega\}$ 中的算子或 0。

还需证明算子 H_n^ρ 都是自伴的。这里需要用到一项额外假设。首先注意，我们可以假设 v， $w \in V_n$均为 $2M$-良好顶点，且$d_{E_n}(v$， $w) \leqslant M$，否则根据定义可得 $H_n^\rho(v$， $w) = 0 = H_n^\rho(w$， $v)$。令 $\bar{g} \in B_S(e$， $M)$为满足 $\sigma_n^{\bar{g}}(w) = v$的唯一元素。由于 v也为 $2M$-良好顶点， $\bar{g}^{-1}$是满足 $\sigma_n^{\bar{g}^{-1}}(v) = w$的唯一元素。利用等变性条件，我们得到

$$H_n^\rho(w, v) = H^{\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(e, \bar{g}) = H^{\bar{g}\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(\bar{g}^{-1}, e).$$

此外，由于自伴性，我们有

$$H^{\bar{g}\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(\bar{g}^{-1}, e) = \overline{H^{\bar{g}\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(e, \bar{g}^{-1})}.$$

现在先假设 σ_n： $g \mapsto \sigma_n^g$ 是一个同态。那么

$$\begin{aligned}\bar{g}\Pi_w^{\sigma_n}(\rho) &= \bar{g}\big(\rho\big(\sigma_n^h(w)\big)\big)_{h\in G} = \big(\rho\big(\sigma_n^{h\bar{g}}(w)\big)\big)_{h\in G} \\ &= \big(\rho\big(\sigma_n^h(\sigma_n^{\bar{g}}(w))\big)\big)_{h\in G} = \Pi_v^{\sigma_n}(\rho).\end{aligned}$$

结合上面的结论，我们得到

$$H_n^\rho(w, v) = \overline{H^{\bar{g}\prod_w^{\sigma_n}(\rho)}(e, \bar{g}^{-1})} = \overline{H^{\prod_v^{\sigma_n}(\rho)}(e, \bar{g}^{-1})} = \overline{H_n^\rho(v, w)} \tag{4}$$

在这种情况下。至于第二种情况，请注意，即使我们不知道 σ_n 是否为同构，但根据 sofic 逼近的几乎同态性质，并结合 $|\bar{g}|_S \leqslant M$和 v， w是 $2M$-good 这一事实，对于每个 $h \in B_S(e$， $M)$

$$\bar{g}\Pi_w^{\sigma_n}(\rho)(h) = \rho\Big(\sigma_n^{h\bar{g}}(w)\Big) = \rho\Big(\sigma_n^h(\sigma_n^{\bar{g}}(w))\Big) = \rho\big(\sigma_n^h(v)\big) = \Pi_v^{\sigma_n}(\rho)(h),$$

因此，

$$\bar{g}\Pi_w^{\sigma_n}(\rho)|_{B_S(e,M)} = \Pi_v^{\sigma_n}(\rho)|_{B_S(e,M)}.$$

在额外假设 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用的情况下，与（4）中相同的计算即可完成证明。□

现在我们来考虑可测算子的幂。注意，对于有界图 $(V,\ E)$ 上具有有限跳跃范围参数 $M\in\mathbb{N}$ 的有界算子 $H:\ell^2(V)\to\ell^2(V)$，算子 H^k 的系数由以下公式给出：

$$H^k(x,y)=\sum_{(z_i)}\prod_{i=1}^{k}H(z_i,z_{i+1}),\tag{5}$$

其中，求和遍历所有连接 x 和 y 的路径 $(z_i)\in V^{k+1}$（即 $z_1=x$ 和 $z_{k+1}=y$），并满足附加性质 $d_E(z_i,\ z_{i+1})\leqslant M$。特别地，若 H 自伴，则 H^k 也是自伴的。

根据这些观察，我们很快便可得到如下关于凯莱图 $(V,\ E)=\mathsf{Cay}(G,\ S)$ 上的连续算子的结论，其中 $(V_n,\ E_n,\ \sigma_n)$ 是 sofic 逼近。

引理 27。设 $k\in\mathbb{N}$。若 $\{H^\omega\}$ 是参数为 $M\in\mathbb{N}$ 的连续算子，则族 $\{(H^\omega)^k\}$ 也是连续算子，其参数为 $k\cdot M$。

下一个引理表明，$\{H^\omega\}$ 的弱逼近的 k次幂会产生 $\{(H^\omega)^k\}$的弱逼近。

引理 28. 设 $\left(\{H_n^\rho\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\right)$ 是连续算子 $\{H^\omega\}_{\omega\in\mathcal{X}^G}$ 的一个弱逼近，其参数为 $M\in\mathbb{N}$。此外，假设以下条件至少有一个成立：

- 所有映射 $\sigma_n\colon G\to$ 对称群(V_n) 都是同态；
- 连续算子 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用。

对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$\left(\{(H_n^\rho)^k\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\right)$ 都是 $\{(H^\omega)^k\}_{\omega\in\mathcal{X}^G}$ 的弱逼近（参数为 $k\cdot M$）。

证明。我们将证明弱逼近的第四个条件。所有其他要求都可以通过公式（5）轻松验证。

设 $k\in\mathbb{N}$。我们需要证明，对于 $n\in\mathbb{N}$，$\rho\in\mathcal{X}^{V_n}$，

$$(H_n^\rho)^k\left(v,\sigma_n^g(v)\right)=\left(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)}\right)^k(e,g)\tag{6}$$

对于每个 $4kM$-良好顶点 $v\in V_n$ 以及 $g\in B_S(e,\ k\cdot M)$。我们对 k使用归纳法。情形$k=1$ 由诱导近似的定义得出。

现在假设该断言对 $k-1$、$k\geqslant 2$成立。我们固定某个 $4kM$-良好顶点 $v\in V_n$（若其存在；否则无需证明）。为简化记号，我们将用 H_n 表示 H_n^ρ，用 H 表示 $H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)}$。对于 $g\in B_S(e,\ kM)$，我们有

$$H_n^k\left(v,\sigma_n^g(v)\right)\ =\ \sum_{z\in V_n}H_n^{k-1}\left(v,\ z\right)\cdot H_n(z,\ \sigma_n^g(v)).$$

我们将证明

$$H_n^k\left(v,\ \sigma_n^g(v)\right)\ =\ \sum_{x\in G}H^{k-1}(e,x)\cdot H(x,g)=H^k(e,g).$$

为验证后一等式，我们作如下观察。条件

$$H_n^{k-1}\left(v,\ z\right)\cdot H_n(z,\ \sigma_n^g(v))\neq 0$$

迫使

$$z\in B_{E_n}(\sigma_n^g(v),M)\cap B_{E_n}(v,(k-1)M).$$

这些 z 与某些唯一的 $x \in B_S(g,\ M) \cap B_S(e,\ (k-1)M)$ 一一对应，使得 $\sigma_n^x(v) = z$ 且 $\sigma_n^{gx^{-1}}\big(\sigma_n^x(v)\big) = \sigma_n^g(v)$。与诱导逼近的存在性证明类似，我们注意到

$$x\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)(h) = \rho\big(\sigma_n^{hx}(v)\big) = \rho\big(\sigma_n^h(\sigma_n^x(v))\big) = \Pi^{\sigma_n}_{\sigma_n^x(v)}(\rho)(h)$$

对所有 $h \in G$，如果 σ_n 是同态，且 H^ω 具有有界相互作用，那么只需注意到上述等式至少对 $h \in B_S(e,\ M)$ 成立即可。因此，由于等变性，且 $z = \sigma_n^x(v)$ 是 $4M$-good,

$$\begin{aligned} H_n(\sigma_n^x(v), \sigma_n^g(v)) &= H^{\Pi^{\sigma_n}_{\sigma_n^x(v)}(\rho)}(e, gx^{-1}) = H^{x\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)}(e, gx^{-1}) \\ &= H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)}(x, g) = H(x, g), \end{aligned}$$

并由归纳假设，$H_n^{k-1}(v,\ \sigma_n^x(v)) = H^{k-1}(e,\ x)$。如果 $z \notin B_{E_n}(\sigma_n^g(v),\ M)$，那么不存在满足 $z = \sigma_n^{hg}(v) = \sigma_n^h(\sigma_n^g(v))$ 的 $h \in B_S(e,\ M)$，因此，

$$H_n(z, \sigma_n^g(v)) = 0 = H(x, g)$$

对所有 $x \notin B_S(g,\ M)$。如果 $z \notin B_{E_n}(v,\ (k-1)M)$，那么不存在 $t \in B_S(e,\ (k-1)M)$ 使得 $\sigma_n^t(v) = z$。由于 H_n^{k-1}和 H^{k-1} 的跳跃范围均为 $(k-1)M$，我们得到 $H_n^{k-1}(v,\ z) = 0 = H^{k-1}(e,\ t)$ 对于 $t \notin B_S(e,\ 4(k-1)M)$。至此，等式（6）的证明完成。□

现在我们将使用第 2.5 节中引入的谱演算。注意，对于多项式 $p \in \mathbb{R}[x]$，由引理27 可直接推出，对于参数 M 如上所述的$\big(\{H_n^\rho\}\big)$ 关于 $\{H^\omega\}$ 的诱导近似，$\big(\{p(H_n^\rho)\}\big)$ 是关于 $\{p(H^\omega)\}$的弱逼近，其参数为$\deg(p)\cdot M$。这给出了多项式弱收敛的第一步。

引理 29。设 $\{H_\omega\}_{\omega\in\mathcal{X}}$ 是凯莱图 $(V, E) = \mathrm{Cay}(G, S)$ 上的连续算子，其中 $\mathcal{X}$ 是紧度量空间。设 (V_n, σ_n) 是一个 *sofic* 逼近。假设以下条件之一成立

- 所有映射 $\sigma_n\colon G \to$ 对称群(V_n) 都是同态；
- 连续算子 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用。

那么，对于 $\{H^\omega\}$ 的任意诱导近似 $\big(\{H_n^\rho\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\big)_n$ 以及所有 $p \in \mathbb{R}[x]$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}} \frac{\big|v \in V_n :\ p(H_n^\rho)(v, v) = p(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)})(e, e)\big|}{|V_n|} = 1.$$

证明。假设 $\{H^\omega\}$ 具有参数 M。固定 $p \in \mathbb{R}[x]$。由引理 27 立即可得，$\{p(H^\omega)\}$ 是参数为 $\deg(p)M$ 的连续算子。因此，$\big(\{p(H_n^\rho)\}\big)$ 是 $\{p(H^\omega)\}$ 的弱逼近，由引理 28，并且我们显然有$p(H_n^\rho)$ 在 n 和 ρ 上的一致有界性。因此，

$$p(H_n^\rho)(v, v) = p(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)})(e, e)$$

对每个$4\deg(p)M$-良好顶点 $v \in V_n$ 以及每个 $\rho \in \mathcal{X}^{V_n}$。由于 $(V_n,\ E_n,\ \sigma_n)$ 是一个顺从逼近，当 $n \to \infty$时，V_n 中$4\deg(p)M$-好顶点的比例收敛到1。至此证明完毕。□

下文中，我们用 $C(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$上的连续实值函数空间。

推论 30. 在上一引理的假设下，对所有 $f \in C(\mathbb{R})$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}} \left| \frac{1}{|V_n|} \sum_{v\in V_n} \Big(\langle \delta_v, f(H_n^\rho)\delta_v\rangle - \langle \delta_e, f(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)})\delta_e\rangle \Big) \right| = 0.$$

证明。 在算子范数意义下， $\left(\{H_n^\rho\}_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\right)_n$的一致界连同谱演算给出$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\|f(H_n^\rho)\|<\infty$。类似地，有$\sup_{\omega\in\mathcal{X}^G}\|f(H^\omega)\|<\infty$。对 $f=p$为多项式的情形，该结论现由引理29得出。对一般的 f，上述有界性连同连续谱演算表明，不失一般性，可假定 f具有紧支撑。本证明由引理29 与关于紧集上连续函数空间中多项式一致稠密性的 Stone-Weierstraß 定理共同完成。□

5.2. **态密度测度的弱收敛**。令 $\{H^\omega\}_{\omega\in\mathcal{X}^V}$ 是定义在（某个标记为有界图的边）$(V,\ E)$ 上的一个可测算子族，即所有映射

$$\omega\mapsto H^\omega(v,w),\quad v,w\in V$$

都是博雷尔可测的。对于每个 $\omega\in\mathcal{X}^V$，我们在 $\mathbb{R}$ 上定义一个博雷尔概率测度 ϑ^ω，具体取决于 V 是有限还是无限。也就是说，当 V 有限时，我们令

$$\vartheta^\omega(B):=\frac{1}{|V_n|}\mathrm{Tr}E_{H^\omega(B)}=\frac{1}{|V_n|}\sum_{v\in V_n}\langle\delta_v,E_{H^\omega}(B)\delta_v\rangle, \tag{7}$$

其中，Tr 表示方阵的标准迹。当 V 为无限时，我们令

$$\vartheta^\omega(B)=\langle\delta_e,\ E_{H^\omega}(B)\delta_e\rangle.$$

在这两种情况下， E_{H^ω}表示自伴算子 H^ω的谱测度，参见第2.5节。注意，由于 H^ω的有界性，ϑ^ω 的支撑包含于 $\Sigma(H^\omega)$ 的谱 H^ω中，且该谱为紧集。

对于可测函数 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若其在紧集上的限制均有界，则令

$$\vartheta^\omega(f):=\int_{\mathbb{R}}f(s)\,d\vartheta^\omega(s).$$

注意， $C(\mathbb{R})$属于这一类。我们用 $C_b(\mathbb{R})$ 表示$C(\mathbb{R})$中所有有界元素构成的子空间。

定义 31（积分态密度）。函数

$$N:\mathbb{R}\to[0,1],\quad N(\beta)=\int_{\mathcal{X}^V}\vartheta^\omega\left(]-\infty,\beta]\right)d\mu(\omega)$$

称为底层可测族$\{H^\omega\}$在测度μ下的积分态密度（*IDS*）。$\{H^\omega\}$的态密度测度定义为

$$N':C_b(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\quad N'(f)=\int_{\mathcal{X}^V}\vartheta^\omega(f)\,d\mu(\omega)=\int_{\mathcal{X}^V}\int_{\mathbb{R}}f(s)\,d\vartheta^\omega(s)\,d\mu(\omega).$$

在数学物理中， $N(\beta)$ 通常被解释为低于某个固定能级的量子态的平均数量 β，按单位值计，详见引言中的说明。它与某个具有忠实、正规且有限迹的冯·诺依曼代数之间存在自然联系。我们将在下文第7 节探讨这些联系。

注 32。注意，对于有限图 $(V,\ E)$ 和 $\beta\in\mathbb{N}$，数值 $|V|\cdot\vartheta^\omega\left(]-\infty,\ \beta]\right)$ 对应于 H^ω 小于或等于 β的特征值数量，按其重数计数。此外，由公式（5）可知，对每个 $p\in\mathbb{R}[x]$，映射 $\omega\mapsto p(H^\omega)(x,\ y)$ 都是连续的。结合连续演算与可测演算可知，上述映射 $\omega\mapsto\vartheta^\omega(\cdot)$ 是可测的。因此，上述积分均有定义。

现在我们能够证明态密度测度的弱收敛。

定理 33（态密度测度的弱收敛）。 设 (V_n, σ_n, μ_n) 是一个 G-过程 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 的遍历 *sofic* 模型，且 $\{H^\omega\}_{\omega\in\mathcal{X}^G}$ 是凯莱图$\mathrm{Cay}(G, S)$ 上的连续算子。假设以下条件至少有一项成立：

- 所有映射 σ_n： $G \to$ 对称群(V_n) 都是同态；
- 连续算子 $\{H^\omega\}$ 具有有界相互作用。

那么，对于每个诱导近似 $(\{H_n^\rho\})$ *for* $\{H^\omega\}$，我们都有：对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个 $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : \left|\vartheta_n^\rho(f) - N'(f)\right| < \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

证明。 回顾备注23 所述

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}} \|H_n^\rho\| < \infty, \quad \text{and} \quad \sup_{\omega\in\mathcal{X}^G} \|H^\omega\| < \infty.$$

结合有界自伴算子的谱理论可知，存在一个紧集 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ 包含测度的支撑 ϑ_n^ρ 和 ϑ^ω。根据魏尔斯特拉斯逼近定理，只需验证对每个 $p \in \mathbb{R}[x]$，其中我们将 p 视为 $C_b(\mathbb{R})$ 中的某个元素，该元素在 p 上与 Σ 一致，并在 Σ之外保持常数。根据引理27，可知映射 $\omega \mapsto \langle \delta_e, p(H^\omega)\delta_e\rangle$ 的局部与经验收敛 (μ_n) 意味着，对每个 $\varepsilon > 0$，数列

$$\mu_n\left(\left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : \left|\frac{1}{|V_n|}\sum_{v\in V_n} \langle \delta_e, p(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)})\delta_e\rangle - \int_{\mathcal{X}^G} \langle \delta_e, p(H^\omega)\delta_e\rangle d\mu(\omega)\right| < \epsilon\right\}\right)$$

conv敛于 1 当 $n \to \infty$。将其与推论 30 结合，立即得到收敛

$$\mu_n\left(\left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : \left|\frac{1}{|V_n|}\sum_{v\in V_n} \langle \delta_e, p(H^{\Pi_v^{\sigma_n}(\rho)})\delta_e\rangle - N'(p)\right| < \varepsilon\right\}\right)$$

到 1，如所断言。 □

推论34. 在前一定理的假设下，存在集合序列 $A_n \subseteq \mathcal{X}^{V_n}$，满足$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_n) = 1$，使得对每一个满足 $\rho_n \in A_n$ 的序列 (ρ_n)，概率测度 $\vartheta_n^{\rho_n}$弱收敛到 N'，即

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n^{\rho_n}(f) = N'(f), \quad f \in C_b(\mathbb{R}).$$

证明. 与前面类似，我们可以假设测度 ϑ_n^ρ 与 N' 支撑在同一个紧集 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$上。此外，$\Sigma$ 上连续实值函数的空间 $C(\Sigma)$ 由 Stone-Weierstraß 定理可知是可分的。因此，我们可以固定一个可数子集 $S = \{p_l : l \in \mathbb{N}\}$，它关于上确界范数在 $C(\Sigma)$中稠密。我们固定 S的一个任意枚举$\mathbb{N} \to S$， $i \mapsto p_i$。

断言。 对于每个 $l \in \mathbb{N}$，都存在某个 $N_l \in \mathbb{N}$，使得$\mu_n(A_{n,\,l}) > 1 - 2^{-l}$对于 $n \geqslant N_l$，其中

$$A_{n,l} := \left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : |\vartheta_n^\rho(p_i) - N'(p_i)| < 1/l \text{ for all } 1 \leqslant i \leqslant l\right\}.$$

为证明该断言，令 $1 \leqslant i \leqslant l$

$$A_{n,l}^{(i)} := \left\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} : |\vartheta_n^\rho(p_i) - N'(p_i)| < 1/l\right\}.$$

对所有 p_i、 $1 \leqslant i \leqslant l$应用前面的引理，可得某个 N_l，使得 $\mu_n(A_{n\,,\,l}^{(i)}) > 1 - 2^{-l}/l$对所有 $n \geqslant N_l$ 和所有 $1 \leqslant i \leqslant l$都成立。由$A_{n,\,l} = \bigcap_{i=1}^l A_{n\,l}^{(i)}$，可得

$$\mu(A_{n,l}) = 1 - \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{l} (A_{n,l}^{(i)})^c\Big) \geqslant 1 - l \cdot 2^{-1}/l = 1 - 2^{-l}.$$

现在我们使用这个断言。为此，不失一般性，可以假设对所有 $l \in \mathbb{N}$， $N_{l+1} > N_l$ 成立。现在，对于 $n \geqslant N_1$，可以通过令 $A_n := A_{n,\, l}$来定义序列 (A_n)，其中 $l \in \mathbb{N}$是满足 $n \in [N_l,\ N_{l+1})$ 的唯一整数。（对于 $n < N_1$，我们只需任取一个非空可测子集 $A_n \subseteq \mathcal{X}^{V_n}$。）于是

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \liminf_{l\to\infty}(1 - 2^{-l}) = 1.$$

此外，根据集合 A_n and$A_{n,\, l}$的定义，对于满足 $\rho_n \in A_n$ 的序列 (ρ_n)，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\vartheta_n^{\rho_n}(p_i) - N'(p_i)\right| < 1/l$$

对于所有 $l \in \mathbb{N}$ 和满足 $i \leqslant l$ 的 $p_i \in S$。这表明，对所有 $p \in S$，$\lim_n \vartheta_n^{\rho_n}(p) = N'(p)$。由于 S 在 $C(\Sigma)$ 中稠密，通过直接的逼近论证即可得到所需结论。□

6. 关于局部收敛和经验收敛的 Lück 型逼近定理

现在我们证明一个 Lück 型逼近定理，该定理断言谱测度逐点收敛，因而积分态密度一致收敛，参见定理36和推论 37。

我们称定义在可数集 V 上的有界算子 $H\colon \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ 具有整数系数，如果对于所有 $x,\ y \in V$，都有 $H(x,\ y) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$。

以下引理见于 [1, 引理 9]。（在后一篇论文中，作者研究的是略有不同的算子，但证明中的论证可原样沿用。）此前也已经获得了关于图拉普拉斯算子的谱测度及其局部对数 Hölder 连续性性质的类似估计，参见例如 [24, 32, 60, 62, 79, 81]。

引理 35。 设 $R \geqslant 1$。那么对于任意 $\alpha \in [-R,\ R]$，存在一个由正数组成的零数列 (ε_k)，使得对于任意有限集 V以及任意自伴线性算子 $H\colon\ \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ 其具有整数系数并满足 $\|H\| \leqslant R$，都有

$$\vartheta\big(]\alpha - \varepsilon_k, \alpha + \varepsilon_k[\backslash\{\alpha\}\big) \leqslant \left(\frac{\log(2R)}{\log(\frac{1}{2\varepsilon_k})} + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 ϑ 根据（7）定义。

证明。 参见 [1]中引理9的证明。 □

现在我们可以证明本节的主要定理了。

定理 36（IDS 的一致收敛）。 设 G 是一个有限生成群，并带有遍历过程 $(G,\ \mathcal{X},\ \mu)$，且设 $(V_n,\ \sigma_n,\ \mu_n)$ 是一个 *sofic* 模型。设 $\{H^\omega\}$ 是 G 上具有整数系数的连续算子。则对每个诱导近似 $(\{H_n^\rho\})_n$，下列结论成立：对所有 $\varepsilon > 0$ 以及每个$\alpha \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\big(\{\rho \in \mathcal{X}^{V_n} :\ |\vartheta_n^\rho(\{\alpha\}) - N'(\{\alpha\})| < \varepsilon\}\big) = 1.$$

特别地，存在序列 (A_n)，满足 $A_n \subseteq \mathcal{X}^{V_n}$ 且 $\lim_n \mu_n(A_n) = 1$，使得对每个满足 $\rho_n \in A_n$ 的序列(ρ_n)，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \left|\frac{N_n^{\rho_n}(\beta)}{|V_n|} - N(\beta)\right| = 0, \tag{8}$$

其中，$N_n^\rho(\beta) = |V_n| \cdot \vartheta_n^\rho\big(]-\infty$表示 H_n^ρ 的特征值中小于或等于 β的特征值数量，并按其重数计数。

证明。设 $\{H^\omega\}$ 是一个系数取自 $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ 的连续算子，并设$(\{H_n^\rho\})_n$是一个诱导近似。令 $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $\eta>0$。根据引理 35，存在一个正数序列(ε_k)，满足 $0<\varepsilon_k<\frac{1}{k}$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\rho\in\mathcal{X}^{V_n}$，有

$$\vartheta_n^\rho(I_k)\leqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{\log(2R)}{\log(\frac{1}{2\epsilon_k})}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $I_k:=]\alpha-\varepsilon_k,\ \alpha+\varepsilon_k[\backslash\{\alpha\}$ 并且 $R\geqslant 1$ 的选取方式（参见注释（23））使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}}\|H_n^\rho\|\leqslant R.$$

现在我们取足够大的 $k\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\rho\in\mathcal{X}^{V_n}$，都有 $\vartheta_n^\rho(I_k)\leqslant\eta$。此外，我们选取一个具有紧支撑的连续函数 $h\in C_b(\mathbb{R})$，使得 $1_{\{\alpha\}}\leqslant h\leqslant 1_{I_k\cup\{\alpha\}}$，并且满足

$$\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(h)d\mu(\omega)\leqslant\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(\{\alpha\})d\mu(\omega)+\eta/2.$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，令

$$M_n:=\left\{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}\ :\ \left|\vartheta_n^\rho(h)-\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(h)d\mu(\omega)\right|<\eta/2\right\}.$$

注意，由于 $\{H^\omega\}$ 具有整数系数，因此它具有有界相互作用，参见注释 21 的第四个要点。由定理 33 可得极限$\lim_n\mu_n(M_n)=1$。

应用集合 M_n 的条件以及 h 的性质，我们可得，对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和$\rho\in M_n$，都有

$$\begin{aligned}\vartheta_n^\rho(\{\alpha\})\leqslant\vartheta_n^\rho(h)&\leqslant\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(h)d\mu(\omega)+\eta/2\leqslant\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(\{\alpha\})d\mu(\omega)+\eta\\&\leqslant\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(h)d\mu(\omega)+\eta\leqslant\vartheta_n^\rho(h)+\frac{3\eta}{2}\leqslant\vartheta_n^\rho(I_k\cup\{\alpha\})+\frac{3\eta}{2}\\&\leqslant\vartheta_n^\rho(\{\alpha\})+\vartheta_n^\rho(I_k)+\frac{3\eta}{2}\leqslant\vartheta_n^\rho(\{\alpha\})+2\eta.\end{aligned}$$

因此，我们已经证明了

$$\left\{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}:\left|\vartheta_n^\rho(\{\alpha\})-\int_{\mathcal{X}^G}\vartheta^\omega(\{\alpha\})d\mu(\omega)\right|\leqslant\eta\right\}\supset M_n$$

并且由于 $\lim_n\mu_n(M_n)=1$，这就完成了证明。

现在我们来讨论“特别地”这一部分。我们沿用推论 34 的证明策略，并以定理上述第一部分为基础。为此，取一个紧集 $\Sigma\subseteq\mathbb{R}$，它包含所有测度 ϑ_n^ρ和 N'的支撑，并取一个可数稠密集 $S\subseteq C(\Sigma)$。注意，所有满足 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的 $N'(\{\alpha\})>0$构成的集合是可数的。因此，我们可以固定一个任意枚举$i\mapsto p_i$，其中 p_i或者属于 S，或者是某个 $1_{\{\alpha\}}$的特征函数 α，且满足 $N'(\{\alpha\})>0$。对于$l\in\mathbb{N}$和 $i\leqslant l$，我们定义

$$A_{n,l}^{(i)}:=\left\{\rho\in\mathcal{X}^{V_n}:|\vartheta_n^\rho(p_i)-N'(p_i)|<1/l\right\}.$$

现在，我们可以完全按照推论34的证明进行，从而找到 N_l，使得对于 $n\geqslant N_l$，有 $\mu_n(A_{n,l}^{(i)})>1-2^{-l}/l$（若 $p_i\in S$，则由定理 33 得出；若 $p_i=1_{\{\alpha\}}$，则由本定理的第一部分得出）。与推论34的证明一样，这给出$\mathcal{X}^{V_n}$中的子集序列 (A_n)，满足 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_n)=1$，且对于每个满足 $\rho_n\in A_n$的序列 (ρ_n)，测度$(\vartheta_n^{\rho_n})$弱收敛到 N'，同时对于每个满足 $N'(\{\alpha\})>0$的 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\lim_{n\to\infty}\vartheta_n^{\rho_n}(\{\alpha\})=N'(\{\alpha\})$。此外，对于满足 $N'(\{\alpha\})=0$的 $\alpha\in\mathbb{R}$，弱收敛结合 Portmanteau引理 [46, 第二章定理17.20] 对闭集的结论可推出

$$0\leqslant\limsup_{n\to\infty}\vartheta_n^{\rho_n}(\{\alpha\})\leqslant N'(\{\alpha\})=0.$$

由 [58, 引理 6。3] 可知，弱收敛与 $(\vartheta_n^{\rho_n})$ 中的测度逐点收敛到 N' 相结合，可推出其对应的分布函数一致收敛到积分态密度 N。证明至此完成。□

下文中，若 $\{H^\omega\}$ 取有限多个值，则称

$$\{H^\omega(x,y) : \omega \in \mathcal{X}^G, x, y \in G\}$$

是 $\mathbb{C} + i\mathbb{C}$ 的有限子集。若所有取值都属于 $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$，则称 $\{H^\omega\}$ 取有限多个有理数值。

推论 37. 若将整数系数改为这一族$\{H^\omega\}$取有限多个有理数值，则前一定理的结论仍然成立。

证明. 根据系数的假设，存在一个整数 $q \in \mathbb{N}$ 使得这一族 $\{H_*^\omega\} = \{qH^\omega\}$ 的系数属于 $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ 且满足应用定理 36所需的所有附加性质。通过谱演算可知，$\{H_*^\omega\}$ 的积分态密度N_* 以及其诱导近似的特征值计数函数 $N_{n,*}^\rho$ 具有缩放性质，至此证明完成

$$N_*(q\beta) = N(\beta) \qquad \text{and} \qquad N_{n,*}^\rho(q\beta) = N_n^\rho(\beta),$$

对每个 $\beta \in \mathbb{R}$ 都成立，态密度测度也同样如此。 □

推论38 (PA 群的积分态密度一致逼近)。 设G是一个有限生成的 *PA* 群，且令 $(G, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个遍历的 G-过程，其中 $\mathcal{A}$ 是一个有限集。那么存在一个剩余有限模型 (V_n, σ_n, μ_n)，具有以下性质：对于每个取有限个有理数值的连续算子 $\{H^\omega\}$，都存在一个诱导近似 $(\{H_n^\rho\})_n$ 和一个序列 (A_n)，使得 $A_n \subseteq \mathcal{A}^{V_n}$ 且$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_n) = 1$，从而对于满足 $\rho_n \in A_n$的 (ρ_n)，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \left| \frac{N_n^{\rho_n}(\beta)}{|V_n|} - N(\beta) \right| = 0.$$

证明。 根据推论 $(V_n,\ E_n,\ \sigma_n)$，并结合命题 $\mu_n \in$ 概率测度空间$(\mathcal{A}^{V_n},\ V_n)$我们得到一个局部且经验收敛到 μ 的剩余有限逼近16。根据命题 7，在图 $(\{H_n^\rho\})_n$ 上存在一个诱导近似 $(V_n,\ E_n)$。根据推论25，结论现在由推论37推出。□

7. 通过算子单调收敛进行有理逼近

现在，我们将把算子单调收敛的概念推广到连续算子的范畴。对于取有限个复系数值的随机算子，我们通过具有不同有理系数的有限体积类比，建立积分态密度的逐点逼近，见推论48。

设 $\{H^\omega\}$ 是一个取有限个值的连续算子，且 $(\{H_m^\omega\})$ 是一个连续算子序列。若满足以下条件，我们称 $(\{H_m^\omega\})$ 为 适配于 $\{H^\omega\}$：

- 存在一个共同的有限跳跃范围参数 $M \in \mathbb{N}$，适用于 $\{H^\omega\}$ 和所有 $\{H_m^\omega\}$，
- 均取有限个值，使得对于 $x,\ y,\ w,\ z \in G,\ \omega,\ \rho \in \mathcal{X}^G$，有

$$H^\omega(x,y) = H^\rho(w,z) \quad \Longrightarrow \quad H_m^\omega(x,y) = H_m^\rho(w,z).$$

对于所有 $m \in \mathbb{N}$。

对于 $x,\ y \in G,\ \omega \in \mathcal{X}^G$ 和 $m \in \mathbb{N}$，有

$$H_m^\omega(x,y) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H^\omega(x,y) \neq 0.$$

定义 39（连续算子的单调算子收敛）。对于取有限多个值的连续算子 $\{H^\omega\}$，如果连续算子序列 $(\{H_m^\omega\})$ 算子单调收敛 到 $\{H^\omega\}$，则

- $(\{H_m^\omega\})$ 适应于 $\{H^\omega\}$,• $\lim_{m\to\infty} H_m^\omega(w,v) = H^\omega(w,v)$ 对所有 $v, w \in G$ 以及每个 $\omega \in \mathcal{X}^G$,• 算子和 $H_{m+1}^\omega - H_m^\omega$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 以及每个 $\omega \in \mathcal{X}^G$都是半正定的。

如果所有后述算子 $H_{m+1}^\omega - H_m^\omega$ 甚至都是正定的，我们就称 $(\{H_m^\omega\})$ 严格地按算子单调收敛到 $\{H^\omega\}$，或者简称 $(\{H_m^\omega\})$ 到 $\{H^\omega\}$ 的收敛是严格的。

注40。关于这个定义，有几点需要说明。

• 第二个要点保证算子 H_m^ω 收敛到 H^ω 弱算子拓扑下的极限。• 结合前述收敛，适应性条件意味着，系数收敛可以用有限多个收敛复数序列来描述，并且对所有 $\omega \in \mathcal{X}^G$ 一致。通过直接计算，甚至可以得到算子范数收敛，如下文引理42所述。• 有人或许会认为，术语应体现定义中给出的单调递增顺序。由于我们只关注单调递增收敛，因此我们将简称为单调收敛。

例 41. 一个值得关注的特殊情形是，算子受到势的单调递增扰动。为此，设 $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ 有限，并令 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 为一个映射。对于取有限多个值的连续算子 $\{H^\omega\}$，我们考虑其由 F 产生的扰动，形式如下

$$H_F^\omega : \ell^2(G) \to \ell^2(G), \quad H_F^\omega u(x) = H^\omega u(x) + F(\omega(x))u(x), \quad \omega \in \mathcal{A}^G.$$

显然，$\{H_F^\omega\}$ 也会产生一个连续算子。容易看出，若 (F_m) 是一列映射 $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$，单调递增地收敛到 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$，那么 $(\{H_{F_m}^\omega\})$ 算子单调收敛到 $\{H_F^\omega\}$。若 (F_m) 严格单调收敛到 F，则算子单调收敛是严格的。注意，例 24 中的薛定谔算子是离散拉普拉斯算子受到势 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 的扰动。

结合适应性与弱算子拓扑下的收敛性，可得到算子范数收敛，正如下一个引理所示。

引理 42. 假设 $(\{H_m^\omega\})$ 算子单调收敛到一个取有限个值的连续 $\{H^\omega\}$。则有以下结论。

(i) 我们有算子范数意义下的一致收敛，即

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\omega\in\mathcal{A}^G} \left\| H_m^\omega - H^\omega \right\|_{\mathrm{op}} = 0.$$

特别地，

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\mathcal{A}^G} \left\| H_m^\omega \right\|_{\mathrm{op}} < \infty.$$

(ii) 对于每个 $\omega \in \mathcal{X}^G$，H_m^ω 的谱测度 ϑ_m^ω 弱收敛到 H^ω 的谱测度 ϑ^ω，且对 $\omega \in \mathcal{X}^G$ 一致，即对于每个 $f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\omega\in\mathcal{X}^G} \left| \vartheta_m^\omega(f) - \vartheta^\omega(f) \right| = 0.$$

证明。关于 $\omega \in \mathcal{X}^G$ 的算子范数一致收敛，直接由上一条备注中的观察得出。算子的一致有界性则由算子范数的一致收敛，以及适应性意味着所有 $\{H_m^\omega\}$ 仅取有限个值这一事实推出。

至于第二个断言，注意对于 $p \in \mathbb{R}[x]$，由断言 (i) 以及公式可知，$(p(H_m^\omega))_m$ 在算子范数下收敛到 $p(H^\omega)$。

$$(H_m^\omega)^s - (H^\omega)^s = \sum_{i=0}^{s-1} (H_m^\omega)^{s-1-i} \big(H_m^\omega - H^\omega\big)(H^\omega)^i$$

对于 $s \in \mathbb{N}$。通过 Stone-Weierstraß 逼近论证，即可得到谱测度的弱收敛。□

现在我们陈述一个关于积分态密度相对于连续算子系数的连续性结果。请注意，该结果并不依赖于群的 sofic性。

定理 43 (连续算子单调序列的积分态密度收敛)。 设 G 是一个有限生成（不一定是 *sofic* 的）群，且 $(G、\ \mathcal{X}、\ \mu)$ 是一个遍历过程。假设 $\{H^\omega\}$是 G 上的一个取值有限的连续算子。此外，假设 $(\{H_m^\omega\})$ 是 G 上的连续算子序列，且该算子单调收敛至 $\{H^\omega\}$。那么

$$\lim_{m\to\infty} N_m(\beta) = \inf_{m\in\mathbb{N}} N_m(\beta) = N(\beta) \quad \textit{for all} \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

其中，N_m 和 N 分别表示 $\{H_m^\omega\}$和 $\{H^\omega\}$的积分态密度。

注44. 我们做几点说明。

- 我们指出，收敛的单调性假设至关重要。原因在于，积分态密度通常仅右连续。即使在非常简单的扰动情形下，这一点也显而易见。例如，假设 $\mathcal{X} = \mathcal{A} = \{a\}$ 仅由一个元素组成（即 μ 是一个点测度）。现在，对于某个群 G 和 $m \in \mathbb{N}$上的任意凯莱图，考虑将零算子加上由$F_m(a) = 1/m$确定的（常值）函数 F_m 作为扰动所得到的 H_{F_m}。换言之，H_{F_m} 就是乘以$1/m$的乘法算子。显然，(F_m) 收敛到由 $F(a) = 0$确定的零函数 F，但收敛方式是单调递减的。由于 H_F是零算子，因此有 $N_F(0) = 1$。另一方面，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，都有 $N_{F_m}(0) = 0$，所以在 $\beta = 0$中收敛不成立。

- 一般而言，不能期望 β 一致收敛。为说明这一点，我们对上述例子作如下修改。考虑由 $F_m(a) = -1/m$, 确定的函数 F_m，而 F仍为零函数。显然，(F_m) 单调递增地收敛到零函数F，由上述定理可知，积分态密度逐点收敛。然而，对每个$m \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \big|N_{F_m}(\beta) - N_F(\beta)\big| \geqslant \big|N_{F_m}(-1/m) - N_F(-1/m)\big| = 1 - 0 = 1,$$

  且一致收敛不成立。

- 关于哈密顿算子变化时积分态密度的连续性，也曾在 [56,第5节。5]中进行研究。在那里，作者证明了这样的情形下态密度测度的弱收敛：一个可解的 Cayley 图，其顶点带有着色，并满足充分的遍历性假设。请注意，即使不对算子序列作单调性假设，也可以得到弱收敛。

该定理的证明建立在冯·诺伊曼代数中有限迹的单调性判据之上。我们将把它当作黑箱使用。回顾一下，冯·诺伊曼代数是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有界算子空间 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个含幺 $*$-子代数，并且在弱算子拓扑下闭合。我们将只讨论 $\mathcal{H}$ 可分的情形，因为这正是我们所需的一般性，也能避免底层理论中的一些微妙问题。用 $\mathcal{M}_+$ 表示冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$中半正定元素的子集。权 τ在 $\mathcal{M}$ 上是一个映射 $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0,\ \infty]$，并且在 $\mathcal{M}_+$上是线性的。若权 τ 满足 $\tau(\mathrm{Id}) < \infty$，其中 Id 是 $\mathcal{H}$上的恒等算子，则称其为有限。

若权 τ 满足：$\tau(a) = 0$ 蕴含 $a = 0$，其中 $a \in \mathcal{M}_+$，则称其为忠实。此外，若对 $\mathcal{M}_+$ 中任意单调收敛至 A 的序列 (A_m)，当其在强算子拓扑下收敛时，都有 $\lim_{m\to\infty} \tau(A_m) = \tau(A)$，则称权 τ 为正规；也就是说，对所有 $x \in \mathcal{H}$ 和 $A_m - A_\ell$，都有 $\lim_{m\to\infty} \|A_m x - Ax\|_{\mathcal{H}} = 0$，并且当 $m \geqslant \ell$时，$A_m - A_\ell$ 为半正定。（这里，使用可分希尔伯特空间至关重要。在不可分的情形下，则必须使用网。）若权满足迹性质 $\tau(aa^*) = \tau(a^*a)$，对所有 $a \in \mathcal{M}$均成立，其中我们用 a^* 表示 a的伴随，则称其为迹。关于算子代数及其迹的更深入介绍，请参阅相关文献，例如 [23,43,44]。

对于过程 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 以及定义在 G 上的连续算子 $A = \{A^\omega\}$ 和 $B = \{B^\omega\}$，我们称 A 和 B 是等价的，如果对于 μ-几乎处处的 $\omega \in \mathcal{X}^G$，$A^\omega = B^\omega$。稍微宽泛地使用术语和记号时，我们不区分代表元与等价类。不过，我们必须牢记这一区别，因为它在下面的命题中会变得重要。

下面的命题由 [54] 中的结果（特例）推得，并针对我们此处的需要作了调整。请注意，为此我们不必假设 G是 sofic 的。

命题 45。设 G 是一个有限生成群（不一定是 *sofic* 群），且 $(G、\mathcal{Y}、\mu)$ 是一个遍历过程。那么存在一个冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$，定义在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上

- 包含所有连续算子 $\{H^\omega\}$在 G上的等价类，并存在忠实、有限且正规的迹 τ：$\mathcal{M}_+ \to [0\,\infty)$，使得对所有 $\beta \in \mathbb{R}$，

$$\tau\big(1_{]-\infty,\beta]}(\{H^\omega\})\big) = N(\beta) := \int_{\mathcal{Y}^G} \langle \delta_e,\, 1_{]-\infty,\beta]}\big(H^\omega\big)\delta_e\rangle \, d\mu(\omega),$$

其中$1_{]-\infty,\ \beta]}(\{H^\omega\}) \in \mathcal{M}_+$ 表示 $\{H^\omega\}$对应的谱投影。

证明。我们说明本设定如何纳入 [54]的框架。采用后者论文中的记号，定义 $\mathcal{X} = \mathcal{G} = \Omega \times G$，其中 $\Omega = \mathcal{Y}^G$。定义可分希尔伯特空间$\mathcal{H} = L^2(\mathcal{X}, \mu \times c)$，其中 c 表示 G上的计数测度。现在，每个连续算子 $A = \{H^\omega\}$ 的等价类都会导出一个有界随机算子 $A\colon\ L^2(\mathcal{X}, \mu \times c) \to L^2(\mathcal{X}, \mu \times c)$，如 [54], 第3节所定义，并可通过直积分理论可测地分解为 $A^\omega\colon\ \ell^2(G) \to \ell^2(G)$，其中我们对$\omega \in \Omega$中的 $\ell^2(\mathcal{X}^\omega) \cong \ell^2(\{\omega\} \times G) \cong \ell^2(G)$ 作典范识别。（注意，在 [54], 中，G 对 Ω 的作用是左平移，而本文考虑的是右平移。不过，[54] 中的结果经由对构型 Ω 作简单的重新参数化后仍然成立，具体为 $\tilde{\omega}(h) = \omega(h^{-1})$，其中 $\omega \in \Omega$ 且 $h \in G$。）根据 [23, 定理 V.2], ，有界随机算子的几乎处处等价类定义了一个冯·诺依曼代数$\mathcal{M} = \mathcal{N}(\mathcal{G}, \mathcal{X})$ 由 $\mathcal{H}$上的有界自伴算子 $A = \{A^\omega\}$ 构成，另见 [54]中的定理 3.1。沿用 [54], 第3节的术语，连续算子（类）是附属于 $\mathcal{M}$ 的有界随机算子，这意味着它们的所有谱投影也属于 $\mathcal{M}$。由 [54, 定理 4.2 (a)], 应用于映射 $u\colon \mathcal{X} \to [0, \infty)$，$u(\omega, g) = \delta_e(g)$，我们得到

$$\tau : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty), \quad \tau(A) = \int_\Omega \langle \delta_e,\, A^\omega \delta_e\rangle \, d\mu(\omega), \quad A = \{A^\omega\} \in \mathcal{M}_+$$

由此得到一个忠实、正规且有限权重（注意，论文 [54]表明了τ的半有限性。此处，有限性直接由 μ 是一个概率测度这一事实得出。）为了论证 τ 甚至是一个迹，我们使用上述论文中的另一判据：根据 [54], 中的命题4.5，迹性质对所有等变 Carleman 算子成立。Carleman 算子是那些具有由一个 L^2-核给出的逐纤维表示的算子，其定义见 [54] 第17页。然而，在我们的情形中，每一个有界随机算子 $A = \{A^\omega\} \in \mathcal{M}$实际上都是核为 $k\big((\omega, g), (\rho, h)\big) = ((A^\omega)^* \delta_g)(h)$ 的等变 Carleman 算子，其中 $(\omega, g), (\rho, h) \in \mathcal{X}$。对于连续算子 $H = \{H^\omega\}$，我们观察到

$$\big(1_{]-\infty,\beta]}(H)\big)^\omega = 1_{]-\infty,\beta]}(H^\omega)$$

对 μ-几乎每一个 $\omega \in \Omega$成立（这同样可通过可测分解看出），从而完成证明。□

现在我们可以给出定理43的证明。

定理43的证明。根据算子单调收敛的假设，对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \mathcal{X}^G$，$H^\omega_{m+1} - H^\omega_m$ 和 $H^\omega - H^\omega_m$ 均为半正定。此外，连续算子 $H_m = \{H^\omega_m\}$ 和 $H = \{H^\omega\}$（或其等价类）属于命题45给出的冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$。因此我们得出，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$H_{m+1} - H_m \in \mathcal{M}_+$ 且 $H - H_m \in \mathcal{M}_+$。此外，根据命题 45，$\mathcal{M}_+$ 存在忠实、正规且有限的迹 τ，使得对所有 $\beta \in \mathbb{R}$，$\tau\big(1_{]-\infty,\ \beta]}(H_m)\big) = N_m(\beta)$ 且 $\tau\big(1_{]-\infty,\ \beta]}(H)\big) = N(\beta)$，其中 N 和 N_m 分别表示 H 和 H_m 的积分态密度。由于常数扰动只会导致态密度测度平移，不失一般性，我们假设 $H_m, H \in \mathcal{M}_+$。这样我们便可以应用文献中的一个结果。于是令$\beta \geqslant 0$。设定$g = 1_{]\beta,\ \infty[} = 1 - 1_{]-\infty,\ \beta]}$，由引理 3 (i) 和 [18] 中的不等式 (6)，我们得到

$$N_{m+1}(\beta) = \tau\big((1-g)(H^{m+1})\big) \leqslant \tau\big((1-g)(H^m)\big) = N_m(\beta),$$
$$N(\beta) = \tau\big((1-g)(H)\big) \leqslant \tau\big((1-g)(H_m)\big) = N_m(\beta),$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。因此，极限 $N^*(\beta) :\, = \lim_{m\to\infty} N_m(\beta) = \inf_{m\in\mathbb{N}} N_m(\beta)$ 对所有 β存在。尚需将该极限确定为 $N = N^*$。我们已经知道 $N(\beta) \leqslant \inf_m N_m(\beta) = N^*(\beta)$。此外，我们由引理 42 推得，谱测度 ϑ^ω_m（与 H^ω_m 相关联）弱收敛到谱测度 ϑ^ω（与 H^ω相关联），且关于 ω一致。由Portmanteau引理，参见 [46,第二章，定理17。20],弱收敛给出

$$N^*(\beta) = \limsup_{m\to\infty} N_m(\beta) \leqslant N(\beta).$$

至此，证明完成。 □

引理 46. 设$\{H^\omega\}$是一个只取有限多个值的连续算子。则存在一个连续算子序列$(\{H^\omega_m\})_m$，它严格算子单调收敛于$\{H^\omega\}$，且每个$\{H^\omega_m\}$只取有限多个有理数值。

此外，我们可以确保对于每个 $m \in \mathbb{N}$、每个 $\omega \in \mathcal{X}^G$ 和每个 $v \in G$，都有

$$H^\omega_{m+1}(v,v) - H^\omega_m(v,v) \;>\; \sum_{w\neq v} \big|H^\omega_{m+1}(v,w) - H^\omega_m(v,w)\big|. \tag{10}$$

注47。 注意，根据命题 50，式（10）中的不等式比假设算子 $H_{m+1} - H_m$ 为正定（这是严格算子单调收敛定义的一部分）更强。

引理46的证明。 根据假设，$\{H^\omega\}$ 只取自 $\mathbb{C}$中的有限个值。因此，

$$F_1 = \{H^\omega(e,e) :\, \omega \in \mathcal{X}^G\}\backslash\{0\}$$
$$F_2 = \{H^\omega(e,w) :\, w \neq e,\, \omega \in \mathcal{X}^G\}\backslash\{0\}$$

是$\mathbb{C}$的有限子集，并且由自伴性，$F_1 \subseteq \mathbb{R}$。对每个 $f \in F_1$，找一个由有理非零数组成的序列 $(a(f)_m)$，严格单调递增地收敛到 f。现令 $h \in F_2$。我们首先假设$\mathrm{Im}(h) \geqslant 0$。我们找一个由有理非零数组成的序列 $(b(h)_m)$，使得$\mathrm{Re}(b(h)_{m+1}) \leqslant \mathrm{Re}(b(h)_m)$，$\mathrm{Im}(b(h)_{m+1}) \leqslant \mathrm{Im}(b(h)_m)$，并且使得$\lim_{m\to\infty} b(h)_m = h$

以如下方式：对每个 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} a(f)_{m+1} - a(f)_m &> 2 \sum_{h \in F_2, \mathrm{Im}(h) \geqslant 0} \left| b(h)_m - h \right| \\ &\geqslant 2 \sum_{h \in F_2, \mathrm{Im}(h) \geqslant 0} \left| b(h)_m - b(h)_{m+1} \right|. \end{aligned} \tag{11}$$

注意，满足第一组不等式的序列 $(b(h)_m)_m$ 可以递归构造，因为对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和所有 $f \in F_1$，都有 $a(f)_{m+1} > a(f)_m$。第二个不等式由关于 $(b(h)_m)$ 的单调性假设推出。若 $h \in F_2$ 且 $\mathrm{Im}(h) < 0$，我们只需令$b_m(h) = b_m(h)$。现在，对于 x，$y \in G$，令 $yx^{-1} \in B_M$

$$H_m^\omega(x,y) = \begin{cases} a_m(f), & x = y,\ H^{x\omega}(e,e) = f, \\ b_m(h), & x \neq y,\ H^{x\omega}(e, yx^{-1}) = h, \end{cases} \tag{12}$$

且 $H_m^\omega(x、\ y) = 0$，若 $yx^{-1} \notin B_M$。显然，这就定义了一个连续算子。我们只需验证等变性，其他性质也可用类似方法验证。为此，固定 x、y、$g \in G$。假设 $yx^{-1} \in B_M$ 且 $x \neq y$，其他情形也可类似处理。事实上，我们有$H_m^{g\omega}(x、\ y) = b_m(h)$，其中 $H^{xg\omega}(e、\ yx^{-1}) = h$。但我们也有 $H_m^\omega(xg、\ yg) = b_m(h)$，因为$H^{xg\omega}(e、\ yg(xg)^{-1}) = H^{xg\omega}(e、\ yx^{-1}) = h$。由序列 $(b_m(h))$ 的构造可知其自伴性，其中 $b_m(h) = b_m(h)$ 对于 $f \in F_2$。此外，由 **(11)** 可知，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，

$$a(f)_{m+1} - a(f)_m > \sum_{h \in F_2} \left| b(h)_m - b(h)_{m+1} \right|.$$

根据构造，序列 $(\{H_m^\omega\})$ 适配于 $\{H^\omega\}$。结合命题 50，证明至此完成。□

推论 48. 设 $(G, \mathcal{X}, \mu)$ 是一个遍历过程，且 (V_l, σ_l, μ_l) 是一个 *sofic* 模型。假设 $\{H^\omega\}$ 是 G 上取有限多个值的连续算子。那么存在一个适配于 $\{H^\omega\}$ 的序列 $(\{H_m^\omega\})$，其由取有限多个有理数值的连续算子组成；并且存在一个序列 (A_l)，满足 $A_l \subseteq \mathcal{X}^{V_l}$ 和

$$\lim_{l \to \infty} \mu_l(A_l) = 1$$

使得对于每个满足 $\rho_l \in A_l$ 的序列 (ρ_l)，以及任意 $\beta \in \mathbb{R}$，

$$N(\beta) = \lim_{m \to \infty} \lim_{l \to \infty} \frac{N_m^{\rho_l}(\beta)}{|V_l|} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \lim_{l \to \infty} \frac{N_m^{\rho_l}(\beta)}{|V_l|},$$

其中 N 是 $\{H^\omega\}$ 的积分态密度，而 N_m^ρ 表示由命题 $\{H_m^\omega\}$ 给出的诱导近似所对应的特征值计数函数 25。

特别地，*sofic* 模型存在一个子序列 $(V_{l_m}, \sigma_{l_m}, \mu_{l_m})$，使得对于每个满足 $\rho_m \in A_{l_m}$ 的序列 (ρ_m)，

$$N(\beta) = \lim_{m \to \infty} \frac{N_m^{\rho_m}(\beta)}{|V_{l_m}|} \quad \textit{for each} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

证明。由引理 46，存在一个序列 $(\{H_m^\omega\})$，其中的连续算子取有限个有理值，并且算子单调收敛至 $\{H^\omega\}$。由定理 43，$\lim_{m \to \infty} N_m(\beta) = N(\beta)$ 对所有 $\beta \in \mathbb{R}$均成立。与之前一样，我们将定理 36 与对角序列论证结合起来

类似于推论 34 和定理 36证明中所用的方法：给定 $l,\ m\in\mathbb{N}$，定义集合

$$A_{l,m}:=\Big\{\rho\in\mathcal{X}^{V_l}:\ |\vartheta^{\rho}_{k,l}(f_j^k)-N'_k(f_j^k)|<\frac{1}{m},\quad |\vartheta^{\rho}_{k,l}(h_s)-N'_k(h_s)|<\frac{1}{m},$$
$$|\vartheta^{\rho}_{k,l}(p_i)-N'_k(p_i)|<\frac{1}{m}\quad \text{for all}\quad 1\leqslant i,j,k,s\leqslant m\Big\},$$

其中，$i\mapsto p_i$ 是可数稠密集 $S\subseteq C(\Sigma)$的一个枚举，$\Sigma\subseteq\mathbb{R}$是紧集，包含所有涉及算子的谱；对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$j\mapsto f_j^k$是所有满足 $N'_k(\{\alpha\})>0$的 $1_{\{\alpha\}}$的一个枚举，而 $s\mapsto h_s$是所有满足 $N'(\{\beta\})>0$的 $1_{\{\beta\}}$的一个枚举。根据定理 36，这些集合是满足 $\lim_{l\to\infty}\mu_l(B_l)=1$ 的集合 B_l 的有限交。因此，如同定理 36 的证明中那样，我们找到一个序列(A_l)，满足 $\lim_l\mu_l(A_l)=1$；于是，对于每个满足 $\rho_l\in A_l$的 (ρ_l)、每个 $m\in\mathbb{N}$以及每个 $\beta\in\mathbb{R}$，我们得到

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_m^{\rho_l}(\beta)}{|V_l|}=N_m(\beta).$$

我们用证明开头提到的收敛性结论，完成第一个陈述的论证。至于“特别地”这一部分，对每个 $K\in\mathbb{N}$，选取足够大的 $m=m(K)\geqslant K$ and$l_m\in\mathbb{N}$，使得对于 $l\geqslant l_m$，有 $\mu(A_{l,\ m})>1-1/K$ 和 $|N'_m(g_s)-N'(g_s)|<1/K$，，以及对所有 $1\leqslant i,\ s\leqslant K$都有 $|N'_m(p_i)-N'(p_i)|<1/K$，其中 $s\mapsto g_s$ 是所有满足 $N'(\{\beta\})>0$ 的 $1_{]-\infty,\ \beta]}$ 的一个枚举。这样，我们得到一个子序列 $(l_m)=(l_{m(K)})_K$；结合集合 $A_{l,\ m}$ 的定义，结论便对该子序列 $(V_{l_m},\ \sigma_{m_l},\ \mu_{m_l})$ 成立。□

我们回到随机薛定谔算子 $\{H_F^{\omega}\}$，它如例 24 中所定义，通过势的扰动 $F\colon\ \mathcal{A}\to\mathbb{R}$，其中 $\mathcal{A}$ 为有限集。

推论 49。设 G 为有限生成 PA 群，且令$(G、\ \mathcal{A}、\ \mu)$为一个遍历的 G-过程，其中 $\mathcal{A}$ 为有限集。考虑具有势$F\colon\ \mathcal{A}\to\mathbb{R}$的随机薛定谔算子。则对于每个单调递增的映射序列 (F_n) $F_n\colon\ \mathcal{A}\to\mathbb{Q}$，其逐点收敛于 F，存在一个 *sofic* 模型 $(V_n、\ \sigma_n、\ \mu_n)$以及一个序列 (A_n)，满足 $A_n\subseteq\mathcal{A}^{V_n}$，极限$_n\,\mu_n(A_n)=1$，使得对于每个满足 $\rho_n\in A_n$的序列 (ρ_n)，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{F_n,n}^{\rho_n}(\beta)}{|V_n|}=N_F(\beta)\quad \textit{for all}\quad \beta\in\mathbb{R},$$

其中 $N^{\rho}_{F_n,\ k}$表示算子 $\Delta+F_n\circ\rho$ 在 $\ell^2(V_k)$上的特征值计数函数。

证明。由于映射 F_n 逐点单调递增地收敛到 F，相应的连续算子 $\{H^{\omega}_{F_n}\}$ 算子单调收敛到 $\{H_F^{\omega}\}$。此外，由于 G 是 PA，存在一个 sofic 模型 $(V_l,\ \sigma_l,\ \mu_l)$。现在可以沿用前一推论证明中的相同论证思路，找出 sofic 模型和 (A_l)的子序列。为简便起见，将它们记作 $(V_n,\ \sigma_n,\ \mu_n)$ 和 (A_n)，它们满足所述结论。□

8. 补充：自伴算子的 Gershgorin 型判据

在本补充章节中，我们给出一个充分条件，以判定某些有界自伴算子为正（半）定。假设各“行”上一致绝对可和，则可以采用有限维情形中基于 Gershgorin 圆的一种众所周知的方法。

设 I为一个可数集，并用 $A\colon\ \ell^2(I)\to\ell^2(I)$ 表示一个有界算子。回忆一下，若对于所有 $x\in\ell^2(I)$，都有 A 半正定$\langle x,\ \ Ax\rangle\geqslant 0$，则称 A 为半正定。如果对于所有$x\neq 0$，后一个不等式均为严格不等式，则称 A 为正定。

对于 $i,\ \ j\in I$我们定义 $a_{ij}:=\langle\delta_i,\ \ A\delta_j\rangle$。

命题 50。进一步假设，A满足以下条件。

(1) A 是自伴的，即对于所有的 $i, j \in I$，$a_{ji} = a_{ij}$；

(2) 我们有

$$C := \sup_{i \in I} \sum_{j \in I} |a_{ij}| < \infty;$$

(3) 对于所有 $i \in I$，我们有

$$a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

于是，A 是半正定的。如果（3）中的所有不等式都是严格不等式，那么 A 甚至是正定的。

证明。 任取 $x \in \ell^2(I)$。我们首先注意到

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \overline{x_i}\, a_{ij}\, x_j,$$

其中双重求和绝对收敛，这一点可由以下计算看出

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} |\overline{x}_i a_{ij} x_j| &\leqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} |a_{ij}| \frac{1}{2} \Big(|x_i|^2 + |x_j|^2 \Big) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} |a_{ij}| |x_i|^2 \leqslant C \, \|x\|^2. \end{aligned}$$

注意，我们在第一步使用了 $2|x_i||x_j| \leqslant |x_i|^2 + |x_j|^2$，在第二步使用了自伴性 (1)，并在最后一步使用了条件 (2)。实部可以分解为

$$\operatorname{Re} \langle x, \, Ax \rangle = \sum_{i \in I} a_{ii} |x_i|^2 \, + \sum_{i,j \in I, i \neq j} \operatorname{Re}(\overline{x_i} a_{ij} x_j).$$

取 $\operatorname{Re}(x_i \overline{a_{ij}} x_j) \geqslant -|a_{ij}||x_i||x_j|$，我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle x, \, Ax \rangle &\geqslant \sum_{i \in I} a_{ii} |x_i|^2 - \sum_{i,j \in I, i \neq j} |a_{ij}||x_i||x_j| \\ &= \sum_{i \in I} \left(a_{ii} |x_i|^2 - \sum_{j \in I, j \neq i} |a_{ij}||x_i||x_j| \right). \end{aligned}$$

基于自伴性以及利用 $2|x_i||x_j| \leqslant |x_i|^2 + |x_j|^2$ 进行对称化，采用与上述绝对收敛所用论证类似的方法，可得

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j \neq i} |a_{ij}||x_i||x_j| \leqslant \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in I, j \neq i} |a_{ij}| \Big) |x_i|^2.$$

我们得到

$$\operatorname{Re} \langle x, \, Ax \rangle \geqslant \sum_{i \in I} \Big(a_{ii} - \sum_{j \in I, j \neq i} |a_{ij}| \Big) |x_i|^2.$$

现在，假设 (3) 给出 $\operatorname{Re} \langle x, \ Ax \rangle \geqslant 0$ 又由于 A 是自伴的，我们得到 $\langle x, \ Ax \rangle \geqslant 0$。如果 (3) 中所有不等式都是严格的，则当 $x \neq 0$时，我们得到 $\langle x, \ Ax \rangle > 0$。证明完毕。□

参考文献

[1] Miklós Abért、Andreas Thom 和 Bálint Virág，《Benjamini-Schramm 收敛与谱测度的逐点收敛》，预印本（2011），可见 https://users.renyi.hu/~abert/luckapprox.pdf。[2] Michael Aizenman 和 Simone Warzel，《树冠图与树上随机算子的能级统计》，《数学物理分析与几何》9 (2006)，第 4 期，291–333。MR2329431[3] Nalini Anantharaman 和 Mostafa Sabri，《图上的量子遍历性：从谱去局域化到空间去局域化》，《数学年刊》（第 2 辑）189 (2019)，第 3 期，753–835。MR3961083[4] Tim Austin，《sofic 熵与模型空间上测度的可加性》，Forum Math. Sigma 4 (2016)，e25，79。[5] ，《模型空间上测度的渐近等分性质》，Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019)，第 2 期，1379–1402。MR3885183[6] Joseph Avron 和 Barry Simon，《几乎周期薛定谔算子。II. 积分态密度》，Duke Math. J. 50 (1983)，第 1 期，369–391。MR700145[7] Gilbert Baumslag 和 Donald Solitar，《某些双生成元单关系非霍普夫群》，Bulletin of the American Mathematical Society 68 (1962)，第 3 期，199–201。[8] Siegfried Beckus、Jean Bellissard 和 Giuseppe De Nittis，《非周期量子系统的谱连续性 I：一般理论》，《泛函分析杂志》275 (2018)，第 11 期，2917–2977。MR3861728[9] Siegfried Beckus 和 Felix Pogorzelski，《Delone 动力系统与谱收敛》，《遍历理论与动力系统》40 (2020)，第 6 期，1510–1544。[10] Jean Bellissard，《固体物理中 K-代数的 C*理论》，《统计力学与场论：数学方面》（格罗宁根，1985），1986年，99–156页。MR862832[11] Jean Bellissard、Ricardo Lima 和 Daniel Testard，《几乎周期薛定谔算子》，《数学+物理》。第 1 卷，1985年，1–64页。MR849342[12] Itai Benjamini 和 Oded Schramm，《有限平面图分布极限的递归性》，Electron. J. Probab. 6 (2001)，第 23 期，13。MR1873300[13] Charles Bordenave 和 Pietro Caputo，《无高斯尾的 Wigner 矩阵的大偏差原理》，Ann. Probab. 42 (2014)，第 6 期，2454–2496。MR3265172[14] Charles Bordenave、Alice Guionnet 和 Camille Male，《重尾矩阵宏观可观测量的大偏差》，arXiv 预印本 2409.14027（2024）。[15] Charles Bordenave 和 Marc Lelarge，《大型随机图的预解式》，Random Structures Algorithms 37 (2010)，第 3 期，332–352。MR2724665[16] Charles Bordenave、Arnab Sen 和 Bálint Virág，《平均量子渗流》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017)，第 12 期，3679–3707。MR3730511[17] Lewis Bowen，《双曲平面的周期性与圆填充》，《几何奉献》102 (2003)，213–236。[18] Lawrence Brown 和 Hideki Kosaki，《半有限冯·诺伊曼代数中的 Jensen 不等式》，J. Oper. Th. 23 (1990)，3–19。[19] Peter J. Burton 和 Alexander S. Kechris，《保测群作用的弱包含》，《遍历理论与动力系统》40 (2020)，第 10 期，2681–2733。[20] René Carmona 和 Jean Lacroix，《随机薛定谔算子的谱理论》，《概率及其应用》，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1990。[21] Tullio Ceccherini-Silberstein 和 Michel Coornaert，《元胞自动机与群》，《数学专著》，Springer，2010。[22] Benoît Collins 和 Ken Dykema，《以可单瓦片铺砌的 amenable 群为 amalgamation 基底的 sofic 群自由积》，《明斯特数学杂志》（2011）。[23] Alain Connes，《非交换积分理论》，《算子代数》（研讨会，Les Plans-sur-Bex，1978），Springer Berlin，1979。[24] Walter Craig 和 Barry Simon，《随机 Jacobi 矩阵积分态密度的对数 Hölder 连续性》，Comm. Math. Phys. 90 (1983)，第 2 期，207–218。MR714434[25] David Damanik 和 Jake Fillman，《一维遍历薛定谔算子—I. 一般理论》，《数学研究生丛书》第 221 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022。MR4567742[26] ，《一维遍历薛定谔算子—II. 特定类别》，《数学研究生丛书》第 249 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2024。MR4840232[27] Józef Dodziuk 和 Varghese Mathai，《逼近 amenable 覆叠空间的 L^2 不变量：一种组合方法》，《泛函分析杂志》154 (1998)，第 2 期，359–378。MR1612713[28] Józef Dodziuk、Peter Linnell、Varghese Mathai、Thomas Schick 和 Stuart Yates，《逼近 L^2不变量与 Atiyah 猜想》，Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003)，第 7 期，839–873。[29] Beno Eckmann，《用普通 Betti 数逼近 amenable 覆叠空间的 l_2-Betti 数》，Comment. Math. Helv. 74 (1999)，第 1 期，150–155。MR1677086[30] Gábor Elek，《强逼近猜想对 amenable 群成立》，《泛函分析杂志》239 (2006)，第 1 期，345–355。MR2258227[31] Gábor Elek，《收敛有限图的 L^2谱不变量》，《泛函分析杂志》254 (2008)，第 10 期，2667–2689。

[32] Michael Farber, 《增长几何： L^2 不变量的逼近定理》, Math. Ann. 311 (1998), 第2期, 335–375. MR1625742[33] Masatoshi Fukushima, 《论无序系统的谱分布与随机游走的值域》, 《大阪数学杂志》 11 (1974), 73–85. MR353462[34] Masatoshi Fukushima、Hideo Nagai与Shintaro Nakao, 《论随机差分算子谱的一个渐近性质》, 《日本学士院纪要》51 (1975), 100–102. MR383587[35] Masatoshi Fukushima与Shintaro Nakao, 《论带白高斯噪声势的薛定谔算子的谱》, 《概率论及其相关领域》37 (1976/77), 第3期, 267–274. MR438481[36] Misha Gromov, 《动力系统的拓扑不变量与全纯映射空间（I）》, 《数学物理分析与几何》2 (1999), 第4期, 323–415.[37] Michael J. Gruber、Daniel H. Lenz与Ivan Veselić, 《$\mathbb{Z}^d$ 上度量图的随机薛定谔算子积分态密度的一致存在性》, 《泛函分析杂志》253 (2007), 第2期, 515–533. MR2370087[38] Philip Hall, 《论某些可解群的有限性》, 《伦敦数学会会刊》3 (1959), 第4期, 595–622. [39] Ben Hayes, 《sofic群代数作用的局部收敛、双重经验收敛与熵》, 遍历理论与动力系统 39 (2019年), 第4期, 930–953.[40] Noboru Itô, 《关于两个阿贝尔群的乘积》, 《数学杂志》62 (1955), 第1期, 400–401.[41] Andrei Jaikin-Zapirain, 《Atiyah猜想与Lück逼近猜想中的基变换》, 《几何与泛函分析》29 (2019年), 第2期, 464–538. MR3945838[42] Zhengfeng Ji、Anand Natarajan、Thomas Vidick、John Wright与Henry Yuen, MIP* =RE, 《美国计算机协会通讯》64 (2021), 第11期, 131–138.[43] Richard V. Kadison与John R. Ringrose, 《算子代数理论基础。第一卷：基础理论》, 纯粹与应用数学100,1, Academic Press, 纽约, 1983.[44] ———, 《算子代数理论基础。第二卷：高等理论》, 纯粹与应用数学；100:2, Academic Press, 纽约, 1986.[45] Max Kämper、Christoph Schumacher、Fabian Schwarzenberger与Ivan Veselić, 《积分态密度一致逼近的定量集中不等式》, arXiv预印本2602.18214 (2026).[46] Alexander S. Kechris, 《经典描述集合论》, 第156卷, Springer Science & Business Media, 2012. [47] ———, 《自由群作用空间中的弱包含》, 《以色列数学杂志》189 (2012), 461–507.[48] Andrew James Kelley, 《所有Baumslag-Solitar群的子群增长》, 《纽约数学杂志》26 (2020), 218–229.[49] Werner Kirsch, 《随机薛定谔算子导引》, 载《随机薛定谔算子》, 2008, 第1–119页。附Frédéric Klopp所撰附录。MR2509110[50] Werner Kirsch与Fabio Martinelli, 《论带随机势的薛定谔算子的态密度》, 《物理学杂志A辑》15 (1982), 第7期, 2139–2156. MR665829[51] Werner Kirsch与Bernd Metzger, 《随机薛定谔算子的积分态密度》, 载《谱理论与数学物理：纪念Barry Simon六十岁诞辰文集》, 2007, 第649–696页。MR2307751[52] Shinichi Kotani, 《论带某类随机系数的一维哈密顿算子谱的渐近行为》, 《数学科学研究所刊物》12 (1976/77), 第2期, 447–492. MR433610[53] Daniel Lenz、Peter Müller与Ivan Veselić, 《$\mathbb{Z}^d$上模型积分态密度的一致存在性》, 《正性》12 (2008), 第4期, 571–589.[54] Daniel Lenz、Norbert Peyerimhoff与Ivan Veselić, 《群胚、冯·诺依曼代数与积分态密度》, 《数学物理分析与几何》 10 (2007), 第1期, 1–41.[55] Daniel Lenz、Fabian Schwarzenberger与Ivan Veselić, 《勘误：Banach空间值遍历定理与积分态密度的一致逼近》 *[*mr*2753695]*, 《几何奉献》159 (2012), 411–413. MR2944541[56] Daniel Lenz、Fabian Schwarzenberger与Ivan Veselić, 《Banach空间值遍历定理与积分态密度的一致逼近》, 《几何奉献》150 (2011), 1–34.[57] Daniel Lenz与Peter Stollmann, 《Delone动力系统的遍历定理与积分态密度的存在性》, J. Anal. Math. 97 (2005), 1–24.[58] Daniel Lenz与Ivan Veselić, 《离散结构上的哈密顿算子：积分态密度的跃变与一致收敛》, 《数学杂志》263 (2009), 第4期, 813–835.[59] Fabian R. Lux与Emil Prodan, 《Cayley晶体的谱方面与组合方面》, Ann. Henri Poincaré 25 (2024), 第8期, 3563–3602. MR4776452[60] Wolfgang Lück, 《借助其有限维类比逼近 L^2-不变量》, 《几何与泛函分析》4 (1994), 第4期, 455–481.[61] Varghese Mathai、Thomas Schick与Stuart Yates, 《逼近图上Harper算子的谱不变量（II）》, 《美国数学会会刊》131 (2003), 第6期, 1917–1923. MR1955281[62] Varghese Mathai与Stuart Yates, 《逼近图上Harper算子的谱不变量》, 《泛函分析杂志》188 (2002), 第1期, 111–136. MR1878633

[63] Shintaro Nakao, 《论带随机势的薛定谔算子的谱分布》, Japan. J. Math.（新辑）3 (1977), 第1期, 111–139. MR651925[64] Leonid A. Pastur, 《带随机势的薛定谔方程态数的自平均性》, Mat. Fiz. i Funkcional. Anal. 2 (1971), 111–116.[65] ,《随机矩阵的谱》, Teoret. Mat. Fiz. 10 (1972), 第1期, 102–112.[66] ,《随机自伴算子的谱》, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), 第1期, 3–64.[67] Felix Pogorzelski, 《Banach空间值遍历定理与谱近似》, 学位论文, 耶拿大学（2014）。[68] ,《图序列的收敛定理》, Internat. J. Algebra Comput. 24 (2014), 第8期, 1233–1251.[69] Felix Pogorzelski与Fabian Schwarzenberger, 《可 amenable 群的Banach空间值遍历定理及其应用》, J. Anal. Math. 130 (2016), 19–69.[70] Felix Pogorzelski、Fabian Schwarzenberger与Christian Seifert, 《度量凯莱图上积分态密度的一致存在性》, Lett. Math. Phys. 103 (2013), 第9期, 1009–1028. MR3077962[71] Michael Reed与Barry Simon, 《I：泛函分析》, 《现代数学物理方法》, Academic Press, 1981.[72] Xiankun Ren, 《对于具有规范性的残余有限可 amen 群作用，周期测度在不变测度中稠密》, Discrete Contin. Dyn. Syst. 38 (2018年), 第4期, 1657–1667.[73] Michael Schrödl-Baumann, 《随机有根单纯复形的 ℓ^2-Betti 数》, Manuscripta Mathematica 162 (2020).[74] Christoph Schumacher与Fabian Schwarzenberger, 《sofic群上积分态密度的逼近》, Ann. Henri Poincaré 16 (2015), 第4期, 1067–1101.[75] Christoph Schumacher、Fabian Schwarzenberger与Ivan Veselić, 《格与群上积分态密度的一致存在性》, 载《图与流形上的分析和几何》, 2020, 第445–478页。MR4412982[76] Fabian Schwarzenberger, 《长程渗流哈密顿量积分态密度的一致逼近》, J. Stat. Phys. 146 (2012), 第6期, 1156–1183. MR2903042[77] Christopher Shriver, 《最近邻相互作用的自由能、吉布斯测度与格劳伯动力学》, Comm. Math. Phys. 398 (2023), 第2期, 679–702.[78] Mikhail A. Šubin, 《具有几乎周期系数的椭圆算子的谱理论与指标》, Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979), 第2期, 95–135.[79] Andreas Thom, 《sofic群与丢番图逼近》, Comm. Pure Appl. Math. 61 (2008), 第8期, 1155–1171.[80] Robin D. Tucker-Drob, 《保测作用的弱等价与不可分类性》, 遍历理论与动力系统 35 (2015), 第1期, 293–336.[81] Ivan Veselić, 《渗流哈密顿量的谱分析》, Math. Ann. 331 (2005), 第4期, 841–865. MR2148799[82] Benjamin Weiss, 《sofic群与动力系统》, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A (2000), 350–359.

Miguel Donoso-Echenique，明斯特大学数学与计算机科学系10电子邮箱：mdonosoe@uni-muenster.de，migueldonosoe@gmail.com Felix Pogorzelski，莱比锡大学数学研究所及以色列高等研究院（IIAS），耶路撒冷电子邮箱：felix.pogorzelski@math.uni-leipzig.de Michael Schrödl-Baumann电子邮箱：mschroedlbaumann@gmail.com